

Analysis mit Differentialen: Anwendungsbeispiele

von Reinhard Oldenburg, Augsburg.

Dieser Text gibt eine Reihe von elementaren Anwendungen von Differentialen.

Das Differential dx einer Größe x ist die bei lokaler Betrachtung bestmögliche lineare Prognose der Änderung Δx , d.h. $\Delta x \approx dx$ und $f(x + dx) \approx f(x) + dy$, $dy = f'(x)dx$.

Konvention zur Syntax: dx^2 bedeutet $(dx)^2$ im Gegensatz zu $d(x^2)$.

Regeln

- $d(x+y) = dx + dy$
- $d(k \cdot x) = k \cdot dx$.
- $d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx$.
- $d(uv) = u dv + v du$
- $d(f(x)) = f'(x) dx$
- Zu jeder Variablen x gehört die assoziierte Variable dx und zu jeder Gleichung $g(x, y) = 0$ assoziiert man $\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = 0$

Mechaniksimulation

Die in der Zeit lineare Prognose für die Änderung des Ortes ergibt sich aus der Geschwindigkeit v nach $dx = v \cdot dt$ und die Geschwindigkeit ändert sich analog gemäß der Beschleunigung a : $dv = a \cdot dt$. Newton hat gefunden, dass sich die Beschleunigung aus der auf den Körper wirkenden Kraft F und seiner Masse m berechnen lässt. Zwischen Himmelskörpern wirkt vor allem die Gravitationskraft, für die er das Gravitationsgesetz aufstellt, das die Gravitationskonstante γ , die Massen der beiden Körper und den Vektor vom Körper, auf den eine Kraft ausgeübt wird hin zum ausübenden Körper, verrechnet:

$$\vec{F} = \gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Da man Änderungen auch vektoriell deuten kann, ist es kein Problem auch räumlich zu rechnen. Zur numerischen Simulation wählt man eine Zeitspanne dt aus. Die Berechnung kann mit einer Tabellenkalkulation oder einer Programmiersprache erfolgen, letzteres ist mE begrifflich sogar einfacher. Das fast vollständige Programm:

```
# Zwei Kugeln Erde und Mond erzeugen, dann:
erde.pos= (0,0,0)
erde.v=(0,0,0)
erde.m=5.9e24

mond.pos=(370000000,0,0)
mond.v=(0,0,37e7*pi/(28*24*3600))
mond.m= 7.3e22

dt = 1800 # Zeitschritt 30 Minuten

def kraft(A,B): # Kraft von B auf A
    gamma=6.6e-11
    rvec= B.pos-A.pos
```

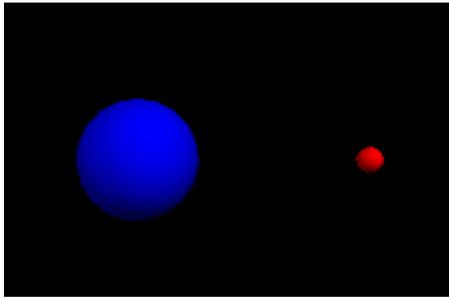
```

r=mag(rvec) # Laenge
return rvec*A.m*B.m*gamma/(r*r*r)

while True: # Endlosschleife
    rate(48) # 1s= 48*dt=24h
    mond.v+=kraft(mond,erde)/mond.m *dt
    erde.v+=kraft(erde,mond)/erde.m *dt
    mond.pos+= mond.v *dt
    erde.pos+= erde.v *dt

```

Belohnt werden die Schüler mit einer 3D-Simulation, die abgedruckt natürlich nicht sehr spannend wirkt:



Die Simulation reproduziert die Umlaufzeit korrekt und kann vielfältig variiert werden: Andere Anfangsgeschwindigkeiten, mehrere Monde etc.

Das Beispiel zeigt überzeugt, dass sich viele kleine linearen Prognosen zu einer brauchbaren globalen Prognose addieren lassen. Sicher sollte man auch noch über einfache, numerisch heikle Situationen nachdenken, die auch die Grenzen der Simulierbarkeit zeigen.

Krümmung

So wie die Gerade das einfachste Modell einer Kurve mit Steigung ist, stellt der Kreis das einfachste Modell einer gekrümmten Kurve dar und der Radius ist dabei ein inverses Krümmungsmaß. Beim Kreis gilt: Die Tangenten an zwei Kreispunkten P, Q mit Steigungswinkeln α_P, α_Q schließen einen Winkel $d\alpha = \alpha_Q - \alpha_P$ ein, der proportional zur Bogenlänge ist: $ds = R \cdot d\alpha = R \cdot (\alpha_Q - \alpha_P)$. Demnach kann man die Krümmung, also den Kehrwert des Radius, berechnen: $\kappa = \frac{1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}$.

Diese Gleichung ist auch anschaulich leicht verständlich: Die Krümmung ist die Drehung (=Änderung der Richtung) bezogen auf den Weg, der dafür nötig war). Für eine beliebige als Funktionsgraph von $y = f(x)$ gegebene Kurve gilt $\alpha = \arctan(f'(x))$, also $d\alpha = \frac{f''(x)dx}{1+f'(x)^2}$.

Jetzt muss nur noch $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$ eingesetzt werden und man erhält $\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}$. Die intuitive Variante des Hauptsatzes sagt einem dann, dass das Integral über die Krümmung der effektive Drehwinkel ist: $\int \kappa ds = \int d\alpha = \alpha_{Ende} - \alpha_{Anfang}$

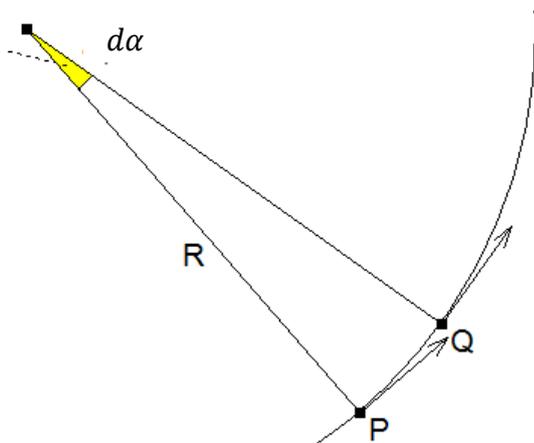


Abbildung: Die Krümmung am Kreis gibt das allgemeine Modell der Krümmung

Oberflächen

Das Kugelvolumen ist $V=4\pi/3 \cdot r^3$. Bei Änderung des Radius auf $r+dr$ prognostiziert man linear $dV= 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$, denn das Volumen wächst auf der Oberfläche. Für den Würfel ist aber $dV=3a^2$ nur die halbe Oberfläche: Das liegt daran, wie man Änderungen beschreibt: da ist eine Änderung des „Durchmessers“ des Würfels. Beim Zylinder gilt für die Änderungsprognose des Volumens:

$$V=\pi r^2 h, \text{ also } dV=2\pi r h dr+\pi r^2 dh$$

Das Zylindervolumen wächst also, wenn man den Radius vergrößert proportional zur Mantelfläche und wenn man die Höhe vergrößert proportional zur Deckelfläche.

Auch die umgekehrte Perspektive ist sinnvoll: Kann man aus einer Modellierung der Oberfläche z.B. einer Kugel ihr Volumen oder ihre Oberfläche berechnen?

Wenn die Kugeloberfläche durch $x^2+y^2+z^2=R^2$ kann man zB längs der z-Achse integrieren. Ein Schnitt auf Höhe z ist ein Kreis mit Radius r , $r^2=R^2-z^2$. Die lineare Prognose für das sich vergrößernde Volumen ist dann $dV=\pi r^2 dz$, also

$$V = \int_{-R}^R \pi r^2 dz = \int_{-R}^R \pi (R^2 - z^2) dz = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Bei der Berechnung der Oberfläche muss man die lineare Prognose auf die Fläche beziehen, also: Welche Änderung des Flächeninhaltes ergibt sich ausgehend vom Kreis wenn z um dz wächst? Die Oberfläche wächst dann um einen ringförmigen Streifen, der nach oben enger wird und für dessen Breite db gilt $db^2=dz^2+dr^2$. Der Streifeninhalt ist dann $dA=2\pi r db$.

$$A = \int_{-R}^R 2\pi r db = \int_{-R}^R 2\pi r \sqrt{dz^2 + dr^2} = 2\pi \int_{-R}^R r \sqrt{dz^2 + \left(\frac{z dz}{r}\right)^2} = 2\pi \int_{-R}^R r \sqrt{1 + \left(\frac{z}{r}\right)^2} dz =$$

$$2\pi \int_{-R}^R \sqrt{r^2 + z^2} dz = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2 + z^2} dz = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2} dz = 4\pi R^2$$

Diese Herleitungen von Ergebnissen aus der Sekundarstufe I zeigen die Konsistenz und tragen damit zur Vernetzung bei. Unsere Sichtweise ist dabei, dass es sich bei der Beschreibung der Oberfläche durch lineare Näherungen um eine Modellbildung handelt.

Wachstumsmodelle

Wachstumsmodelle sind Musterbeispiele für Modellbildungen mit Mitteln der Analysis. Gleichzeitig sind sie ideale Anwendungen um die Vorteile der Formulierung mit Differentialen zu sehen, weil Wachstumsmodelle Prognosen abgeben.

Das einfachste Beispiel ist sicher das einer Population von N Tieren, die sich mit der Zeit vermehren. Linear prognostiziert wird die Änderung dN proportional zu dt sein. Außerdem ist klar, dass es umso mehr neue Tiere hinzukommen, je mehr Tiere da sind und je länger der Wachstumsprozess betrachtet wird. In Differentialen formuliert lässt sich das leicht hinschreiben und lösen:

Größenbeziehung in linearer Prognose: $dN = k \cdot N \cdot dt$. Umstellen $\frac{dN}{N} = k \cdot dt$ und integrieren $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = \int_0^T k \cdot dt$ liefert das Resultat: $\ln(N(t)) - \ln(N_0) = k \cdot T$, also $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot T}$

Das Schöne an der Lösung mit Differentialen ist nicht nur, dass die symbolische Lösung mit der Trennung der Variablen erleichtert wird, sondern vor allem dass die Modellannahmen unmittelbar ausgedrückt werden können. Außerdem wird gleichzeitig ein numerisches Approximationsverfahren nahegelegt.

Analog lassen sich viele weitere Modelle – auch wesentlich interessantere wie Räuber-Beute-Modelle oder Modelle zur Prognose der CO_2 -Konzentration behandeln (siehe Bosselt 2007).

Bewegliche Volumina

Becker und Shimada (1997) haben eine Reihe von Experimenten vorgeschlagen, bei denen Wassergefäße gekippt werden und die Beziehungen zwischen den Größen algebraisch gefasst werden können. In gewissem Sinne ist es sogar einfacher, die Beziehungen mit Differentialen zu beschreiben. Im unten abgebildeten Beispiel etwa müssen die Schüler algebraisch $a+b=\text{const}$ aufschreiben, differentiell wird daraus $da=-db$, sprich, was an der einen Seite mehr wird, wird an der anderen weniger. Dies illustriert erneut die leichte Interpretierbarkeit von Differentialbeziehungen.

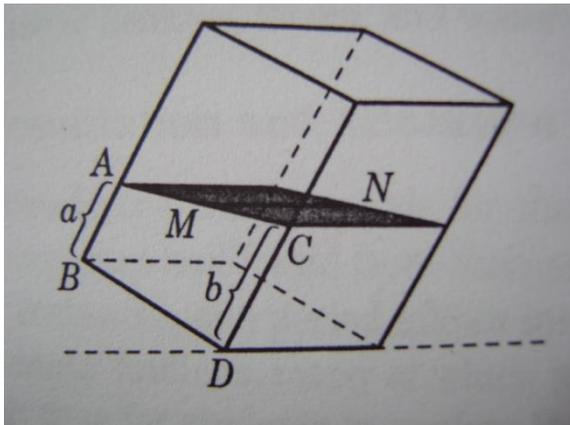


Abbildung 10. Aus Becker und Shiamada (1997)

Das Kugelvolumen ist $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Bei Änderung des Radius auf $r+dr$ prognostiziert man linear $dV = 4\pi r^2 dr$ konsistent mit der Vorstellung, dass das Volumen proportional zur Oberfläche wächst. Für den Würfel ist aber $dV=3a^2 da$ nur die halbe Oberfläche: Das liegt daran, wie man Änderungen beschreibt: da ist eine Änderung des „Durchmessers“ des Würfels. Beim Zylinder gilt für die Änderungsprognose des Volumens: $V = \pi r^2 h$, $dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$. Das Zylindervolumen wächst also, wenn man den Radius vergrößert proportional zur Mantelfläche und

wenn man die Höhe vergrößert proportional zur Deckelfläche. Hier sieht man, wie sinnvoll und natürlich die Verwendung multivariater Analysis sein kann.

Fehlerrechnung

Man peilt die Spitze eines Turms der unbekanntes Höhe h unter dem Winkel α und misst den Abstand zum Turm zu a . Dann ergibt sich die Höhe zu $h=a\cdot\tan(\alpha)$.

Das kann man aus jeder Entfernung machen, gibt es geschickte Wahlen für a ? Wenn die Messungenauigkeit nur $da=0,1\text{m}$ bzw $d\alpha=1^\circ$ beträgt, dann führt eine Änderung der wahren Werte von a auf $a+da$ evtl nicht zu einem anderen Messwert, diese Änderung bleibt also unbemerkt, obwohl die Höhe sich ändert zu: $dh=da\cdot\tan(\alpha)+a\cdot d\alpha/\cos(\alpha)^2$.

Man erkennt: Der Fehler durch die Längenmessung ist dann gravierend, wenn $\tan(\alpha)$ groß ist, also wenn man nahe am Turm ist, der Fehler durch die Winkelmessung hat einen großen Einfluss, wenn man weit weg ist. Es ist naheliegend, dass man irgendwo dazwischen einen geringen Fehler hat.

Eine Strategie könnte sein, dass man versucht, beide Fehler gleich groß zu machen, so dass keiner dominiert. Dann ist $da\cdot\tan(\alpha)=a\cdot d\alpha/\cos(\alpha)^2$ oder äquivalent $da\cdot\sin(\alpha)=a\cdot d\alpha/\cos(\alpha)$. In dieser Beziehung sind die Differentiale die bekannten Messungenauigkeiten und a und α sollen bestimmt werden. Dazu reicht diese eine Gleichung nicht aus. Es gibt also keinen optimalen Abstand unabhängig von der Turmhöhe. Wenn man damit rechnet, dass die Höhe h sein wird, kann man aber die erste Beziehung $h=a\cdot\tan(\alpha)$ einsetzen und erhält nach etwas Umformerei: $\sin^2(\alpha)=h\cdot d\alpha/da$. Für $h=5\text{m}$, $da=10\text{cm}$, $d\alpha=1^\circ$ ergibt sich dann $\alpha=69^\circ$. Die Gleichung ist nicht für alle möglichen Werte lösbar. Das zeigt, dass es u.U. nicht möglich ist, bei einer (großen) Turmhöhe, beide Fehler gleich groß zu machen, es wird dann immer einer (welcher?) dominieren?

Dichten

Dichten spielen zwar in der Schulphysik eine gewisse Rolle (Massendichten, Ladungsdichten), in der Schulmathematik aber nur eine sehr geringe. Nur falls die Normalverteilung behandelt wird, tritt das Konzept einer Wahrscheinlichkeitsdichte auf. Deswegen ist der folgende Mangel der obigen Darstellung im Schulkontext nicht gravierend: Durch die Konzentration auf Änderungsprozesse haben wir andere Anwendungen von Differentialen, insbesondere Dichten, vernachlässigt. Ein triviales Beispiel soll illustrieren, wie man Dichten dennoch in unserem Rahmen unterbringen kann: Ein Stab der Länge L (den wir uns in einem Koordinatensystem auf der x -Achse zwischen $x = 0$ und $x = L$ liegend denken), habe die ortsabhängige Massendichte ρ . Dann ist seine Gesamtmasse $m = \int_0^L \rho(x)dx$. Dabei ist $dm = \rho(x)dx$ die Masse eines kleinen Abschnitts. Dies kann man gut verstehen mit der Grundvorstellung des Differentials als „ein klein bisschen von“ (und dem Integral als Kumulation solcher Beiträge). Jones (2015) weist darauf hin, dass die Kumulationsvorstellung (Summenvorstellung, „adding up pieces“) gerade in Anwendungskontexten sehr wichtig für erfolgreiche Problembearbeitungen ist. Wir haben schon gesehen, dass unsere Differentialkonzeptualisierung durchaus mit dem Integral und seiner Summationsvorstellung verträglich ist, die explizite Sicht von Differentialen als kleine Mengen haben wir aber nicht verwendet und sie ist nicht offensichtlich in unserer Definition enthalten. Dazu stellen wir uns den Prozess vor, dass wir den Stab von links nach rechts

ablaufen und jeweils mit $m(x)$ notieren, wieviel Masse wir zwischen 0 und der aktuellen Position x schon passiert haben. Wenn wir dann ein Stückchen dx weitergehen, kommt die Masse $\Delta m = m(x + dx) - m(x) \approx dm = \rho(x)dx$ dazu. Um Dichten zu subsumieren, muss man sich also einen Prozess denken, in dem ihr Definitionsbereich durchlaufen wird.

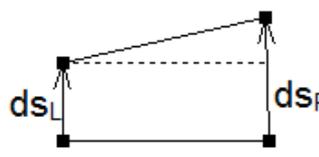
Dichten lassen sich im Grunde nur mit Differentialen angemessen beschreiben. Das Planck'sche Strahlungsgesetz gibt etwa an, wie groß die Strahlungsdichte $e(\lambda)d\lambda$ eines heißen Körpers, beispielsweise der Sonne ist, in Abhängigkeit von der Wellenlänge ist. Die gesamte Energie der Strahlung im Wellenlängenintervall $\lambda_1, \dots, \lambda_2$ ergibt sich dann als Integral $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e(\lambda)d\lambda$. Zwischen der Frequenz der Strahlung f und der Wellenlänge besteht der Zusammenhang $f\lambda = c$ mit der Lichtgeschwindigkeit. Die Strahlungsenergie im Frequenzintervall $f_2 = c/\lambda_1, \dots, f_1 = c/\lambda_2$ ergibt sich dann aber nicht als $\int_{f_1}^{f_2} e(c/f)df$. Zum korrekten Ergebnis kommt man nur, wenn man auch das Differential transformiert, aus $f \cdot \lambda = c$ folgt $f \cdot d\lambda + \lambda \cdot df = 0$, also $d\lambda = -\frac{\lambda \cdot df}{f} = -c \cdot df/f^2$, so dass das korrekte Integral lautet $\int_{f_1}^{f_2} -c \cdot e\left(\frac{c}{f}\right) df/f^2$.

Dichten erfordern also einen mäßigen Ausbau der Vorstellungen zu Differentialen – aber ohne Differentiale können Dichten kaum korrekt behandelt werden.

Roboterfahrt

Viele Schulen besitzen für den Informatikunterricht Roboter von Lego, Fischertechnik oder anderen Herstellern. Es ist reizvoll, diese Geräte auch unter mathematikdidaktischer Perspektive anzuschauen. Beim üblichen Aufbau besitzt der Roboter zwei angetriebene Räder, ihre Radien seien R , ihr Abstand (Achslänge d) und der Drehwinkel des linken und rechten Rades sei φ_L und φ_R . Wenn beide Räder gleich schnell drehen, also wenn $d\varphi_L = d\varphi_R$, dann fährt der Roboter gerade aus. Sonst bewegt er sich auf einer Kreisbahn: Die linke Seite kommt im Zeitintervall dt um die Strecke $ds_L = R \cdot d\varphi_L$ vorwärts, die rechte Seite um $ds_R = R \cdot d\varphi_R$. Der Roboter hat sich also vorwärts bewegt und gedreht um die Strecken/Winkel:

$$ds = \frac{ds_L + ds_R}{2}$$

$$d\alpha = \frac{ds_R - ds_L}{d}$$


Dabei wurde die lineare Näherung des Tangens $\tan(d\alpha) = d\alpha$ benutzt. Mit Hilfe der Überlegungen zur Krümmung ergibt sich als Radius des Bahnkreises:

$$r = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds_L + ds_R}{2(ds_R - ds_L)} d$$

Wenn sich etwa das rechte Rad doppelt so schnell dreht wie das linke, folgt sofort, dass der Bahnradius $3/2$ des Achsabstandes beträgt (da der Abstand zum Mittelpunkt der Radachse gemessen wird (warum?) bedeutet das, dass das innere Rad sich im Abstand d und das äußere im Abstand $2d$ bewegt). Eine Aussage, die sich auch experimentell überprüfen lässt – und vielleicht sogar ohne Formel vorhersagbar ist: Das äußere Rad bewegt sich dann auf einem Kreis mit doppeltem Radius also doppelter Strecke, entsprechend seiner doppelten Drehzahl.

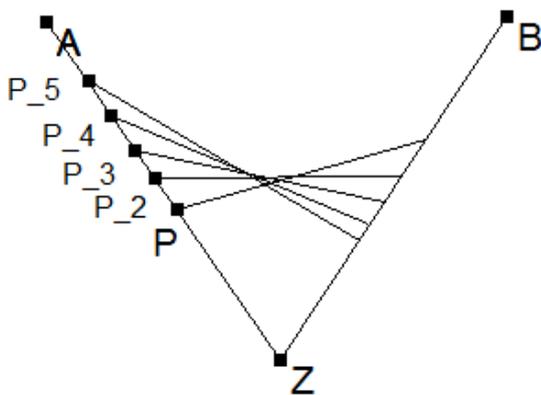
Wenn der Roboter selbst gesteuert unterwegs ist, zB weil er Hindernissen ausweicht oder zum Licht hin fährt, stellt sich die Frage, wo er sich im Anschluss befindet. Viele Roboter können die Drehwinkel der Räder messen. Diese Messungen erfolgen in bestimmten Zeitschritten dt , zB alle 100ms. Wenn anfangs die Position x,y und der Drehwinkel α des Roboters zu einer festen Richtung bekannt ist, kann man in jedem Schritt nach obigen Formeln die Änderungen $d\alpha$ und ds berechnen und aufsummieren. Bei α ist das ganz einfach, bei den Koordinaten muss noch der Winkel einberechnet werden: $dx=ds \cdot \cos(\alpha), dy=ds \cdot \sin(\alpha)$. Da wir gesehen hatten, dass die Drehung der beiden Roboterräder Krümmung $d\alpha$ und Streckenelement ds bestimmen, kann man daraus – völlig zu Recht - schließen, dass Kurven durch die Vorgabe der Krümmung als Funktion der Bogenlänge eindeutig bestimmt sind (die übliche Definition der Klothoide als Kurve, deren Krümmung proportional zur Bogenlänge ist, nutzt dies aus).

Lietzmanns Farbkeil

Lietzmann hat folgende Aufgabe gestellt: In einer keilförmigen Rinne (Öffnungswinkel α) befindet sich Flüssigkeit. Wenn der Keil gedreht wird, benetzt sie eine Fläche auf der Begrenzungsscheibe. Welche Randkurve hat diese?

Die Situation ist unten graphisch dargestellt, wobei nicht der Keil gedreht, sondern die Farboberfläche auch nicht-waagrecht gezeichnet wird.

Wegen der Invarianz der Farbmenge muss das durch die jeweilige Oberfläche gegebene Dreieck konstanten Flächeninhalt haben. Zur Beschreibung legen wir ein Kosys zugrunde: $Z(0|0)$, B auf der x -Achse. Dann ist $P(p \cdot \cos(\alpha) | p \cdot \sin(\alpha))$. Der Endpunkt der Strecke auf der x -Achse sei $(b|0)$. Die Flächenkonstanz besagt dann $0=d(pb)=p db + b dp$. Damit lässt sich das Problem analog zur rutschenden Leiter lösen.



Kreisbewegung – anders betrachtet

Wie kann sich der Punkt (x,y) bewegen, wenn bekannt ist, dass sein Abstand vom Ursprung konstant a beträgt? Das ist einfach: $x^2+y^2=a^2$, das ist schon die Kreisgleichung algebraisch betrachtet. Differentiell wird, wegen $da=0$, daraus: $x dx + y dy = 0$, oder vektoriell interpretiert: Der Ortsvektor (x,y) steht senkrecht auf dem Änderungsvektor (dx,dy) .

Mit diesem Hilfsmittel betrachten wir jetzt ein Hubkolbengetriebe, bei dem eine Pleuelstange der Länge L den Punkt $A(a|0)$ bewegt, wenn sich $P(x|y)$ bewegt. Für die Positionsänderung von P gilt: $x dx + y dy = 0$, weil P sich auf einem Kreis bewegt. Natürlich können wir uns das Gelenk in P auch kurz ausgehakt denken, so dass dx und dy unabhängig voneinander beliebig gewählt werden können. Wenn sich dann dx ändert, wird sich da um den gleichen Betrag ändern $da=dx$, und wenn sich y bei konstantem x ($dx=0$) ändert, dann haben wir eine „rutschende Leiter“ vor uns, also gilt dann $y dy + (a-x) d(a-x) = 0$, also (mit $dx=0$):

$$da = \frac{-ydy}{a-x}$$

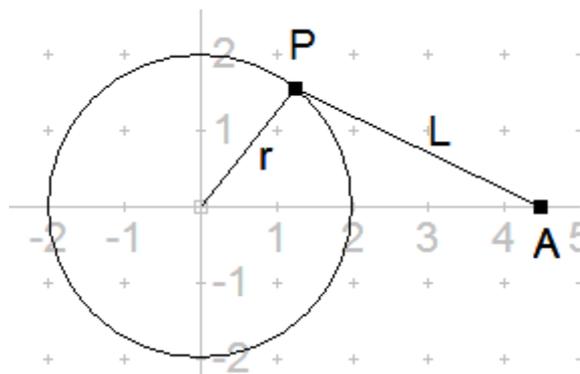
Wenn beide Änderungen zusammen auftreten:

$$da = dx + \frac{-ydy}{a-x} = dx + \frac{-ydy}{a-x}$$

Bei Bewegung von P auf einem Kreis kann das weiter vereinfacht werden zu:

$$da = dx + \frac{xdx}{a-x}$$

Und darin kann $x=r \cdot \cos(\alpha)$ eingesetzt werden. Mit einem CAS kann die Differentialgleichung gelöst werden.



Die differentielle Sichtweise erlaubt sofort, auch Kugeln zu modellieren:

$$\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0$$

$$x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz = 0 \text{ Integration}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = K_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = K_2^2$$

Die Bewegung eines starren Stabes lässt sich differentiell leichter beschreiben als algebraisch: Wenn A und B die Endpunkte eines Stabes der Länge L sind, und sich dieser ein Stückchen bewegt zu neuen Endpunkten A+dA und B+dB, dann bedeutet das algebraisch: $|A-B|=|A+dA-B-dB|$, was komplett ausgeschrieben schon eine ordentliche Gleichung ist. Differentiell argumentiert man so: Wenn der Stab nur parallel verschoben wird, gilt $dB=dA$. Wenn A nach A+dA geht, ginge dann B nach B+dA. Wenn die neue Position von B davon abweicht kann das – wegen der konstanten Länge – nur eine Drehung bedeuten, also ist die Differenz $dB-dA$ orthogonal auf B-A:

$$(dB-dA) \cdot (B-A) = 0.$$

Auch mit dieser Gleichung kann der Kolben berechnet werden. B sei dabei P. Dann gilt $dA=(da|0)$, weil A auf der Achse liegt und $dB=(dx|dy)$ mit $xdx+ydy=0$. Also (wie oben):

$$(dx-da)(x-a)+(dy-0)(y-0)=0.$$

$$(dx-da)(x-a)+dy \cdot y=0.$$

$$(dx-da)(x-a)-dx \cdot x=0.$$

$$(1-a')(x-a)=x$$

Das ist wieder die gleiche Differentialgleichung wie oben.

Zykloiden

Ein Kreis rollt auf einer Ebene. Verfolgt wird ein Punkt $P(x;y)$ auf dem Kreisumfang (Radius r , Drehwinkel α). Die Koordinaten des Mittelpunktes seien $(x_m=v \cdot t | y_m)$, also $dx_m=v \cdot dt=r \cdot d\alpha$, $dy_m=0$. Gesehen vom Mittelpunkt aus vollführt P eine Kreisbewegung: $x_K=r \cdot \cos(\alpha)$, $y_K=-r \cdot \sin(\alpha)$. Es folgt:

$$dx_K=-r \cdot \sin(\alpha) d\alpha=y_K \cdot d\alpha$$

$$dy_K=-r \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha=-x_K \cdot d\alpha$$

Damit gilt natürlich $x_K \cdot dx_K+y_K \cdot dy_K=0$.

Für die Änderungen von P errechnet man:

$$\begin{aligned} dx &= dx_m + dx_K = r \cdot d\alpha + y_K \cdot d\alpha = \\ &= r \cdot (1 - \sin(\alpha)) \cdot d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy &= dy_m + dy_K = dy_K = -x_K \cdot d\alpha = \\ &= -r \cdot \cos(\alpha) \cdot d\alpha \end{aligned}$$

Durch Integration folgt:

$$x = x_0 + r \cdot \alpha + r \cdot \cos(\alpha)$$

$$y = y_0 - r \cdot \sin(\alpha)$$

Die Leistung der Differentiale besteht hier darin, dass der Ansatz der linearen Prognose die Addition (sprich: Linearkombination) zweier Änderungen erlaubt. Die Herleitung ist zudem so flexibel, dass verschiedene Varianten (zB Hypozykloiden oder das Abrollen auf einem anderen Kreis) leicht analog modelliert werden können.

Lichtbrechung

Das sich Licht so bewegt, dass es von zwei willkürlich gewählten Orten möglichst schnell von A nach B kommt, ist eine frappierende Erkenntnis. Wählen wir $A(0|1)$ und $B(1|-1)$ und nehmen an, dass oberhalb bzw unterhalb der x -Achse die Lichtgeschwindigkeiten c_1 , c_2 betragen. Die Zeiten von A bis $(x|0)$ und von dort bis B sind:

$$t_1 = \frac{\sqrt{1^2 + x^2}}{c_1}, t_2 = \frac{\sqrt{1^2 + (1-x)^2}}{c_2}$$

Natürlich kann man einfach die Summe minimieren, aber die Rechnung wird einfacher, wenn man wie folgt argumentiert: Wenn man x nach rechts verschiebt, also $dx > 0$, wird t_1 länger, also $dt_1 > 0$, aber $dt_2 < 0$. Die Summe lässt sich nicht weiter minimieren, wenn beide Änderungen sich aufheben, also $dt_1 = -dt_2$. Bei der Berechnung helfen die Beziehungen:

$$\sin(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{1^2 + x^2}}, \sin(\beta) = \frac{1-x}{\sqrt{1^2 + (1-x)^2}}$$

Es ist dann:

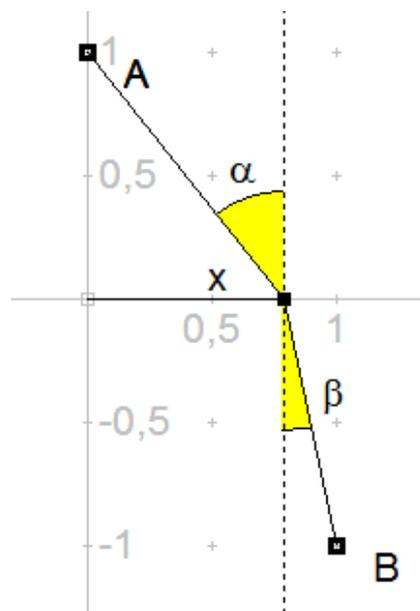
$$dt_1 = -dt_2$$

$$\frac{2x dx}{2\sqrt{1^2 + x^2} \cdot c_1} = -\frac{2(1-x)(-dx)}{2\sqrt{1^2 + (1-x)^2} \cdot c_2}$$

$$\frac{x dx}{\sqrt{1^2 + x^2} \cdot c_1} = \frac{(1-x) dx}{\sqrt{1^2 + (1-x)^2} \cdot c_2}$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{c_1} = \frac{\sin(\beta)}{c_2}$$

Fast der gleiche Zugang ist auch mit der gewöhnlichen Ableitung möglich: Man betrachtet t_1+t_2 als Funktion von x , leitet ab, setzt null und findet das Brechungsgesetz. Der Vorteil der obigen Herleitung ist, dass man länger die Dinge inhaltlich betrachtet, während man klassisch schon bei der Nutzung eines allgemeinen Satzes (notwendiges Kriterium) und dem daraus folgenden Kalkül ist.



Brachistochrone

Die oben schon betrachtete Zyклоide trägt noch einen zweiten Namen: Brachistochrone. Diese Bezeichnung verweist auf die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sie die Form einer Rutschbahn angibt, längs der ein reibungsfrei rutschender Körper möglichst schnell von A nach B kommt. Das ist eine auch physikalisch interessante Fragestellung. Die Strecke als kürzeste Verbindung ist hier gerade nicht optimal, weil man anfangs recht langsam rutscht. Besser ist es, erst fast senkrecht Geschwindigkeit zu holen und dann mit hoher Geschwindigkeit die vertikale Distanz zu durchheilen.

Mit dieser Idee kann man verschiedene Funktionen (zB quadratische) modellieren¹, deren Graph A und B verbindet. Zur Evaluation muss man ihre Rutschzeit berechnen. Dazu sei $A(0|0)$, $B(b|y_b)$, v die Geschwindigkeit, s die Kurvenlänge, g die Erdbeschleunigung und a die Beschleunigungskomponente in Bahnrichtung.

An der Skizze erkennt man zwei ähnliche Dreiecke:

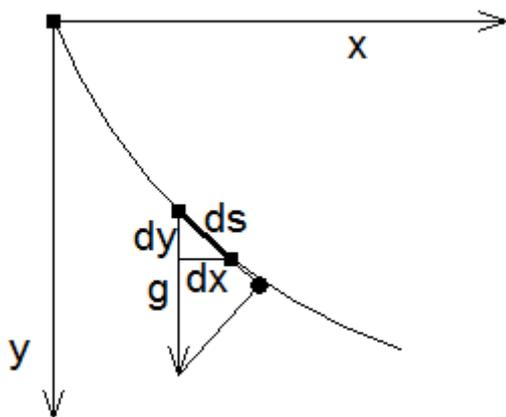
¹ Die Darstellung folgt weitgehend (Rogers 2005), der wiederum Bernoulli folgt.

$\frac{a}{g} = \frac{dy}{ds} \Rightarrow g \cdot dy = a \cdot ds = \frac{dv}{dt} ds = \frac{ds}{dt} dv = v \cdot dv$ Durch Integration dieser Beziehung in den Grenzen $v=0..v$, $y=0..y$ folgt:

$$g \cdot y = \frac{v^2}{2} \Leftrightarrow \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy} \Leftrightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

Für die gesamt Rutschzeit von $x=0..b$ folgt dann:

$$T = \int_{x=0}^b dt = \int_{x=0}^b \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$



Diese letzte Beziehung kann man für verschiedene Ideen für $y=y(x)$ ausrechnen und so verschiedene Bahnformen vergleichen. Aber welche ist die optimale? Bernoulli hatte die geniale Idee, hier das Brechungsgesetz zu verwenden. Nach diesem ist $\sin(\alpha)/v$ eine Konstante K längs der schnellsten Bahn. Für den Winkel α gegen die Vertikale gilt in lineare Approximation: $\sin(\alpha)=dx/ds$. Zusammen also:

$$K = \frac{\sin(\alpha)}{v} = \frac{dx}{ds \cdot \sqrt{2gy}}$$

$$K^2 \cdot (dx^2 + dy^2) \cdot 2gy = dx^2$$

$$K^2 \cdot (1 + y'^2) \cdot 2gy = 1$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{2K^2 \cdot g \cdot y}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1}{2K^2 \cdot g \cdot y} - 1}$$

In dieser letzten Form kann man die Gleichung numerisch gut lösen oder verifizieren, dass die Zykloide löst.

Brücken und Ketten

Bei Hängeseilbrücken und hängenden Ketten haben wir es mit Seilspannungen zu tun. Seile können Kräfte nur in Richtung des Seils, also tangential übertragen, daraus folgt die Ähnlichkeitsbeziehung $dy/dx=v/h$ (siehe Abb.) mit vertikaler und horizontaler Kraftkomponente.

Die Form ergibt sich aus der Gewichtsverteilung. Gewichte zeigen immer vertikal, d.h. in die Horizontalkomponente h der Kraft ist überall gleich ($dh=0$) und hängt nur davon ab, wie die Brücke gebaut ist. Bei Bögen bietet es sich an, das Koordinatensystem in den Scheitelpunkt zu legen.

1. Fall: Bei einer Hängeseilbrücke wird das Seil masselos gedacht und nur die Fahrbahn hat eine Streckenlast. Vom tiefsten Punkt aus startend nimmt die Vertikalkomponente v der Kraft proportional zu x zu: $v=w \cdot x$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{h} = \frac{w \cdot x}{h}$$

$$y = \frac{w \cdot x^2}{2h} + C$$

Hängeseilbrücken können also (idealisiert) durch Parabeln modelliert werden. Das gleiche gilt – mit der gleichen Rechnung – für Brücken, bei denen ein Parabelbogen eine konstante Streckenlast trägt.

2. Fall: Bei der hängenden Kette ist, vom tiefsten Punkt aus startend, die Vertikalkomponente v der Kraft proportional zur Kettenlänge: $v=w \cdot s$, also $dv=w \cdot ds$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{v}{h} \Leftrightarrow h \cdot y' = v \Rightarrow h \cdot dy' = dv \Leftrightarrow$$

$$h \cdot y'' dx = w \cdot ds = w \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2} = w \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx$$

$$y''(x) = \frac{w}{h} \cdot \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

In dieser Form kann die DGL in ein CAS eingeben werden, oder man verifiziert nur, dass eine Lösung gegeben ist durch:

$$y(x) = \frac{e^{Kx+C_1} + e^{-(Kx+C_1)}}{2K} + C_2, K = \frac{w}{h}$$

Bei Ehrgeiz: Zur Lösung der DGL substituiert man $u=y'$, dann ist noch zu lösen:

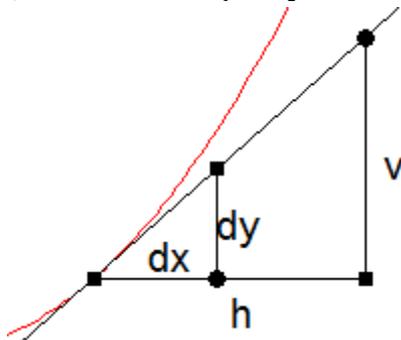
$$u'(x) = K \sqrt{1 + u(x)^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = K \cdot dx$$

$$\sinh^{-1}(u) = K \cdot x + C_1$$

$$y' = u = \sinh(K \cdot x + C_1)$$

$$y = \cosh(K \cdot x + C_1) + C_2$$

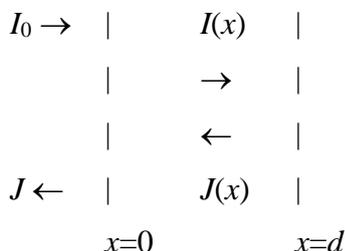


Kubelka-Munk-Theorie

Eine etwas exotischere, aber nicht schwer verständlich physikalische Anwendung, ist die Ausbreitung von Licht in bestimmten Medien: Dazu haben Kubelka und Munk schon in den 30er-

Jahren eine Modellbildung vorgeschlagen (siehe Kortüm 1969), mit der sie damals die Papierproduktion beraten konnten: Wie muss man Papier gestalten, damit es kontrastreich bedruckt werden kann, aber dennoch dünn und damit billig ist?

Das Ziel der Modellbildung ist die Menge des vom Papier reflektierten Licht anzugeben. Dazu soll der Reflektionsindex R bestimmt werden, also der Anteil des abgestrahlten Lichtes gemessen an der einfallenden Intensität I_0 .



Man legt die x -Achse in das Papier hinein, also ist $x=0$ die Paperoberfläche und $x>0$ zeigt in das Papier hinein bis zur Dicke d des Papiers.

Der Lichtfluss von links nach rechts wird mit I bezeichnet. $I(0)=I_0$ ist die einfallende Intensität, $I(x)$ die Intensität in Tiefe x . Von diesem Licht wird eine bestimmte Rate (kontrolliert durch einen Parameter A) absorbiert und ein bestimmter Teil gestreut (Streuparameter S). In diesem einfachen Modell gibt es nur zwei Lichtrichtungen. Licht von links nach rechts wird nach der Streuung zu Licht, das sich von rechts nach links bewegt. Dessen Intensität sei $J(x)$. Je länger eine Wegstrecke dx des Lichtes ist, umso mehr Licht wird absorbiert oder gestreut. Die Änderungen der Intensitäten sind deswegen:

$$dI = -A \cdot I \cdot dx - S \cdot I \cdot dx + S \cdot J \cdot dx$$

$$dJ = -A \cdot J \cdot (-dx) - S \cdot J \cdot (-dx) + S \cdot I \cdot (-dx)$$

Die letzten Summanden beschreiben jeweils den Wechsel der Lichtrichtung durch Streuung. Das negative $-dx$ in der zweiten Zeile berücksichtigt die Flussrichtung des J -Stroms entgegen die x -Achse.

Dieses System von Differentialgleichungen kann man mit einem CAS symbolisch lösen. Besonders leicht zu interpretieren wird die Lösung, wenn man $d=\infty$ annimmt. Dann muss $J(x)$ für große x gegen 0 gehen – und das ist nur der Fall wenn gilt:

$$R = \frac{J(0)}{I(0)} = \frac{A + S - \sqrt{A \cdot (A + 2S)}}{S}$$

Diese schöne Formel gilt nicht nur für Papier, sondern zB auch für Kaffee mit Milch: R ist die Helligkeit (in einem Graustufen-Digitalbild der Quotient der Werte des Kaffees durch eine zum Vergleich fotografierte daneben liegende rein weiße Fläche. Beim Kaffee wird die Absorption A bestimmt durch die Menge des Kaffeepulvers und die Streuung S durch den Fettanteil in der Milch. Wenn man immer gleich starken Kaffee verwendet, kann man also “sehen” wie viel Fett die Milch enthält. Dies ist die Grundidee der Anwendung dieser Theorie in der Umweltmesstechnik.

Dosenmathematik

Bei einer vollen Cola-Dose (ein Hohlzylinder der Höhe H mit Inhalt) liegt der Schwerpunkt genau in der Mitte, also auf $S=H/2$. Der obere Rand der Flüssigkeit liege auf Höhe F (anfangs ist $F=H$, d.h. Boden und Decken der Dose werden vernachlässigt.)

Wenn man nun abtrinkt, sinkt F monoton und zunächst auch S . Bei der leeren Dose ist aber $F=0$ und damit wieder $S=H/2$. Der Schwerpunkt muss also irgendwo ein Minimum haben. Der

Schwerpunkthöhe der Flüssigkeit sinkt beständig ($S_F = F/2$, also $dS_F = dF/2 < 0$ wenn $dF < 0$), der Schwerpunkt der Dose bleibt in der Mitte ($dS_D = 0$). Der Gesamtschwerpunkt ist der mit Dosenmasse M und Masse der Flüssigkeit $\mu \cdot F$ gewichtete Mittelwertgemittelte:

$$S = \frac{M \cdot H / 2 + \mu F \cdot F / 2}{M + \mu F}$$

$$S \cdot (M + \mu F) = M \cdot H / 2 + \mu \cdot F \cdot F / 2$$

$$dS \cdot (M + \mu F) + S \cdot \mu \cdot dF = \mu \cdot F \cdot dF$$

Die tiefste Lage ist gekennzeichnet durch $dS = 0$:

$$S \cdot \mu \cdot dF = \mu \cdot F \cdot dF$$

$$S = F$$

Aus dieser Bedingung, oben eingesetzt, lässt sich F berechnen. Interessanter ist aber, dass in Gerthsen (1997) eine direkte Interpretation der Differentiale gegeben wird: Man denkt sich die Flüssigkeit gefroren und die Dose auf die Seite gelegt. Wenn dann – wie oben berechnet – die Dose über der Flüssigkeitsspiegel balanciert wird, ist sie im Gleichgewicht, denn wenn man etwas Eis zugibt, $dF > 0$, verschiebt sich der Schwerpunkt in diese Richtung, aber auch wenn man Eis wegnimmt ($dF < 0$), wird das Gewicht auf der Seite geringer, d.h. der Schwerpunkt geht nach oben.

Dichten

Dichten von Wahrscheinlichkeiten sind auch für Schüler naheliegende Modellierungsmittel: Wenn man in einem Koordinatensystem die Rechtsachse als Körpergröße von Männern bezeichnet und eine Skalierung anbringt, und die Hochachse vage als Wahrscheinlichkeit (aber ohne Skalierung) definiert, fällt es vielen Schülern leicht, eine Kurve zu zeichnen, ihre Wahl zu begründen und ggf. die von Mitschülern zu kritisieren. Die schwierige Stelle kommt, wenn man sich überlegt, was die Hochachse genau bedeuten soll. Wie drückt sich im Diagramm die totale Wahrscheinlichkeit 1 aus? Ein Punkt auf der x-Achse ist zB 1,797654567m, wird man überhaupt einen Mann mit exakt dieser Größe haben (und es gibt ja sogar noch irrationale Zahlen)? Das Konzept der Dichte liefert die Antwort. Was man intuitiv gut verstehen kann ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(h)$ und das Integral gibt die Wahrscheinlichkeit, dass die Größe eines Individuums zwischen den Grenzen liegt:

$$p(h_1 \leq H \leq h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \rho(h) dh$$

Mit der Idee der linearen Prognose lässt sich auch dieses Differential verstehen: Ausgehend von der Kenntnis von $\rho(h)$ prognostiziert man die Wahrscheinlichkeit für Größen zwischen h und $h+dh$ als $dp = \rho(h) dh$. Dichten sind Differentiale, sind etwas was man integrieren kann. In diesem Sinne haben wir Dichten auch schon oben bei der barometrischen Höhenformel verwendet.

Angenommen, alle Männer haben eine mittlere Body-Mass-Index von 22, also $22 = m/h^2$. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiger Mann zwischen 70kg und 75 kg wiegt? Fragen von diesem Prototyp beantwortet man allgemein durch folgende Überlegung:

$$22h^2 = m \Rightarrow 22hdh = dm$$

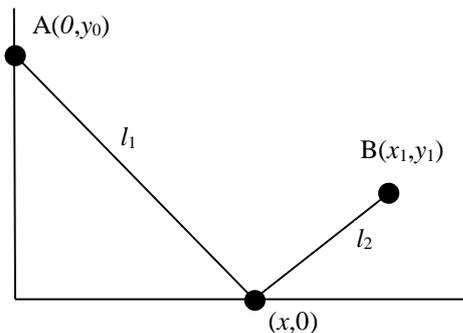
$$dp = \rho(h)dh = \rho(h) \frac{dm}{22h} = \rho \left(\sqrt{\frac{m}{22}} \right) \frac{dm}{\sqrt{22m}}$$

Dichten mit Differentialen zu schreiben bedeutet also, dass man sich um Variablentransformationen keine Gedanken mehr machen muss, das übernimmt der Kalkül. In der Physik ist das

etwa beim Planckschen Strahlungsgesetz von Vorteil, das mal in der Wellenlänge, mal in der Frequenz des Lichtes benötigt wird.

Kürzester Weg

Dieser Abschnitt zeigt die Behandlung einer klassischen Optimierungsaufgabe. Es ist der Weg zwischen zwei Punkten A und B zu minimieren, wenn der Weg über eine beliebige Stelle auf einer gegebenen Geraden verlaufen muss. Die Abbildung zeigt die Situation im Koordinatensystem:



Wir haben die folgenden Längenbeziehungen und ihre Differentiale:

$$l = l_1 + l_2 \Rightarrow dl = dl_1 + dl_2 = 0 \text{ im Extremum}$$

$$l_1^2 = x^2 + y_0^2 \Rightarrow l_1 \cdot dl_1 = x \cdot dx$$

$$l_2^2 = (x_1 - x)^2 + y_1^2 \Rightarrow l_2 \cdot dl_2 = -(x_1 - x) \cdot dx$$

Damit:

$$0 = dl_1 + dl_2 = \frac{x \cdot dx}{l_1} + \frac{-(x_1 - x) \cdot dx}{l_2}$$

$$0 = l_2 \cdot x - l_1 \cdot (x_1 - x)$$

Aus dieser letzten Gleichung kann x errechnet werden. Die etwas mühsame Rechnung (x steckt auch in l_1 und l_2) unterlassen wir hier. Man beachte aber, um wie viel kürzer die Rechnung bis zu diesem Punkt ist gegenüber einer traditionellen Behandlung mit dem Aufstellen einer Zielfunktion und Bestimmung der Ableitung.

Eine Hüllkurve

In diesem Abschnitt solle eine einfache Hüllkurve beschrieben werden. Man stelle sich die x -Achse als Fußboden vor, und den Punkt B(0|1) als Nagel an der Wand in Höhe von 1dm. Wenn man jetzt ein Quadrat darauf abstützt und mit einer Ecke über den Fußboden rutschen lässt, welcher Bereich der Wand wird dann vom Quadrat überstrichen. Ein Stück des Randes – und der einzige, den wir hier berechnen werden, ist gegeben durch die Hüllkurve der Strecke AD. Wenn man das Quadrat mit einem zweiten, leicht bewegten vergleicht, sieht man, dass der Schnittpunkt der Seiten sich nahezu nicht bewegt und den äußeren Rand des überstrichenen Bereichs markiert. Damit kann man rechnen:

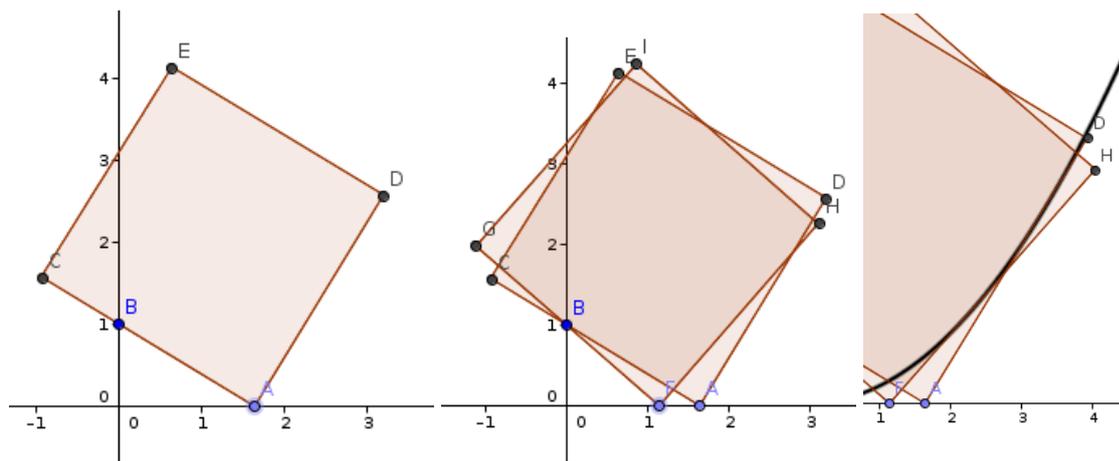


Abbildung 12: Hüllkurve eines rutschenden Quadrats

Die Gerade durch B und $A(a|0)$ hat die Steigung $-1/a$, die Orthogonale durch A und D dazu hat also die Steigung a . Die Geradengleichung aller Punkte $(x|y)$ auf dieser Geraden AD ist daher gegeben durch $y=a(x-a)$. Um eine Bewegung zu prognostizieren, bildet man das Differential: $dy=a(dx-da)+da(x-a)$. Dies gilt für alle Punkt auf der Geraden. Der Rand ist definiert durch die Punkte, die sich bei der Bewegung ($da \neq 0$) des Quadrats nicht bewegen ($dx=0, dy=0$). Daraus folgt $0=a(0-da)+da(x-a)$ also $0=da(-a+x-a)$. Daher folgt $x=2a$, und damit $y=x^2/4$. Das dritte Bild in Abbildung 12 zeigt diese Hüllkurve. Der Vorteil der Formulierung mit Differentialen ist hier, dass die Bedingung, die ein Hüllkurvenpunkt erfüllen muss, nämlich die lokale Nichtbeweglichkeit direkt formulieren lässt.

Der Schulbuchklassiker der rutschenden Leiter dürfte allgemein bekannt sein: Eine Leiter steht an einer Hauswand und man verfolgt ihren Mittelpunkt, während sie längs des Bodens rutscht. Dies kann leicht mit konkretem Material, z.B. einer gelochten Holzleiste oder Material aus Metall- oder Kunststoffbaukästen erforscht werden. Als Bahnkurve ergibt sich ein Kreis, wie man geometrisch – oder vielleicht noch einfacher algebraisch – begründen kann. Interessant daran ist, dass die Mehrzahl der Schüler, die diese Bewegungskurve vor der Experimentdurchführung allein auf ihre Anschauung gestützt, eine konkave Kurve ähnlich einer Hyperbel einzeichnen (Weber 2007, S. 169). In der Tat gibt es hier eine Kurve dieser Gestalt, nämlich die Grenze des Gebietes, das von der Leiter überstrichen wird, also die Hüllkurve der Leiter.

Diese Hüllkurve soll jetzt bestimmt werden. Fußpunkt der Leiter sei $(a,0)$ und der Punkt an der Wand $(0,b)$. Dann gilt $a^2+b^2=L^2$ (mit der Leiterlänge L) und für die Differentiale folglich: $ada+bdb=0$.

Die Gerade durch $(a,0)$ und $(0,b)$ hat die Gleichung $y = b - \frac{b}{a}x$ und die Gerade durch die verschobenen Punkte $(a+da,0)$ und $(0,b+db)$ analog $y = b + db - \frac{b+db}{a+da}x$. Durch Gleichsetzen und Auflösen folgt (mit $db = -ada/b$) für die Schnittstelle $x = \frac{a(a+da)db}{-b da + a db} = \frac{a^2(a+da)}{a^2+b^2}$. Der Grenzwert $da \rightarrow 0$ ist hier sinnvoll zu interpretieren und liefert: $x = a^3L^{-2}$, also $a = (xL^2)^{1/3}$, $b = \sqrt{L^2 - (xL^2)^{2/3}}$.

Einsetzen in die Geradengleichung liefert die Bahnkurve: $y = \sqrt{L^2 - (xL^2)^{2/3}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(xL^2)^{1/3}}x\right)$

Hier kann man einen konkreten Wert für die Leiterlänge einsetzen und die Hüllkurve plotten.

Diese Rechnung ist sicher an der Grenze dessen, was mit leistungsstarken Schülern im Unterricht machbar ist, aber sie zeigt die Macht des Differentialkalküls, denn in dieser Rechnung ist jeder Zwischenschritt inhaltlich interpretierbar.

Die Strategie zur Berechnung von Hüllkurven lässt sich auf andere Fälle übertragen und auch allgemein formulieren. In den Online-Materialien (Oldenburg 2015) zu diesem Beitrag gibt es auch Hinweise, wie die Berechnung von Hüllkurven mit Computeralgebrasystemen vereinfacht werden kann.

Luftdruck

Dies ist eine klassische physikalische Modellbildung, die auch von Freudenthal (Bd. 2, S. 491) betrachtet wurde. Der Grund dafür, sie hier neu aufzunehmen, liegt in der Gelegenheit, an ihr exemplarisch zu beobachten, wie Algebra und Analysis helfen, eine Vielzahl von Beziehungen zwischen Größen zu beschreiben. Die Art der Modellierung ist dabei prototypisch für viele andere in der Physik. Der Luftdruck p nimmt mit der Höhe h in unbekannter, vermutlich nicht-linearer Art ab. Differentiale helfen hier, weil sie lokal einen linearen Zusammenhang beschreiben können. Auf Meereshöhe ist im Mittel $p(0)=1013\text{mbar}$. Dieser Druck kommt durch die Gewichtskraft der darüber liegenden Luftmenge zustande. Generell übt eine Masse m eine Gewichtskraft $F=mg$ (g ist der Ortsfaktor von $9,81\text{N/kg}$) aus. Eine Kraft auf eine Fläche A verursacht den Druck $p=F/A$. Die Masse einer bestimmten Luftmenge hängt natürlich von ihrem Volumen V ab, aber auch von der Dichte $\rho = m/V$. Schließlich gilt das Boyle-Mariottesche Gesetz, wonach $pV=km$ mit einer (temperaturabhängigen) Konstante k .

Diese Vielzahl der Variablen mit ihren Zusammenhängen macht die Lage unübersichtlich. Hauptschwierigkeit ist aber, dass der Druck und damit die Dichte von der Höhe abhängen. Um die Lage etwas zu verbessern, betrachten wir zwei Höhen, die so nahe beieinander liegen, dass wir vermuten können, dass die Veränderung der Dichte durch eine linearen Prognose gut beschreibbar ist. Ausgehend von Höhe h (wo Druck p herrscht) gehen wir um dh nach oben zur zweiten Höhe $h+dh$, wo der Druck um dp geändert ist, also $p+dp$. Nach oben nimmt der Druck ab (also: $dh>0$, $dp<0$). Der Druckunterschied kommt dadurch zustande, dass in Höhe h verglichen mit Höhe $h+dh$ zusätzlich die Gewichtskraft dF der Luft zwischen h und $h+dh$ drückt. Nehmen wir für die Berechnung eine Luftsäule mit Grundfläche A (dann ist $V=A \cdot dh$) her:

$$-dp = \frac{dF}{A} = \frac{dm \cdot g}{A} = \frac{p \cdot dV \cdot g}{k \cdot A} = \frac{p \cdot A \cdot dh \cdot g}{k \cdot A} = \frac{p \cdot dh \cdot g}{k}, \text{ also } \frac{-dp}{p} = \frac{g}{k} dh, \text{ was integriert werden kann:}$$

$$\int \frac{-dp}{p} = \int \frac{dh \cdot g}{k}. \text{ Ergebnis der Integration und Umformung liefert: } -\ln(p) + \ln(p_0) = (h - h_0)g/k, \text{ also } p = p_0 e^{-\frac{(h-h_0)g}{k}}.$$

Das zeigt die exponentielle Abnahme des Luftdrucks, die man auch zum Messen von Höhen benutzen kann. Die lineare Prognose des Luftdrucks $p(h+dh)$ ermöglicht, diese vielen verbundenen Größen sinnvoll in Beziehung zu setzen.

Optimierungsprobleme in mehreren Variablen

Bisher wurden partielle Ableitungen schon implizit benutzt. Um allgemein zu argumentieren, ist es sinnvoll, den Begriff auch einzuführen, da man – auch bei Parameterproblemen – ohnehin nicht darum herumkommt. Man hat dann:

$$z = f(x, y), dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Jetzt suchen wir ein lokales Minimum von f – eine Fragestellung, die sich vielfältig aus Anwendungen heraus motivieren lässt. Wenn an einer Stelle (x, y) und für eine Richtung (dx, dy) gilt $df < 0$, dann prognostiziert man, dass man in Richtung (dx, dy) den Wert von f verkleinern

kann. Wenn aber $df > 0$, dann lässt sich (linear prognostiziert) f in Richtung $(-dx, -dy)$ verkleinern. An einem lokalen Minimum kann es aber keine Richtung zur weiteren Minimierung geben, d.h. es muss $df = 0$ für alle Richtungen sein, d.h. es müssen beide partielle Ableitungen 0 sein.

Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen werden in der Schule üblicherweise so behandelt, dass eine Variable eliminiert wird. Beispiele: Auf welchem Bahnpunkt kommt ein geworfener Stein einem bestimmten Ziel am nächsten? Oder die folgende Variante der bekannten Zaunaufgaben: An eine Wand soll mit nur einem Pfosten und einer festen Drahtlänge eine möglichst große Fläche eingezäunt werden. Wenn man den Draht der Länge L in den Punkten $(0,0)$ und $(a,0)$ an der als Wand (x -Achse) befestigt und den Pfosten bei (x,y) einschlägt, soll also $A = \frac{1}{2}a \cdot y$ maximiert werden unter der Nebenbedingung $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = L$

Die allgemeine Struktur solcher Probleme ist die Mini- oder Maximierung von $f(x,y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y)=0$.

Nehmen wir jetzt an, dass (x,y) die Nebenbedingung erfüllt, dass also $g(x,y)=0$. Wenn man jetzt versucht, wie oben, den Funktionswert von f zu verkleinern, indem man die Position zu $(x+dx, y+dy)$ ändert, muss man die Nebenbedingung einhalten. Man prognostiziert dann linear, dass die Änderungen so gewählt werden müssen, dass $0 = dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$. Oben wurde schon begründet, dass es an einem lokalen Minimum keine Positionsänderung geben darf, die zu einer prognostizierten Änderung von f führt, also muss auch gelten: $0 = dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Damit haben wir ein lineares Gleichungssystem, mit $(0;0)$ als linke Seite. Es ist also nur lösbar, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind, das kann man auf zwei Arten formulieren:

$$\text{a) } \exists \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Methode a) ist die der Lagrange-Multiplikatoren. Methode b) ist – zumindest in diesem Setup – numerisch schneller (weil keine neuen Variablen eingeführt werden). In jedem Falle muss man die obige Gleichung zusammen mit $g=0$ lösen.

Beispiel: Optimale Dose mit Volumen 850cm^3 , also $g(r,h) = \pi r^2 h - 850 = 0$ zu minimieren ist $f(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$.

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial h} \\ \frac{\partial g}{\partial r} & \frac{\partial g}{\partial h} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4\pi r + 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r h & \pi r^2 \end{pmatrix} =$$

$$2\pi^2(2r+h)r^2 - 4\pi^2 r^2 h = \pi^2 r^2(4r-2h)$$

Diese Gleichung zusammen mit $g=0$ ist leicht zu lösen ($h=2r$ in g einsetzen) und liefert die (auch durch Elimination erzielbare) Lösung.

Interessant ist diese Lösung, weil sie zeigt, wie Differentiale es gestatten, die Kombination aus Nebenbedingung und Extremalität zu modellieren.

Integrale

Es gibt verschiedene Wege zum Integral, ggf. könnten sie kombiniert werden.

1. Weg: Akkumulation als Umkehroperation zur Änderungsbildung

Für die Summe von Änderungen schreibt man $\int dy$. Die Differenz $f(b) - f(a)$ ist die Summe aller Änderungen $dy = f'(x)dx$ von $y = f(x)$ während sich x von a nach b bewegt. Also ist $f(b) - f(a) = \int dy = \int f'(x)dx$.

Daraus folgt: Wenn die (stetige!) Funktion $g(x)$ als Änderungsrate einer Größe $G(x)$ interpretiert werden kann, wenn also gilt $G'(x) = g(x)$, dann ist die bilanzierte Änderung der Größe $G(b) - G(a) = \int g(x)dx$.

Das so gewonnene Verständnis des Integrals ist also das des Stammfunktionsintegrals und die Grundvorstellung ist die der Rekonstruktion eines Bestandes aus seinen Änderungen.

Nachteil ist, dass die Grenzen dieses Stammfunktionsintegrals nicht verständlich werden. Der Hauptsatz ist von vorneherein definitionsleitend - also leider nicht gut als überraschender Satz entdeckbar.

2. Weg: Differentialgleichung

Man startet von einer der üblichen Rekonstruktionsaufgaben, z.B. der Füllaufgabe mit einem stetigen Zufluss $g(t)$ in ein Becken, das anfangs ($t = 0$) das Volumen V_0 enthält. Es fließen $g(t) = a + bt$ Liter Wasser pro Minute zu. Die Änderung des Bestandes V an Wasser ist durch g gegeben, also ist $dV = g \cdot dt$. Für die Entwicklung des Bestandes in Zeitschritten zB von $dt = 5min$ prognostiziert man dann mit der Modellannahme jeweils etwa konstanter Beiträge:

t/min	V	V (mit $a=1, b=1$)
0	$V_0 = 0$	0
5	$V_0 + g(0)dt = 0 + g(0) \cdot dt$	5
10	$V(5) + g(5)dt = g(0) \cdot dt + g(5)dt$	35
15	$V(10) + g(10)dt = g(0) \cdot dt + g(5) \cdot dt + g(10)dt$	90

Wenn mehrere solche Probleme approximativ gelöst werden, schält sich als Gemeinsamkeit die Struktur der Summe von Produkten der Änderungsrate mit dt heraus. Diese Summen sieht man besonders gut, wenn man die numerische Rekonstruktion mit einer Schleife zB über $n = 20$ Schritte in einem Computeralgebrasystem durchläuft. Das Endergebnis für V ist dann ein numerischer Wert. Danach lösche man schrittweise die konkreten Werte, macht also eine sukzessive Dekontextualisierung. Im CAS Maxima dient dazu der kill-Befehl. Nach $kill(dt)$ etwa ist der numerische Wert für dt vergessen und im Ergebnis taucht dt symbolisch auf. Dann löscht man auch V_0 und schließlich g selbst. Man endet bei einer symbolischen Summe der Art

$$g(0) \cdot dt + g(dt) \cdot dt + g(2dt) \cdot dt + \dots$$

Das Argument, dass die Prognose auf Basis der Annahme, dass g im Zeitraum dt nahezu konstant ist, umso besser wird, je kleiner die Änderungen sind, motiviert dann den Grenzwert und man kann für stetige Funktionen das Integral definieren als

$$\int f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Die relevante Grundvorstellung ist hier die der Kumulation von Beiträgen und der verallgemeinerten Produktsumme. In diesem Ansatz ergibt sich der Hauptsatz relativ leicht auf mäßigem

Die Approximation wird – wenn die lineare Approximierbarkeit überhaupt gegeben ist – umso besser, je kleiner die dx werden. Im Grenzwert kann die Summe als das übliche Bogenlängenintegral gedeutet werden.

Partielle Integration

Gewöhnlich wird keine inhaltliche Vorstellung von partieller Integration vermittelt, sondern sie wird formal mittels des Hauptsatzes aus der Produktregel der Differentialrechnung erschlossen. Differentiale ermöglichen (das hat schon Leibniz genutzt) eine inhaltliche Interpretation, die mit Computerwerkzeugen unterstützt werden kann: Für zwei Funktionen u, v erzeuge man die parametrische Raumkurve $(x, u(x), v(x))$. Wenn man die Grafik so dreht, dass in der Projektion eine der Achsen verschwindet, kann man u - x -, v - x - und u - v -Graphen sehen. In letzter Darstellung lässt sich die partielle Integration verstehen:

Das gesamte Rechteck hat den Flächeninhalt $u(x) \cdot v(x)$ und dieser setzt sich additiv zusammen aus $\int v \, du$ (der vertikal schraffierten Fläche) und $\int u \, dv$ (dem horizontal schraffierten Bereich). Zusammen gilt also: $uv = \int v \, du + \int u \, dv = \int v u' \, dx + \int u v' \, dx$.

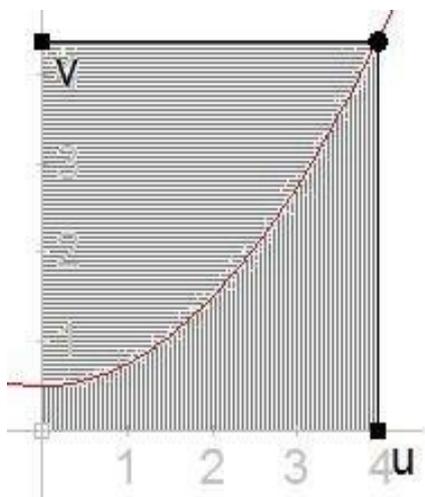


Abbildung : Partielle Integration

Anhang 1

Was	Intuitives Verständnis	Grundlegendes Verständnis	Formales Verständnis
Variablen	x, y, \dots Zahlen oder Größen	$x, y, \dots \in \mathbb{R}$	$x, y, \dots : U \rightarrow \mathbb{R}$ sind Koordinatenfunktionen auf offenen Teilmenge U einer Mannigfaltigkeit M
Differenziale	dx, dy, \dots sind die best-möglichen linearen Prognosen der Änderung von x, y, \dots	$dx, dy, \dots \in \mathbb{R}$ Für jede Relation $g(x, y, \dots) = 0$ wird automatisch die Relation	dx ist eine Funktion $dx : U \rightarrow (T_p M \rightarrow \mathbb{R})$ Der Tangentenvektor $v \in T_p M$ beschreibt

	dx, dy hängen vom aktuellen Zustand und vom Veränderungsprozess	$\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \dots = 0$ an- genommen	die Änderung, $p \in U$ beschreibt den aktuellen Zustand
Lern- voraus- setzungen	Funktionen, Graphen	Grenzwert; partielle Ableitungen	
Possible to under- stand	$d(x + y) = dx + dy$ $d(xy)$ aus linearisierter Rechtecksflächenänderung $d(1/x)$, $d(\sqrt{x})$ aus Gleichungen. $d(\sin(x))$ am Einheitskreis, Kettenregel Lineare Approximation: Wenn f gut prognostizierbar ist, gilt $f(x + dx) - f(x) \approx df = f'(x)dx$ $df=0$ an Extremstelle, Monotonie	alles	alles dx ist ein Maß
Schwierig	$d(\exp(x))$, hence need for limits		
Probleme	Keine optimale Verbindung zum Integralkalkül	Notwendigkeit höherer Differentiale	

Anhang 2

Die Screenshots zeigen die Definition von Differentialen im Computeralgebrasystem Maxima und damit die Lösung der Hüllkurvenaufgabe zur rutschen Leiter:

```

[ Differentiale

[ (%i1) summiere(L):= if L=[] then 0 else L[1]+summiere(rest(L))$
    df(f):=summiere(map(lambda([v],diff(f,v)·d(v)),listofvars(f)))$
    matchdeclare (any,true)$ tellsimpafter(d(any),df(any))$

[ (%i5) d(x^4);
  (%o5) 4 x^3 d(x)

[ (%i6) d(sin(x·y));
  (%o6) x d(y) cos(x y) + d(x) y cos(x y)

[ (%i7) d(sin(x^3));
  (%o7) 3 x^2 d(x) cos(x^3)

[ (%i8) d(u·v);
  (%o8) u d(v) + d(u) v

[ (%i9) d(f(x));
  (%o9) d(x) (d/d x f(x))

```

Anwendung auf die Leiteraufgabe
 a: Fußposition auf x-Achse, y-Höhe des Treffens der y-Achse, L=Leiterlänge

```
(%i10) glgLeiter: a^2+b^2=L^2;
```

```
(%o10) b^2+a^2=L^2
```

```
(%i11) d(glgLeiter);
```

```
(%o11) 2 b d(b)+2 a d(a)=2 L d(L)
```

```
(%i12) glgGerade: y*a=b*a-b*x;
```

```
(%o12) a y=a b-b x
```

Der Punkt (x,y) auf der Leiter soll sich bei der Änderung nicht bewegen (Hüllkurve):

```
(%i13) sys:[glgLeiter, d(glgLeiter),glgGerade,d(glgGerade),d(L)=0,d(x)=0,d(y)=0];
```

```
(%o13) [b^2+a^2=L^2, 2 b d(b)+2 a d(a)=2 L d(L), a y=a b-b x, a d(y)+d(a) y=-b d(x)+d(b)
(a-x)+d(a) b, d(L)=0, d(x)=0, d(y)=0]
```

```
(%i14) lsg:eliminate(sys, [d(x), d(y), d(L), b, a, d(b)]);
```

```
(%o14) [-256 d(a)^28 x^4 y^4 L^2 (-L^14+y^2
(10 L^12-48 x^2 L^10+26 x^4 L^8+98 x^6 L^6-120 x^8 L^4+22 x^10 L^2+12 x^12)+10 x^2 L^12-39 x^4 L^10+y^4
(-39 L^10+26 x^2 L^8+305 x^4 L^6-258 x^6 L^4-119 x^8 L^2+4 x^10)+y^6
(80 L^8+98 x^2 L^6-258 x^4 L^4-332 x^6 L^2-20 x^8)+80 x^6 L^8-95 x^8 L^6+y^8
(-95 L^6-120 x^2 L^4-119 x^4 L^2-20 x^6)+y^10 (66 L^4+22 x^2 L^2+4 x^4)+66 x^10 L^4-25 x^12 L^2+y^12
(12 x^2-25 L^2)+4 y^14+4 x^14)]
```

Das ist eine Liste, die nur noch eine Gleichung enthält.
 Durch Faktorisieren wird die Struktur klar:

```
(%i15) f:factor(lsg[1]);
```

```
(%o15) 256 d(a)^28 x^4 y^4 L^2 (L^2-4 y^2-4 x^2)
(L^6-3 y^2 L^4-3 x^2 L^4+3 y^4 L^2-21 x^2 y^2 L^2+3 x^4 L^2-y^6-3 x^2 y^4-3 x^4 y^2-x^6)
(L^6-3 y^2 L^4-3 x^2 L^4+3 y^4 L^2+3 x^2 y^2 L^2+3 x^4 L^2-y^6+x^2 y^4+x^4 y^2-x^6)
```

```
(%i16) part(f,7);
```

```
(%o16) L^6-3 y^2 L^4-3 x^2 L^4+3 y^4 L^2-21 x^2 y^2 L^2+3 x^4 L^2-y^6-3 x^2 y^4-3 x^4 y^2-x^6
```

```
(%i17) S:solve(subst(L=10,part(f,7)=0),y)$
```

```
(%i18) wxplot2d([rhs(S[2])], [x,0,10])$
```

plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.

