

Universität Augsburg
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Differentialgeometrie

Schriftliche Hausarbeit
zur 1. Staatsprüfung
für das Lehramt an Realschulen

Thema:

**Penrose-Muster und ihr
Zusammenhang zu islamischen
Mustern**

Verfasserin: Saskia Franziska Mayer
Hochvogelstraße 6
86420 Diedorf

Betreuer: Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg

Prüfungstermin: Frühjahr 2014

Abgabetermin: 17.09.2013

Inhaltsverzeichnis

I.	Abbildungsverzeichnis	2
1	Einleitung	5
2	Vom Penrose-Muster zum Muster des Darb-i Imam Schreins	6
3	Das Penrose-Zehneck	9
3.1	Entstehung des Penrose-Zehnecks durch Inflation der Penrose-Rauten.....	9
3.2	Die Inflation des Penrose-Zehnecks.....	13
4	Vergleich zweier Penrose-Pflasterungen	17
4.1	Was ist eine Penrose-Pflasterung?	17
4.2	Die Symmetrie des Penrose-Musters	18
4.3	Die Symmetrie der Zehneck-Penrose-Pflasterung.....	19
4.4	Vergleich der symmetrischen Penrose-Pflasterung und der Zehnecks-Pflasterung	23
5	Vergleich der Zehneck-Penrose-Pflasterung mit der iranischen Pflasterung	24
5.1	Fortsetzung des iranischen Musters der Freitags-Moschee.....	24
5.1.1	Fortsetzung durch Spiegelung.....	24
5.1.2	Fortsetzung durch Selbstähnlichkeit.....	27
5.2	Vergleich der Fortsetzung des Musters der Freitags-Moschee mit dem Muster des Darb-i Imam Schreins	34
5.3	Vergleich der Fortsetzungen der iranischen Pflasterung mit der Zehneck-Pflasterung	35
6	Schluss	38
II.	Anhang	40

I. Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Das symmetrische Penrose-Muster.	6
Abbildung 2: Das "Stern-Zehneck" (blau) und die blütenähnliche Figur (gelb)	6
Abbildung 3: Die Sterne des Penrose-Musters	6
Abbildung 4: Die verschiedenen Kreisformen.	7
Abbildung 5: Geschlossene und offene Rosetten.	7
Abbildung 6: Die „Fußbälle“ im Penrose-Muster.	7
Abbildung 7: Alle „Fußbälle“ im Penrose-Muster.....	8
Abbildung 8: Das neu entstandene Muster.	8
Abbildung 9: Der Darb-i Imam Schrein mit dem Muster, das aus den umrandeten „Fußbällen“ entstanden ist.	8
Abbildung 10: Das regelmäßige Fünfeck, aus dem die Penrose-Halbrauten entstehen.....	9
Abbildung 11: Die bereits symmetrisch ergänzten Rauten.....	9
Abbildung 12: Das regelmäßige Fünfeck mit eingezeichneter Parallele durch den Diagonalen-Schnittpunkt.	10
Abbildung 13: Die aus dem Fünfeck entstandenen Ausgangshalbrhomben	10
Abbildung 14: Möglichkeit 1 der Unterteilung.....	10
Abbildung 15: Möglichkeit 2 der Unterteilung.....	10
Abbildung 16: Die verschiedenen Möglichkeiten das breite Dreieck ein zweites Mal zu unterteilen.	11
Abbildung 17: Die einfach-unterteilten Ausgangs-Halbrhomben.	11
Abbildung 18: Die zweifach-unterteilte Ausgangs-Halbrhombe.....	12
Abbildung 19: Das dreifach-unterteilte Ausgangsdreieck.....	12
Abbildung 20: Das dreifach-unterteilte Dreieck mit eingefärbten schmalen Rhomben und dem bereits erkennbaren „Kreisform“-Element (grün eingezeichnet).	12
Abbildung 21: Das vierfach-unterteilte Ausgangsdreieck.....	12
Abbildung 22: Das vierfach-unterteilte Dreieck, mit (rot) eingezeichneten „Fußbällen“ und noch nicht ganz kompletten „Fußbällen“ (gelb).	12
Abbildung 23: Das symmetrisch ergänzte Dreieck aus Abbildung 20.	13
Abbildung 24: Das symmetrisch ergänzte Dreieck aus Abbildung 22.	13
Abbildung 25: Sechsfach unterteilte Halbrhomben.	13
Abbildung 26: Vorlagen für die Modell-Rhomben.....	14
Abbildung 27: Modelle der beiden Penrose-Rauten, dabei sind die Rauten jeweils die symmetrische Ergänzungen zu den Dreiecken aus Abbildung 13.....	14
Abbildung 28: Das aus den Rhomben, aus Abbildung 27, zusammengesetzte Zehneck. ...	14

Abbildung 29: Die schwarzen Flächen stoßen aneinander, aber es passen nicht mehr drei breite Rhomben an die Schmale.	15
Abbildung 30: Die schwarzen Flächen stoßen nicht aneinander.	15
Abbildung 31: Orange markierter Teil aus Abbildung 29 im Modell-Zehneck	15
Abbildung 32: Das unter Inflation entstandene kleinere Zehneck (rot umrandet).	15
Abbildung 33: Das neue Muster um den oben erwähnten Ring vergrößert.	16
Abbildung 34: Der „Plan“ für das neue Muster. Das rot umrandete kleinere Zehneck mit dem blau gezeichneten Ring, der in Abbildung 33 angelegt ist. Die grün gezeichneten Steine lassen sich als nächstes an das Muster anlegen.	16
Abbildung 35: Das Inflationmuster nach sechsfacher Inflation.	16
Abbildung 36: Die symmetrisch ergänzten Halbrhomben von Abbildung 25.	17
Abbildung 37: Großes Zehneck, das aus den Rauten aus Abbildung 36 zusammengesetzt ist.	18
Abbildung 38: Der Plan eines Penrose-Zehnecks mit seiner Symmetrieachse.	19
Abbildung 39: Das große Zehneck mit allen Symmetrieachsen.	20
Abbildung 40: Das Muster ist zu den „Pseudosymmetrieachsen“ Typ 1 symmetrisch, bis auf den grün markierten Bereich.	20
Abbildung 41: Das Muster ist zu den „Pseudosymmetrieachsen“ vom Typ 2 nur teilweise symmetrisch.	21
Abbildung 42: Die Zehneck-Penrose-Pflasterung mit den eingezeichneten Vergleichsrings. Es wurde der rot eingekreiste Bereich betrachtet.	22
Abbildung 43: Die gleichen Ringe bei der Inflationpflasterung.	22
Abbildung 44: Vergleich der beiden Pflasterungen, mit ihren Übereinstimmungen und Unterschieden. (Links: die symmetrische Penrose-Pflasterung, Rechts: Zehneck-Penrose-Pflasterung)	23
Abbildung 45: Das Muster des Darb-i Imam Schreins. Der mit dem Pfeil markierte Abschnitt ist im Vergleich zum Muster der Freitags-Moschee eher ungenau ausgearbeitet, da dieses Teil des Musters nicht genau in die Symmetrie passt.	24
Abbildung 46: Das Muster der Freitags-Moschee. Hier passen sich alle Teile des Musters in die Symmetrie ein.....	24
Abbildung 47: Die vier Symmetrieachsen und das Drehzentrum (grün eingezeichnet).	25
Abbildung 48: Die Fortsetzung des Musters nach einer Spiegelung an S_1 und S_1'	25
Abbildung 49: Fortsetzung als unendlich langer Streifen.	26
Abbildung 50: Unendliche Pflasterung ohne Begrenzung, entstanden durch Spiegelungen an allen vier Symmetrieachsen.....	26

Abbildung 51: Die Selbstähnlichkeit der Randlinien der dunkelblauen Steine und der hellblauen Linien des Musters.	27
Abbildung 52: Das Linienmuster als Verbindung der Randlinien der dunkelblauen Steine. .	27
Abbildung 53: Das nach Vorlage der dunkelblauen Steine entstandene, fortgesetzte Linienmuster der Freitags-Moschee.	28
Abbildung 54: Das symmetrisch ergänzte Linienmuster.	28
Abbildung 55: Die vorkommenden Mustertypen: Stern mit zehn Zacken, „Schleife“, Fünfeck, Drachen-Viereck, doppeltes Trapez, doppeltes Fünfeck und Sechseck (von links nach rechts).	29
Abbildung 56: Symmetrisch ergänztes Muster der Freitags-Moschee mit den drei vorkommenden Mustertypen aus Abbildung 51.	29
Abbildung 57: Die Ausnahme-Fünfecken in den Randzonen.	30
Abbildung 58: Die Pflasterungen der drei Mustertypen.	30
Abbildung 59: Fortsetzung nach Vorbild des Linienmusters.	31
Abbildung 60: Das mit dem Linienmuster zur Deckung gebrachte Ausgangsmuster.	32
Abbildung 61: Die Pflasterung des "doppelten" Fünfecks (sie ist zur besseren Unterscheidung rot eingefärbt).	32
Abbildung 62: Die Pflasterung der "Schleife" (in grün eingefärbt). Der uni-grüne Bereich bleibt ohne Pflasterung.	33
Abbildung 63: Die Erweiterung der Abbildung 58 mit den doppelten Fünfecken (rot) und einem Teil der Schleifen (grün).	33
Abbildung 64: Linienmuster und zentrisch gestrecktes Linienmuster über die Pflasterung am Darb-i Imam Schrein gelegt.	34
Abbildung 65: Vergleich des Linienmusters mit den Randlinien der schwarzen Steine innerhalb des großen Sterns.	34
Abbildung 66: In die Zehneck-Pflasterung eingezeichnete hellblauen Linien der Freitags-Moschee.	36
Abbildung 67: Das in die Zehneck-Penrose-Pflasterung eingezeichnete Linienmuster.	37
Abbildung 68: Das in das symmetrische Penrose-Muster eingezeichnete Linienmuster (nach Benjamin Schleich).	38
Abbildung 69: Die Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck mit seinem Diagonalenschnitt.	41

1 Einleitung

Bei der Themenfindung zu dieser Zulassungsarbeit war mir besonders wichtig, dass ich eine Aufgabenstellung finde, die Mathematik und Kunst, meine beiden Unterrichtsfächer, miteinander verbindet. Hierbei war mir Professor Jost-Hinrich Eschenburg sehr behilflich, denn er schlug mir ein Thema vor, welches beide Aspekte beinhaltet.

In der vorliegenden Arbeit werde ich den Zusammenhang von Penrose-Mustern mit islamischen Mustern aus dem Iran, die dort als Mosaiken an Schreinen und Moscheen zu sehen sind, aufzeigen.

Die Penrose-Muster wurden in den 1970er Jahren von Roger Penrose entdeckt. Sie sind nicht periodische Muster, die aber dennoch einen hohen Ordnungsgrad besitzen.

Die islamischen Muster, die ich verwendet habe, befinden sich am Darb-i Imam Schrein und an der Freitags-Moschee, die sich in Isfahan im Iran befinden. Beide Muster sind aus dem 17. Jahrhundert und zeigen dasselbe Motiv, wobei das Muster an der Freitags-Moschee sauberer und exakter dargestellt ist. Diese beiden Muster weisen, wie das Penrose-Muster, eine große Komplexität auf, die von Peter J. Lu und Paul J. Steinhardt 2007 entdeckt worden ist.

Zunächst möchte ich erklären, welche Verbindung zwischen einem Penrose-Muster und dem islamischen Muster besteht. In diesem Zusammenhang existiert ein Zehneck, im Penrose-Muster, welches die Verbindung zum islamischen Muster herstellt. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, wie verschiedene Formen des Penrose-Musters auf den Penrose-Rauten entstehen, nämlich durch die wichtigste Eigenschaft der Penrose-Muster, die Inflationseigenschaft.

Das bereits genannte Zehneck besitzt ebenfalls die Inflationseigenschaft, wodurch erneut ein Penrose-Muster, die Zehneck-Penrose-Pflasterung entsteht. Diese Pflasterung ist vom Ausgangsmuster verschieden.

Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt einerseits auf dem Versuch der Fortsetzung der Pflasterung der Freitags-Moschee. Dies kann auf zweierlei Weisen geschehen. Andererseits liegt mein Fokus auf dem Vergleich der Zehneck-Pflasterung mit dem Muster des Darb-i Imam Schreins bzw. der Freitags-Moschee.

2 Vom Penrose-Muster zum Muster des Darb-i Imam Schreins

Penrose-Muster „sind Fliesen- oder Kachelmuster, die aus zwei Sorten von rhombenförmigen Fliesen bestehen, einer breiten und einer schmalen. Diese Rhomben (Rauten) sind die symmetrischen Ergänzungen der beiden gleichschenkligen Dreiecke, die im Fünfeck mit seinem Diagonalenpentagramm vorkommen [...]“¹

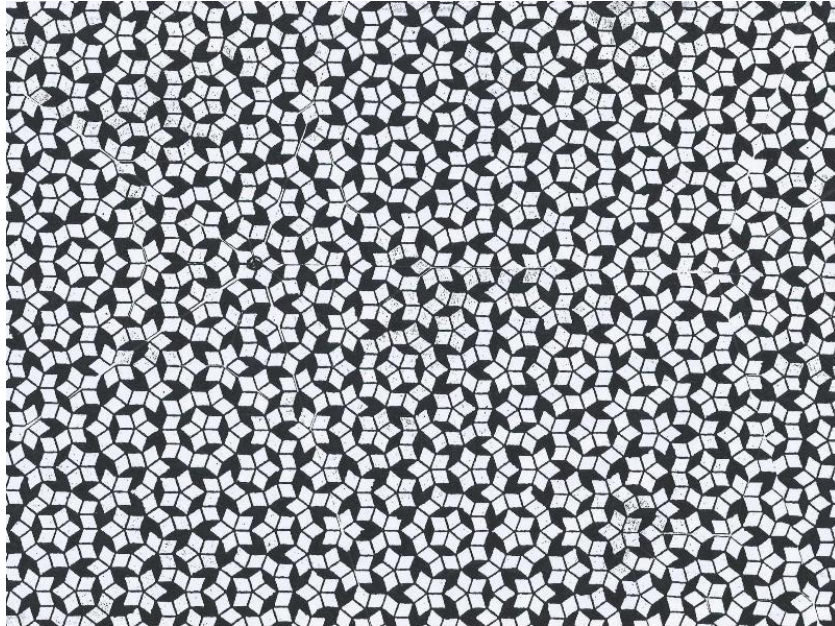


Abbildung 1: Das symmetrische Penrose-Muster.

Betrachtet man sich das Penrose-Muster (Abbildung 1) erkennt man verschiedene Formen, die sich über das gesamte Muster verteilt wiederholen. Als erstes stechen die „Sterne“, bestehend aus fünf breiten Rhomben, ins Auge (Abbildung 3).

Die „Sterne“ werden auf zweierlei Arten von schmalen Rhomben umschlossen (Abbildung 2). Die einen sind von fünf schmalen Rhomben umgeben und bilden ein regelmäßiges Zehneck (Stern-Zehneck), die anderen „Sterne“ bilden eine blütenähnliche Figur. Dies ist auf die beiden schmalen Rauten zurückzuführen, die jeweils an den breiten Rauten angebracht sind.



Abbildung 3: Die Sterne des Penrose-Musters



Abbildung 2: Das "Stern-Zehneck" (blau) und die blütenähnliche Figur (gelb)

¹ Eschenburg, J.-H.: Die Zahl fünf und die Quasikristalle, Augsburg, 2004, S.8

Die „Stern-Zehnecke“ werden von verschiedenen „Kreisformen“ umschlossen. Diese werden aus breiten Rhomben gebildet (Abbildung 4). Dabei kann man offene und geschlossene Kreisformen unterscheiden.

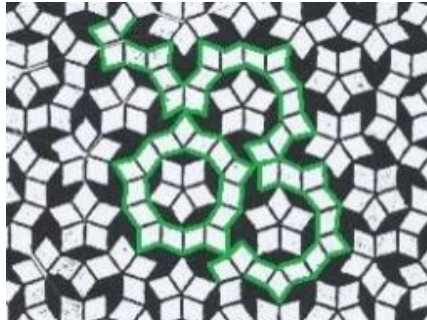


Abbildung 4: Die verschiedenen Kreisformen.

Konzentriert man sich auf die geschlossenen und offenen „Kreisformen“, findet man geschlossene und offene Rosetten (Abbildung 5).

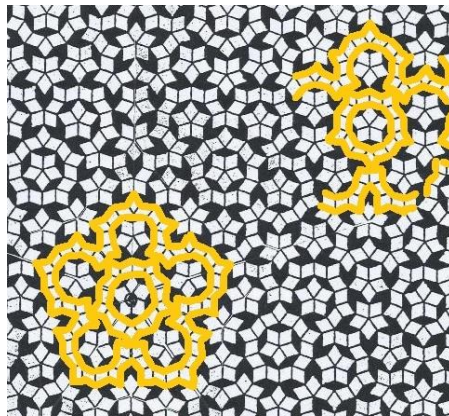


Abbildung 5: Geschlossene und offene Rosetten.

Bei noch genauerer Betrachtung des Penrose-Musters erkennt man „Fußbälle“ (Abbildung 6). Diese „Fußbälle“ sind Zehnecke, die aus je fünf breiten und fünf schmalen Rhomben bestehen, welche sich teilweise überschneiden.

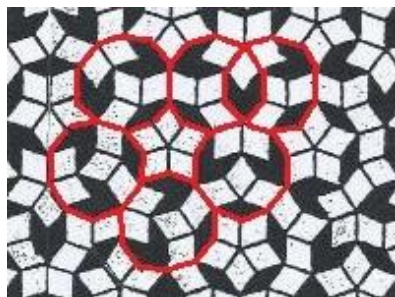


Abbildung 6: Die „Fußbälle“ im Penrose-Muster.

Wenn alle „Fußbälle“ im Penrose-Muster eingekreist werden, so entsteht ein völlig neues Muster (Abbildung 7). Markiert man einige spezielle „Fußbälle“ bzw. Penrose-Zehnecke in

dem Muster farbig, kommt ein weiteres Muster zum Vorschein (Abbildung 8). Im Vergleich zum Penrose-Muster besitzt das neu entstandene Muster ein nach oben verschobenes Symmetrie-Zentrum (grün markiert). Verbindet man die äußeren Punkte, entsteht ein Zehneck. Somit wird die Fünfer-Symmetrie des Penrose-Musters (mehr dazu im Kapitel 4.2) in eine Zehner-Symmetrie überführt.

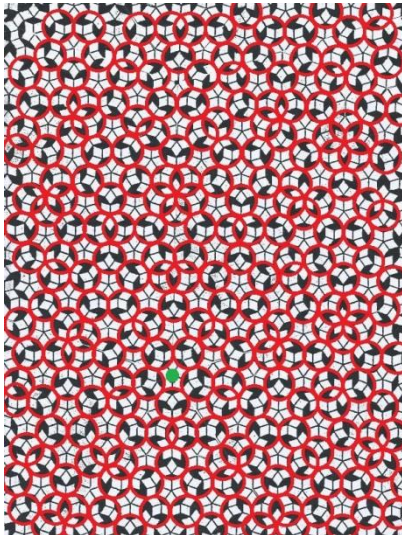


Abbildung 7: Alle „Fußbälle“ im Penrose-Muster.

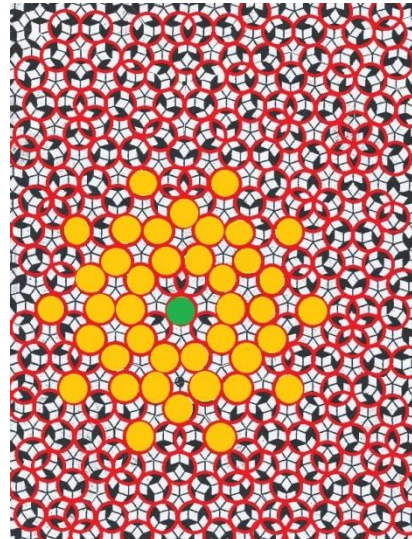


Abbildung 8: Das neu entstandene Muster.

Legt man nun dieses neue Muster auf die Fotografie des Musters am Darb-i Imam Schrein stellt man verblüffenderweise fest, dass die „Fußbälle“ des Penrose-Musters deckungsgleich mit den weißen Zehneckern des Musters des Schreins sind (Abbildung 9).

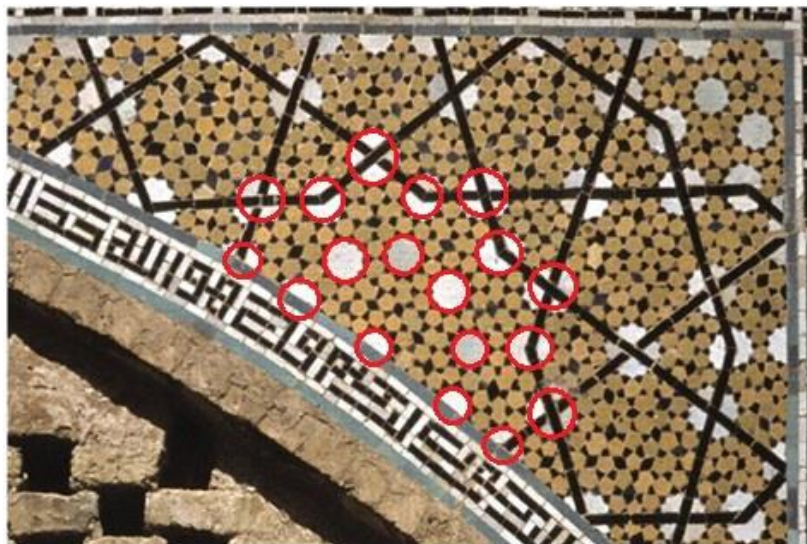


Abbildung 9: Der Darb-i Imam Schrein mit dem Muster, das aus den umrandeten „Fußbällen“ entstanden ist.

3 Das Penrose-Zehneck

3.1 Entstehung des Penrose-Zehnecks durch Inflation der Penrose-Rauten

Um die Entstehung der oben genannten verschiedenen Formen, die sich im Penrose-Muster wiederholen, zu verstehen, müssen die Penrose-Rauten analysiert werden.

Die von Roger Penrose in den 1970er Jahren entdeckten Penrose-Muster sind Muster, die der Zahl fünf folgen. Es sind „ebene Muster, die eine strenge lokale und globale Ordnung aufweisen, aber keine Periodizität“².

Durch die Unterteilung eines regelmäßigen Fünfecks mit Hilfe zwei seiner Diagonalen entstehen zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke (Abbildung 10), deren symmetrischen Ergänzungen die Penrose-Rauten bilden (Abbildung 11).

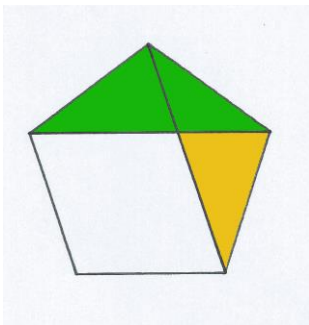


Abbildung 10: Das regelmäßige Fünfeck, aus dem die Penrose-Halbrauten entstehen.

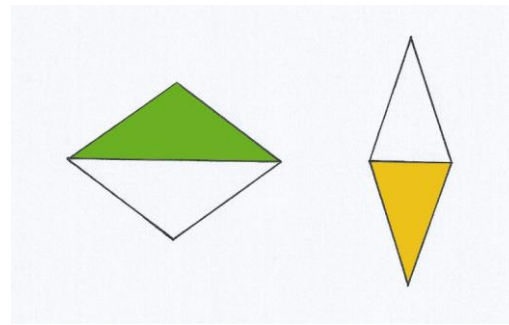


Abbildung 11: Die bereits symmetrisch ergänzten Rauten.

Die definierende Eigenschaft der Penrose-Muster ist die Deflations- bzw. Inflationseigenschaft. Inflation beschreibt, dass man ein geometrisches Gebilde zum Beispiel eine Penrose-Halbrhomben beliebig oft in formgleiche kleinere Penrose-Halbrhomben unterteilen kann, d.h. die Unterteilung wird immer feiner. Die Deflation ist die Umkehrung der Inflation, man fasst also die feine Unterteilung zu einer größeren zusammen, die in sich nun das gleiche Muster hat. Die Deflation ist im Vergleich zur Inflation nicht eindeutig³ und wird somit weiterhin in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Wie oben betrachtet, bilden sich die Halbrhomben der Penrose-Rhomben durch den Diagonalschnitt eines regelmäßigen Fünfecks. Diese lassen sich durch eine Parallele zu einer Fünfeckseite durch den Diagonalen-Schnittpunkt in kleinere Dreiecke zerlegen (Abbildung 12).

² Eschenburg, J.-H.: Die Zahl fünf und die Quasikristalle, Augsburg, 2004, S.8

³ Page, R.: Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode, Zulassungsarbeit an der Universität Augsburg, 2008 S. 14

Dadurch wird die breite Halbrhombe in zwei breite und ein schmales Dreieck, während die schmale Halbrhombe in ein breites und ein schmales Dreieck geteilt wird (Abbildung 13). Die kleinen breiten Dreiecke sind jeweils ähnlich zu der breiten Halbrhombe und die kleinen schmalen zu der schmalen Halbrhombe, wobei die kleineren Dreiecke genau um den goldenen Faktor Φ kleiner sind als die größeren Halbrhomben.

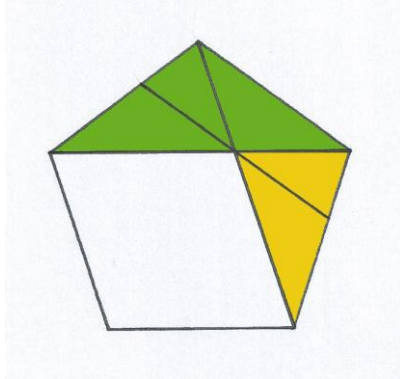


Abbildung 12: Das regelmäßige Fünfeck mit eingezeichneter Parallele durch den Diagonalen-Schnittpunkt.

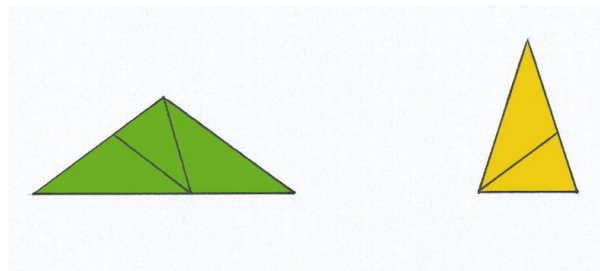


Abbildung 13: Die aus dem Fünfeck entstandenen Ausgangshalbrhomben

Diese Dreiecke können jetzt wieder auf die gleiche Art unterteilt werden, wie oben dargestellt. Dadurch werden die breiten Dreiecke erneut in zwei breite Dreiecke und ein schmales Dreieck, die schmalen Dreiecke in ein schmales und ein breites Dreieck zerlegt. Diese neuen kleineren Dreiecke sind wieder ähnlich zu den beiden Ausgangs-Halbrhomben (Beweis siehe Anhang).

Um die Dreiecke eindeutig unterteilen zu können, muss vorausgesetzt werden, dass die Unterteilung jeder Kante von beiden Seiten gleich ist.

Das heißt, ist eine Kante unterteilt, muss die anliegende Kante ebenfalls unterteilt sein, bzw. ist die Kante nicht unterteilt, darf auch die anliegende Kante nicht unterteilt sein.

Beginnen wir mit der breiten Halbrhombe und darin mit dem mittleren schmalen Dreieck. Hier hat man zwei Möglichkeiten, das schmale Dreieck zu unterteilen (Abbildung 14 und Abbildung 15).

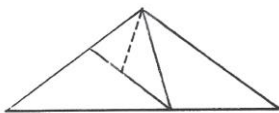


Abbildung 14: Möglichkeit 1 der Unterteilung.

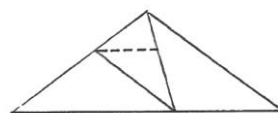


Abbildung 15: Möglichkeit 2 der Unterteilung

Um die richtige der beiden Möglichkeiten herauszufinden, versucht man die zwei breiten Dreiecke zu unterteilen, natürlich unter der Voraussetzung der Eindeutigkeit der Unterteilung.

Dabei stellt man fest, dass man nur bei der ersten Variante die Möglichkeit hat, die breiten Dreiecke unter Berücksichtigung dieser Voraussetzung weiter zu zerteilen.

Wir versuchen nun, die breiten Dreiecke aus Abbildung 14 zu unterteilen und erhalten vier Möglichkeiten (Abbildung 16). Auch hier kann festgestellt werden, dass nur eine Variante existiert, die Dreiecke zu zerteilen, damit die Eindeutigkeit der Unterteilung erfüllt ist. Bei der Halbrhomben links oben ist dies der Fall (rot umrandet).

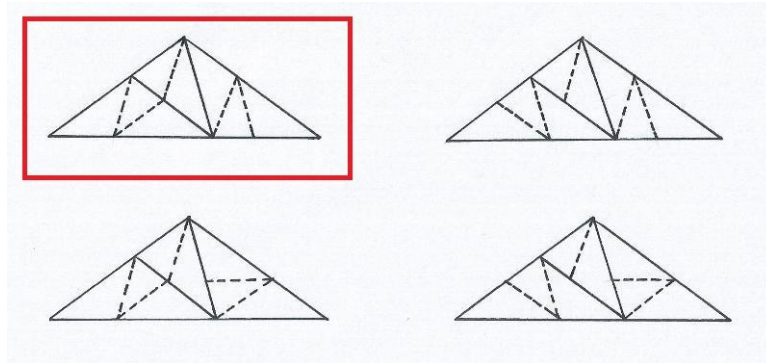


Abbildung 16: Die verschiedenen Möglichkeiten das breite Dreieck ein zweites Mal zu unterteilen.

Dieses Verfahren funktioniert analog mit der schmalen Halbrhomben, sodass wir folgende beiden, einfach-unterteilte Ausgangs-Halbrhomben erhalten (Abbildung 17):

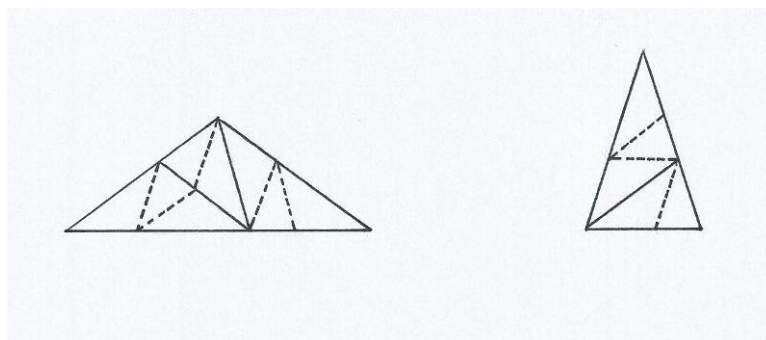


Abbildung 17: Die einfach-unterteilten Ausgangs-Halbrhomben.

Diesen oben beschriebenen Unterteilungsprozess nennt man Inflation. Dabei wird, wie oben bereits erläutert, jedes breite Dreieck in zwei kleinere breite und ein schmales Dreieck zerlegt, jedes schmale Dreieck dabei in ein breites und ein schmales. Die jeweils kleineren Dreiecke sind dann wiederum genau um den goldenen Faktor Φ kleiner. Wiederholt man diesen Prozess mit den unterteilten Halbrhomben aus Abbildung 17, so gibt es bei weiterer Unterteilung aufgrund der Bedingung der eindeutigen Kantenunterteilung immer nur eine Möglichkeit, die Dreiecke weiter zu unterteilen!⁴

⁴ Vgl. Page, R.: Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode, Zulassungsarbeit an der Universität Augsburg, 2008; S. 8-14.

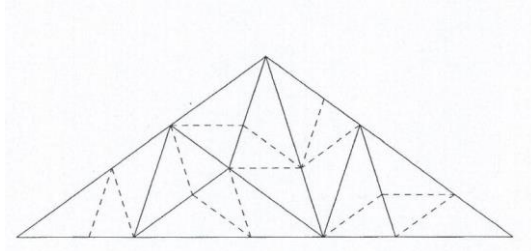


Abbildung 18: Die zweifach-unterteilte Ausgangs-Halbrhombe.

In Abbildung 18 erkennt man, wie sich die Unterteilungen wieder zu breiten und schmalen Rhomben ergänzen, aus denen die oben genannten Figuren (Abbildungen 2-5) bestehen. Bei genauerer Betrachtung lässt sich erahnen, dass diese Figuren durch Inflation der Penrose-Halbrhomben entstehen.

Wird der Inflationsprozess weitergeführt, lassen sich die Figuren im feineren Muster erkennen (Abbildung 19 und Abbildung 21). Verdeutlicht wird dies, indem man die schmalen Rhomben farblich absetzt (Abbildung 20 und Abbildung 22).

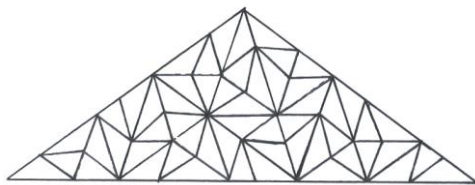


Abbildung 19: Das dreifach-unterteilte Ausgangsdreieck.

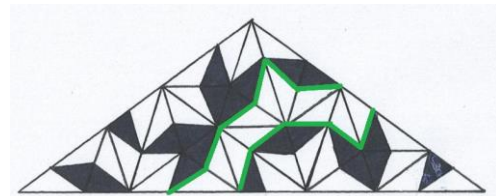


Abbildung 20: Das dreifach-unterteilte Dreieck mit eingefärbten schmalen Rhomben und dem bereits erkennbaren „Kreisform“-Element (grün eingezeichnet).

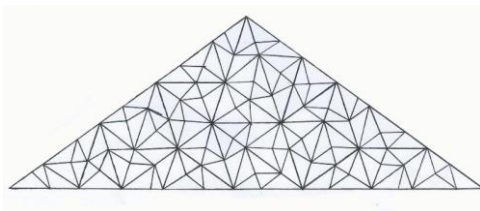


Abbildung 21: Das vierfach-unterteilte Ausgangsdreieck.

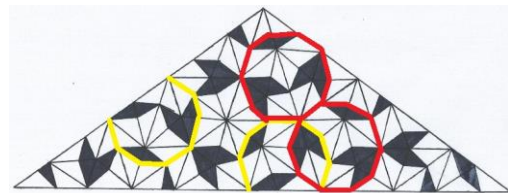


Abbildung 22: Das vierfach-unterteilte Dreieck, mit (rot) eingezeichneten „Fußbällen“ und noch nicht ganz kompletten „Fußbällen“ (gelb).

In Abbildung 22 erkennt man die „Sterne“, die offenen „Kreisformen“ und die „Fußbälle“. Ergänzt man die Dreiecke symmetrisch zu einer Raute (Abbildung 23 und Abbildung 24), sieht man, dass der „Fußball“ bereits im verdoppelten Dreieck von Abbildung 20 sichtbar ist. Jedoch zeigt das verdoppelte Dreieck aus Abbildung 24 alle oben besprochenen Figuren.

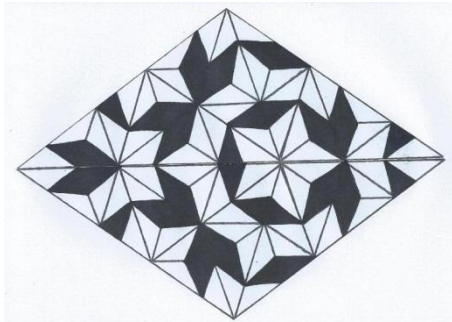


Abbildung 23: Das symmetrisch ergänzte Dreieck aus
Abbildung 20.

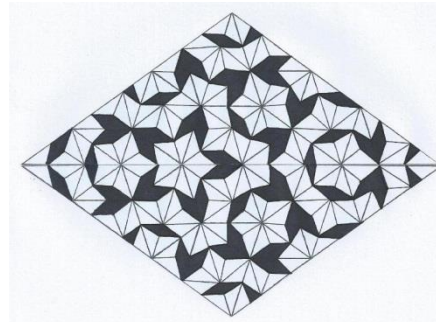


Abbildung 24: Das symmetrisch ergänzte Dreieck aus
Abbildung 22.

Das Inflationsverfahren lässt sich unendlich oft fortsetzen, dabei erhält man eine immer feinere Unterteilung der Penrose-Halbrhomben. Nach sechs Inflationsschritten werden die Figuren sehr deutlich sichtbar (Abbildung 25).

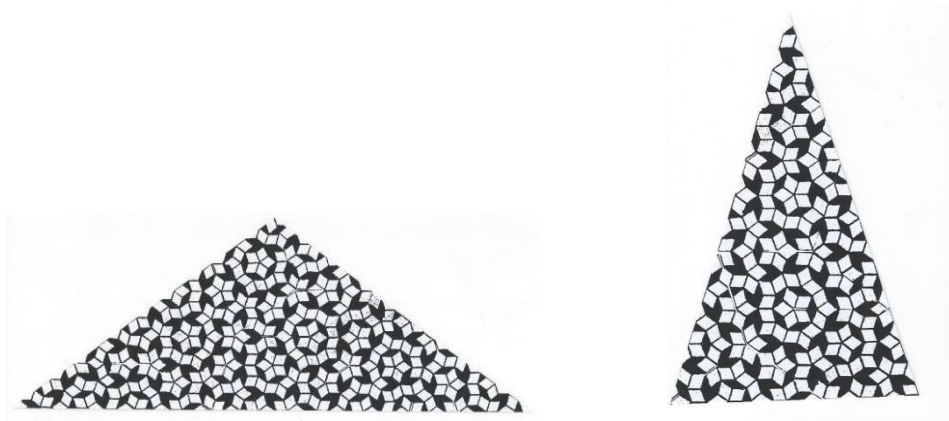


Abbildung 25: Sechsfach unterteilte Halbrhomben.

3.2 Die Inflation des Penrose-Zehnecks

Stellt man ein Zehneck des Penrose-Musters, d.h. einen „Fußball“, aus folgenden beiden Modell-Rhomben (Abbildung 27) dar, stellt man fest, dass dieses Zehneck aufgrund der Unterteilung der Modell-Rhomben eindeutig ist (Abbildung 28: Das aus den Rhomben, aus Abbildung 27, zusammengesetzte Zehneck.). Auch hier gilt das Prinzip der eindeutigen Kantenunterteilung.

Die Bausteine des Modells sind nach der Vorlage der gespiegelten Ausgangs-Halbrhomben aus Abbildung 13 gefertigt (Abbildung 26).

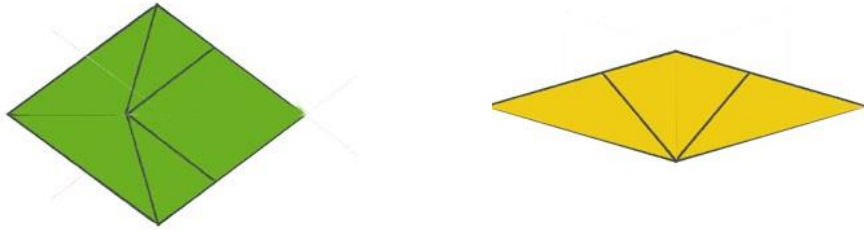


Abbildung 26: Vorlagen für die Modell-Rhomben



Abbildung 27: Modelle der beiden Penrose-Rauten, dabei sind die Rauten jeweils die symmetrische Ergänzungen zu den Dreiecken aus Abbildung 13.



Abbildung 28: Das aus den Rhomben, aus Abbildung 27, zusammengesetzte Zehneck.

Begründung der Eindeutigkeit:

Würde zum Beispiel die unterste schmale Rhombe um 180° gedreht liegen, dann müssten auch die breiten Rhomben gedreht werden. Dadurch würden aber nur noch zwei statt drei der breiten Rhomben an die schmale Rhombe passen (Abbildung 29). Die entstandene Figur ist ein anderer Teil des Zehnecks (Abbildung 31). Anderenfalls würden die schwarzen Flächen nicht aneinander liegen (Abbildung 30).

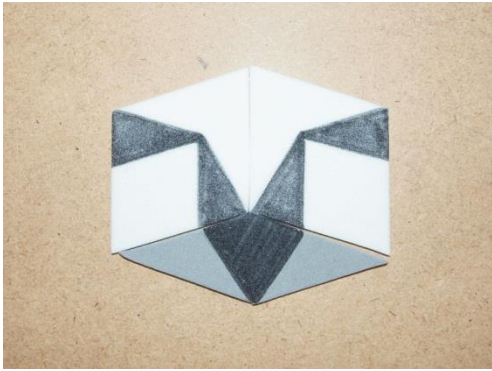


Abbildung 29: Die schwarzen Flächen stoßen aneinander, aber es passen nicht mehr drei breite Rhomben an die Schmale.

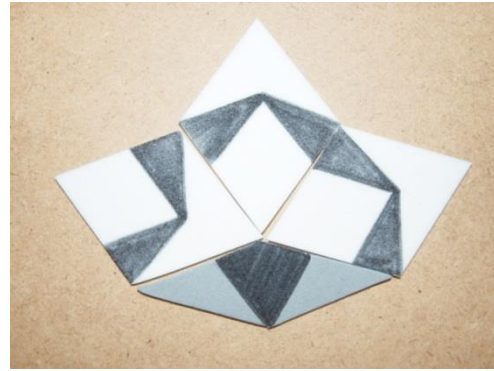


Abbildung 30: Die schwarzen Flächen stoßen nicht aneinander.



Abbildung 31: Orange markierter Teil aus Abbildung 29 im Modell-Zehneck

Betrachtet man nun dieses Zehneck (Abbildung 28) unter dem Aspekt der oben beschriebenen Inflation, entdeckt man in der Mitte ein weiteres Zehneck. Die schwarzen Flächen werden durch das Anlegen der Bausteine zu den schmalen Rhomben. Die breiten Rhomben erkennt man an einigen Stellen sehr gut, an anderen jedoch muss man sich erst einen unterteilenden Strich denken (Abbildung 32).

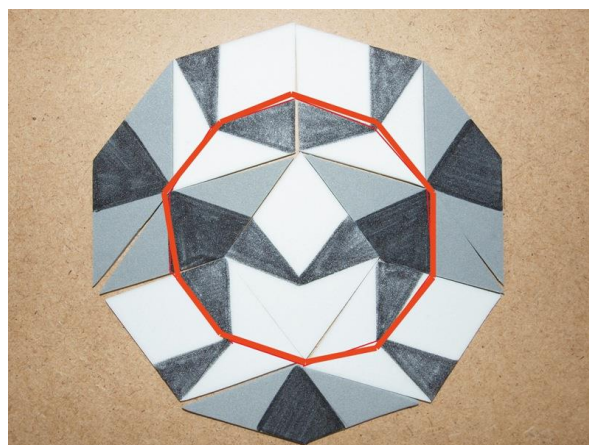


Abbildung 32: Das unter Inflation entstandene kleinere Zehneck (rot umrandet).

Dieses kleinere Zehneck ist zum großen ursprünglichen Zehneck ähnlich. Es ist aus der gleichen Anzahl von breiten und schmalen Rhomben zusammengesetzt. Die Beiden unterscheiden sich lediglich in ihrer Lage durch eine Drehung um 180° .

Durch das Prinzip der Selbstähnlichkeit (Inflationsmethode) ist es möglich, auf der Grundlage eines Zehnecks ein größeres Muster herzustellen. Die Fortsetzung wird möglich, da das rot eingezeichnete Zehneck (Abbildung 32) etwas kleiner ist als das Ausgangs-Zehneck und dadurch ein zusätzlicher Ring um das Zehneck herum zu sehen ist, wie auch in der Abbildung sichtbar. Hierbei funktioniert das kleine eingezeichnete Zehneck als „Plan“ für das große Muster. Nach der Vorlage des sichtbar gewordenen Rings, kann man diesen auch an das große Zehneck ansetzen (Abbildung 33). Daraus lässt sich wiederum der „Plan“ fortsetzen (Abbildung 34) und dadurch wieder das große Muster usw. Das neu entstandene Muster wird im Folgenden „Inflationsmuster“ genannt (Abbildung 35).



Abbildung 33: Das neue Muster um den oben erwähnten Ring vergrößert.

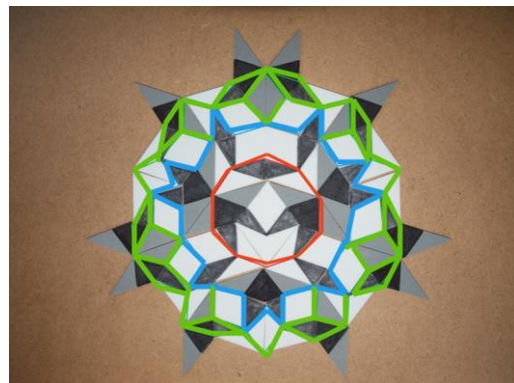


Abbildung 34: Der „Plan“ für das neue Muster. Das rot umrandete kleinere Zehneck mit dem blau gezeichneten Ring, der in Abbildung 33 angelegt ist.



Abbildung 35: Das Inflationsmuster nach sechsfacher Inflation.

4 Vergleich zweier Penrose-Pflasterungen

4.1 Was ist eine Penrose-Pflasterung?

Das symmetrische Penrose-Muster (Abbildung 1) ist eine der beiden fünf-symmetrischen Penrose-Pflasterungen, „die durch Inflation wechselseitig auseinander hervorgehen“⁵. Dabei unterscheiden wir zwischen endlichen und unendlichen Penrose-Pflasterungen.

Endliche Penrose-Pflasterungen sind zum Beispiel die einfach unterteilten Dreiecke (Abbildung 17), diese nennen wir P_0 . Wir haben nun eine endliche Penrose-Pflasterung P , die aus schmalen und breiten Dreiecken zusammengesetzt ist. Unterteilt man jetzt jedes Dreieck nach dem Vorbild von P_0 und mit der Vorgabe der eindeutigen Kantenunterteilung, so entsteht eine neue endliche Penrose-Pflasterung P' .

Eine unendliche Penrose-Pflasterung bedeckt zum Beispiel eine ganze Ebene. Jeder Teil der unendlichen Pflasterung besteht aus beiden Arten von Dreiecken, die außer am Rand immer als Rauten vorkommen, da sonst die Kanten der Pflastersteine nicht zueinander passen. Die unendliche Pflasterung ist eine Penrose-Pflasterung, wenn jeder endliche Teil zu einer der oben beschriebenen endlichen Penrose-Pflasterung gehört.

Wie oben bereits erwähnt, kann man durch Inflation der Penrose-Halbrhomben ein Muster auf diesen entstehen lassen. Dieses Muster ist wiederum eine Zusammensetzung der zwei Penrose-Rhomben. Ergänzt man nun die beiden Halbrhomben aus Abbildung 25 symmetrisch zu Rauten, erhält man diese zwei Penrose-Rauten (Abbildung 36).

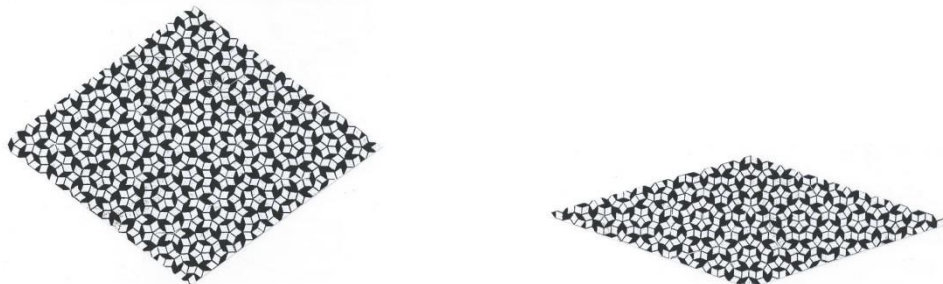


Abbildung 36: Die symmetrisch ergänzten Halbrhomben von Abbildung 25.

Setzen wir nun das Penrose-Zehneck aus jeweils fünf dieser beiden Rauten zusammen, erhalten wir ein großes Zehneck, welches scheinbar mit dem Penrose-Muster versehen ist. Dieses Zehneck und sein Muster nennen wir Zehneck-Penrose-Pflasterung (Abbildung 37).

⁵ Eschenburg, J.-H.: Die Zahl fünf und die Quasikristalle, Augsburg, 2004, S.17

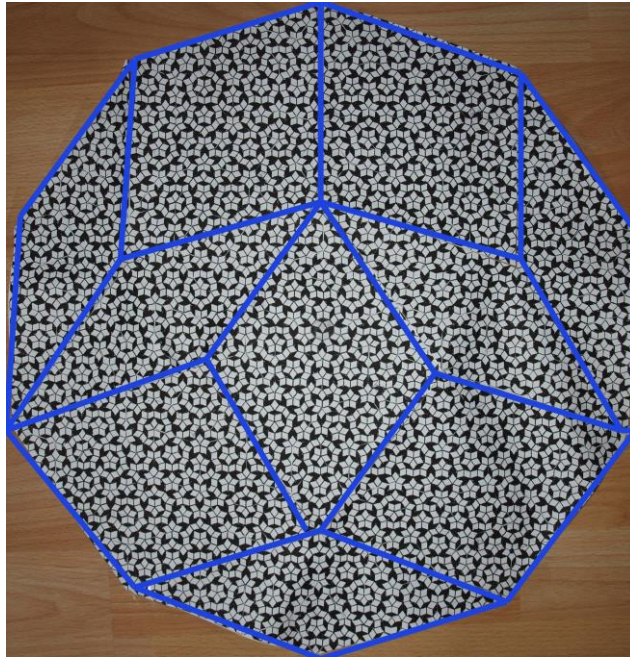
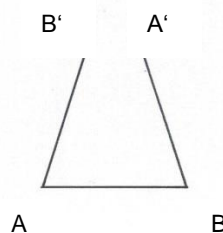


Abbildung 37: Großes Zehneck, das aus den Rauten aus Abbildung 36 zusammengesetzt ist.

Dieses Zehneck ist eindeutig, denn die kleinen Rauten des Musters passen nur auf eine Weise exakt zusammen. Ansonsten würden sich die Rauten des Musters an den Rändern der großen Rauten nicht richtig verdoppeln.

4.2 Die Symmetrie des Penrose-Musters

Aufgrund der Entstehung des Penrose-Musters aus dem regelmäßigen Fünfeck, gibt es im Penrose-Muster, wie im Fünfeck, nur ein Symmetriezentrum. Weshalb es in der Fünfer-Symmetrie nur ein Symmetriezentrum geben kann, lässt sich durch einen kleinen Beweis erklären: Wir nehmen an, wir hätten zwei Symmetriezentren A und B, die den kleinstmöglichen Abstand zueinander haben. Drehen wir nun B um 72° ($=360^\circ:5$) um das Symmetriezentrum A und erhalten B', jetzt drehen wir A um B und erhalten A'. A' und B' liegen aber jetzt näher zusammen als A und B, welche wir vorher als am nächsten zusammen liegende Symmetriezentren definiert haben. Aus diesem Widerspruch folgt, dass es in der Fünfer-Symmetrie nur ein Symmetriezentrum geben kann.



4.3 Die Symmetrie der Zehneck-Penrose-Pflasterung

Aus der Geometrie ist bekannt, dass ein regelmäßiges Zehneck grundsätzlich fünf verschiedene Symmetrieachsen hat, nämlich die Diagonalen der zehn Ecken.

Da unser Zehneck sich jedoch aus zehn Rauten von zwei verschiedenen Typen zusammensetzt und eine Aufteilung hat, wie in Abbildung 38 dargestellt, gibt es in diesem Fall nur eine Hauptsymmetrieachse (rot eingezeichnet), zu der das Muster des kompletten Zehnecks achsensymmetrisch ist. Die anderen vier Symmetrieachsen (Abbildung 39) sind sogenannte „Pseudosymmetrieachsen“, denn vor allem in der Nähe des Mittelpunktes (gelb umkreist) des Zehnecks liegt zu diesen Achsen keine Symmetrie vor. Von diesen „Pseudosymmetrieachsen“ gibt es zwei verschiedene Typen, Typ 1 (dunkelblau eingezeichnet) und Typ 2 (hellblau eingezeichnet).

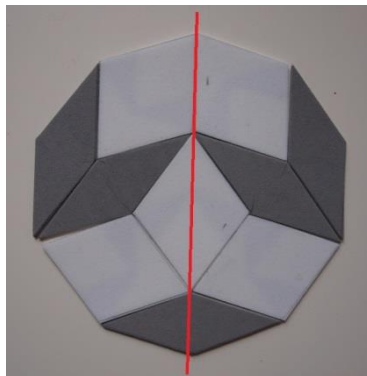


Abbildung 38: Der Plan eines Penrose-Zehnecks mit seiner Symmetrieachse.

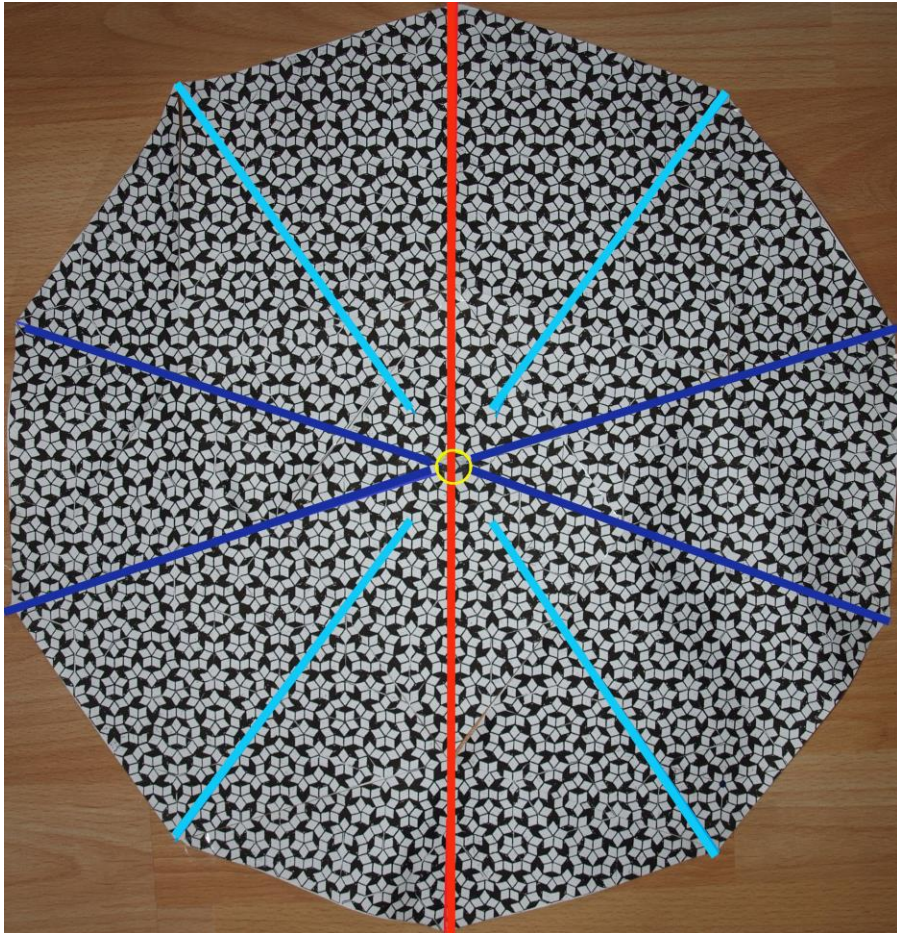


Abbildung 39: Das große Zehneck mit allen Symmetrieachsen.

Das Muster ist zu den „Pseudosymmetrieachsen“ Typ 1 bis zu einem Ring aus Zehneckchen (grün markiert) um den Mittelpunkt des großen Zehnecks herum nicht symmetrisch (Abbildung 40). Außerhalb dieses Rings bis zum Rand des großen Zehnecks ist es dann achsensymmetrisch zu diesen Achsen.

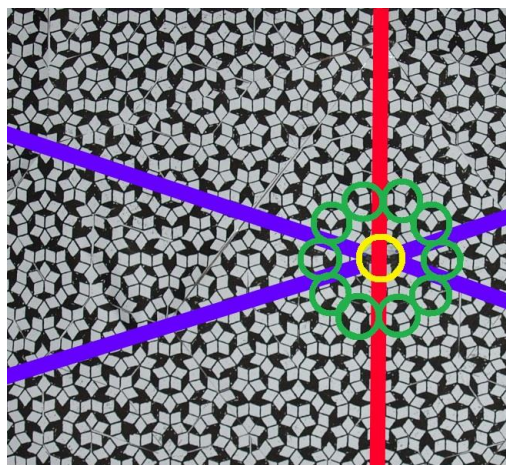


Abbildung 40: Das Muster ist zu den „Pseudosymmetrieachsen“ Typ 1 symmetrisch, bis auf den grün markierten Bereich.

Zu den „Pseudosymmetrieachsen“ Typ 2 ist das Muster im Bereich des Mittelpunktes nicht symmetrisch, daher ist auch die Achse nicht ganz bis zu diesem eingezeichnet. Ab dem Beginn der Achse lassen sich aber immer wieder Fehler (rot markiert) in der Symmetrie in den Bereichen von Ringen finden. Diese Ringe (in Abbildung 41 gelb markiert) sind ebenfalls Zehnecke, bei denen die Seiten parallel zu den Außenkanten des großen Zehnecks verlaufen. Genau an der Linie dieser Ringe findet sich immer genau ein Fehler zwischen den verschiedenen Achsen. Zwischen den Ringen gibt es entlang einer Achse ebenfalls Fehler (rot eingekreist), genau in der Mitte zwischen den Symmetrieachsen. Jedoch am Rand des großen Zehnecks stimmt die Symmetrie komplett.

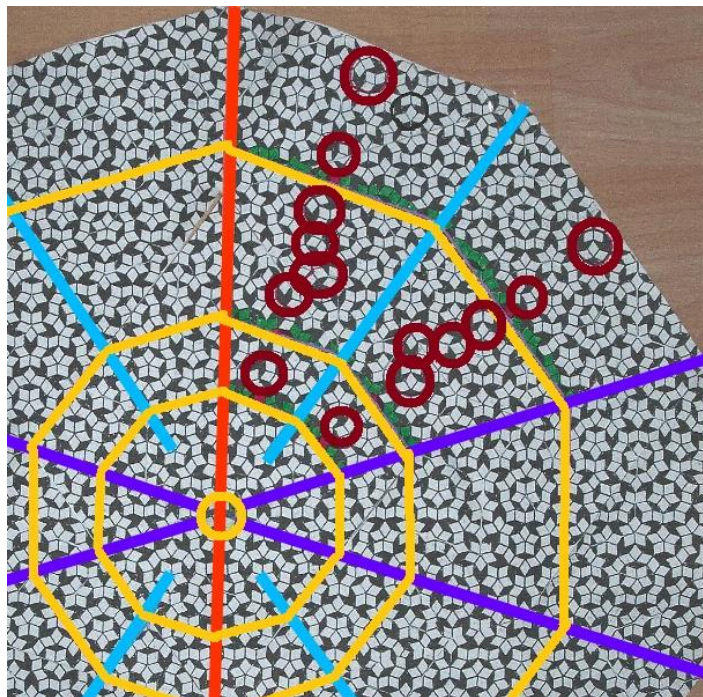


Abbildung 41: Das Muster ist zu den „Pseudosymmetrieachsen“ vom Typ 2 nur teilweise symmetrisch.

Somit ist nachgewiesen, dass das Penrose-Zehneck nur eine einzige „wahre“ Symmetrieachse hat, nämlich die rot gezeichnete.

Wird die Zehneck-Penrose-Pflasterung mit unserer Inflationspflasterung (Abbildung 35) verglichen, kann festgestellt werden, dass das im Mittelpunkt liegende Zehneck der Zehneck-Penrose-Pflasterung und das im Mittelpunkt liegende Zehneck des Inflationsmusters identisch ist. Sie unterscheiden sich vom Ausgangszehneck (Abbildung 38) durch eine Drehung um 180° . Vergleicht man die weiteren Ringe um die in der Mitte liegenden Zehnecke, entdeckt man auch hier eine Übereinstimmung der beiden Muster (Abbildung 42 und Abbildung 43).

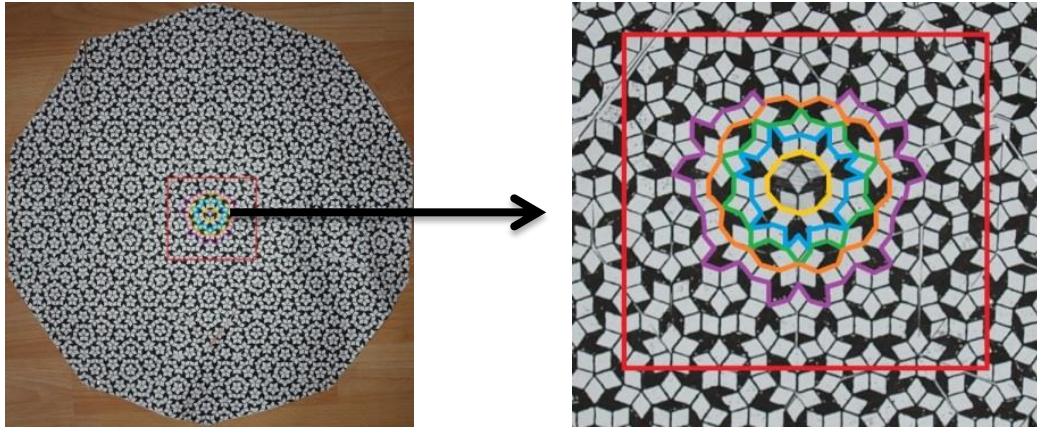


Abbildung 42: Die Zehneck-Pflasterung mit den eingezeichneten Vergleichsringsen. Es wurde der rot eingekreiste Bereich betrachtet.

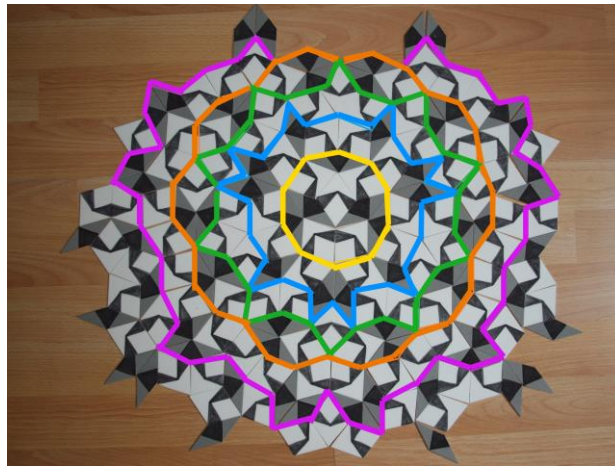


Abbildung 43: Die gleichen Ringe bei der Inflationpflasterung.

Weshalb ist das so? Das Muster auf den Rhomben, die die Zehneck-Penrose-Pflasterung bilden (Abbildung 36), ist aus Inflation der jeweiligen Halbrhomben entstanden, die dann symmetrisch ergänzt worden sind. Das heißt, das kleine gelb umkreiste Zehneck ist ein Ergebnis der Inflation und genau formgleich zum großen Zehneck. Der Unterschied liegt, wie im Kapitel 3.3 in einer 180° -Drehung. Daraus folgt, dass die Symmetrieachse auch bei Inflation die Gleiche bleibt, es dreht sich das gesamte Muster um 180° , die Symmetrieachse kommt also wieder auf sich selbst zum Liegen.

Aus diesen beiden Erkenntnissen lässt sich schließen, dass die Zehneck-Penrose-Pflasterung kein Drehzentrum der Ordnung 5 besitzen kann. Dies lässt sich mit der Inflation begründen, denn diese dreht jeden Punkt um 180° . Folglich müsste die Zehneck-Penrose-Pflasterung zwei Drehzentren der Ordnung 5 haben, denn das erste, welches irgendwo innerhalb des Musters liegt, würde sich durch die Inflation um 180° drehen und ein zweites würde entstehen. Dies ist jedoch nach dem Beweis aus Kapitel 4.1 nicht möglich.

Der einzige Punkt, der auch nach der Inflation immer noch der gleiche ist, ist der Mittelpunkt des Zehnecks. Dieser ist jedoch, wie oben bereits gezeigt, ebenfalls kein Drehzentrum.

4.4 Vergleich der symmetrischen Penrose-Pflasterung und der Zehnecks-Pflasterung

Aus den Ergebnissen der Kapitel 4.2 und 4.3 lässt sich folgern, dass die 5-symmetrische Penrose-Pflasterung und die Zehnecks-Pflasterung unterschiedlich sind.

Die grün eingekreisten Partien, vorzugsweise Zehneck, stimmen überein, wenn man die symmetrische Penrose-Pflasterung und die Zehneck-Penrose-Pflasterung übereinander legt. Dabei werden bei diesem Vergleich die Zehnecke, die das Muster des Darbi-i Imam Schreins bilden, als Ausgangspunkt genommen. Den Fixpunkt bildet dessen Mittelpunkt. Die rot markierten Elemente stimmen beim direkten Vergleich nicht überein. In manchen Fällen liegt nur eine Raute verdreht und in anderen Fällen ist keinerlei Übereinstimmung zu erkennen (Abbildung 44).

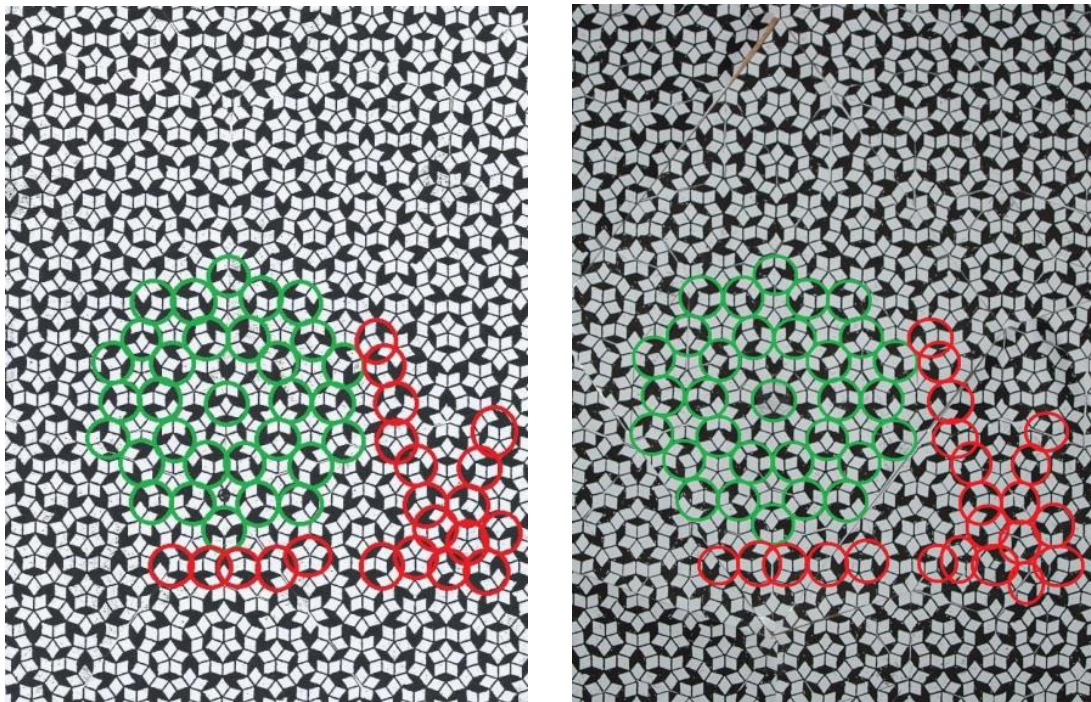


Abbildung 44: Vergleich der beiden Pflasterungen, mit ihren Übereinstimmungen und Unterschieden. (Links: die symmetrische Penrose-Pflasterung, Rechts: Zehneck-Pflasterung)

5 Vergleich der Zehneck-Penrose-Pflasterung mit der iranischen Pflasterung

Eine weitere iranische Pflasterung mit dem Aufbau der Pflasterung des Darb-i Imam Schreins (Abbildung 45) befindet sich unter einem Torbogen an der Freitags-Moschee in Isfahan, Iran (Abbildung 46). Beide Pflasterungen stammen aus dem Ende des 17. Jahrhunderts.



Abbildung 45: Das Muster des Darb-i Imam Schreins. Der mit dem Pfeil markierte Abschnitt ist im Vergleich zum Muster der Freitags-Moschee eher ungenau ausgearbeitet, da dieser Teil des Musters nicht genau in die Symmetrie passt.

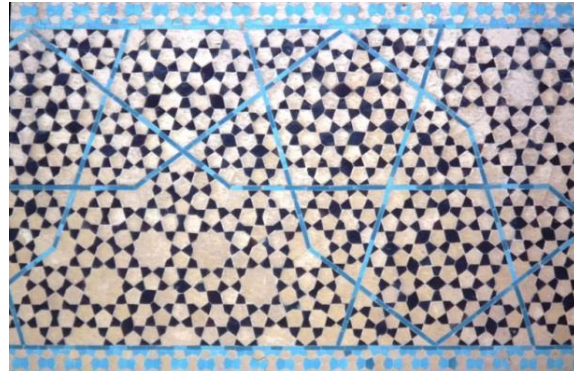


Abbildung 46: Das Muster der Freitags-Moschee. Hier passen sich alle Teile des Musters in die Symmetrie ein.

Ein genauer Vergleich zeigt, dass beide Pflasterungen das identische Muster zeigen. Jedoch ist das Muster an der Freitags-Moschee viel präziser verarbeitet worden. Aus diesem Grund wird dieses Muster zur weiteren Untersuchung verwendet.

5.1 Fortsetzung des iranischen Musters der Freitags-Moschee

5.1.1 Fortsetzung durch Spiegelung

Wie im Kapitel 4.3 bereits dargestellt, hat die Zehneck-Penrose-Pflasterung genau eine wahre Symmetrieachse.

Betrachtet man das Muster der Freitags-Moschee näher, entdeckt man, dass es sich hierbei um ein Muster mit zwei Spiegelachsen S_1 und S_2 und einem Drehzentrum mit $\varphi = 180^\circ$ handelt (Abbildung 47). Werden diese Spiegelachsen um das Drehzentrum gedreht, erhält man die Spiegelachse S_1' und S_2' .

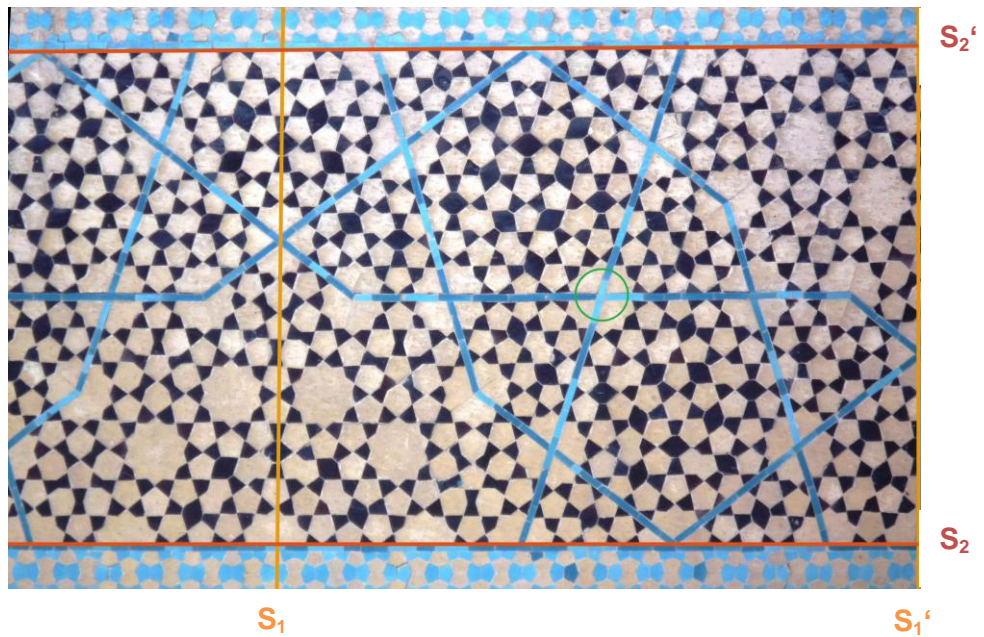


Abbildung 47: Die vier Symmetrieachsen und das Drehzentrum (grün eingezeichnet).

Wird die Pflasterung an den Spiegelachsen S_1 und S_1' zugeschnitten und an einer der beiden gespiegelt, wird das Muster symmetrisch weitergeführt (Abbildung 48).

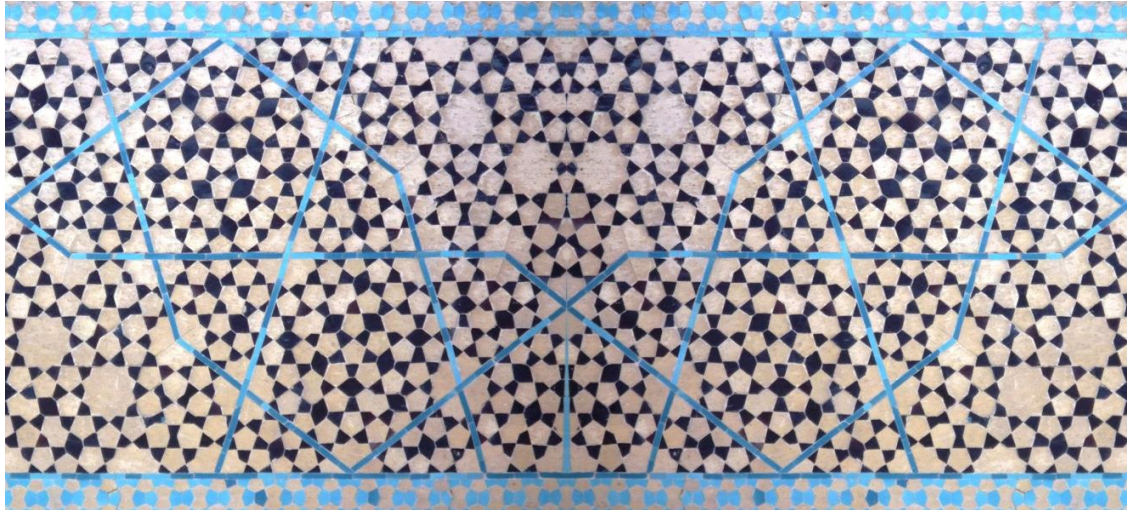


Abbildung 48: Die Fortsetzung des Musters nach einer Spiegelung an S_1 und S_1' .

Diese Spiegelung der Randzonen kann beliebig oft wiederholt werden. Auf diese Weise kann ein unendlich langer Streifen mit hellblauen begrenzenden Bordüren erzeugt werden (Abbildung 49).



Abbildung 49: Fortsetzung als unendlich langer Streifen.

Wendet man dieses Verfahren an allen vier Spiegelachsen an, kann unendliche Pflasterung ohne Begrenzung hergestellt werden (Abbildung 50).

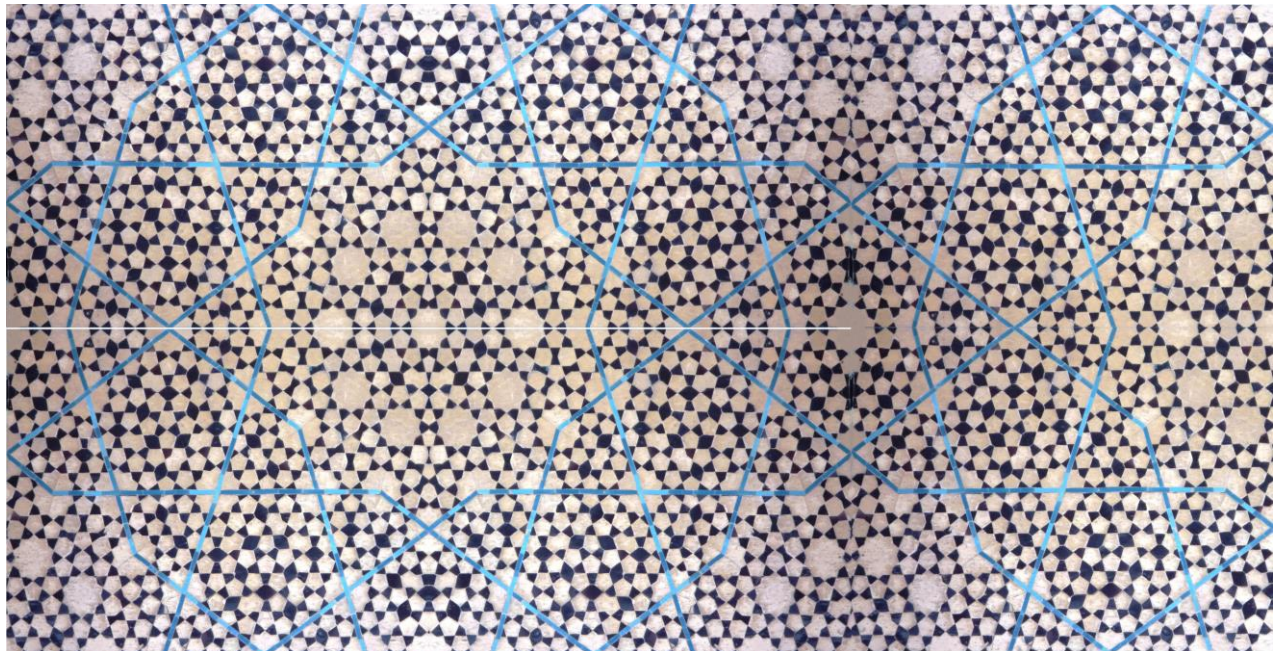


Abbildung 50: Unendliche Pflasterung ohne Begrenzung, entstanden durch Spiegelungen an allen vier Symmetrieachsen.

5.1.2 Fortsetzung durch Selbstähnlichkeit

Das Muster der Freitags-Moschee (Abbildung 46) kann fortgesetzt werden, in dem wir das schon bekannte Prinzip der Selbstähnlichkeit anwenden. Das heißt ein kleinerer Ausschnitt der Pflasterung ist Vorlage für die unendliche Weiterführung.

Betrachtet man die beiden gelben halben Sterne in Abbildung 51 erkennt man die Ähnlichkeit der beiden gekennzeichneten Formen. Der große Stern ist damit eine zentrische Streckung des Kleinen.

Die hellblauen Linien (in Abbildung 51 orange gekennzeichnet) sind vermutlich ebenfalls eine zentrische Streckung der Randlinien der dunkelblauen Steine. Es kann daher angenommen werden, dass das Muster sich fortsetzt, in dem die Randlinien der dunkelblauen Steine als Vorlage für die hellblauen Linien dienen. Wir können somit den Inflationsprozess wiederholt zur Anwendung bringen.

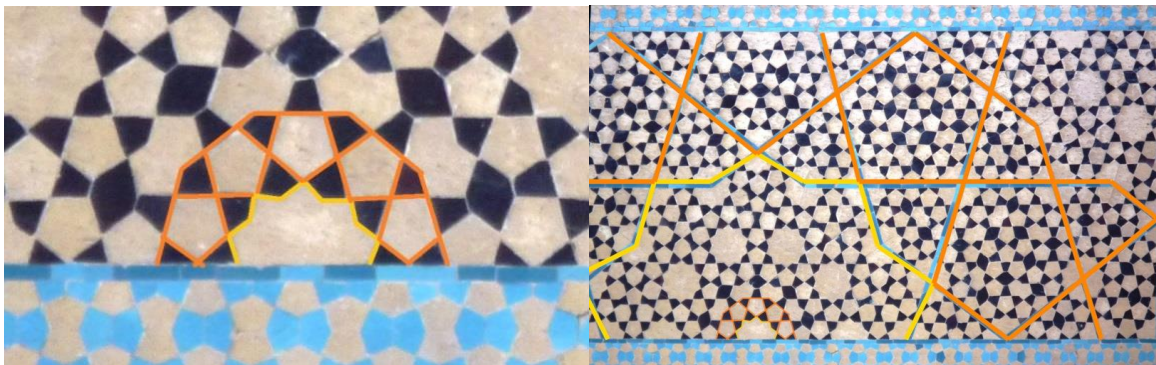


Abbildung 51: Die Selbstähnlichkeit der Randlinien der dunkelblauen Steine und der hellblauen Linien des Musters.

Betrachten wir die Randlinien der dunkelblauen Steine innerhalb des großen gelb gezeichneten halben Sterns und zeichnen diese nach, wird ein Linienmuster erzeugt (Abbildung 52).

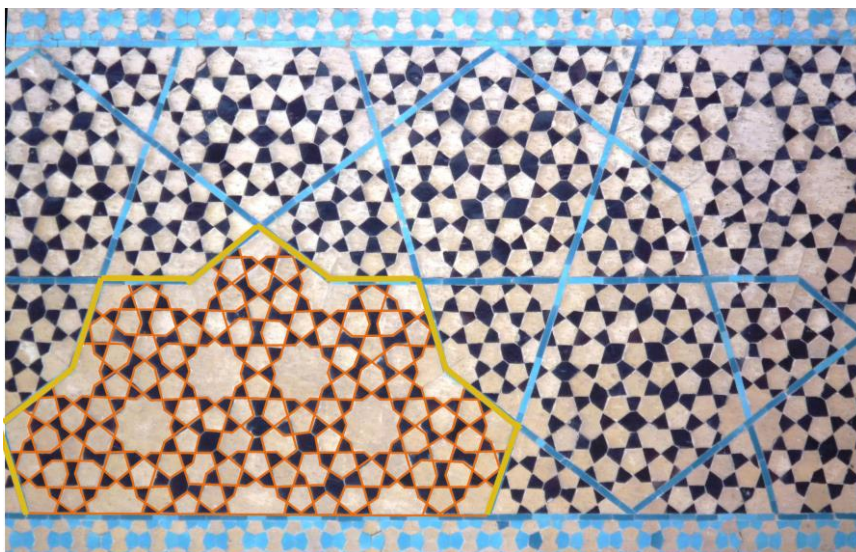


Abbildung 52: Das Linienmuster als Verbindung der Randlinien der dunkelblauen Steine.

Blendet man die Pflasterung aus, erhält man folgendes Linienmuster (Abbildung 53). Welches unserer Annahme entsprechend, die Fortsetzung der hellblauen Linien ist.

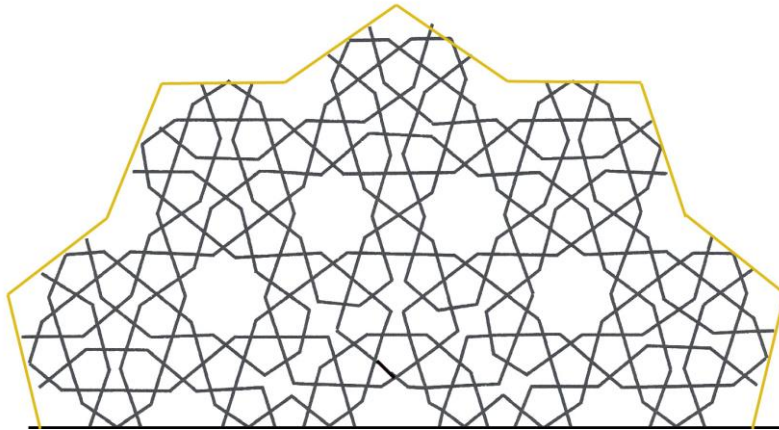


Abbildung 53: Das nach Vorlage der dunkelblauen Steine entstandene, fortgesetzte Linienmuster der Freitags-Moschee.

Dieses Linienmuster kann durch Spiegelung an der eingezeichneten Grundlinie symmetrisch ergänzt werden (Abbildung 54). Das dabei entstandene Muster entspricht der Erweiterung der hellblauen Linien innerhalb des großen gelben Sterns.

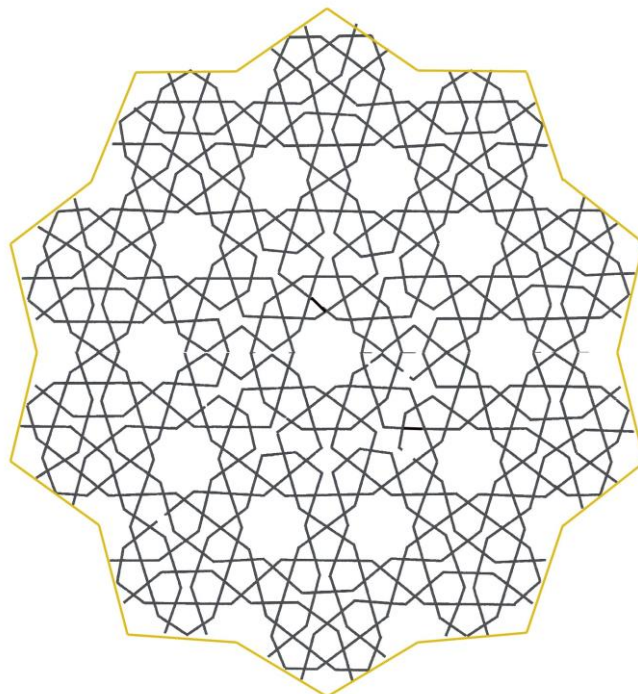


Abbildung 54: Das symmetrisch ergänzte Linienmuster.

Dieses Linienmuster entspricht nach einer zentrischen Streckung der Fortsetzung der hellblauen Linien im Originalmuster (Abbildung 46).

Das Muster kann nun vervollständigt werden, indem die freien Flächen des Linienmusters mit Pflasterungen ausgefüllt werden. Hierfür betrachten wir die entstandenen geometrischen Formen des Linienmusters (Abbildung 55), die auch im großen Muster in den dunkelblauen bzw. weißen Steinen vorhanden sind. Es ergeben sich sieben verschiedene Mustertypen: Den Stern mit zehn Strahlen, eine „Schleife“, ein Fünfeck, ein Drachen-Viereck, ein „doppeltes“ Trapez, ein „doppeltes“ Fünfeck und ein Sechseck. Vergleichen wir nun die Mustertypen der Originalpflasterung innerhalb der hellblauen Linien mit den Mustertypen des Linienmusters, stellen wir fest, dass drei von sieben Mustertypen (Stern, Fünfeck und Drachen-Viereck) im symmetrisch ergänzten Muster der Freitags-Moschee (Abbildung 56) auftauchen.

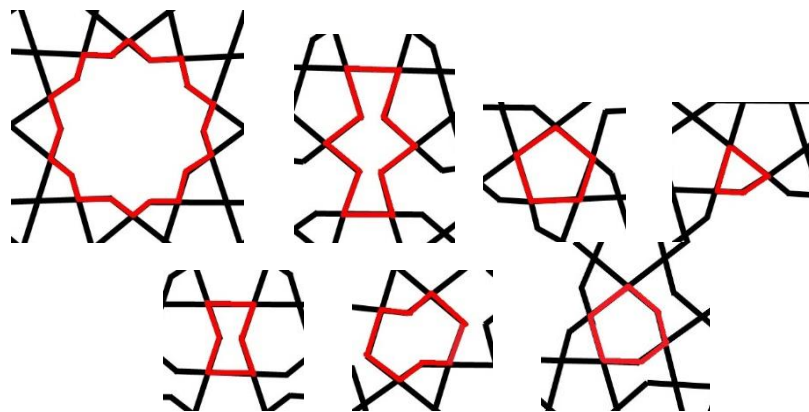


Abbildung 55: Die vorkommenden Mustertypen: Stern mit zehn Zacken, „Schleife“, Fünfeck, Drachen-Viereck, doppeltes Trapez, doppeltes Fünfeck und Sechseck (von links nach rechts).

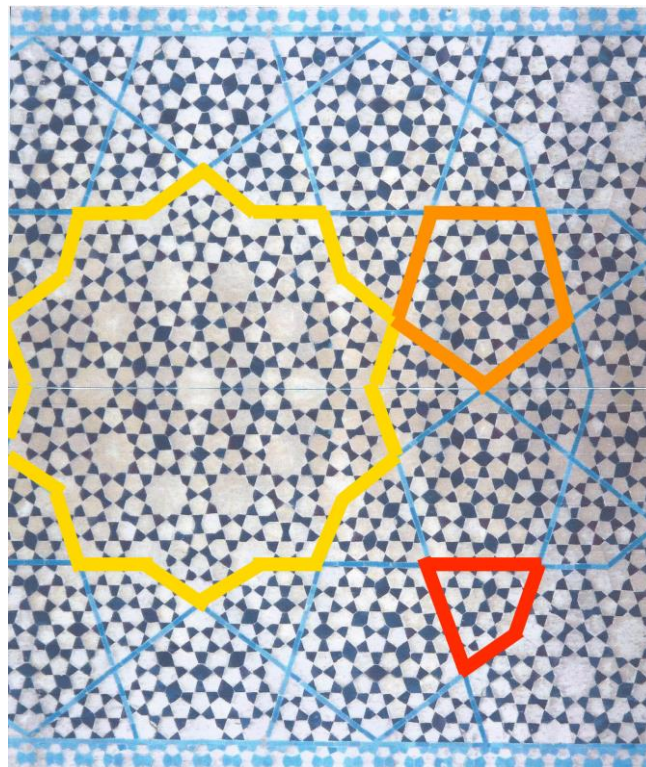


Abbildung 56: Symmetrisch ergänztes Muster der Freitags-Moschee mit den drei vorkommenden Mustertypen aus Abbildung 51.

Vergleicht man die jeweils gleichen Mustertypen aus Abbildung 56 miteinander, stellen wir fest, dass die Plasterungen innerhalb des Mustertyps übereinstimmen. In den Randzonen gibt es bei den Fünfecken je eine Ausnahme (in Abbildung 57 orange gekennzeichnet). Diese Ausnahme ist das Fünfeck im Anschluss an die oberste Zacke des mittleren großen Sterns, denn dieses hat im Vergleich zu den anderen Fünfecken nicht nur in den fünf Ecken einen Teil des Sterns, sondern auch in der Mitte einer Seite. Da wir eine unendliche Erweiterung des Musters erschaffen wollen, gibt es keine Randzone und deshalb berücksichtigen wir diese Ausnahme nicht.

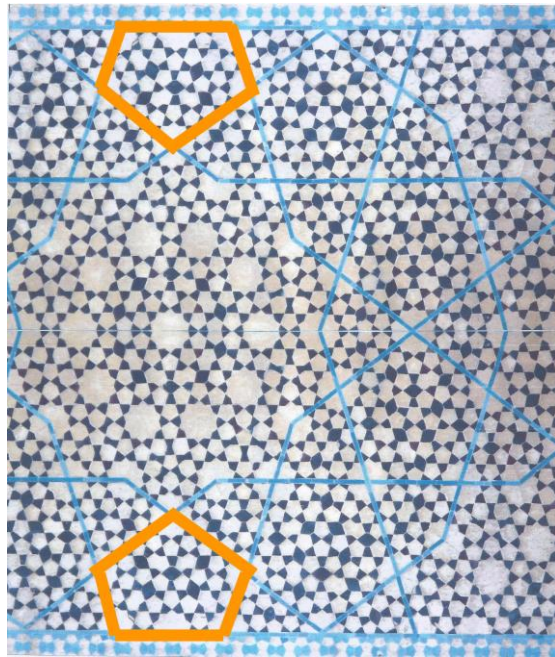


Abbildung 57: Die Ausnahme-Fünfecken in den Randzonen.

In die drei vorkommenden Mustertypen (Stern, Fünfeck, Drachen-Viereck) können nun folgende Pflasterungen integriert werden (Abbildung 58).

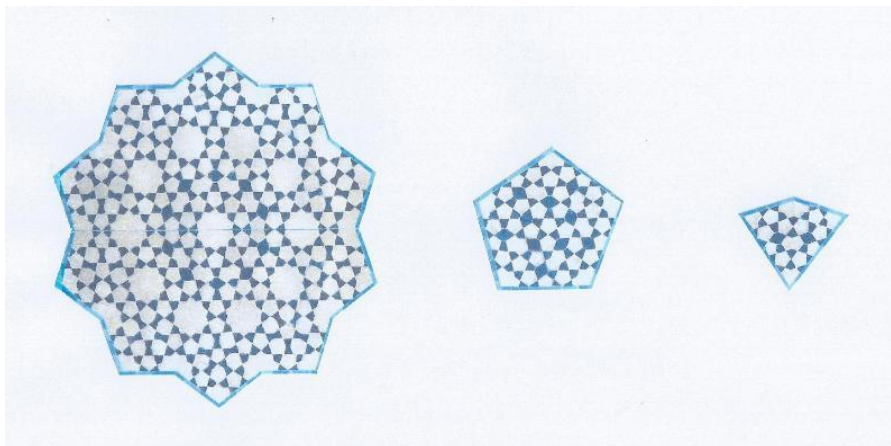


Abbildung 58: Die Pflasterungen der drei Mustertypen.

Diese drei gepflasterten Mustertypen lassen sich anschließend in die entsprechenden Formen des Linienmusters einfügen (Abbildung 59).

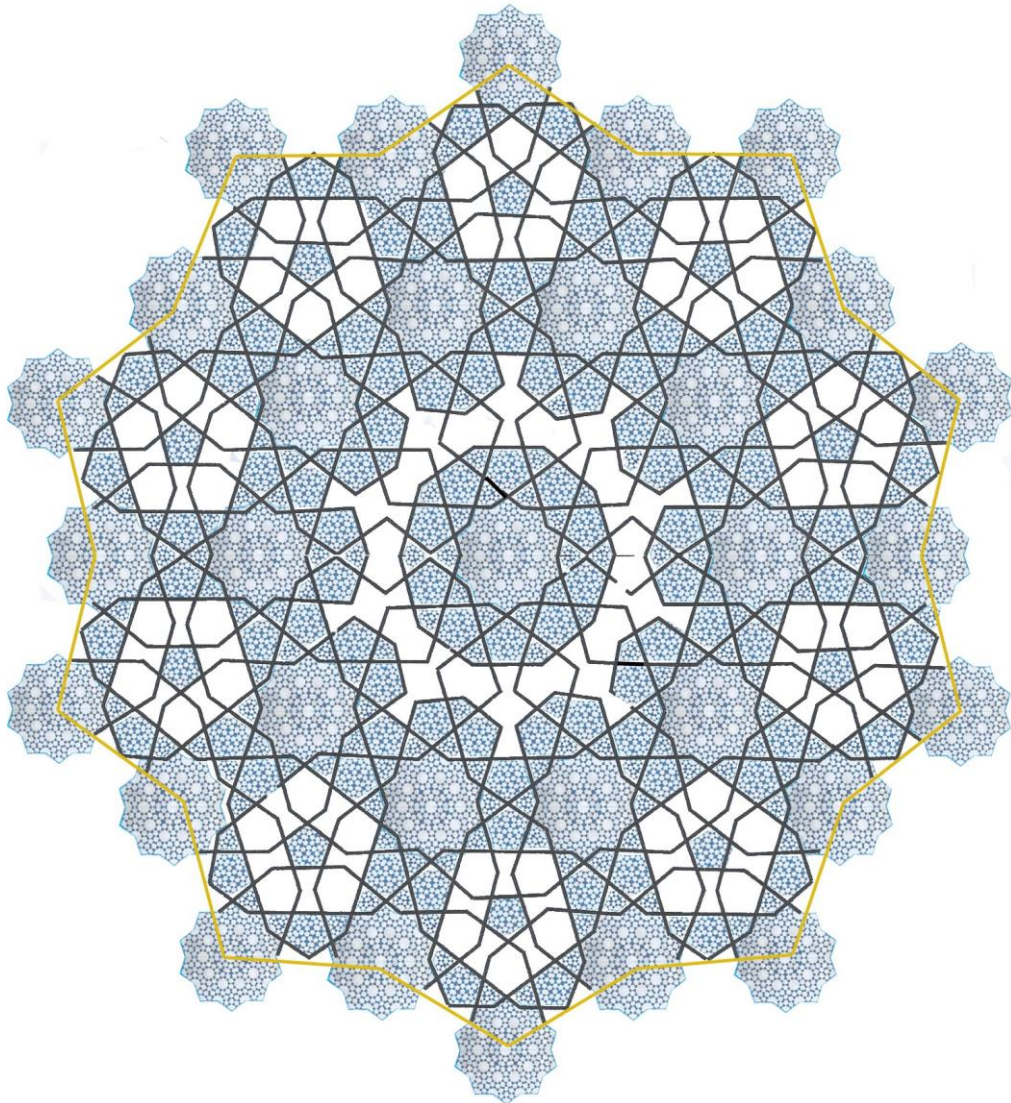


Abbildung 59: Fortsetzung nach Vorbild des Linienmusters.

Undefiniert und deshalb weiß in Abbildung 59 sind die Pflasterungen innerhalb der „doppelten“ Fünfecke, der „Schleifen“, der „doppelten Trapeze“ und der Sechsecke, da für diese vier Formen keine offensichtlich erkennbaren Vorbilder im Ausgangsmuster (Abbildung 46) vorhanden sind.

Auf der Suche nach einer Lösung, wie diese Formen gepflastert sein könnten, bringt man das Ausgangsmuster (Abbildung 46) mit dem entsprechenden Ausschnitt des Linienmusters (Abbildung 53) zur Deckung und untersucht die Pflasterungen unter den jeweiligen Mustertypen (Abbildung 60).

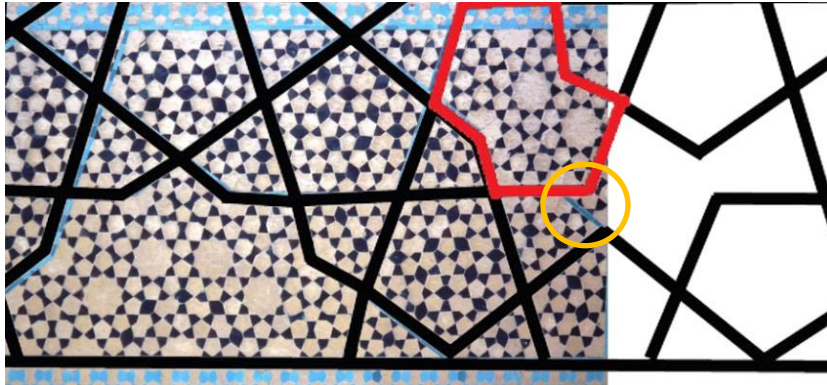


Abbildung 60: Das mit dem Linienmuster zur Deckung gebrachte Ausgangsmuster.

Beim Vergleich der Überlagerungen stellt man eine sehr gute Übereinstimmung der Linien fest. Hierbei zeigt sich aber auch, dass das rot eingezeichnete „doppelte“ Fünfeck des Linienmusters in der Pflasterung nicht berücksichtigt wurde. Außerdem erkennt man eine Abweichung der hellblauen Linien im Bereich der „Schleifen“ (in Abbildung 60 orange eingekreist).

In Abbildung 60 kann man beobachten, dass sich durch das Übereinanderlegen des Linienmusters und der Pflasterung der Freitags-Moschee für das „doppelte“ Fünfeck sehr wohl eine Pflasterung finden lässt. Ein Teil der Pflasterung ist durch die Rand-Bordüre verdeckt. Dieser Teil kann jedoch durch Spiegelung an der senkrechten Spiegelachse erzeugt werden (Abbildung 61).



Abbildung 61: Die Pflasterung des "doppelten" Fünfecks (sie ist zur besseren Unterscheidung rot eingefärbt).

In Abbildung 60 lässt sich ebenfalls ein Teil der Pflasterung des Mustertyps der „Schleife“ finden. Diese Pflasterung lässt sich auf beide Enden der „Schleife“ übertragen, indem man die Teilfüllung in der Mitte der Schleife einer Achsenspiegelung unterzieht. So erhalten wir eine Teilpflasterung der Schleife (Abbildung 62). Der Mittelteil bleibt dabei undefiniert und wird hier durch eine grüne Fläche dargestellt.

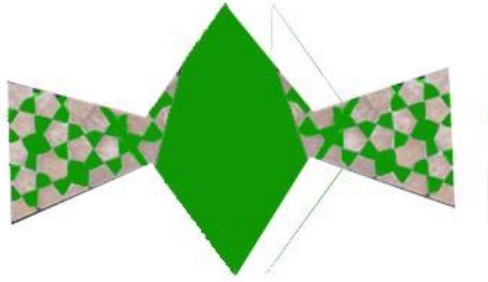


Abbildung 62: Die Pflasterung der "Schleife" (in grün eingefärbt). Der uni-grüne Bereich bleibt ohne Pflasterung.

Die weiteren Mustertypen (doppeltes Trapez und Sechseck) finden keine Überdeckung mit dem Ausgangsmuster, da diese sich außerhalb des Ausschnitts der Pflasterung befinden. Deshalb können wir die Pflasterung für diese Teilbereiche des erweiterten Musters nicht definieren.

Setzt man die nachträglich gefundenen Mustertypen (Abbildung 61 und Abbildung 62) in die bereits fortgesetzte Pflasterung aus Abbildung 59 ein, erhält man folgendes, noch weiter ergänztes Fortsetzungsmuster (Abbildung 63).

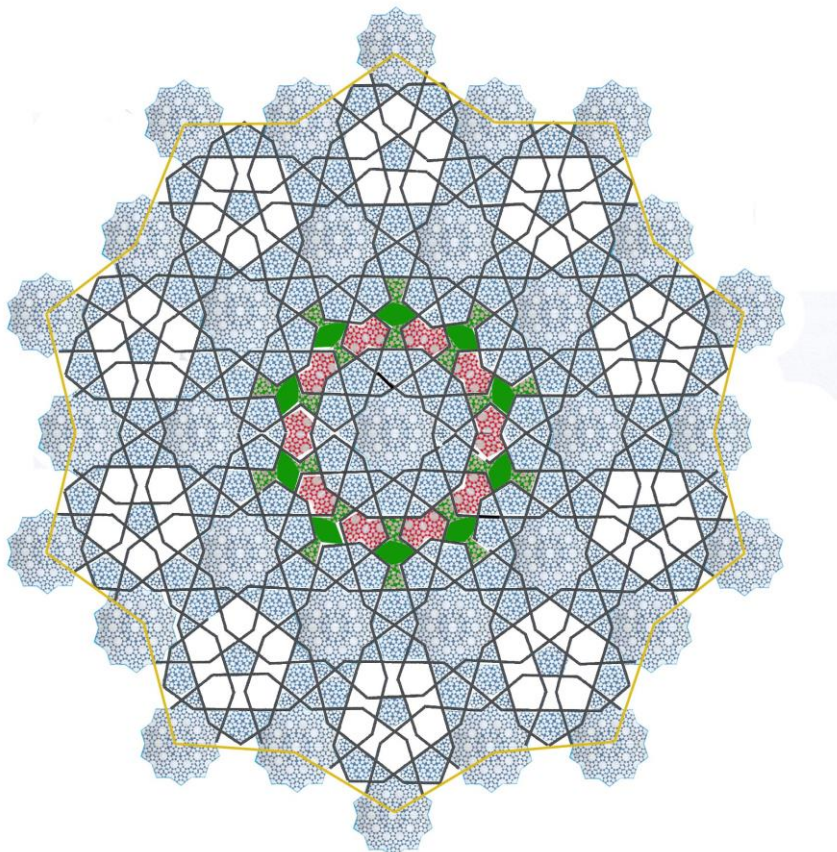


Abbildung 63: Die Erweiterung der Abbildung 58 mit den doppelten Fünfecken (rot) und einem Teil der Schleifen (grün).

5.2 Vergleich der Fortsetzung des Musters der Freitags-Moschee mit dem Muster des Darb-i Imam Schreins



Abbildung 64: Linienmuster und zentrisch gestrecktes Linienmuster über die Pflasterung am Darb-i Imam Schrein gelegt.

Wir vergleichen die Pflasterung des Darb-i Imam Schreins mit der der Freitags-Moschee, indem wir das Linienmuster auf die Pflasterung legen. Als Erstes betrachten wir die Übereinstimmung des Linienmusters mit den schwarzen Linien des Darb-i Imam Schreins. Hierbei kann ein hoher Grad an Überdeckung der beiden Linienarten gezeigt werden. Die Abweichungen im linken Bereich sind vermutlich durch die Anpassung an den Torbogen begründet. Interessant ist jedoch, dass im rechten oberen Randbereich die identischen Abweichungen der Pflasterung vom Linienmuster existieren. Auch in diesem Muster ist das „doppelte“ Fünfeck und die „Schleife“ nicht dargestellt.

In einem zweiten Schritt legen wir das Linienmuster über denselben Bereich der Darb-i Imam Pflasterung, in welchem wir in Abbildung 52 das Linienmuster in der Pflasterung der Freitags-Moschee erzeugt haben.



Abbildung 65: Vergleich des Linienmusters mit den Randlinien der schwarzen Steine innerhalb des großen Sterns.

In Abbildung 65 können wir sehr gut die Ungenauigkeiten in der Verarbeitung der Pflasterung erkennen. Diese sind vor allem im Bereich der „Schleifen“ vorhanden.

5.3 Vergleich der Fortsetzungen der iranischen Pflasterung mit der Zehneck-Pflasterung

Für den Vergleich der Fortsetzungen der iranischen Pflasterung mit der Zehneck-Penrose-Pflasterung rufen wir uns wieder Kapitel 1 in Erinnerung. Hier gab es einen Zusammenhang der „Fußbälle“ mit dem Muster des Darb-i Imam Schreins und zwar sind die markierten „Fußbälle“ der symmetrischen Penrose-Musters (Abbildung 8) deckungsgleich mit den weißen Zehneckern oder Sternen der Pflasterung. Sie stimmen innerhalb des Sterns im Linienmuster überein (Abbildung 9). Dasselbe gilt auch für das Muster an der Freitags-Moschee, da es mit dem Muster des Darb-i Imam Schreins identisch ist.

Betrachten wir nun das Feld außerhalb des großen Sterns. Sind die weißen Zehnecke/Sterne ebenfalls mit den „Fußbällen“ der Zehneck-Penrose-Pflasterung deckungsgleich?

Zuerst vergleichen wir das Muster, welches durch Fortsetzung durch Spiegelung entstanden ist, (Abbildung 49) mit der Zehneck-Penrose-Pflasterung (Abbildung 37). Die weißen Zehnecke/Sterne befinden sich in der iranischen Pflasterung in allen Eckenpunkten jedes gepflasterten Mustertyps. Wir müssen also die hellblauen Linien der Abbildung 56 über die Zehneck-Penrose-Pflasterung legen (Abbildung 66). Als Anhaltspunkte dienen uns die bereits übereinstimmenden „Fußbälle“. Die grün eingekreisten „Fußbälle“ stimmen mit den Ecken bzw. den weißen Zehneckern/Sternen überein. Im Bereich der roten Kreise findet sich in der Zehneck-Penrose-Pflasterung kein „Fußball“.

Hierbei sieht man ganz deutlich, dass die „Fußbälle“ vor allem im Bereich der Randfünfecke (Abbildung 57) nicht mit den Zehneckern/Sternen des iranischen Musters übereinstimmen.

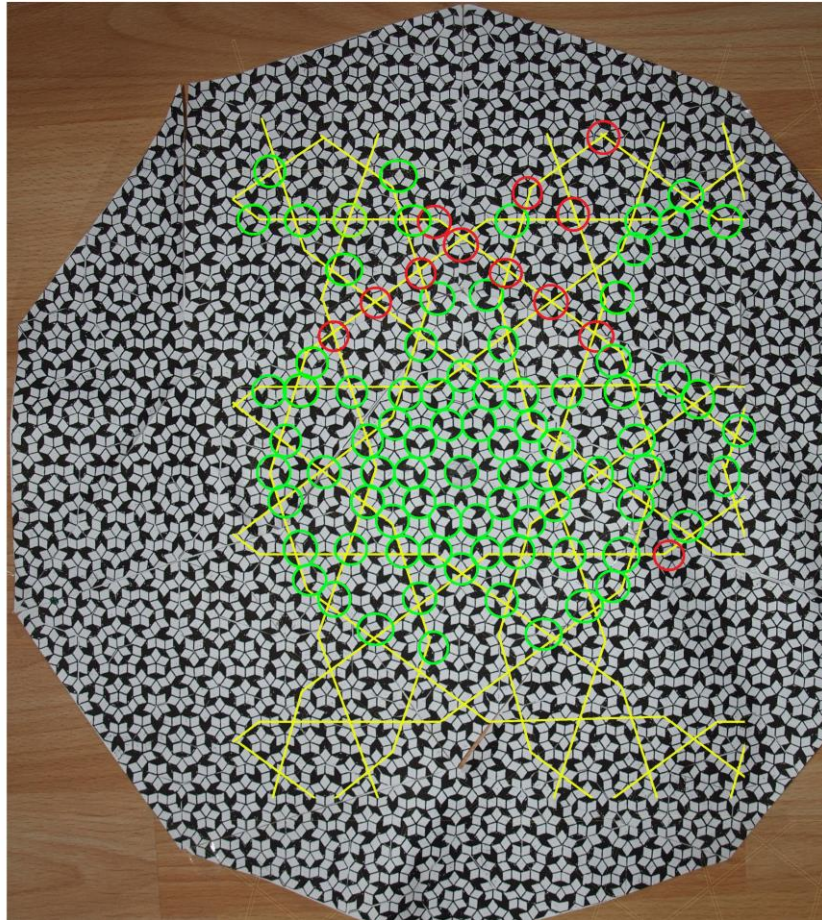


Abbildung 66: In die Zehneck-Penrose-Pflasterung eingezeichnete hellblauen Linien der Freitags-Moschee.

Beim Vergleich der Zehneck-Penrose-Pflasterung mit der Fortsetzung des Musters durch Selbstähnlichkeit geht man analog vor. Man legt über die Zehneck-Pflasterung das Linienmuster aus Abbildung 54. Nun überprüfen wir, wie oben, ob sich in jedem Eckpunkt des Linienmusters ein „Fußball“ in der Zehneck-Penrose-Pflasterung befindet. In Abbildung 67 sind die übereinstimmenden „Fußbälle“ grün und die Stellen, an denen sich kein „Fußball“ findet rot markiert.

Auffällig ist hier, dass die „Fußbälle“ besonders gut mit den Eckpunkten der vorhandenen Mustertypen übereinstimmen, bei denen das Linienmuster wieder ein Zehneck (in Abbildung 67 Blau eingezeichnet) bildet.

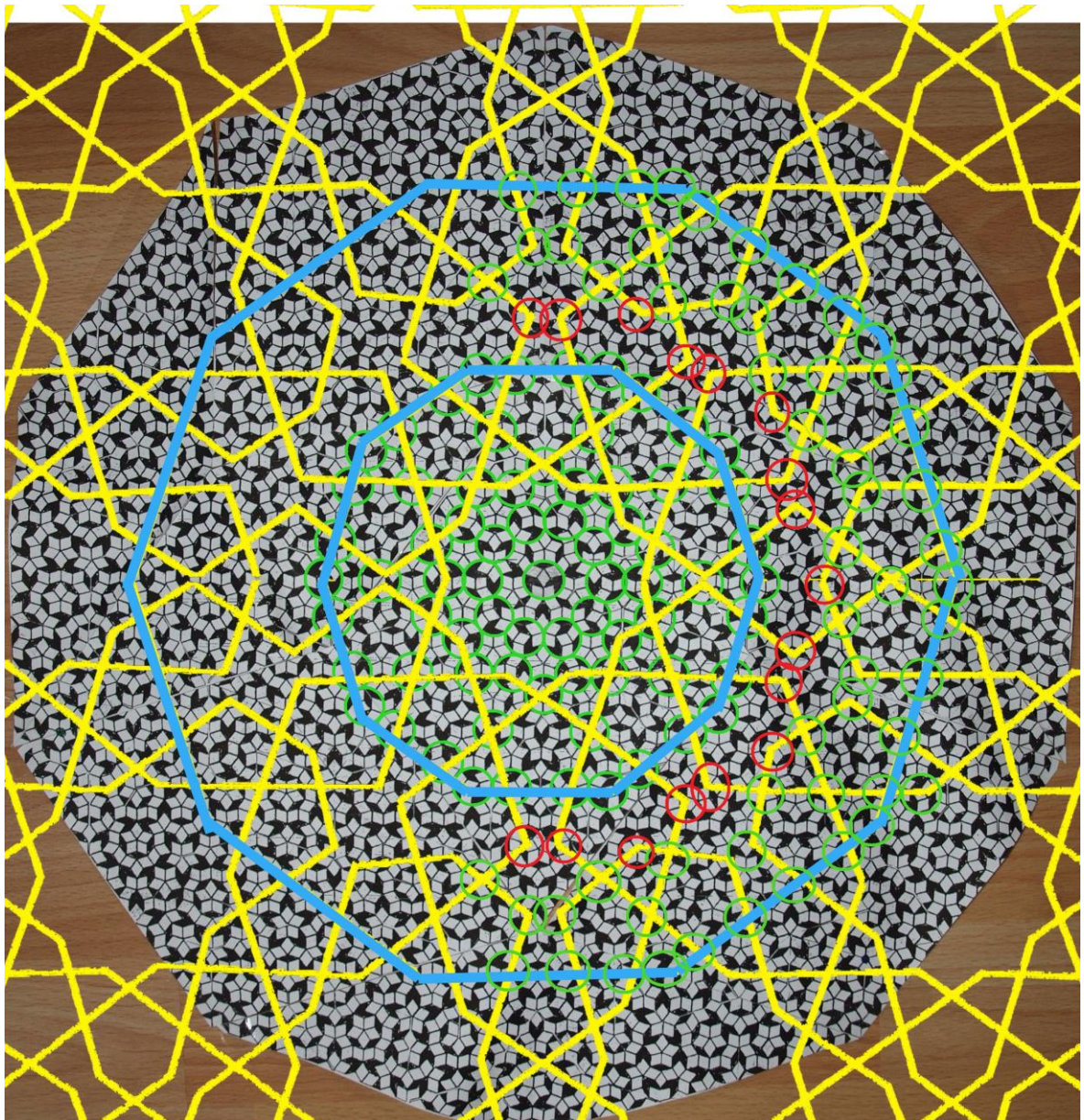


Abbildung 67: Das in die Zehneck-Penrose-Pflasterung eingezeichnete Linienmuster.

6 Schluss

Durch den Vergleich der beiden Fortsetzungsmöglichkeiten der iranischen Pflasterung mit der Zehneck-Penrose-Pflasterung haben wir festgestellt, dass diese beiden nicht ganz exakt übereinstimmen. Vor allem beim ersten Vergleich gibt es Abweichungen im Bereich der Randzonen (Abbildung 66). Diese sind beim zweiten Vergleich, also der Vergleich der Zehneck-Penrose-Pflasterung mit der Fortsetzung des Musters der Freitags-Moschee durch Selbstähnlichkeit, nicht so stark vorhanden (Abbildung 67). Die Randzonen wurden bei der Erstellung dieser Fortsetzung außer Acht gelassen.

Es lässt sich jedoch feststellen, dass die „Fußbälle“ der Zehneck-Penrose-Pflasterung mit den Eckpunkten des Linienmusters (Abbildung 67) und die „Fußbälle“ des symmetrischen Penrose-Musters mit den Eckpunkten des Linienmusters von Benjamin Schleich (Abbildung 68) jeweils innerhalb des ersten Zehnecks der Linien, genau überein stimmen.

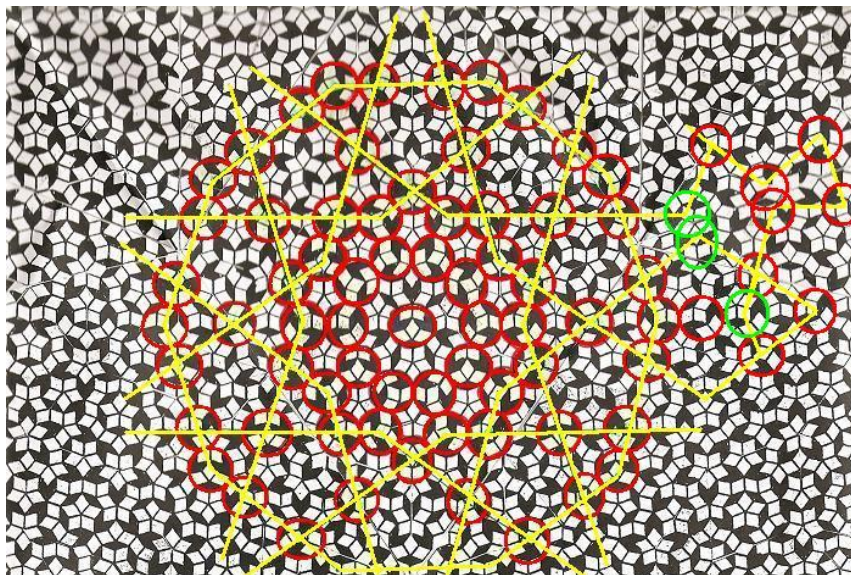


Abbildung 68: Das in das symmetrische Penrose-Muster eingezeichnete Linienmuster (nach Benjamin Schleich).

Dies ist auch genau der Teil, der in Abbildung 51 orange eingezeichnet ist. Im Bereich dieses Zehnecks stimmen außerdem die Randlinien der dunkelblauen Steine mit dem entsprechenden Ausschnitt des Linienmusters überein, das heißt, sie sind tatsächlich selbstähnlich.

Im Kapitel 5.2 haben wir gezeigt, dass die Pflasterungen des Darb-i Imam Schreins und der Freitags-Moschee die gleiche Abweichung in den schwarzen bzw. hellblauen Linien im Vergleich zum selbstähnlich fortgesetzten Linienmuster zeigen. Daraus lässt sich die Annahme ableiten, dass die Fortsetzung des Musters in der Realität wohl die Fortsetzung durch Spiegelung sein wird. Ansonsten würde in beiden Pflasterungen nicht ein- und dieselbe Abweichung zu beobachten sein. Diese Art der Fortsetzung entspricht höchst wahrscheinlich der Erweiterung der Pflasterung auf dem Bildausschnitt unter dem Torbogen.

Der genaue Zusammenhang der schwarzen bzw. hellblauen Linien und der darin liegenden Pflasterungen kann auch jetzt noch nicht eindeutig geklärt werden, da das Linienmuster, welches durch Selbstähnlichkeit entstanden ist, nicht mit diesen in allen Punkten übereinstimmt.

II. Anhang

i. Literaturverzeichnis

- Eschenburg, J.-H.: Die Zahl fünf und die Quasikristalle, Augsburg, 2004,
- Lu, P. und Steinhardt, P.: Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Science Vol. 315, S. 1106-1110, 2007
- Page, R.: Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode, Zulassungsarbeit an der Universität Augsburg, 2008
- Schleich, B.: Penrose Tilings in Medieval Islamic Culture, Bachelor-Arbeit an der Universität Augsburg, 2009
- www.saudiaramcoworld.com/issue/200905/the.tiles.of.infinity.htm

ii. Abbildungsquellen

Abbildung 1 Abbildung 25 Abbildung 36 Abbildung 46	Bilder von Professor Eschenburg Abbildung 46 außerdem nachbearbeitet mit Adobe Photoshop CS3
Abbildung 9 Abbildung 45	Beide: http://www.ru.nl/publish/pages/642395/a2-1-mozaiek.jpg Abbildung 9 außerdem nachbearbeitet mit Microsoft Paint
Abbildung 18 Abbildung 69	Page, R.: Penrose-Muster: Unterteilung und Projektionsmethode, Zulassungsarbeit an der Universität Augsburg, 2008, S. 14, S. 7
Abbildung 2 bis 8 Abbildung 31 Abbildung 40 Abbildung 41 Abbildung 44 Abbildung 55	Erstellt bzw. bearbeitet mit dem Zeichenprogramm Microsoft Paint Abbildungen 2-8 nach Vorlage von Abbildung 1
Abbildungen 10 bis 17 Abbildungen 19 bis 24 Abbildungen 26 bis 35 Abbildungen 37 bis 39	Selbst erstellte Zeichnungen Abbildungen 10-13, 26, 37, 39-43 außerdem nachbearbeitet mit Adobe Photoshop CS3

Abbildung 32	Erstellt bzw. bearbeitet mit dem Bildbearbeitungsprogramm Adobe Photoshop CS3
Abbildung 34	
Abbildung 37 bis 39	
Abbildung 42 bis 43	
Abbildungen 47 bis 54	
Abbildungen 56 bis 67	Abbildungen 47-52, 56, 57, 60 nach Vorlage von Abbildung 46 Abbildungen 64, 65 nach Vorlage von Abbildung 9 Abbildungen 66, 67 nach Vorlage von Abbildung 37
Abbildung 68	Sleich, B.: Penrose Tilings in Medieval Islamic Culture, Bachelor-Arbeit an der Universität Augsburg, 2009, S. 12

iii. Beweis der Ähnlichkeit der unterteilten Dreiecke aus Kapitel 3.1

Betrachten wir zunächst das große breite Dreieck (grün) und seine Innenwinkel α , β und γ . Vergleichen wir diese Winkel mit den Winkeln des kleineren breiten Dreiecks, das ebenfalls einen Eckpunkt am Winkel α besitzt, stellen wir fest, dass die beiden fehlenden Winkel genauso groß sind wie β und γ (Parallelenwinkel). Damit hat das kleinere breite Dreieck die gleichen Winkel wie das große breite Dreieck. Somit sind diese beiden ähnlich zueinander. Der Beweis der Ähnlichkeit der schmalen Dreiecke funktioniert analog.

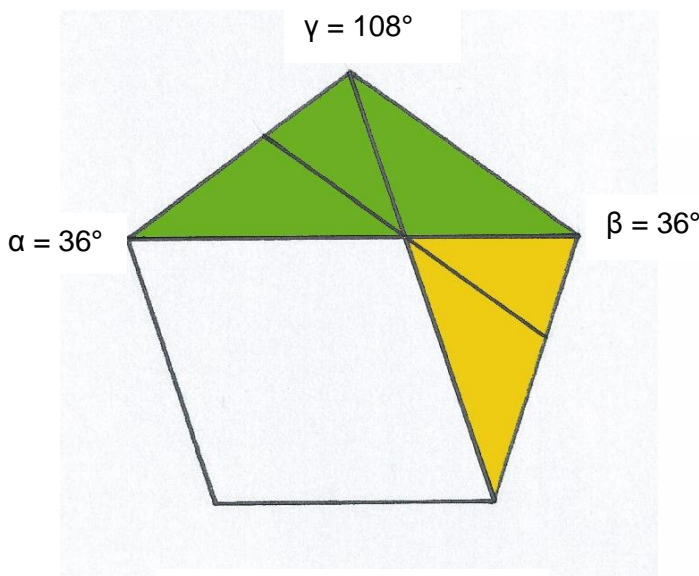


Abbildung 12: Das regelmäßige Fünfeck mit eingezeichneter Parallele durch den Diagonalschnittpunkt.

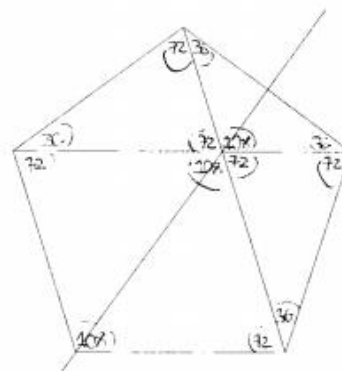


Abbildung 69: Die Innenwinkel im regelmäßigen Fünfeck mit seinem Diagonalenschnitt.

Schriftliche Versicherung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit von mir selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst wurde. Alle Stellen, die ich wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder nicht veröffentlichten Quellen übernommen habe, habe ich als solche gekennzeichnet. Es wurden alle Quellen, auch Internetquellen, ordnungsgemäß angegeben.

Saskia Mayer