Zahl und Funktion

J.-H. Eschenburg, Universität Augsburg, WS 12/13

Die Axiome der reellen Zahlen

Rechenaxiome:

Addition:

RA1: Assoziativgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
RA2: Kommutativgesetz: $a + b = b + a$,
RA3: Rolle der Null: $0 + a = a$,
RA4: Rolle der Negativen: $a + (-a) = 0$,
Definition: $a - b := a + (-b)$.

Multiplikation:

RM1: Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
RM2: Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$,
RM3: Rolle der Eins: $1 \cdot a = a$,
RM4: Rolle des Inversen: $a \cdot a^{-1} = 1$ (falls $a \neq 0$)
Definition: $a : b = a/b = \frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$ (falls $b \neq 0$)

Distributivgesetz:

RD: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Anordnungsaxiome:

O1: $a > 0$ oder $a = 0$ oder $(-a) > 0$,
O2: $a, b > 0 \Rightarrow a + b > 0$,
O3: $a, b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$,
Definition: $a > b :\iff a - b > 0$.

Archimedisches Axiom:[1]

A: *Zu je zwei Zahlen $a > b > 0$ gibt es eine natürliche Zahl*[2] *n mit $nb \leq a < (n + 1)b$. Für $b = 1$, $a > 1$: $n \leq a < n + 1$.*

Vollständigkeitsaxiom:

V: *Zu jeder Intervallschachtelung*[3] *$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ gibt es eine Zahl x, die in jedem der Intervalle I_k, $k = 1, 2, 3, \dots$, also im Durchschnitt aller I_k liegt.*

---

[1] Archimedes von Syrakus, 287 - 212 v.Chr.

[2] Die *natürlichen Zahlen* sind die Zahlen 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ usw. Sie bilden die kleinste Zahlenmenge $\mathbb{N}$ mit den zwei Eigenschaften $1 \in \mathbb{N}$ und $n + 1 \in \mathbb{N}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

[3] Ein *Intervall* ist eine Zahlenmenge der Form $I = \{x;\ a \leq x \leq b\}$ für zwei gegebene Zahlen a, b mit $a \leq b$. Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge von immer kleineren ineinanderliegenden Intervallen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$.

Vorbemerkung

In den “Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss” der Kultusminister (2003) werden die folgenden mathematischen Leitideen genannt: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall. Die Vorlesung nimmt diese Vorgabe auf. Sie ist Teil eines viersemestrigen Vorlesungszyklus “Elemente der Mathematik”, der die fachlichen Grundlagen für das nichtvertiefte Lehramtsstudium der Mathematik bereitstellen soll. Die vier Teile sind: Zahl und Funktion (§55(1)1 LPO, alte Version), Integration (§55(1)1 LPO), Linearität (§55(1)2 LPO), Mehrere Variable (§55(1)2 LPO). Mit normalen Schulkenntnissen sollte man den Zyklus mit jeder dieser Vorlesungen beginnen können.

Am Anfang der Mathematik steht das *Zählen*, d.h. die vielfache Zusammensetzung (“*Synthesis*”) der Einheit: 1, 1+1, 1+1+1 usw. Auch die quantitative Behandlung des Zufalls hat zunächst mit dem Zählen zu tun: Die Wahrscheinlichkeit, ein Glücksspiel zu gewinnen, ist ja die Zahl der günstigen durch die Zahl der möglichen Fälle. Der Umkehrprozess des Zusammensetzens ist das Zerlegen oder Teilen (“*Analysis*”), das uns von den natürlichen zu den rationalen Zahlen (Brüchen) führt. Aber anders als das Zusammensetzen braucht das Teilen kein Ende zu finden: eine Position auf der Zahlengeraden kann unendlich viele Teilungsschritte zu ihrer genauen Festlegung benötigen, was in den Begriffen “unendlicher Dezimalbruch” und “Grenzwert” zum Ausdruck kommt. Mit dieser Erkenntnis gelangen wir von den rationalen zu den reellen Zahlen, zur Zahlengeraden. Eine letzte Erweiterung führt von den reellen zu den komplexen Zahlen; das geometrische Modell der Zahlengeraden wird dabei durch das der Zahlenebene abgelöst. Die Geometrie (“Raum und Form”) ist von Anfang an dabei.

Funktionen beschreiben, wie variable Zahlen voneinander abhängen können. Sie geben die Modellvorstellungen für Prozesse und Abhängigkeiten in Natur und Gesellschaft. Die einfachsten Funktionen sind die Potenzen, und ähnlich wie bei den Zahlen erweitern wir diese Funktionenmenge schrittweise unter Einbeziehung von Grenzwerten. Wir werden die Mittel bereitstellen, um Funktionen im Kleinen und im Großen zu untersuchen und zu verstehen. Besondere Zahlen und Funktionen werden wir genauer studieren, z.B. die Kreiszahl π, die das Verhältnis von Umfang und Durchmesser jedes Kreises ausdrückt, oder die Exponentialfunktion, mit deren Hilfe Wachstums- und Zerfallsprozesse beschrieben werden können.

I. Zahlen

1. Wie geschieht Mathematik?

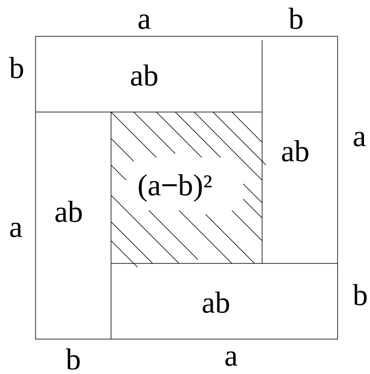
Was Mathematik ist, lässt sich schwer in wenigen Worten sagen. Aber wie die Mathematik arbeitet und ihre Erkenntnisse gewinnt, können wir an Hand eines Beispiels beschreiben. Die Aufgabe der Mathematik ist die Erkenntnis des Verborgenen aus dem Offensichtlichen sowie die Anwendungen dieser Erkenntnis. Wir können zum Beispiel von zwei Zahlen $a, b > 0$ auf zwei Weisen einen Mittelwert bilden: Die Hälfte der Summe, $\frac{a+b}{2}$ (*arithmetischen Mittel*), und die Quadratwurzel des Produkts, $\sqrt{ab}$ (*geometrisches Mittel*). Beide Zahlen liegen zwischen a und b, aber welche von beiden ist die Größere? (Beispiel: $a = 2$, $b = 8$, $\frac{a+b}{2} = 5$, $\sqrt{ab} = 4$.)

Satz 1.1. $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, *falls* $a \neq b$.

Anwendung: *Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang hat das Quadrat den größten Flächeninhalt.*

Denn wenn ein Rechteck mit ungleichen Seitenlängen a, b gegeben ist, so hat das Quadrat mit Seitenlängen $\frac{a+b}{2}$ denselben Umfang $2(a + b)$, und da $(\frac{a+b}{2})^2 > ab$, ist sein Flächeninhalt größer als der des Rechtecks.

Beweis (a): Durch eine Figur: $(a + b)^2 > 4ab$.



Beweis (b): Durch eine Rechnung:

$$(a + b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0.$$

Beiden Beweisen gemeinsam ist ein *Zwischenschritt*, der nicht durch die Fragestellung diktiert wird, eine *Konstruktion*: Im Beweis (a) ist es die Zerlegung des Quadrats mit Kantenlänge $a + b$, im Beweis (b) das Erkennen der Differenz $(a + b)^2 - 4ab$ als $(a - b)^2$. Die Beweismittel aber sind bei den beiden Beweisen verschieden: Im Beweis (a) nutzt man, dass der Flächeninhalt bei Drehungen und Zerlegungen ungeändert bleibt, in (b) dagegen die Rechenregeln (binomische Formel) und die Positivität von Quadraten.[4] Das "Offensichtliche" ist daher in den beiden Fällen sehr unterschiedlich: Aus dem Alltag wohlbekannte Eigenschaften des Flächeninhalts auf der einen Seite, Rechenregeln auf der anderen Seite. Dennoch wird durch Beides derselbe Sachverhalt ausgedrückt. Wie ist das möglich?

Die Mathematik spielt sich auf drei Ebenen ab:

(1) *Realität*
(2) *Idee*
(3) *Formelsprache*

Der Beweis (a) spielt sich auf der Ebene der *Realität* ab, denn unsere Figur auf dem Papier ist ja ein realer Gegenstand; allerdings steht sie für ein *ideales* Quadrat. Beweis (b) dagegen spielt ganz auf der *formalen* Seite; er ist gewissermaßen die formale Übersetzung von Beweis (a).

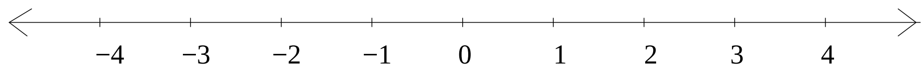
Die Gegenstände der Mathematik haben ihren Ursprung gewöhnlich in realen Gegenständen. Die Mathematik nimmt eine oder mehrere ihrer Eigenschaften heraus und *idealisiert* sie. So finden wir in der Natur mehr oder minder kreisförmige Gegenstände, z.B. den Vollmond oder Wasserwellen im Teich. Daraus haben die Menschen zunächst die Idee des (perfekten) Kreises gebildet. Erst sehr viel später findet diese in der mathematische Formelsprache ihren Ausdruck; aus dem *Kreis mit Radius r* wird die Menge der Koordinatenpaare $\{(x,y);\ x^2+y^2=r^2\}$. Diese Definition gibt präzise den idealen Gegenstand "Kreis" wieder, selbst wenn sie keineswegs alle seine Eigenschaften benennt; z.B. wird nicht erwähnt, dass der Kreis rund ist. Das ist auch sonst nicht anders; z.B. könnten wir den Menschen als ein "Säugetier mit Ohrläppchen" definieren, d.h. unverwechselbar kennzeichnen, aber niemand wird behaupten, dass wir damit alle wesentlichen Eigenschaften des Menschen benannt hätten. Doch es gibt einen wichtigen Unterschied zur Definition idealer Gegenstände in der Mathematik: Wir könnten aus dieser merkwürdigen Kennzeichnung des Menschen z.B. keine seiner geistigen Fähigkeiten ersehen; bei mathematischen Gegenständen dagegen

[4] Übrigens macht das Beispiel noch einen weiteren Zug der Mathematik deutlich. Wir könnten ja die entsprechende Frage für drei oder mehr Zahlen statt für zwei stellen: Ist $\sqrt[3]{abc} < \frac{1}{3}(a+b+c)$? Dies ist in der Tat richtig, aber die bisherigen Beweisideen geben kaum einen Hinweis dazu, und um einen Beweis zu finden, müssen wir einiges mehr wissen (Stichwort: Konvexität, vgl. Skriptum "Integration", S. 33, (31)). Ganz nahe bei unserem Wissen liegt stets ein Ozean von Unwissen. Das sollte uns etwas bescheiden machen, auch in unserem Beruf als Lehrer: Wir wissen nur deshalb so gut Bescheid, weil wir die Aufgaben ausgesucht haben!

müssen alle weiteren Eigenschaften, verborgene und offensichtliche, aus der Definition zu folgern sein.

2. Die Zahlengerade

In unserer Vorlesung geht es zunächst um den Begriff der *Zahlen.* Von Anfang an sind die beiden grundlegenden Zweige der Mathematik, Algebra und Geometrie, in diesem Begriff verbunden. Einerseits sind die Zahlen die grundlegenden Objekte des *Rechnens*, andererseits aber stellen wir sie uns in einer *räumlichen Anordnung* vor. Wir denken uns dabei einen Strahl, der an einem mit 0 bezeichneten Punkt anfängt und auf dem die *natürlichen Zahlen* 1,2,3,4,5,... in regelmässigen Abständen angeordnet sind, so dass also der Abstand von 5 zu 0 das Fünffache des Abstandes von 1 zu 0 beträgt. Die gebrochenen Zahlen, etwa $\frac{3}{2}$ oder $\sqrt{2}$, haben ihren genauen Platz dazwischen, $\frac{3}{2}$ z.B. genau in der Mitte zwischen 1 und 2. Auch die Rechenoperationen bekommen eine geometrische Bedeutung. So entspricht die Addition zweier Zahlen, etwa 2 und 3, dem Aneinanderlegen von zwei Stäben der Längen 2 und 3. Dieser *Zahlenstrahl* beschreibt die *positiven Zahlen.* Die *negativen Zahlen* setzen ihn nach der anderen Seite zu einer Geraden fort, der *Zahlengeraden.*



Insbesondere lassen sich die natürlichen Zahlen jenseits der Null in gleichmäßigen Abständen weiter fortsetzen zu den *ganzen Zahlen.* Die Zahlengerade beschreibt auch alle Zahlen dazwischen, nämlich die Gesamtheit der *reellen Zahlen.*

Die geometrische Idee der regelmässig unterteilten Geraden mit einem besonders bezeichneten Anfangspunkt (der Null) spiegelt unseren Zahlbegriff sehr genau wieder. In doppelter Weise hat das *Unendliche* an dieser Idee teil: Einerseits stellen wir uns die Gerade nach beiden Seiten hin unbegrenzt ausgedehnt vor, die Zahlen nehmen also kein Ende, andererseits können wir durch weitere Unterteilung das anfängliche durch die ganzen Zahlen markierte Raster auf der Geraden *beliebig* verfeinern, um die Position einer Zahl immer genauer festzulegen; das Wort "beliebig" deutet an, dass wir auch hier keine Grenze erwarten dürfen.

Dieser anschaulichen Idee müssen wir nun einen Begriff, einen sprachlichen Ausdruck verleihen, der sie präzise wiedergibt. Das Lineal oder die Bleistiftslinie, die wir in unserer Vorstellung mit der unterteilten Gerade verbinden, sind nur unvollkommene Realisierungen dieser Idee, denn keine in der Natur vorkommende Gerade ist wirklich unendlich lang oder unendlich fein unterteilbar. Es ist das Wesen der mathematischen Idee, dass anschauliche Vorstellungen "idealisiert" werden: Aus der Vorstellung einer unabsehbar langen Strecke wird so die unendlich ausgedehnte Gerade. Das ist eine starke Vereinfachung; anders als bei realen Geraden spielt ihre Länge keine Rolle mehr - sie ist unbegrenzt, und wir brauchen uns keine Gedanken darum zu machen, wie fein wir unterteilen können; es gibt auch dafür keine Grenze. Nur durch solche Vereinfachungen werden präsise Ergebnisse möglich. Aber wie können wir eine Idee, der gar keine Realität entspricht, sprachlich fassen?

Wie schon erwähnt sind es die *Eigenschaften*, die einen Gegenstand definieren. Wir brauchen nicht zu sagen, was die Zahlen genau *sind*, wir brauchen bloß festzuhalten, welche Eigenschaften sie haben und wie wir damit umgehen können. Es ist auch nicht nötig, *alle* Eigenschaften aufzulisten; es genügt eine kleine Auswahl, aus der sich alle anderen logisch ableiten lassen. Einen solchen Satz von definierenden Eigenschaften nennt man *Axiome*. Darin gleicht die Mathematik einem Brettspiel, z.B. Schach; die Axiome entsprechen den Spielregeln. Die Schach-Spielregel sagt auch nicht, was ein Springer ist; sie sagt nur, wo die Springer am Anfang des Spieles stehen und wie sie gezogen werden dürfen. Ebenso lassen sich auch die Gesetze der reellen Zahlen aus wenigen Regeln ableiten, die wir am Anfang zusammengestellt haben. Diese sagen nicht, was die Zahlen sind und was 0 oder 1 bedeuten; in ihnen werden diese Zahlen sowie die Rechensymbole $+, -, \cdot, (\ )^{-1}, =, >$ verwendet, als wären sie bereits bekannt, ebenso wie die Schachanleitung von Beginn an die Worte "Springer" oder "Turm" benutzt. Es wird lediglich gesagt, nach welchen Regeln diese Symbole gebraucht werden: Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation, Distributivgesetz, die Rollen von 0 und 1 sowie die Umkehrbarkeit von Addition und Multiplikation, dazu die Regeln für die Begriffe "größer" und "kleiner". Durch die Gedankenarbeit vieler Jahrhunderte, die bereits in der Antike begann, gelang es, aus den vielen Eigenschaften der Zahlen einen kleinen Satz von Axiomen herauszudestillieren. Alle Aussagen, die wir darüberhinaus über die Zahlen treffen wollen, können wir mit logischen Schlüssen auf dieses System von Axiomen zurückführen.

Allerdings sind die Erkenntnisse der Mathematik nicht dadurch entstanden, dass man systematisch die logischen Konsequenzen der Axiome untersucht hat, so wenig wie die Schach-Handbücher sämtliche möglichen Stellungen aufzulisten versuchen. Wer die Schach-Regeln beherrscht, kann noch nicht Schach spielen, und wer die Axiome der reellen Zahlen kennt, weiß noch fast nichts über Analysis. Die mathematische Erkenntnis muss also aus anderen Quellen gespeist werden als aus den Axiomen und der Logik: Unsere aus der Erfahrung gespeiste *Intuition* macht es möglich, eine lange Reihe von Schlüssen (oder Schachzügen) vorausschauend zu überblicken, noch bevor wir sie im einzelnen genau durchdacht haben. Eine Quelle dieser Intuition ist die *Anschauung*, aus der die Axiome ja urspüglich entnommen sind, die uns aber auch bereits viele Folgerungen aus den Axiomen aufzeigt. Aber die Intuition ist keine sichere Erkenntnisquelle; sie kann uns in die Irre leiten. Daher müssen wir Mathematiker wirklich die Schlussreihe aufstellen, mit der die Behauptung aus der Voraussetzung hergeleitet wird.[5] Erst wenn uns das gelungen ist, können wir sicher sein, dass unsere Behauptung zutrifft.

So weiß bis heute niemand, wieviele Paare aufeinanderfolgender ungerader Zahlen es gibt, die beide Primzahlen, also durch keine kleinere Zahl außer 1 teilbar sind, wie z.B. die Paare (5,7), (17,19), (1997,1999), (2027,2029). Gibt es davon einen unbegrenzten Vorrat, unendlich viele? Alle vermuten es, aber keiner kann es beweisen! Dagegen steht bereits bei *Euklid*[6] ("Elemente" IX,20), warum es überhaupt unendlich viele Primzahlen geben muss: Jede natürliche Zahl $\neq 1$ lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. Gäbe es davon nur endlich viele, so könnten wir deren Produkt bilden und 1 dazuzählen; die so gewonnene Zahl N wäre durch keine dieser Primzahlen teilbar, ein Widerspruch! Die Reihe der Primzahlen kann also niemals enden.

Außer den reinen Rechengesetzen haben wir bei diesem Schluss noch die Tatsache benutzt, dass die neue Zahl N nicht gleich Eins ist, sondern *größer*. Dazu benötigen wir die zweite Familie von Axiomen, die *Anordnungsaxiome* (O), aus denen die Eigenschaften der Begriffe "positiv", "größer" und "kleiner" folgen.

---

[5] Das sind die *Hausaufgaben* von uns Mathematikern; wir werden die Welt außerhalb unseres Fachgebietes nicht mit allen Details unserer Überlegungen belästigen wollen. Umso wichtiger ist es, dass wir selbst diese Aufgabe sorgfältig erledigen. Allerdings brauchen auch wir nicht jedes Detail dieser Schlussreihe wirklich durchführen: Viele Teilschlüsse sind ja bereits bekannt und können als größere Einheiten genutzt werden, die man nicht jedesmal wieder auseinandernehmen wird. Wir wären längst in der Detailfülle unseres Faches untergegangen, wenn es nicht die Möglichkeit gäbe, große und immer größere Abschnitte als Einheiten zu behandeln.

[6] Euklid von Alexandria, ca. 325 - 265 v.Chr., fasste in seinem Buch "Die Elemente" (Oswalds Klassiker der exakten Wissensch., Band 235) das damals bekannte mathematische Wissen zusammen. – Die meisten der in den Anmerkungen gegebenen biographischen und historischen Angaben finden sich übrigens auf der Webseite http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html

Die logische Rückführung auf die Axiome ist also das Mittel, mit dem wir uns in der Mathematik von der Wahrheit unserer Aussagen überzeugen, so wie es in den Naturwissenschaften die Beobachtung und das Experiment sind. Aber wie man in einer Physikvorlesung nicht alle Experimente wirklich durchführen kann, so werden wir auch in unserer Vorlesung nicht alle unsere Aussagen auf die Axiome zurückführen und nicht nur die bekannten Rechenregeln,[7] sondern auch intuitive Schlussweisen verwenden. Die uns von den Axiomen zur Verfügung gestellten Mittel sind ohnehin begrenzt; wenn wir alle mathematischen Gegenstände, z.B. Mengen, streng axiomatisch behandeln wollten, müssten wir unser Axiomensystem ganz erheblich ausweiten, und selbst dann hätten wir noch nicht alles erfasst.[8] Wir halten aber an dem Anspruch fest, Neues und Überraschendes nicht einfach zur Kenntnis zu nehmen, sondern auf Bekanntes und Offensichtliches zurückzuführen.

3. Menge und Anzahl

Die Mathematik beginnt mit dem Zählen. Gezählt werden Menschen oder Gegenstände oder auch mathematische Objekte, die durch eine gemeinsame Eigenschaft zu einer Einheit zusammengefasst worden sind, z.B. die Anwesenden in diesem Raum. Solche Einheiten nennen wir *Mengen*, ihre Mitglieder *Elemente*. Einer Menge geben wir ein eigenes Symbol, etwa A; mit $|A|$ bezeichnen wir dann die Anzahl der Elemente (*"Mächtigkeit"*) von A. Eine Besonderheit *mathematischer* Gegenstände ist, dass ihre Anzahl auch unendlich sein kann; z.B. Zahlenmengen wie die Menge der *natürlichen Zahlen*, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Mit $x \in A$ meinen wir, dass das Individuum x zur Gesamtheit A gehört. Eine Menge kann durch explizite Aufzählung definiert werden, z.B. $\{1, \dots, 7\}$ (die Menge der Zahlen von 1 bis 7), öfters aber durch Angabe einer gemeinsamen *Eigenschaft*. Betrachten wir z.B. die mögliche

---

[7]Viele sehr vertraute Gesetze kommen in den Axiomen nicht vor, zum Beispiel $x \cdot 0 = 0$. Dies folgt auf etwas überraschende Weise aus dem Distributivgesetz: Weil $0 + x = x$ für alle x gilt (RA3), ist insbesondere $0 + 0 = 0$ und daher folgt mit (RD): $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$. Die gesuchte Zahl $y := x \cdot 0$ erfüllt also die merkwürdige Gleichung $y = y + y$. Wenn wir auf beiden Seiten y abziehen, erhalten wir $y + (-y) = (y + y) + (-y) = y + (y + (-y))$. Da $y + (-y) = 0$, folgt $0 = y + 0$, also $y = 0$. Mit ähnlichen Klimmzügen lassen sich auch alle anderen Rechenregeln aus den Axiomen (R) herleiten (vgl. z.B. O. *Forster*: Analysis I, Vieweg, S. 10 - 13).

[8]Der österreichische Mathematiker Kurt Gödel (1906 - 1978) hat 1931 gezeigt, dass es kein endliches Axiomensystem geben kann, von dem alle wahren mathematischen Aussagen abgeleitet werden können.

Eigenschaft "x ist in diesem Raum anwesend", die ein Individuum namens x haben kann,[9] und kürzen diese Eigenschaft mit "$a(x)$" ab (a für "anwesend"), dann könnten wir die Menge A aller Anwesenden folgendermaßen schreiben: $A = \{x;\ a(x)\}$.

Mit Mengen können wir in gewissem Sinne "rechnen", d.h. aus zwei gegebenen Mengen A und B neue formen: Der *Durchschnitt*:

$$A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ und } x \in B\}, \tag{1}$$

die *Vereinigung*

$$A \cup B = \{x;\ x \in A \text{ oder } x \in B\}, \tag{2}$$

Die logischen Verknüpfungen "*und*" und "*oder*" für die definierenden Eigenschaften von Mengen werden zu Schnitt und Vereinigung der Mengen.[10] Es gibt auch so etwas wie eine Null unter den Mengen, die *leere Menge*, die gar keine Elemente enthält; wir bezeichnen sie mit $\emptyset$, und natürlich gilt $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ sowie $|\emptyset| = 0$.

Hier ist ein erstes Beispiel für systematisches Zählen:

Satz 3.1.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{3}$$

Beweis. Jedes Element $x \in A \cup B$ kann in A oder in B liegen. Wenn A und B keine gemeinsamen Elemente besitzen, *disjunkt* sind, wie man sagt,[11] dann gibt es $|A|$ Elemente in A und $|B|$ Elemente in B, zusammen also $|A|+|B|$. Wenn aber $A \cap B \neq \emptyset$, dann hätten wir mit $|A|+|B|$ die Elemente von $A \cap B$ doppelt gezählt, einmal als Elemente von A und zum zweiten Mal als Elemente von B, also müssen wir die Anzahl $|A \cap B|$ einmal wieder abziehen. □

Bemerkung: Wenn die beiden Mengen A und B disjunkt sind und man dies auch in der Bezeichnung ausdrücken will, schreibt man oft $A \dot\cup B$ statt $A \cup B$ (*disjunkte Vereinigung*). In diesem Spezialfall gilt also

$$|A \dot\cup B| = |A| + |B|. \tag{4}$$

Ein wichtiger Begriff der Mengenlehre ist die *Teilmenge*. Eine Teilmenge T einer Menge A (Symbol: $T \subset A$) besteht aus einigen (aber

[9] Der Buchstabe x ist eine *Variable*, ein Name. Er kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden; wenn ein Buchstabe aber (z.B. in einer Gleichung) mehrfach auftaucht, wird damit jedesmal dasselbe Individuum bezeichnet.

[10] Das Wort "oder" wird in der Mathematik stets im nicht-ausschließenden Sinn gebraucht: $x \in A$ oder $x \in B$ schließt nicht aus, dass beides gleichzeitig gilt. Wenn wir das ausschließende "oder" meinen, sagen wir "entweder - oder".

[11] Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, wenn $A \cap B = \emptyset$

gewöhnlich nicht allen) Elementen von A; die Anwesenden, deren Nachname mit E anfängt, bilden z.B. eine Teilmenge der Menge A aller Anwesenden. Die Teilmengen einer Menge A bilden die Elemente einer neuen Menge, genannt *Potenzmenge* $P(A)$; die Elemente von $P(A)$ sind also die Teilmengen von A, in Formeln: $T \in P(A) \iff T \subset A$ oder

$$P(A) = \{T;\ T \subset A\}. \tag{5}$$

Satz 3.2. *Eine Menge A mit n Elementen, $|A| = n$, besitzt genau 2^n Teilmengen. Kurz: $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$.*

Die Mächtigkeit der Menge aller Teilmengen ist demnach eine Potenz von Zwei; diese Tatsache hat ihr den Namen "Potenzmenge" eingetragen. Sie lässt sich leicht einsehen, wenn wir die Teilmengen $T \subset A$ ein wenig anders auffassen: Jedem Element von T ordnen wir eine Eins zu und jedem Element von $A \setminus T$ eine Null. Ein beliebiges Element $a \in A$ bekommt also eine Eins zugeordnet, wenn es in T liegt, und eine Null, wenn es nicht in T liegt. Wenn wir nun die Elemente von A durchnummerieren, wird die Teilmenge T damit zu einer Folge aus Nullen und Einsen mit Gesamtlänge n, und umgekehrt entspricht jeder Null-Eins-Folge mit Länge n eine Teilmenge von A. Zum Beispiel entspricht der Folge 01011 die Teilmenge $T = \{2, 4, 5\}$ von $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, weil genau an der zweiten, vierten und fünften Stelle der Folge eine Eins steht. Der Folge $0 \dots 0$ aus lauter Nullen entspricht die leere Menge $T = \emptyset$, der Folge $1 \dots 1$ aus lauter Einsen die ganze Menge $T = A$.

Wir haben damit die Menge aller Teilmengen auf eine neue Weise beschrieben, ein anderes *Modell* dafür gefunden: Statt von Teilmengen reden wir nun von Null-Eins-Folgen. Diese sind aber sehr leicht zu zählen: Es gibt zwei Folgen mit Länge Eins, nämlich 0 und 1, vier Folgen mit Länge zwei, nämlich 00, 10, 01, 11, acht mit Länge drei und 2^n mit Länge n. Das Prinzip ist, dass sich die Anzahl dieser Folgen mit jeder weiteren Stelle verdoppelt, weil jeweils wahlweise eine 0 oder eine 1 angefügt werden kann. Bezeichnen wir die Menge aller Null-Eins-Folgen der Länge n mit F_n, so haben wir nun eingesehen: $|P(A)| = |F_n|$ für $n = |A|$, und

$$|F_n| = 2^n. \tag{6}$$

Wir wollen am Beispiel der Formel (6) einen wichtigen Beweis-Formalismus kennenlernen. Wegen der Variablen n haben wir hier ja nicht nur eine, sondern gleich unendlich viele Aussagen auf einmal zu beweisen, eine für jedes $n \in \mathbb{N}$; wir nennen diese $\mathsf{A}(1), \mathsf{A}(2), \mathsf{A}(3), \ldots$:

$$\begin{array}{ll} \mathsf{A}(1): & |F_1| = 2^1 = 2 \\ \mathsf{A}(2): & |F_2| = 2^2 = 4 \\ \mathsf{A}(3): & |F_3| = 2^3 = 8 \\ & \ldots \\ \mathsf{A}(n): & |F_n| = 2^n \\ & \ldots \end{array}$$

Dies ist oft möglich mit dem *Beweisprinzip der vollständigen Induktion*:

I: Eine Aussage $\mathsf{A}(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen n bewiesen, wenn zwei Dinge gezeigt worden sind:
- *Induktionsanfang*: $\mathsf{A}(1)$
- *Induktionssschritt*: $\mathsf{A}(n) \Rightarrow \mathsf{A}(n+1)$ für alle n.

Im Induktionsschritt nennt man $\mathsf{A}(n)$ die *Induktionsvoraussetzung* und $\mathsf{A}(n+1)$ die *Induktionsbehauptung*. Die Herleitung von $\mathsf{A}(n+1)$ aus $\mathsf{A}(n)$ heißt *Induktionsschluss*.

Das Prinzip folgt aus der in Fußnote 2, S. 1 gegebenen Kennzeichnung der Natürlichen Zahlen.[12] Sie ist auch anschaulich leicht einzusehen: Mit dem Induktionsanfang zeigt man $\mathsf{A}(1)$, mit dem Induktionsschritt für $n = 1$, $\mathsf{A}(1) \Rightarrow \mathsf{A}(2)$, folgt $\mathsf{A}(2)$, mit dem Induktionsschritt für $n = 2$, $\mathsf{A}(2) \Rightarrow \mathsf{A}(3)$, folgt $\mathsf{A}(3)$ usw.

In unserem Beispiel (6) sieht das so aus:
Induktionsanfang $n = 1$: $F_1 = \{0, 1\} \Rightarrow |F_1| = 2 = 2^1$.
Induktionsschritt $n \to n+1$: $F_{n+1} = \{f0;\ f \in F_n\} \dot\cup \{f1;\ f \in F_n\} \Rightarrow$ $|F_{n+1}| \overset{(4)}{=} |F_n| + |F_n| = 2|F_n| \overset{\text{Ind'Vor}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.
(Hier haben wir mit $f0$ bzw. $f1$ die um 0 bzw. 1 verlängerte Folge f bezeichnet; ist z.B. $f = 01011$, so ist $f0 = 010110$ und $f1 = 010111$. Mit "Ind'Vor" haben wir die Stelle gekennzeichnet, wo die Induktions-Voraussetzung $|F_n| = 2^n$ einging.) □

Wir wollen es aber noch etwas genauer wissen: Wieviele Teilmengen mit einer bestimmten Element-Anzahl k gibt es? Wir betrachten dazu die Menge aller k-elementigen Teilmengen,

$$P_k(A) = \{T;\ T \subset A,\ |T| = k\},$$

für jede Zahl k zwischen 0 und n. Für deren Elementanzahl wurde ein eigenes Symbol geschaffen: Wenn $|A| = n$, dann setzen wir

$$\binom{n}{k} := |P_k(A)|.$$

[12] Die Menge W aller derjenigen $n \in \mathbb{N}$, für die $\mathsf{A}(n)$ wahr ist, erfüllt die beiden Eigenschaften $1 \in W$ und $n+1 \in W$ für jedes $n \in W$; da $\mathbb{N}$ die kleinste Zahlenmenge mit diesen beiden Eigenschaften ist, folgt $W = \mathbb{N}$.

Beispiel: Für $A = \{1,2,3,4\} = 1234$ (Kurzschreibweise) ist $P_2(A) = \{12,13,14,23,24,34\}$, also $\binom{4}{2} = 6$. Wie können wir diese "n über k" genannte Zahl allgemein berechnen?

Satz 3.3.

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}. \tag{7}$$

Beweis. Das Argument ist ähnlich wie vorher der Induktionsschritt. Die Menge $P_k(A)$ der k-elementigen Teilmengen entspricht der Menge $F_{n,k}$ der Null-Eins-Folgen mit Länge n und genau k Einsen. Jede Null-Eins-Folge f' der Länge $n+1$ entsteht durch Anfügen von 0 (Fall 0) oder einer 1 (Fall 1) an eine Folge f der Länge n. Wir möchten, das f' genau k Einsen hat ($f' \in F_{n+1,k}$). Demnach hat f im Fall 0 genau k Einsen und im Fall 1 genau $k-1$ Einsen:

$$F_{n+1,k} = \{f0;\ f \in F_{n,k}\} \,\dot\cup\, \{f1;\ f \in F_{n,k-1}\}.$$

woraus mit (4) die Behauptung folgt. □

Daraus lassen sich die Zahlen $\binom{n}{k}$ berechnen. Wenn wir nämlich eine Tabelle nach folgendem Muster anlegen,

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & & & & \cdots & & & & \\
\binom{n}{0} & \cdots & & \binom{n}{k-1} & & \binom{n}{k} & & \cdots & \binom{n}{n} \\
 & \cdots & & & \binom{n+1}{k} & & \cdots & &
\end{array}$$

dann steht an beiden Rändern eine Eins (es gibt nur eine Teilmenge mit gar keinem Element, nämlich die leere Menge $\emptyset$, und nur eine, die alle Elemente enthält, nämlich die ganze Menge A), und jede Zahl im Inneren ist nach unserem Satz die Summe der beiden direkt über ihr stehenden Zahlen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{array} \tag{8}$$

Diese Beobachtung machte Pascal[13] bei der Berechnung der Chancen bei gewissen Würfelspielen; diese Tabelle wird daher *Pascal'sches Dreieck* genannt.

[13]Blaise Pascal, 1623 - 1662

Auffällig in (8) ist die Symmetrie bei Spiegelung des Dreiecks an der Mittelachse: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Welche Eigenschaft der k-elementigen Teilmengen ist dahinter verborgen? Es scheint genauso viele k-elementige wie $(n-k)$-elementige zu geben. In der Tat finden wir zu jeder einzelnen k-elementigen Teilmenge $T \subset A$ genau einen $(n-k)$-elementigen Partner und umgekehrt. Dieser Partner ist die *Komplementmenge*, die gerade aus den Elementen von A besteht, die *nicht* in T liegen:

$$\mathrm{C}T = A \setminus T = \{x \in A;\ x \notin T\}. \tag{9}$$

Die zu $\mathrm{C}T$ gehörige 0-1-Folge entsteht aus der zu T gehörigen durch Vertauschen der Nullen und Einsen. Die Komplementmenge von $\mathrm{C}T$ ist natürlich wieder T selbst, $\mathrm{CC}T = T$. Die Partnerschaft geht also auf. Deshalb gibt es genauso viele k-elementige wie $(n-k)$-elementige Teilmengen von A.[14]

4. Wahrscheinlichkeiten

Eine wichtige Anwendung für das Zählen der Elemente einer Menge ist die mathematische Behandlung des Zufalls, die *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, als deren Begründer der gerade erwähnte Pascal gilt. Betrachten wir als erstes Beispiel die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln (sagen wir, einem roten und einem blauen) die Augenzahl 8 zu erzielen. Die möglichen Kombinationen von Augenzahlen bilden die Menge M aller *möglichen* Zahlenpaare zwischen 1 und 6:

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Dabei bezeichnet die erste Ziffer jeweils die Augenzahl des roten, die zweite die des blauen Würfels. Wir sehen $|M| = 36$. Die für uns *günstigen* Kombinationen, mit der wir die Gesamtaugenzahl 8 erreichen, bilden die Teilmenge $G = \{26, 35, 44, 53, 62\} \subset M$ mit $|G| = 5$. Fünf von 36 möglichen Fällen sind also für uns günstig, und wenn wir annehmen, dass alle 36 Kombinationen mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten, ist die Chance, die Augenzahl 8 zu erzielen, gerade 5/36. Allgemein ist die *Wahrscheinlichkeit* die Zahl der *günstigen* Fälle geteilt durch die Zahl der *möglichen* Fälle (vorausgesetzt, alle Fälle sind gleich wahrscheinlich): Gegeben ist also stets eine Menge M, die alle

[14]Die Zuordnung $T \mapsto \mathrm{C}T$ ist eine *umkehrbare Zuordnung* zwischen $P_(A)$ und $P_{n-k}(A)$

möglichen Fälle enthält, und eine Teilmenge $G \subset M$, die die für uns (bei einem Spiel oder einer Wette) *günstigen* Fälle enthält, und die Chance zu gewinnen ist $W = |G|/|M|$.[15]

Bemerkung: Wir haben mit diesem Beispiel eine weitere Mengenoperation (neben $\cup$ und $\cap$) kennengelernt: Für zwei gegebene Mengen A und B (die auch gleich sein dürfen) definieren wir die *Paarmenge* oder das *kartesische Produkt*[16] $A \times B$ folgendermaßen: Jedes $a \in A$ bildet zusammen mit jedem $b \in B$ ein *Paar* (a, b) (Kurzform: ab) und $A \times B$ ist die Menge aller möglichen Paare:

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}$$

Nichts geschieht mit den Elementen a und b, wenn wir das Paar (a, b) bilden; es wird nichts gerechnet, sondern sie werden einfach nebeneinander gestellt und bilden allein dadurch ein neues Objekt, eben das Paar (a, b). Die Bestandteile a und b, aus denen es zusammengesetzt sind, heißen die *Komponenten* des Paares, a die *erste* und b die *zweite Komponente*. In unserem Beispiel ist $M = A \times A$ mit $A = \{1, \dots, 6\}$. Für die Elementanzahl gilt:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|, \tag{10}$$

denn wir haben $|A|$ Möglichkeiten, die erste Komponente a zu wählen, und nach jeder Wahl von a gibt es noch $|B|$ Möglichkeiten für die Wahl der zweiten Komponente b. Ganz analog kann man bei drei Mengen A, B, C das dreifache kartesische Produkt $A \times B \times C$ als die Menge aller Tripel (a, b, c) mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ und Mächtigkeit $|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$ und bei noch mehr Mengen auch die Menge der Quartetts, Quintetts, Sextetts usw.

Wir wollen gleich ein etwas interessanteres Beispiel ansehen: Wie hoch ist die Chance, einen Sechser im Lotto zu gewinnen? Die Menge M besteht aus allen möglichen Ziehungen. Jede Ziehung schreiben wir als Sextett[17] unterschiedlicher Zahlen zwischen 1 und 49, z.B.

$$(25, 3, 48, 37, 16, 21),$$

und daher ist die Menge der Möglichkeiten

$$M = \{(n_1, \dots, n_6);\ n_1, \dots, n_6 \in \{1, \dots, 49\} \text{ verschieden}\}$$

[15] Die Menge M muss zunächst endlich sein. Später werden wir auch unendliche Mengen M betrachten, z.B. die Menge der Punkte auf einer Zielscheibe. Dann wird das *Zählen* durch das *Messen* ersetzt (siehe Skriptum “Integration”).

[16] René Descartes, lat. Cartesius, 1596 - 1650. Auf ihn geht die Idee zurück, jeden Punkt der Ebene durch zwei Zahlen (*“kartesische Koordinaten”*) eindeutig festzulegen und damit die Ebene als Menge von Zahlen-*Paaren* aufzufassen.

[17] M ist daher eine Teilmenge von $A \times A \times A \times A \times A \times A$ für $A = \{1, \dots, 49\}$

Wieviele solcher Sextetts gibt es? Für die erste Zahl n_1 gibt es 49 Möglichkeiten. Wenn die erste Kugel gezogen ist, bleiben noch 48 Möglichkeiten für die zweite Kugel, dann noch 47 für die dritte, 46 für die vierte, 45 für die fünfte und noch 44 für die sechste Kugel. Ingesamt ergeben sich $|M| = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ Möglichkeiten. Wieviele davon sind günstig? Nehmen wir an, Sie haben auf Ihrem Zettel die Zahlen 3, 16, 21, 25, 37, 48 angekreuzt. Bei der obigen Ziehung hätten Sie also einen Sechser! Aber Sie hätten auch dann gewonnen, wenn dieselben Zahlen in anderer *Reihenfolge* gezogen wären, z.B. bei der Ziehung $(21, 3, 37, 16, 25, 48)$. Es gibt genauso viele günstige Fälle, wie es Möglichkeiten gibt, die sechs richtigen Zahlen unterschiedlich anzuordnen: Für die erste Zahl gibt es 6 Plätze, für die zweite dann noch 5, für die dritte 4, die vierte 3, die fünfte 2 und die sechste nur noch einen Platz; insgesamt gibt es also $|G| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ mögliche Anordnungen,[18] und Ihre Chance auf einen Sechser ist $W = |G|/|M|$, der Kehrwert von

$$\frac{1}{W} = \frac{|M|}{|G|} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 44 \cdot 3 = 13\,983\,816.$$

Wir können dieselbe Situation auch mit einem anderen mathematischen Modell beschreiben: Gezogen wird nicht ein Sextett, sondern einfach eine 6-elementige Teilmenge der Menge $A = \{1, \dots, 49\}$; wir vergessen also die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen worden sind. Die Menge aller möglichen Fälle ist dann $M' = P_6(A)$, und es gibt nur einen einzigen günstigen Fall, wenn nämlich genau die von Ihnen angekreuzte Teilmenge $T = \{3, 16, 21, 25, 37, 48\}$ gezogen wird: G' ist die Teilmenge von M', die nur aus dem einen Element T besteht. Somit ist $W = 1/|M'|$ und

$$\frac{1}{W} = |M'| = |P_6(A)| = \tbinom{49}{6}.$$

Wenn wir dieselbe Situation auf zwei verschiedene Arten beschreiben können, führt das zu neuer Erkenntnis: Durch Vergleich der beiden Gleichungen für $1/W$ finden wir

$$\tbinom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Dies ist mit demselben Beweis natürlich auch für alle anderen Zahlen richtig: Gegeben sei eine Menge A mit $|A| = n$. Eine Teilmenge $T \subset A$ mit k Elementen wird durch eine Ziehung von k Elementen von

[18]Die Zahl $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ nennen wir 6!, "Sechs Fakultät"; das Wort "Fakultät" bedeutet "Möglichkeit". Die Anzahl der Anordnungen von n verschiedenen Zahlen oder Gegenständen ist nach derselben Überlegung $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

A bestimmt. Für das erste gezogene Element stehen n Elemente zur Auswahl, für das zweite $n-1$ usw., und bei der Ziehung des k-ten Elementes haben wir schließlich noch $n+1-k$ Möglichkeiten zur Wahl. Die Anzahl der möglichen Ziehungen ist also $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)$. Ziehungen derselben Elemente in anderer Reihenfolge ergeben dieselbe Teilmenge T; es gibt also $k!$ "günstige" Ziehungen für die Menge T, und somit folgt

$$(11) \qquad \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Der letzte Ausdruck dient nur zur Abkürzung:

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k),$$

denn alle übrigen Faktoren von $n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ werden durch $(n-k)!$ weggekürzt.[19]

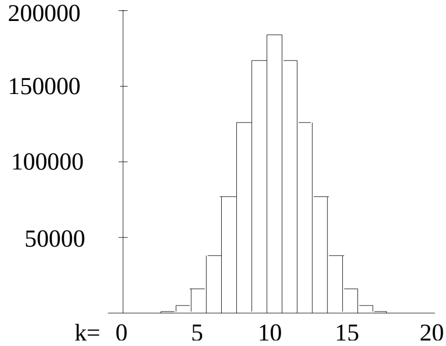
Die Zahlen $\binom{n}{k}$ spielen auch bei vielen anderen Spielen eine Rolle, zum Beispiel beim *Münzwurf*. Stellen wir uns vor, wir würden n-mal eine Euro-Münze werfen; jedesmal kann "Zahl" oder "Wappen" oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau k mal auf "Zahl" fällt? Wenn wir die Würfe von 1 bis n durchnummerieren, dann bilden die Nummern der Würfe mit "Zahl" eine Teilmenge T der Menge $A = \{1, \ldots, n\}$. Die möglichen Ergebnisfolgen ("Zahl - Zahl - Wappen - Zahl - ...") sind wieder die schon früher (S. 12) benutzten Null-Eins-Folgen (Eins für "Zahl" und Null für "Wappen"), die für Teilmengen stehen. Alle sind gleich wahrscheinlich. Die Menge der Möglichkeiten ist $M = P(A)$, die der günstigen Fälle $G = P_k(A)$, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit für "genau k-mal Zahl" ist $W_k = |G|/|M| = \binom{n}{k}/2^n$. Bei 20 Würfen z.B. ist die Wahrscheinlichkeit, 10 mal "Zahl" zu werfen, gleich $\binom{20}{10}/2^{20} = 184756/1048576 \approx 0,176$.

5. Die binomische Formel

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*, denn sie spielen bei der Berechnung von Ausdrücken der Form $(a+b)^n$, sogenannten *Binomen*[20] eine Rolle. Für $n = 2$ kennen wir die *binomische Formel* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; wie sieht sie für größere n aus? Dazu führen wir zunächst eine neue Bezeichnung ein, die für größere Summen unentbehrlich ist: das

[19] (11) lässt sich auch aus (7) durch Induktion über n beweisen; der Induktionsschritt ist $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)\ldots(n+1-k)}{k!} + \frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!} \cdot (\frac{n+1-k}{k} + 1) = \frac{n(n-1)\ldots(n+2-k)}{(k-1)!} \cdot \frac{n+1-k+k}{k} = \frac{(n+1)n\ldots(n+1+1-k)}{k!}$.

[20] "*Bi-*" heißt 2 (Summanden); man versäume aber nicht, das Stichwort "Binomi" bei *Forster*, Analysis 1, nachzuschlagen ...



Summensymbol. Will man n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ addieren, dann schreibt man ihre Summe als $\sum_k a_k$ oder genauer $\sum_{k=0}^n a_k$:

$$a_1 + \cdots + a_n =: \sum_{k=1}^n a_k.$$

Der Buchstabe k auf der rechten Seite ist dabei nur ein Platzhalter für einen Index zwischen 1 und n; er kann durch jeden anderen Buchstaben ersetzt werden. Auch können die Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ anders nummeriert sein, z.B. von 0 bis $n-1$, dann schreibt man eben stattdessen $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Ganz analog definieren wir auch das *Produktsymbol*:

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n =: \prod_{k=1}^n a_k.$$

Satz 5.1. Binomische Formel:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{12}$$

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Die Formel (12) kann man durch Induktion über n mit Hilfe von (7) beweisen (vgl. *Forster*, Analysis 1, S. 6f). Aber man kann sie auch dadurch einsehen, dass man sich den Prozess des *Ausmultiplizierens* von Produkten von Summen klarmacht:

Satz 5.2. *Für beliebige Zahlen $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ wird das Produkt*

$$p_n := \prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n)$$

folgendermaßen in eine Summe umgerechnet: Man wählt aus jedem der n Faktoren $(a_k + b_k)$, $k = 1, \ldots, n$, jeweils einen der beiden Summanden (a_k oder b_k) aus und multipliziert die ausgewählten Summanden miteinander. Wenn man dies für alle Wahlmöglichkeiten durchführt, erhält man 2^n solche Produkte; diese summiert man auf.

Beispiel: $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3) = (a_1a_2+a_1b_2+b_1a_2+b_1b_2)(a_3+b_3) = a_1a_2a_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 + b_1b_2a_3 + a_1a_2b_3 + a_1b_2b_3 + b_1a_2b_3 + b_1b_2b_3$.

Beweis: Induktion über n. Induktionsanfang $n = 1$: $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$. Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$p_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}(a_k + b_k) = p_n\,(a_{n+1} + b_{n+1}) = p_na_{n+1} + p_nb_{n+1}.$$

Auf p_n können wir die Aussage des Satzes bereits anwenden (*Induktionsvoraussetzung*); p_n ist also eine Summe von n-fachen Produkten, wie im Satz angegeben. Wenn wir a_{n+1} und b_{n+1} in diese Summe hineinmultiplizieren,[21] dann besteht p_na_{n+1} aus der Summe aller $(n + 1)$-fachen Produkte, deren letzter Faktor a_{n+1} ist, und p_nb_{n+1} ist die Summe aller der Produkte, deren letzter Faktor b_{n+1} ist. In der Gesamtsumme kommt also jedes mögliche $(n + 1)$-fache Produkt genau einmal vor.[22] $\square$

Beweis von Satz 5.1: Wenn die Faktoren alle gleich sind, $a_1 = \cdots = a_n = a$ und $b_1 = \cdots = b_n = b$, dann kommt es nur noch darauf an, bei wievielen Wahlen man genau k-mal den zweiten Summanden b (und damit $(n - k)$-mal den ersten Summanden a) wählt. Jede Wahl bestimmt eine Teilmenge T von $A = \{1, \ldots, n\}$, nämlich die Nummern der Faktoren, bei denen b ausgewählt wurde.[23] Der Term $a^{n-k}b^k$ tritt also so oft auf, wie es Teilmengen $T \subset A$ mit $|T| = k$ gibt, also mit der Häufigkeit $|P_k(A)| = \binom{n}{k}$. Daraus ergibt sich (12). $\square$

Wenden wir Satz 5.1 auf $(1 + 1)^n = 2^n$ einerseits und $(1 - 1)^n = 0$ andererseits an, so erhalten wir:

---

[21] Das Distributivgesetz (RD) gilt als Axiom zunächst nur für zwei Summanden: $(x + y)w = xw + yw$. Es lässt sich aber durch Induktion nach n auf n Summanden verallgemeinern: $(\sum_{k=1}^{n} x_k)w = \sum_{k=1}^{n} x_kw$.

[22] Wir können ein n-faches Produkt wie $b_1a_2b_3a_4a_5$ (für $n = 5$) auch wieder mit einer 0-1-Folge der Länge n identifizieren, wobei 0 für a und 1 für b steht; so entspricht das Produkt $a_1b_2a_3b_4b_5$ der 0-1-Folge $f = 01011$. Gibt man dem Produkt, das zur Folge f gehört, den Namen p_f (z.B. $p_f = a_1b_2a_3b_4b_5$ für $f = 01011$), dann kann man Satz 5.2 in einer Formel schreiben: $p_n = \sum_{f\in F_n} p_f$

[23] Statt "Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$" können wir "0-1-Folge der Länge n" sagen.

Folgerung 5.1.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n, \tag{13}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + - \cdots \pm \binom{n}{n} = 0. \quad \square \tag{14}$$

Die Gleichung (13) ist uns bereits aus Abschnitt 3 bekannt: Für eine Menge A mit $|A| = n$ Elementen ist $|P(A)| = 2^n$, wobei $P(A)$ die *Potenzmenge*, die Menge aller Teilmengen von A bezeichnet, und diese ist disjunkte Vereinigung der Mengen $P_k(A) = \{T \in P(A);\ |T| = k\}$ mit Mächtigkeit $|P_k(A)| = \binom{n}{k}$, für $k = 0, \dots, n$.

6. Vergleichen und Messen

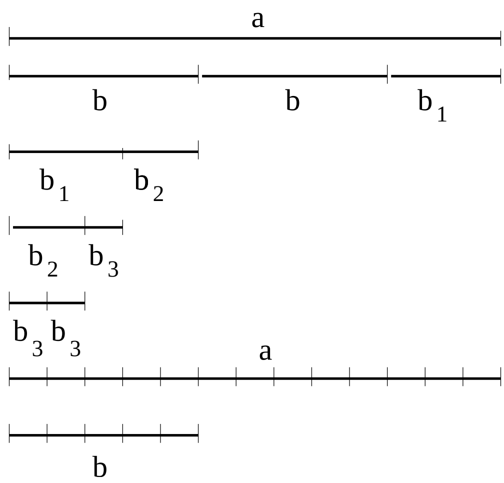
Schon sehr früh in der Menschheitsgeschichte[24] dienten die Zahlen nicht mehr nur zum Abzählen, sondern auch zum Vergleichen: Die eine Menge hat *mehr* Elemente, *größere* Mächtigkeit als die andere. Will man diese qualitative Aussage zu einer quantitativen verschärfen ("wieviel größer?"), so benötigt man die *Brüche*, *rationale Zahlen*,[25] was wir ja bereits bei den Wahrscheinlichkeiten gesehen haben (Vergleich der Mengen M der möglichen und G der günstigen Fälle). Einen weiteren Schritt musste man gehen, um auch solche Mengen zu vergleichen, die nicht mehr aus zählbaren Indidividuen bestanden: Mengen von Getreide z.B. (wer wollte noch die einzelnen Körner zählen?) oder auch räumliche und zeitliche Bereiche: Strecken, Flächen- und Rauminhalte sowie Zeitabschnitte. Aber wie kann man das Verhältnis solcher Größen finden, die nicht in offensichtlicher Weise durch natürliche Zahlen ausgedrückt werden können? Dafür wurde in der Antike das Verfahren der *Wechselwegnahme* entwickelt, das auf dem Vergleichen vom Messgrößen (Gewichten, Streckenlängen, Flächen- und Rauminhalten) beruht.

Sind z.B. zwei Strecken gegeben, eine längere Strecke a und eine kürzere b, so nimmt man die kürzere von der längeren so oft wie möglich weg (sagen wir: n mal). Gelingt das ohne Rest, so ist a ein Vielfaches von b, also $a = nb$. Andernfalls bleibt ein Reststück $b_1 := a - nb$ übrig, in das b nicht mehr hineinpasst, $0 < a - nb < b$.[26] Dann stellen wir als nächstes fest, wie oft dieser Rest b_1 in b hineinpasst. Wenn dabei erneut ein Rest $b_2 < b_1$ übrig bleibt, $b = n_1 b_1 + b_2$ mit $0 < b_2 < b_1$, so fragen wir jetzt, wie oft b_2 in b_1 hineinpasst, usw.

[24] vgl. C.J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie, sowie H.-W. Alten et al.: 4000 Jahre Algebra, beide bei Springer, 2000 und 2003

[25] von lat. und engl. "ratio" = Verhältnis

[26] Dies folgt aus dem *Archimedischen Axiom* (A), $nb \le a < (n+1)b$, durch Subtraktion von nb.



In unserer Beispielfigur ist

$$
\begin{array}{rcl}
a & = & 2b + b_1 \\
b & = & b_1 + b_2 \\
b_1 & = & b_2 + b_3 \\
b_2 & = & 2b_3,
\end{array}
\tag{15}
$$

also (von rückwärts aufgelöst) $b_2 = 2b_3$ und $b_1 = b_2 + b_3 = 2b_3 + b_3 = 3b_3$ und $b = b_1 + b_2 = 3b_3 + 2b_3 = 5b_3$ und $a = 2b + b_1 = 2 \cdot 5b_3 + 3b_3 = 13b_3$. Wenn der Prozess abbricht, also ein b_{k-1} ein ganzes Vielfaches von b_k ist (und $b_{k+1} = 0$), dann sind beide Strecken a und b ganze Vielfache von b_k; sagen wir $a = mb_k$ und $b = nb_k$, und b_k heißt das *gemeinsame Maß* von a und b. In unserem Beispiel ist b_3 das gemeinsame Maß, und $a = 13b_3$, $b = 5b_3$ Das Verhältnis a/b ist in diesem Fall *rational*, ein *Bruch*, ein Verhältnis ganzer Zehlen, nämlich $= m/n$, im Beipiel 13/5. Die Strecken a und b nennt man dann *kommensurabel.*[27]

Wenn wir anstelle der Strecken a und b zwei natürliche Zahlen nehmen, z.B. 112 und 91, so ist ihr "gemeinsames Maß" einfach ihr *größter gemeinsamer Teiler* (*ggT*): $112 - 91 = 21$, $91 - 21 = 70$, $70 - 21 = 49$, $49 - 21 = 28$, $28 - 21 = 7$, $21 - 7 = 14$, $14 - 7 = 7$, $7 - 7 = 0$ oder kürzer: $112 - 91 = 21$, $91 - 4 \cdot 21 = 7$, $21 - 3 \cdot 7 = 0$; der ggT von 112 und

---

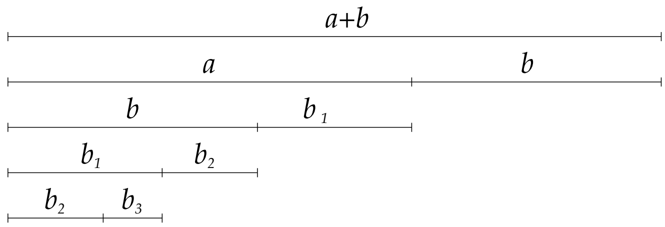
[27] Wir können die erste Gleichung von (15) durch b dividieren, um direkt einen Ausdruck für das Verhältnis $\frac{a}{b}$ zu bekommen: (1) $\frac{a}{b} = 2 + \frac{b_1}{b}$. Entsprechend ergibt die zweite Gleichung $\frac{b}{b_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1}$. Dies ist der Kehrwert des Ausdrucks $\frac{b_1}{b}$ in (1). Einsetzen in (1) ergibt (2) $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{b_2}{b_1}}$. Aus der dritten Gleichung von (15) berechnen wir den Kehrwert von $\frac{b_2}{b_1}$, nämlich $\frac{b_1}{b_2} = 1 + \frac{b_3}{b_2} = 1 + \frac{1}{2}$, wobei wir zuletzt die vierte Gleichung von (15) eingesetzt haben. Dies in (2) eingesetzt ergibt $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$. Einen solchen mehrfachen Bruch nennt man auch einen *regelmäßigen Kettenbruch.*

91 ist also 7. Dieses Rechenverfahren steht bereits in den "Elementen" des Euklid (VII. Buch) und heißt deshalb *euklidischer Algorithmus*.

Aber bei beliebigen Strecken a und b ist es möglich, dass die Wechselwegnahme niemals beendet werden kann; die jeweiligen Reste b_k werden zwar beliebig klein, aber nie geht b_k ganz in b_{k-1} auf. Zwei solche Strecken a und b heißen *inkommensurabel*. Sie haben kein noch so kleines gemeinsames Maß, d.h. ihr Verhältnis a/b kann durch keine rationale Zahl m/n ausgedrückt werden, es ist *irrational*.

7. Irrationalität

Vermutlich war es das Verhältnis des *Goldenen Schnittes*, das zuerst als irrational erkannt wurde. Viele Proportionen in der Natur, auch am menschlichen Körper (z.B. das Verhältnis von Hand- zu Armlänge) stehen in diesem Zahlenverhältnis, das auch in der bildenden Kunst eine bedeutende Rolle spielt und oft zu Ehren des altgriechischen Bildhauers Phidias[28] mit dem Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet wird: Eine Strecke wird durch den Goldenen Schnitt so in zwei ungleiche Teile a und b zerlegt, dass sich der größere zum kleineren Teil verhält wie die ganze Strecke zum größeren Teil: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.



Für das Verhältnis $\frac{a}{b} = \Phi$ folgt

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\Phi}, \tag{16}$$

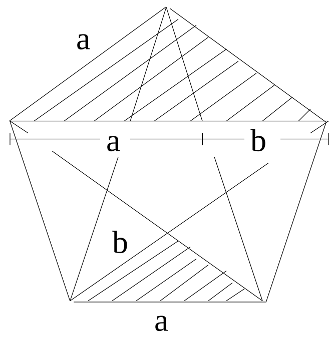
woraus sich der Zahlenwert $\Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1,618$ ergibt.[29] Für dieses Verhältnis $\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ kann die Wechselwegnahme nie zu einem Ende kommen: Die Strecke a passt nur einmal in die Gesamtstrecke $a + b$ hinein, und der Rest b hat zu a wieder das gleiche Verhältnis Φ, also passt auch b gerade einmal in a hinein mit einem Rest b_1, der wiederum zu b das gleiche Verhältnis Φ hat, usw. Immer passt der Rest gerade noch einmal in die kleinere Strecke hinein, und der neue Rest hat wiederum die gleiche Eigenschaft. Es gibt kein gemeinsames

[28] ca. 500 - 432 v.Chr., Athen

[29] $\Phi = 1 + 1/\Phi \iff \Phi^2 = \Phi + 1 \iff (\Phi - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4} \iff \Phi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

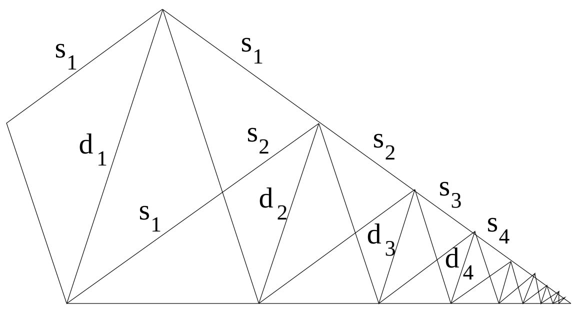
Maß; das Verhältnis $\frac{a}{b}$ lässt sich also nicht als Verhältnis ganzer Zahlen schreiben, es ist *irrational*.[30]

Der Goldene Schnitt ist auch das Verhältnis von Diagonale und Seitenlänge im regelmäßigen *Fünfeck*: Dies folgt aus der *Ähnlichkeit* (gleiche Form bei unterschiedlicher Größe) der beiden in der Figur schraffierten gleichschenkligen Dreiecke:



Das Verhältnis von großer und kleiner Seite ist in den beiden ähnlichen Dreiecken dasselbe, also gilt $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Um die Irrationalität anschaulich zu sehen, betrachten wir eine Kette von immer kleineren Fünfecken, wobei die Seite s_k des k-ten Fünfecks die Diagonale d_{k+1} des $(k+1)$-ten Fünfecks ist:



Aus der Abbildung sehen wir $s_1 = d_2$ und $d_1 = s_1 + s_2$ und allgemein

$$s_k = d_{k+1}, \quad d_k = s_k + s_{k+1}. \tag{17}$$

Wenn d_1 und s_1 ein gemeinsames Maß hätten, also ganze Vielfache einer "Einheitslänge" e wären (wie klein auch immer e sein mag), dann wären auch $d_2 = s_1$ und $s_2 = d_1 - s_1$ ganze Vielfache von e, und durch Wiederholung des Schlusses würde dasselbe für alle d_k und s_k gelten:

[30] Der Goldene Schnitt ist nicht nur irgend eine irrationale Zahl, sondern die "irrationalste" Zahl überhaupt: In jedem Schritt passt der Rest nur einmal in die kleinere Strecke hinein, er ist also fast so groß wie diese, und deshalb sind wir maximal weit von einem kommensurablen (rationalen) Verhältnis entfernt

Alle sind ganzzahlige Vielfache von e, und doch werden sie beliebig klein und schließlich kleiner als e, ein Widerspruch!

Wenn man die Wechselwegnahme an einer bestimmten Stufe einfach abbricht, so erhält man nicht mehr das Verhältnis $\frac{a}{b}$, sondern einen "Nährungsbruch" $c_n = \frac{a_n}{b_n} \approx c$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Für das Goldene Schnittverhältnis $c = \Phi$ sind die c_n die Verhältnisse aufeinanderfolgender *Fibonacci-Zahlen* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...; diese entstehen jeweils durch Addition ihrer beiden Vorgänger.[31] Mithin sind die Brüche $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$ immer bessere Annäherungen an Φ, siehe weiter unten sowie die Übungen.

Bemerkung: Goldener Schnitt und Fibonaccizahlen treten in vielen Zusammenhängen auf,[32] z.B. in der Anordnung von Blatt-, Samen- und Fruchtständen bei Pflanzen. Die Fruchtstände von Fichten- oder Kiefernzapfen wachsen aus einem Zentrum heraus nach außen in der Weise, dass immer der nächste heranwachsende Fruchtstand in einem konstanten Winkel zu seinem Vorgänger steht. Wäre dieser Winkel rational, z.B. 5/8 von 360^o, so wären alle Fruchtstände auf 8 geradlinig vom Zentrum ausgehenden Reihen untergebracht, denn jeder achte Fruchtstand würde in der gleichem Richtung wachsen; zwischen diesen Reihen wäre Platz verschenkt. Deshalb ist es platzsparender, wenn der Winkel in einem *irrationalen* Verhältnis c zu 360^o steht. Die Irrationalität bringt aber nichts, wenn in der Kettenbruchentwicklung $c = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}$ unter den vorderen k_n eine größere Zahl als Eins steht, denn dann liegt c sehr nahe bei einer rationalen Zahl und der beschriebene Reiheneffekt ist fast derselbe. Optimal vermieden wird dieser Effekt erst, wenn alle $k_n = 1$ sind, also $c = 1/\Phi = \Phi - 1$, vgl. (16); der Winkel ist $360/\Phi \approx$ 222,5 Grad oder 360 – 222,5 = 137,5 Grad. Wir sehen dann immer noch die Reihen, die aus den rationalen Approximationen von c entstehen, z.B. 8 Reihen aus der Approximation $1/\phi \approx 5/8$, aber diese sind nicht mehr geradlinig, sondern leicht gebogen: jeder achte Fruchtstand liegt nicht mehr genau in der vorigen Richtung, sondern knapp daneben.

[31] Für $c = \Phi$ ist $c_0 = 1$, $c_1 = 1 + 1$, $c_2 = 1 + \frac{1}{1+1}$, $c_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}$ usw., also $c_{n+1} = 1 + \frac{1}{c_n}$. Schreiben wir c_n als gekürzten Bruch ganzer Zahlen, $c_n = a_n/b_n$, dann ist

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = c_{n+1} = 1 + \frac{1}{c_n} = 1 + \frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n + b_n}{a_n},$$

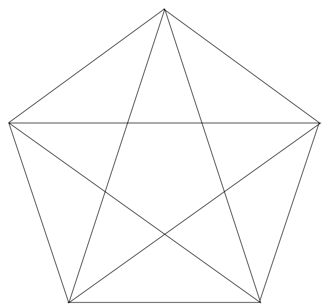
also (1) $a_{n+1} = a_n + b_n$ und (2) $b_{n+1} = a_n$ oder $b_n = a_{n-1}$. Dies in (1) eingesetzt ergibt $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, also ist jedes a_{n+1} die Summe seiner beiden Vorgänger. Wenn wir mit $a_1 = b_1 = 1$ anfangen, erhalten $a_n = f_n$ und $b_n = f_{n-1}$, wobei $(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ die *Fibonaccifolge* ist: $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

[32] Vgl. auch Fußnote 77, S. 58

Das sind die Spiralen, die wir bei Fichten- und Kiefernzapfen sehen: Bei Fichtenzapfen vom unten liegenden Zentrum aus 5 nach rechts und 8 nach links aufsteigende Spiralen, Kiefernzapfen meist spiegelbildlich: 5 nach links, 8 nach rechts, und bei größeren auch 13 wieder nach links aufsteigende Spiralen. Man findet diese Zahlen auch bei der römischen Zirbelnuss (Pinienzapfen) wieder, die in Augsburg im Botanischen Garten und am Dom in Stein gehauen zu sehen ist und die das Wappen der Stadt Augsburg und unserer Universität schmückt.

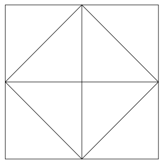
Die Entdeckung der Irrationalität gehört zu den bedeutendsten mathematischen Leistungen der Antike; sie wird einem Schüler des Pythagoras[33] namens Hippasos von Metapont (ca. 450 v.Chr.) zugeschrieben. Pythagoras hatte um 500 v.Chr. in Süditalien eine Art Geheimgesellschaft um sich versammelt. Zu ihren größten wissenschaftlichen Leistungen gehört nicht so sehr der bekannte Satz über die Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke (vgl. Fußnote 73, S. 54), der vermutlich wesentlich älter ist, sondern viel mehr der historisch erste Beitrag zur mathematischen Physik: Pythagoras erforschte systematisch den Zusammenhang zwischen der Länge einer schwingenden Saite und der Höhe des erzeugten Tons. Er erkannte, dass die grundlegenden Tonintervalle (Oktave, Quinte, Quarte, ...) durch einfache Zahlenverhältnisse für die Saitenlängen ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ...) wiedergegeben werden. Dies passte wunderbar in seine Philosophie, nach der die Harmonie der Welt auf ganzen Zahlen aufgebaut ist ("Alles ist Zahl"). Aber die Entdeckung irrationaler Verhältnisse passte da gar nicht gut hinein. Weil Hippasos dieses Geheimnis verriet, soll er aus dem Bund ausgestoßen worden und später im Meer ertrunken sein.

Das Symbol der Pythagoräer war das *Pentagramm*, der aus den Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks gebildete 5-zackige Stern. Vermutlich hat also ihr eigenes Symbol die Pythagoräer zu der unerwünschten Entdeckung der Irrationalität geführt.



[33] ca. 569 - 475 v.Chr.

Bei *Euklid* ("Elemente", Ende von Buch X) steht ein Irrationalitätsbeweis für ein anderes Verhältnis, nämlich von Diagonale und Seitenlänge des *Quadrats*. Dieses ist gleich $\sqrt{2}$, denn das Quadrat über der Diagonale besteht aus vier Hälften des ursprünglichen Quadrats und ist damit doppelt so groß (ein Spezialfall des Satzes von Pythagoras, vgl. Fußnote 73, S. 54).[34]



Gäbe es ganze Zahlen m, n mit $\sqrt{2} = m/n$, so dürften wir annehmen, dass m und n nicht beide durch 2 teilbar sind; andernfalls würden wir den Bruch kürzen. Durch Quadrieren erhielten wir $m^2 = 2n^2$, also wäre m^2 und damit auch m durch 2 teilbar. Dann wäre aber m^2 sogar durch 4 und $n^2 = m^2/2$ immer noch durch 2 teilbar. Somit wäre auch n durch 2 teilbar, ein Widerspruch![35]

Die nachfolgende Figur zeigt einen rein geometrischen Beweis derselben Tatsache: Wären die Diagonale d und die Seitenlänge s des großen Quadrats ganzzahlige Vielfache eines gemeinsamen Maßes e, dann auch ihre Differenz $a = d - s$. (Die drei in der Figur mit a bezeichneten Größen sind gleich wegen der Symmetrie von Kreis und Quadrat.) Im nächstkleineren Quadrat wären Diagonale $d' = 2a$ und Seitenlänge $s' = s - a$ ebenfalls ganzzahlige Vielfache von e, und das Argument ließe sich für die weiteren immer kleineren Quadrate fortsetzen. Diese werden aber schließlich einmal kleiner als e, ein Widerspruch![36]

.

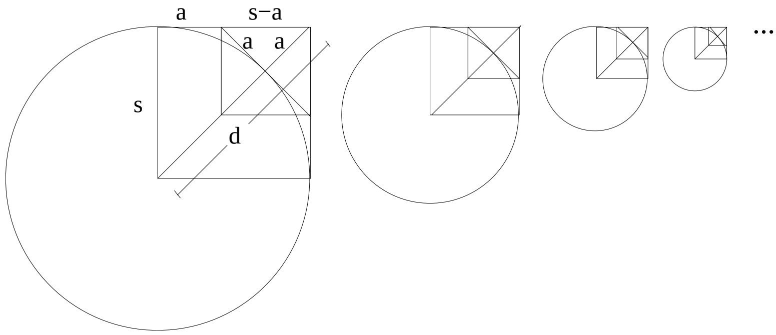
8. Nullfolgen

Wir haben gesehen, dass wir viele Zahlen c nicht genau berechnen, sondern nur *annähern* können, und zwar durch eine (unendliche) *Folge* von Zahlen $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$: ein Gesetz, das jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl c_n zuordnet. Wir schreiben eine Folge als $(c_1, c_2, c_3, ...)$

[34]Dieser Spezialfall spielt eine wichtige Rolle in dem Dialog "Menon" von Platon.

[35]Man kann die Zahl 2 durch jede andere Primzahl p ersetzen und auf die gleiche Weise zeigen, dass $\sqrt{p}$ irrational ist.

[36]nach T. Apostol, Amer. Math. Monthly 107(9), 841 - 842. Wie im Irrationalitätsbeweis für den Goldenen Schnitt auf S. 22 gibt es eine Folge ähnlicher Figuren, immer um den gleichen Faktor verkleinert, wobei die zwei Größen, um deren Verhältnis es geht, ganzzahlig durch ihre Entsprechungen in der nächstgrößeren Figur ausgedrückt werden können.



oder kürzer $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder einfach (c_n) oder gar nur c_n, wobei der Buchstabe n der Name für eine beliebige natürliche Zahl ist und jederzeit durch einen anderen Buchstaben (z.B. k) ersetzt werden kann. Dieses Gesetz kann *explizit* gegeben sein, z.B. $c_n = 1 + \frac{1}{n}$, oder *implizit* durch *Rekursion*, z.B. $c_1 = 2$, $c_{n+1} = 1 + \frac{1}{c_n}$ wie bei den Fibonacci-Quotienten, vgl. Fußnote 31, S. 23.

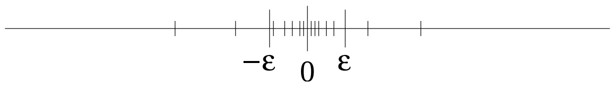
Die Zahl c wird durch die Folge (c_n) angenähert oder *approximiert*, wenn der Unterschied, die Differenz zwischen c_n und c schließlich "*beliebig klein*" wird. Hinter dem Ausdruck "beliebig klein" verbirgt sich ein grundlegender Zug der ganzen Analysis, der sie von der Algebra unterscheidet. Noch bis ins 19. Jahrhundert hinein, ja in manchen Büchern vor allem der physikalischen Literatur bis in jüngste Zeit wurde von "*infinitesimalen Größen*" geredet. Man meinte damit sehr kleine ("unendlich kleine") positive Zahlen, so klein, dass man sie bei bestimmten Rechnungen einfach vernachlässigen konnte, ohne einen merklichen Fehler zu begehen. Es blieb aber unklar, was solche unendlich kleinen Größen eigentlich von der Null unterschied; der anglikanische Bischof Berkeley,[37] der schärfste Kritiker der Analysis des frühen 18. Jahrhundert, verspottete sie daher als "Geister verstorbener Größen" ("May we not call them ghosts of departed quantities?"). Als aber im Zuge der beginnenden Industrialisierung die ersten technischen Hochschulen gegründet wurden (den Anfang machte 1795 die Pariser École Polytechnique), wandelte sich die Analysis von einer Geheimlehre weniger Auserwählter zu einer wichtigen Grundlage der neuen Naturwissenschaft und Technik; sie wurde Lehrstoff an den neuen Schulen. Daher musste man auch über die Inhalte neu nachdenken, die man ja nun an einen größeren Kreis von Studenten weitergeben wollte, und so wurden die unverständlichen "infinitesimalen Größen" verbannt.[38] An ihre

[37]George Berkeley, 1685 - 1753, Bischof von Cloyne, Irland

[38]Heute gibt es allerdings eine gut verstandene Theorie der infinitesimalen Größen von Abraham Robinson (1918 - 1974), die *Non-Standard-Analysis*. Sie benutzt aber nicht-elementare Hilfsmittel aus der Logik und Mengenlehre.

Stelle trat der Begriff der *Nullfolge*: Nicht mehr eine "unendlich kleine" Zahl, sondern eine unendliche Folge von Zahlen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n, ...)$, alle durchaus von endlicher Größe, aber "beliebig klein", so klein, wie man nur will, wenn der Index n nur groß genug ist. Genauer:

Definition: Eine Folge (α_n) nennt man eine *Nullfolge* (Bezeichnung: $\alpha_n \to 0$), wenn gilt: Zu jeder (noch so kleinen) positiven Zahl ϵ gibt es einen Index N, so dass "ab da", d.h. für alle $n \geq N$ gilt: $|\alpha_n| < \epsilon$.[39]



Weil die Worte "*für alle*" und "*es gibt*" in der Mathematik so oft vorkommen, hat man dafür eigene Symbole erfunden: $\forall$, ein umgekehrtes A für "Alle" und $\exists$, ein umgekehrtes E für "Es gibt" oder "Existiert". Mit diesen Symbolen lautet die Nullfolgen-Definition:

$$(N) \qquad \alpha_n \to 0 \;:\Longleftrightarrow\; \forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n\geq N}\; |\alpha_n| < \epsilon.$$

("Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n| < \epsilon$.")

Dieser von Cauchy[40] stammende Begriff stellt einen großen Fortschritt im Verständnis der Analysis dar: Aus dem unverständlichen "unendlich klein" wird "beliebig klein". Natürlich hatte dieser Fortschritt seinen Preis: Statt mit einzelnen Zahlen muss man sich seitdem mit Folgen von unendlich vielen Zahlen befassen. Doch dieser Schritt war unvermeidlich und bereits in unserem Zahlbegriff angelegt, wie wir schon eingangs im Abschnitt 2 angedeutet haben: Die Zahlengerade ist nicht nur nach außen unendlich lang, sondern auch nach innen unendlich fein unterteilbar; wir können ihre Tiefe deshalb nur durch einen unendlichen Prozess ausloten.

Wie können wir von einer gegebenen Folge (α_n) feststellen, ob sie eine Nullfolge ist? Das wichtigste Kriterium ist das fast selbstverständliche

Majorantenkriterium: *Wenn* (β_n) *eine positive Nullfolge ist mit*

$$(18) \qquad |\alpha_n| \leq \beta_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *(oder wenigstens für alle* $n \geq n_o$ *für irgendein* $n_o \in \mathbb{N}$*), dann ist auch* (α_n) *eine Nullfolge.*

Das ist leicht einzusehen, denn aus $|\alpha_n| \leq \beta_n$ und $\beta_n < \epsilon$ folgt ja $|\alpha_n| < \epsilon$. (Wir führen diesen Schluss meist gar nicht aus und meinen

[39] Zur Erinnerung: $|\alpha| = \alpha$, falls $\alpha \geq 0$ und $|\alpha| = -\alpha$, falls $\alpha < 0$ (*Betrag* von α). Es gelten die leicht nachzuprüfenden Rechenregeln $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ("*Dreiecksungleichung*"; vgl. Abschnitt 15) und $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

[40] Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857, Professor an der Pariser École Polytechnique

mit der Ungleichungskette $|\alpha_n| \le \beta_n < \epsilon$ auch $|\alpha_n| < \epsilon$.) Um das Kriterium anwenden zu können, müssen wir aber schon ein paar positive Nullfolgen kennen, die dann die Rolle von (β_n) spielen können.

Satz 8.1. $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *ist eine Nullfolge,* $\frac{1}{n} \to 0$.

Beweis. Es sei eine Zahl $\epsilon > 0$ gegeben. Nach dem Archimedes-Axiom (A) gibt es eine natürliche Zahl $N > \frac{1}{\epsilon}$. Für alle $n \ge N$ gilt dann $\frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \epsilon$. □

Bemerkung: Ein solcher Beweis ist wie eine Diskussion: Sie möchten die Behauptung $\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n\ge N}\ \frac{1}{n} < \epsilon$ beweisen, Ihr Diskussionsgegner bezweifelt alles, was Sie sagen. Er beginnt: "Sie behaupten etwas *für alle* $\epsilon > 0$. Ich habe hier in meiner Tasche aber eine ganz besonders hässliche Zahl $\epsilon > 0$, für die Ihre Behauptung bestimmt nicht zutrifft!" Sie entgegnen: "Aber auch für Ihr hässliches ϵ ist $1/\epsilon$ eine positive Zahl, und nach Archimedes gibt es dann eine natürliche Zahl N, die noch größer ist als $1/\epsilon$, usw." Worauf es mir ankommt: Zum Beweis einer Behauptung vom Typ $\forall_\epsilon$ dürfen nicht Sie die Zahl ϵ aussuchen, sondern Ihr imaginärer Diskussionsgegner. Dafür steht Ihnen die Wahl der Zahl N zu für den nächsten Teil der Behauptung, $\exists_N$.

Wir haben im Beweis eigentlich nur benutzt, dass die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ "*beliebig groß*" wird, gegen Unendlich strebt:

Definition: Eine Zahlenfolge (A_n) *strebt gegen Unendlich* (Bezeichnung: $A_n \to \infty$), wenn gilt: Zu jeder (noch so großen) Zahl E gibt es einen Index N, so dass "ab da", d.h. für alle $n \ge N$ gilt: $A_n > E$.

$$(U) \qquad A_n \to \infty \ :\Longleftrightarrow\ \forall_E\exists_N\forall_{n\ge N}\ A_n > E$$

Satz 8.2. $A_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{A_n} \to 0$.

Beweis. Es sei eine Zahl $\epsilon > 0$ gegeben. Da $A_n \to \infty$, gibt es N mit $A_n > E := \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n \ge N$. Für solche n ist $|\frac{1}{A_n}| = \frac{1}{A_n} < \frac{1}{E} = \epsilon$. □

Satz 8.3. *Wenn* (α_n) *und* (β_n) *Nullfolgen sind, dann auch* $(\alpha_n + \beta_n)$.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Da $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$, gibt es zu $\tilde{\epsilon} := \epsilon/2$ zwei Zahlen N und N', so dass für alle $n \ge \max(N, N')$ gilt:[41] $|\alpha_n| < \tilde{\epsilon}$, $|\beta_n| < \tilde{\epsilon}$, also (vgl. Fußnote 39, S. 27)

$$|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < 2\tilde{\epsilon} = \epsilon. \quad \square$$

[41] $\max(N, N')$ bezeichnet die größere der beiden Zahlen N, N'

Definition: Eine Zahlenfolge (b_n) heißt *beschränkt*, wenn alle ihre Mitglieder b_n in einem festen (von n unabhängigen) Intervall $[-R, R]$ liegen, d.h. wenn es eine reelle Zahl $R > 0$ gibt mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |b_n| \leq R.$$

Satz 8.4. *Wenn (α_n) eine Nullfolge und (β_n) eine beschränkte Folge ist, dann ist $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ eine Nullfolge.*

Beweis. Es sei eine Zahl $\epsilon > 0$ gegeben. Da $\alpha_n \to 0$, gibt es zu $\tilde{\epsilon} := \epsilon/R$ ein N mit $|\alpha_n| < \tilde{\epsilon}$ für alle $n \geq N$ und damit

$$|\beta_n \cdot \alpha_n| = |\beta_n| \cdot |\alpha_n| \leq R \cdot |\alpha_n| < R \cdot \tilde{\epsilon} = \epsilon. \quad \square$$

Satz 8.5. *Für jede Zahl a mit $|a| < 1$ gilt $a^n \to 0$.*

Beweis. Wir dürfen $a \neq 0$ annehmen und setzen $A = 1/|a|$. Da $|a| < 1$, ist $A > 1$, also $A = 1 + b$ für ein $b > 0$. Nach der Binomischen Formel (Satz 5.1) folgt $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k = 1 + nb + \binom{n}{2} b^2 + \cdots > 1 + nb \to \infty$,[42] woraus $A^n \to \infty$ folgt,[43] also $|a^n| = 1/A^n \to 0$. $\square$

9. Approximation

Definition: Eine Folge (c_n) *approximiert* c oder *konvergiert gegen* c oder c ist der *Grenzwert* (*Limes*) der Folge (c_n) (Bezeichnung: $c_n \to c$ oder $c = \lim c_n$), wenn die Differenzen $c_n - c$ eine Nullfolge bilden, $c_n - c \to 0$, mit anderen Worten:

$$c_n \to c \ :\Longleftrightarrow\ \forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n\geq N}\ |c_n - c| < \epsilon \tag{19}$$

Satz 9.1. *Jede reelle Zahl c lässt sich durch rationale Zahlen approximieren, d.h. es gibt eine rationale Zahlfolge (c_n) mit $c_n \to c$.*

Beweis. Wir dürfen $c > 0$ annehmen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegt die positive reelle Zahl nc nach Archimedes (A) zwischen zwei ganzen Zahlen, d.h. es gibt eine Zahl $k_n \in \mathbb{N}_o := \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k_n \leq nc < k_n + 1$ und damit $c_n := \frac{k_n}{n} \leq c < \frac{k_n+1}{n} = c_n + \frac{1}{n}$, und nach Subtraktion von c_n ergibt sich $0 \leq c - c_n < \frac{1}{n} \to 0$. $\square$

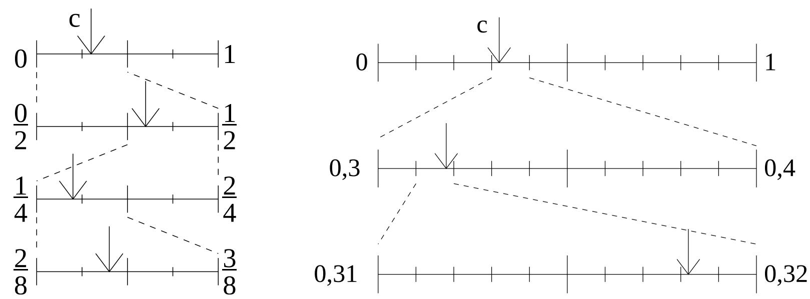
Ein noch einfacheres Verfahren zur rationalen Approximation einer Zahl c ist das folgende: Wenn c zwischen 0 und 1 liegt (andernfalls ziehen wir erst den ganzzahligen Anteil ab), halbieren wir das Intervall $[0, 1]$ und fragen, ob c in der linken oder in der rechten Hälfte liegt.

---

[42] Die Ungleichung $(1+b)^n \geq 1+nb$ (*Bernoullische Ungleichung*) kann man auch direkt durch Induktion sehen; der Induktionsschritt ist $(1+b)^{n+1} = (1+b)^n(1+b) > (1+nb)(1+b) = 1 + (n+1)b + nb^2 > 1 + (n+1)b$.

[43] Aus $A_n > B_n$ und $B_n \to \infty$ folgt $A_n \to \infty$, denn aus $B_n > E$ folgt $A_n > E$.

Das Teilintervall, das c enthält, halbieren wir wieder und stellen dieselbe Frage für dessen Hälften usw., siehe die linke Abbildung. Auf diese Weise legen wir die Position von c durch eine (unendliche) Folge links, rechts, links, links, rechts, … fest. Die linken Randpunkte der jeweiligen Intervalle sind Brüche c_n mit Nenner 2^n (wir haben das Intervall ja n-mal halbiert), und es gilt $c_n \leq c \leq c_n + 1/2^n$ und damit $0 \leq c - c_n \leq 1/2^n \to 0$. Das ist die *Dualbruchentwicklung* von c. Wenn wir das jeweilige Intervall nicht in zwei, sondern in zehn gleiche Teile teilen, erhalten wir die *Dezimalbruchentwicklung*. In der nachfolgenden Abbildung haben wir die Teilintervalle im jeweils nächsten Schritt um den Faktor 2 bzw. 10 vergrößert.



Die Zahlen 2 und 10 heißen *Basiszahlen*; sie können im Prinzip durch jede andere natürliche Zahl $b \geq 2$ ersetzt werden; wir sprechen dann von der *b-adischen Entwicklung*. Die Basiszahl $b = 2$ ist für Computer besonders geeignet (das "kleine Einmaleins" für $b = 2$ ist extrem einfach: $1 \cdot 1 = 1$, fertig). Die Basiszahl $b = 10$ ist durch unsere Biologie, die Zehnzahl unserer Finger bestimmt, die dem Menschen schon immer als erster "Analogrechner" dienten. Doch schon zu babylonischer Zeit bekam die Zehn Konkurrenz durch die Zahlen 12 und 60, die für die Division günstiger sind, da sie wesentlich mehr Teiler haben. Manche unserer heutigen Konventionen erinnern noch daran (Unterteilung der Zeiteinheiten und des Kreisbogens, Mengenangaben wie Dutzend und Schock, alte Maßeinheiten). In Amerika und England (wo sonst?) gibt es eine "Dozenal Society", die dafür streitet, die Zehn durch die Zwölf zu entthronen. Doch werden ihre Anstrengungen wohl vergeblich bleiben, wie selbst der Gründer dieser Bewegung einräumt: "The unhappy fact remains that man is ruled more by habit than by reason. We shall continue counting on our fingers in the logically silly system of ten to the end of our days.".[44]

Der folgenden Satz drückt noch einmal formal aus, was die Abbildung uns bereits gezeigt hat:

[44] http://www.polar.sunynassau.edu/~dozenal/excursion/index.html

Satz 9.2. *Zu jeder Zahl c zwischen 0 und 1 gibt es eine Approximation durch Zahlen*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} z_k/b^k \tag{20}$$

mit Ziffern $z_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ *(unabhängig von* n*), und es gilt die Fehlerabschätzung*

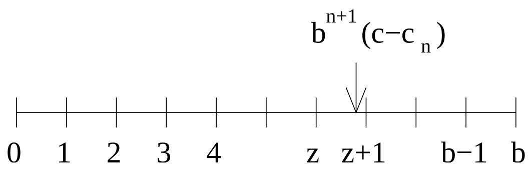
$$0 \le c - c_n < 1/b^n. \tag{21}$$

Beweis. Induktion über n. Induktionsanfang $n = 0$: Wir setzen $c_0 = 0$, dann ist $0 \le c - c_0 < 1/b^0 = 1$.[45]
Induktionsschritt $n \to n+1$: Wenn c_n schon wie in (20) gegeben ist mit der Fehlerabschätzung (21), dann folgt mit $b^{n+1} \cdot$(21)

$$0 \le b^{n+1}(c - c_n) < b,$$

und damit gibt es ein $z = z_{n+1} \in \{0, \ldots, b-1\}$ mit

$$z \le b^{n+1}(c - c_n) < z + 1,$$



Subtrahieren wir z von der letzten Gleichung, so ergibt sich

$$0 \le b^{n+1}(c - c_n) - z < 1. \tag{22}$$

Nun setzen wir $c_{n+1} = c_n + z/b^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} z_k/b^k$, dann ist

$$b^{n+1}(c - c_{n+1}) = b^{n+1}(c - c_n - z/b^{n+1}) = b^{n+1}(c - c_n) - z$$

und (22) ergibt die Fehlerabschätzung $0 \le c - c_{n+1} < 1/b^{n+1}$. □

Von der Einschränkung "c zwischen 0 und 1" befreien wir uns noch:

Satz 9.3. *Jede Zahl* $c > 1$ *besitzt eine b-adische Entwicklung der Form*

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot b^{N-k} \tag{23}$$

für ein $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

[45]Für $n = 0$ ist jede Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ "leer", d.h. es gibt keinen Index k, der gleichzeitig $k \ge 1$ und $k \le 0$ erfüllt. Der "leeren" Summe gibt man den Wert 0, dann bleibt die Regel $\sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}$ auch für $n = 0$ gültig. Ebenso erhält das "leere Produkt" den Wert 1; insbesondere setzt man $b^0 := 1$ für jede Zahl $b \neq 0$. Dann gilt die Regel $b^{n+1} = b^n \cdot b$ auch noch für $n = 0$. Aus einem ähnlichen Grund setzt man $b^{-k} := 1/b^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Beweis. Da $b^n \to \infty$, gibt es eine Potenz $b^N > c$; wir werden N so wählen, dass $b^{N-1} \le c < b^N$. Dann liegt $\tilde{c} = c/b^N$ wieder zwischen 0 und 1 und hat also nach dem vorigen Satz eine b-adische Entwicklung $\tilde{c}_n = \sum_{k=1}^{n} z_k/b^k$. Die b-adische Entwicklung von $c = b^N\tilde{c}$ ist damit

$$c_n = b^N\tilde{c}_n = \sum_{k=1}^{n} z_k\, b^{N-k}. \quad \square \tag{24}$$

Aus der Praxis kennen Sie Rechenverfahren, *Algorithmen* zur Bestimmung der Dezimalbruchentwicklung, etwa den bekannten *Divisionsalgorithmus*, z.B. für die Division von 1 durch 7:[46]

$$\begin{array}{llrrrrrrrl}
1/7 = & 1 & : & 7 & = & & & & & 0,\overline{142857} \\
 & \to 10 & & & & & & & & \\
 & \underline{-7} & & & & & & & & \\
 & \quad 3 & \to 30 & & & & & & & \\
 & & \underline{-28} & & & & & & & \\
 & & 2 & \to 20 & & & & & & \\
 & & & \underline{-14} & & & & & & \\
 & & & 6 & \to 60 & & & & & \\
 & & & & \underline{-56} & & & & & \\
 & & & & 4 & \to 40 & & & & \\
 & & & & & \underline{-35} & & & & \\
 & & & & & 5 & \to 50 & & & \\
 & & & & & & \underline{-49} & & & \\
 & & & & & & 1 & \to 10 & &
\end{array}$$

[46] Der jeweilige Rest wird mit 10 multipliziert und wieder durch 7 geteilt; das ergibt die nächste Ziffer und den nächsten Rest. Weil es nur sechs mögliche Reste $1, 2, 3, 4, 5, 6$ gibt, muss nach (spätestens) 6 Schritten einer der Reste (hier: 1) ein zweites Mal auftreten und das Verfahren wiederholt sich, der Dezimalbruch wird ab da *periodisch*. In anderen Fällen (z.B. 1/8) tritt irgendwann der Rest 0 auf und das Verfahren bricht ab.

Etwas weniger bekannt (weil aus der Mode gekommen) ist der Algorithmus zum Ziehen der *Quadratwurzel*:

1	$\sqrt{7}$	$=$							$2,6457\ldots$	
2	7									
3	-4									
4	3	$\rightarrow$	300	$:40$	≥ 6					
5			-240							
6			60							
7			-36							
8			24	$\rightarrow$	2400	$:520$	≥ 4			
9					-2080					
10					320					
11					-16					
12					304	$\rightarrow$	30400		$:5280$	≥ 5
13							-26400			
13							4000			
14							-25			
15							3975	$\rightarrow$	397500	$:52900$

Die nächstkleinere Quadratzahl zu 7 ist $2^2 = 4$ (Zeile 2), das ergibt die erste Ziffer 2. Der Rest $7 - 4 = 3$ wird mit 100 multipliziert und in Zeile 5 und 6 durch das 20-fache der bisherigen Ziffernfolge 2, also durch 40 geteilt: $300 : 40 = 6$ Rest 60.[47] Die 6 ist die nächste Ziffer, deren Quadrat 36 von dem Rest 60 noch einmal abgezogen werden muss (Zeile 7). Der neue Rest 24 wird mit 100 multipliziert und durch das 20-fache der bisherigen Ziffernfolge 26, d.h. durch 520 geteilt; das Ergebnis ist 4 Rest 320 (Zeile 9 und 10). Die 4 ist die nächste Ziffer und ihr Quadrat 16 wird vom Rest 320 noch einmal abgezogen (Zeile 11), und wieder wird der neue Rest 304 mit 100 multipliziert und durch das 20-fache der Ziffernfolge 264 geteilt, usw.

Die Ähnlichkeit der beiden Verfahren ist unübersehbar. In beiden Fällen soll eine Gleichung gelöst werden,

$$\text{(a) } 1 - 7x = 0 \quad \text{oder} \quad \text{(b) } 7 - x^2 = 0,$$

und zwar dadurch, dass die gesuchte Zahl x durch ihre Dezimalbruchentwicklung $x_n = \sum_{k=0}^{n} z_k/10^k$ von unten approximiert wird. Um mit ganzen Zahlen zu arbeiten, setzen wir $X_n = 10^n x_n$ für alle n; dann ist

$$X_{n+1} = 10^{n+1} x_{n+1} = 10^{n+1}(x_n + z/10^{n+1}) = 10X_n + z$$

[47] Eigentlich geht 40 ja sogar 7-mal in 300 auf, aber der Rest 20 wäre für die nachfolgende Subtraktion zu klein.

mit $z = z_{n+1}$. Setzen wir

$$\begin{array}{rcll} r_n & = & 10^n(1-7x_n) = 10^n - 7X_n & \text{im Fall (a)}, \\ r_n & = & 10^{2n}(7-x_n^2) = 7\cdot 10^{2n} - X_n^2 & \text{im Fall (b)}, \end{array}$$

(diese Zahl gibt an, wie weit x_n davon entfernt ist, Lösung von (a) bzw. (b) zu sein) dann ist im Fall (a)

$$r_{n+1} = 10^{n+1} - 7\cdot(10X_n + z) = 10r_n - 7z,$$

und im Fall (b)

$$r_{n+1} = 7\cdot 10^{2n+2} - (10X_n + z)^2 = 100\,r_n - 20\,X_n z - z^2.$$

Die neue Ziffer $z = z_{n+1}$ wird also als ganzzahliger Anteil von $10\,r_n : 7$ (Fall (a)) bzw. $100\,r_n : 20X_n$ (Fall (b)) gewonnen, wobei im letzteren Fall vom Rest noch z^2 abgezogen werden muss, um r_{n+1} zu erhalten.

Man kann so auch andere Gleichungen lösen, z.B. (c) $7 - x^3 = 0$ (*Kubikwurzel*); dann ist $r_n = 10^{3n}(7-x_n^3) = 7\cdot 10^{3n} - X_n^3$ und

$$r_{n+1} = 1000\,r_n - 300\,X_n^2 z - 30\,X_n z^2 - z^3;$$

die neue Ziffer z gewinnt man dann durch die Division $1000\,r_n : 300\,X_n^2$ und muss danach vom Rest noch $30\,X_n z^2 + z^3$ abziehen.

Wenn man nur an rationaler Approximation interessiert ist, gibt es viel schnellere Verfahren. Will man z.B. $c = \sqrt{7}$ berechnen und hat bereits eine rationale Approximation c_n bestimmt, dann setzt man $\tilde{c}_n = 7/c_n$. Weil $c_n \cdot \tilde{c}_n = 7 = c^2$, ist die eine der beiden Zahlen größer als c, die andere kleiner, d.h. c liegt *dazwischen* und ihr arithmetisches Mittel $c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + \tilde{c}_n)$ ist daher höchstens noch halb so weit von c entfernt wie c_n von $\tilde{c}_n$. In jedem Schritt wird also die Länge des Intervalls, das c enthält, mindestens halbiert. Probieren Sie es aus mit $c_0 = 2$ oder $c_0 = 3$ und einem Taschenrechner. Der Nachteil des Verfahrens ist, dass Sie zunächst Brüche m/n erhalten und die Divisionen $m : n$ noch ausführen müssen, wenn Sie die Dezimalstellen sehen wollen.

10. Rechnen mit konvergierenden Folgen

Die Entdeckung der Irrationalität löste schon in der Antike die erste "Grundlagenkrise" der Mathematik aus:[48] Bereits in einer einzelnen Zahl, einem einzelnen Verhältnis ist ein unendlicher Prozess enthalten! Wie können wir Sterblichen es wagen, uns mit dem Unendlichen einzulassen? Wie soll man mit solchen Zahlen rechnen, wenn man sie

[48]Eigentlich spricht man von der *Grundlagenkrise* der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts, als man erkannte, dass gewisse sprachliche Wendungen in mathematischen Definitionen nicht verwendet werden dürfen, weil sie in sich widersprüchlich sind, z.B. diese: "Jede Regel hat eine Ausnahme. Dies ist eine Regel!"

nicht einmal ganz hinschreiben kann? Die Klärung dieser Frage geht weitgehend auf Eudoxos[49] zurück, dem neben Archimedes wohl bedeutendsten Mathematiker der Antike. Eine praxisnahe Version dieser Frage ist: Wenn ich zwei Zahlen miteinander multipliziere, die ich auf 5 (oder n) Dezimalstellen genau kenne, auf wieviele Stellen genau kann ich dann ihr Produkt berechnen?

Der folgende Satz übersetzt das Problem und seine Lösung in heutige Sprechweise, wo Zahlen als Grenzwerte von *Folgen* definiert werden:

Satz 10.1. *Sind (a_n), (b_n) Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ sowie $-a_n \to -a$ und $a_n^{-1} \to a^{-1}$ (falls $a_n, a \neq 0$).*

Beweis. Die Differenzen $\alpha_n := a_n - a$ und $\beta_n := b_n - b$ sind Nullfolgen, also ist auch die Differenz $a_n + b_n - (a + b) = \alpha_n + \beta_n$ eine Nullfolge (Satz 8.3) und damit folgt die erste Behauptung. Für die zweite benutzt man einen Trick: Man kann eine Differenz in zwei Differenzen zerlegen, wenn man eine Zahl (hier $a_n b$) dazwischenstreut, d.h. abzieht und wieder addiert:

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a_n b + a_n b - ab = a_n \beta_n + \alpha_n b. \tag{25}$$

Beide Summanden auf der rechten Seite dieser Gleichung sind Nullfolgen nach Satz 8.4,[50] also ist $(a_n b_n - ab)$ Nullfolge, d.h. $a_n b_n \to ab$. Mit (α_n) ist auch $(-\alpha_n)$ Nullfolge, denn $\alpha_n \to 0 \iff |\alpha_n| \to 0 \iff -\alpha_n \to 0$. Für die letzte Behauptung bringen wir die Brüche auf den Hauptnenner:

$$a^{-1} - a_n^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a}{a a_n} = \frac{1}{a a_n} \alpha_n. \tag{26}$$

Die Konvergenz $a_n^{-1} \to a^{-1}$ folgt nun aus Satz 8.4, wenn wir zeigen können, dass $\frac{1}{a a_n}$ erst einmal eine *beschränkte* Folge ist. Dies folgt aus dem nachstehenden Hilfssatz mit $c_n := a a_n$ und $c := a^2$. □

Hilfssatz 10.1. *Ist $c_n \neq 0$ für alle n und $c_n \to c$ mit $c > 0$, so ist $(\frac{1}{c_n})$ eine beschränkte Folge.*

Beweis. Da $c_n \to c$, gibt es zu $\epsilon := c/2$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|c_n - c| < \frac{c}{2}$, also insbesondere $c_n > c - \epsilon = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt daher $|\frac{1}{c_n}| \leq R := \max\{\frac{2}{c}, |\frac{1}{c_1}|, \dots, |\frac{1}{c_N}|\}$. □

[49]Eudoxos von Knidos, 408 - 355 v.Chr.

[50]Eine *konvergierende* Folge $a_n \to a$ ist auch *beschränkt*, denn alle Zahlen a_n der Folge liegen in der Nähe von a. Etwas genauer: Zu $\epsilon = 1$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$, also $|a_n| \leq R := \max\{|a - 1|, |a + 1|, |a_1|, \dots, |a_N|\}$.

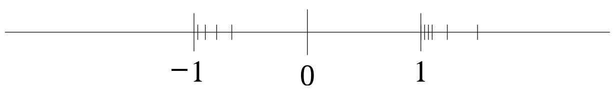
Bemerkung: Die Gleichung (25) beantwortet auch die eingangs gestellte praktische Frage nach den sicheren Dezimalstellen des Produkts $a \cdot b$: Wir nehmen dazu an, dass a und b zwischen 0 und 1 liegen (das können wir ja durch Multiplikation mit einer Zehnerpotenz errreichen). Nun seien a_n und b_n die Dezimalbruchentwicklungen von a und b, dann ist $0 \leq \alpha_n < 1/10^n$ und $0 \leq \beta_n < 1/10^n$, und da a_n und b zwischen 0 und 1 liegen, folgt $0 \leq ab - a_n b_n < \beta_n + \alpha_n < 2/10^n$ aus (25). Daher ist die $(n-1)$-te Dezimalstelle des Produkts noch sicher, die n-te aber nicht mehr ganz, wenn wir $a_n b_n$ anstelle von ab berechnen. Ähnlich ergibt sich die Genauigkeit der Division aus (26).

Beispiel: Das folgende Beispiel benutzt $a_n/b_n \to a/b$, um den Quotienten von *divergierenden* Folgen zu berechnen:

$$\frac{3n^3 + 5n^2 + 7}{n^3 - 2n} = \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} \to \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0} = 3.$$

11. Grenzwerte und Vollständigkeit

Bisher haben wir Zahlen c betrachtet, die Grenzwerte von Folgen (c_n) waren. Wir wollen nun umgekehrt *neue* Zahlen als Grenzwerte von Folgen *definieren*: $c := \lim c_n$. Viele interessanteste Zahlen, z.B. der Goldene Schnitt Φ, die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e lassen sich nur so einführen. Aber welche Folgen eignen sich dafür? Viele konvergieren ja gar nicht; die Folge $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ beispielsweise kann sich gar nicht entscheiden, ob sie lieber gegen 1 oder gegen -1 konvergieren soll und pendelt deshalb ewig hin und her.



Wie können wir einer Folge (c_n) ansehen, ob sie konvergiert ("*konvergent* ist"), wenn ihr möglicher Grenzwert c uns noch unbekannt ist? Die Konvergenzdefinition, gemäß der $(c_n - c)$ eine Nullfolge sein muss, ist unbrauchbar, wenn wir c nicht kennen. Wir benötigen sogenannte *Konvergenzkriterien*, die eine Folge auch ohne Kenntnis des Grenzwerts als konvergent erkennen. Wir geben zunächst drei solche Kriterien an (weitere siehe im Abschnitt 13); sie beruhen allesamt auf dem Vollständigkeitsaxiom, das die reellen Zahlen von den rationalen unterscheidet:

(1) Konvergente Intervallschachtelung,
(2) Beschränkte Monotonie,
(3) Cauchy-Kriterium.

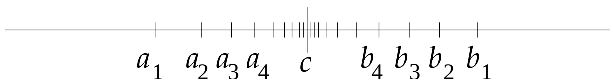
Definition: Eine Folge (c_k) heißt *monoton wachsend*, falls $c_{k+1} \geq c_k$ für alle k, und *monoton fallend*, falls $c_{k+1} \leq c_k$ für alle k.

Definition: Ist (a_k) eine monoton wachsende und (b_k) eine monoton fallende Folge mit $a_k \leq b_k$ für alle k, dann heißt die Folge von Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ eine *Intervallschachtelung*, denn es gilt $I_{k+1} \subset I_k$ für alle k. Die Intervallschachtelung (I_k) heißt *konvergent*, wenn die *Intervall-Längen* $b_k - a_k$ eine Nullfolge bilden.

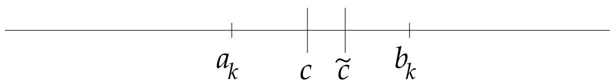
Definition: Es sei (I_k) eine Intervallschachtelung. Eine Folge (c_n) *läuft in die Intervallschachtelung* (I_k) *hinein*, wenn es zu jedem k ein N_k gibt, so dass

$$\forall_{n \geq N_k}\ c_n \in I_k. \tag{27}$$

Satz 11.1. Konvergente Intervallschachtelung: *Eine konvergente Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ enthält in ihrem Durchschnitt genau eine Zahl c, und jede Folge (c_n), die in die Intervallschachtelung (I_k) hineinläuft, konvergiert gegen c.*



Beweis. Nach dem Vollständigkeitsaxiom (V) gibt es eine Zahl c, die in jedem der Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$ liegt, im Durchschnitt $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k := \{x;\ \forall_{k \in \mathbb{N}}\ x \in I_k\}$. Es kann aber keine zweite solche Zahl $\tilde{c}$ geben: Sonst wäre ja $|c - \tilde{c}| =: \epsilon$ eine positive Zahl und da $b_k - a_k \to 0$, gibt es ein k mit $b_k - a_k < \epsilon$. $(*)$ Andererseits ist aber $c, \tilde{c} \in [a_k, b_k]$ und daher gilt $b_k - a_k \geq |c - \tilde{c}| = \epsilon$. $(**)$



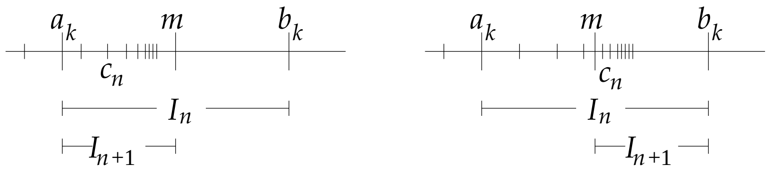
$(*)$ und $(**)$ widersprechen sich; es kann also kein solches $\tilde{c}$ geben!

Zu zeigen ist noch $c_n \to c$ für jede Folge (c_n), die in die Intervallschachtelung hineinläuft. Es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da $b_k - a_k \to 0$, ist $b_k - a_k < \epsilon$ für genügend großes k. Da (c_n) in die Intervallschachtelung (I_k) hineinläuft, folgt $c_n \in I_k$ für alle $n \geq N_k$, und weil auch $c \in I_k$, ist der Abstand $|c - c_n|$ kleiner als die Länge des Intervalls I_k, also $|c - c_n| \leq b_k - a_k < \epsilon$. □

Satz 11.2. Beschränkte Monotonie: *Eine monotone und beschränkte Folge konvergiert.*

Beweis. Gegeben sei eine monoton wachsende[51] Folge (c_n) mit einer *oberen Schranke* R, d.h. $c_n \le R$ für alle n. Wir definieren eine konvergente Intervallschachtelung $I_k = [a_k, b_k]$, in die diese Folge hineinläuft. Der Anfang ist $a_0 = c_1$, $b_0 = R$. Wenn nun $I_k = [a_k, b_k]$ bereits definiert ist und alle Folgenglieder c_n enthält ab einem bestimmten Index N_k, d.h. für alle $n \ge N_k$, dann betrachten wir den Mittelpunkt $m = \frac{1}{2}(b_k + a_k)$ des Intervalls I_k. Nun gibt es zwei Fälle: Entweder ist auch m noch eine obere Schranke der Folge (c_n); dann setzen wir $N_{k+1} = N_k$ und wählen $I_{k+1} = [a_k, m]$ (linkes Halbintervall). Oder m ist keine obere Schranke mehr, d.h. $c_n > m$ für ein n und damit (wegen der Monotonie) auch für alle folgenden; das kleinste solche n setzen wir dann N_{k+1} und wählen $I_{k+1} = [m, b_k]$ (rechtes Halbintervall).[52] In Formeln zusammengefasst:

$$\begin{array}{lll} a_{k+1} = a_k, & b_{k+1} = m & \text{falls } \forall_n\ c_n \le m, \\ a_{k+1} = m, & b_{k+1} = b_k & \text{falls } \exists_n\ c_n > m. \end{array}$$



In jedem neuen Schritt wird die Länge $b_k - a_k$ des Intervalls I_k halbiert, also ist $b_k - a_k = (b_0 - a_0)/2^k$ eine Nullfolge (vgl. Satz 8.5). Somit ist (I_k) eine konvergente Intervallschachtelung, in die (c_n) hineinläuft, und die Konvergenz folgt aus dem vorigen Satz. (NK) □

Das *Cauchy-Kriterium* schließlich ist eine Abwandlung der Definition (19) für die Konvergenz, die lautete: $c_n \to c \iff$

(28) $$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n \ge N}\ |c_n - c| < \epsilon.$$

In Worten: c_n rückt "schließlich" ganz dicht *an c heran.* Leider können wir diese Definition nicht gebrauchen, wenn wir c nicht bereits kennen. Deshalb ersetzen wir den Grenzwert c durch ein Folgenglied c_m mit hoher Nummer m und sagen stattdessen: c_n und c_m rücken "schließlich" ganz dicht *aneinander*:

(29) $$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n,m \ge N}\ |c_n - c_m| < \epsilon.$$

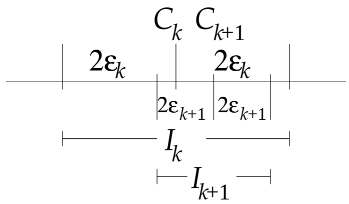
[51] Wenn (c_n) monoton fallend ist, betrachten wir stattdessen die Folge $(-c_n)$.

[52] Interessant ist dabei, dass ein Computer nicht immer die Entscheidung treffen könnte, welche der beiden Fälle vorliegt: Vielleicht liegt der zweite Fall vor, aber die Nummern n mit $c_n > m$ kommen erst so spät, sind so riesig, dass der Rechner niemals bis dahin kommt, wenn er die c_n der Reihe nach berechnet. Beweise, die solche rechnerisch nicht überprüfbaren Alternativen enthalten, nennt man *nicht konstruktiv*; wir werden sie mit "NK" kennzeichnen.

Dies ist das *Cauchy-Kriterium* für Konvergenz. Eine Folge, die dieses Kriterium (29) erfüllt, nennt man auch eine *Cauchy-Folge*. Offensichtlich ist eine konvergente Folge auch eine Cauchyfolge.[53]

Satz 11.3. Cauchy'sches Konvergenzkriterium: *Jede Cauchyfolge* (c_n) *ist konvergent.*

Beweis. Für alle $k \in \mathbb{N}$ setzen wir $\epsilon_k = 1/2^k$. Zu jedem ϵ_k finden wir ein $N_k \in \mathbb{N}$, so dass $|c_n - c_m| < \epsilon_k$ für alle $m, n \geq N_k$, insbesondere für $m = N_k$. Wir setzen $C_k := c_{_{N_k}}$ und $I_k = [C_k - 2\epsilon_k, C_k + 2\epsilon_k]$. Da $|C_{k+1} - C_k| < \epsilon_k$ (wir dürfen $N_{k+1} > N_k$ annehmen) und $\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$, ist $I_{k+1} \subset I_k$ und die Konvergenz folgt aus Satz 11.1. $\square$



Bemerkung und Definition: Die Zahlen $C_k = c_{_{N_k}}$ im letzten Beweis stellen eine Auswahl von (allerdings immer noch unendlich vielen) Mitgliedern der Folge (c_n) dar, eine *Teilfolge*. Für eine Teilfolge brauchen wir zusätzlich eine *streng monoton wachsende* Folge natürlicher Zahlen (n_k) (statt N_k schreiben wir jetzt n_k), d.h. $n_{k+1} > n_k$ für alle k. Jede solche Folge (n_k) definiert eine Teilfolge (C_k) von (c_n), nämlich $C_k := c_{n_k}$. Wenn $c_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} c$, dann folgt auch $C_k = c_{n_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} c$, denn da notwendig $n_k \geq k$ (wegen $n_{k+1} \geq n_k + 1$), folgt aus $\forall_{n \geq N}\ |c_n - c| < \epsilon$ auch $\forall_{k \geq N}\ |c_{n_k} - c| < \epsilon$.

Satz 11.4. (Bolzano, Weierstraß)[54] *Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Es sei (c_n) eine beschränkte Folge, d.h. es gibt eine Zahl R mit $|c_n| \leq R$ oder $c_n \in [-R, R]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Intervallschachtelung (I_k) und eine hineinlaufende Teilfolge (c_{n_k}) von (c_k). Jedes Intervall I_k soll dabei unendlich viele Mitglieder der Folge (c_n) enthalten. Den Anfang macht $I_0 = [-R, R]$ und $n_0 = 1$. Wenn nun I_k und n_k schon definiert sind und wenn I_k das Folgenglied c_{n_k}

---

[53] In der Tat ist (29) eine Folgerung von (28): Wenn die Folgenglieder nahe an c heranrücken, dann rücken sie auch nahe aneinander. Formal gesehen ist das wieder der Trick ähnlich wie in (25) mit dem Abziehen und wieder Zuzählen: $|c_m - c_n| = |(c_m - c) + (c - c_n)| \leq |c_m - c| + |c - c_n|$

[54] Bernhard Placidius Johann Nepomuk Bolzano, 1781 - 1848,
Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, 1815 - 1897

sowie unendlich viele weitere Folgenglieder enthält, dann unterteilen wir I_k durch seinen Mittelpunkt M in zwei Hälften. Wenigstens eine der beiden Hälften enthält unendlich viele Folgenglieder (es können ja nicht beide Hälften von I_k nur endlich viele enthalten, wenn I_k unendlich viele enthält). Diese Hälfte wählen wir als I_{k+1}, sollten beide Hälften unendlich viele der c_n enthalten, wählen wir einfach die untere Hälfte. Als n_{k+1} definieren wir den kleinsten Index $\geq n_k + 1$ mit $c_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Dann bildet (I_k) eine konvergente Intervallschachtelung (die Länge wird ja in jedem Schritt halbiert) mit $c_{n_k} \in I_k$, also ist die Folge $C_k = c_{n_k}$ konvergent; sie läuft in die Intervallschachtelung (I_k) hinein. (NK) □

12. Supremum und Infimum

Eine der Aufgaben der Analysis besteht darin, optimale Werte zu ermitteln, Maxima oder Minima. Endlich viele Zahlen $x_1, \dots, x_N$ kann man nach ihrer Größe sortieren und so die größte unter ihnen, ihr *Maximum* bestimmen, aber bei unendlich vielen Zahlen ist das nicht immer möglich: Betrachten wir zum Beispiel für zwei gegebene Zahlen a, b mit $a < b$ die Menge

$$(a, b) := \{x;\ a < x < b\}. \tag{30}$$

Man nennt sie das *offene Intervall* mit Grenzen a und b, während die schon früher eingeführte Menge

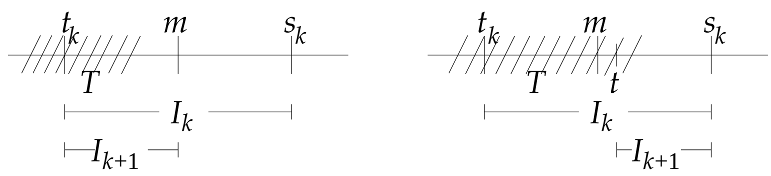
$$[a, b] := \{x;\ a \leq x \leq b\} \tag{31}$$

als *abgeschlossenes Intervall* bezeichnet wird. Was ist das Maximum, die größte Zahl, unter den Elementen von (a, b)? Eigentlich ja wohl b, aber b gehört ja gar nicht zur Menge (a, b). Doch kein $x \in (a, b)$ kann die größte Zahl in (a, b) sein, denn es gibt immer noch eine größere, z.B. das arithmetische Mittel zwischen x und b, $(x + b)/2$. Wir kommen also zu der Einsicht, dass es ein Maximum von (a, b) gar nicht gibt! Alledings gibt es einen Ersatz: Unter den Zahlen, die größer sind als alle Elemente von (a, b), sogenannte *obere Schranken*, gibt es eine *kleinste*, nämlich b. Das bleibt so, wenn wir das offene Intervall (a, b) durch eine beliebige beschränkte Teilmenge T der Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen ersetzen.

Definition: Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}$ heißt *oben beschränkt*, wenn es eine *obere Schranke* von T gibt, d.h. eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ mit $r \geq t$ für alle $t \in T$; kurz: $r \geq T$. Die *kleinste* obere Schranke von T (wenn es sie gibt) heißt *Supremum* von T, geschrieben $\sup T$.

Satz 12.1. *Jede oben beschränkte Teilmenge $\emptyset \neq T \subset \mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, ein Supremum.*

Beweis. Wir werden das Supremum $\sup T$ als Grenzwert einer konvergenten Intervallschachtelung $I_k = [t_k, s_k]$ erhalten. Wir fangen an bei $k = 0$ mit einem Element $t_0 \in T$ und einer oberen Schranke $s_0 \geq T$. Wenn $I_k = [t_k, s_k]$ mit $t_k \in T$ und $s_k \geq T$ bereits definiert ist, dann halbieren wir das Intervall durch $m := (t_k + s_k)/2$. Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten: Entweder m ist immer noch obere Schranke oder eben nicht. Im ersten Fall wählen $t_{k+1} := t_k$ und $s_{k+1} := m$. Im anderen Fall aber gibt es ein Element $t \in T$ mit $t > m$; wir wählen dann dieses t als t_{k+1} und setzen $s_{k+1} := s_k$. Dann folgt $I_{k+1} \subset I_k$ und die Intervall-Länge wird bei jedem Schritt mindestens halbiert, also definiert $I_k = [t_k, s_k]$ eine konvergente Intervallschachtelung mit $t_k \in T$ und $s_k \geq T$.



Damit sind die Folgen (t_k) und (s_k) konvergent mit $\lim t_k = \lim s_k =: s$. Für jedes $t \in T$ ist $s_k \geq t$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also folgt $s = \lim s_k \geq t$,[55] und daher ist s obere Schranke von T. Weil andererseits $t_k \to s$ und $t_k \in T$, kann es keine kleinere obere Schranke $\tilde{s} < s$ geben, denn zu $\epsilon := s - \tilde{s}$ gäbe es ein k mit $s - t_k < \epsilon$ und damit $t_k > s - \epsilon = \tilde{s}$. Damit ist s die kleinste obere Schranke, $s = \sup T$. (NK) $\square$

Bemerkung: Der Beweis gab folgende Kennzeichnung des Supremums: $s = \sup T \iff s \geq T$ und $t_k \to s$ für eine Folge (t_k) in T.

Ganz entsprechend definiert man *untere Schranken* einer Menge $T \subset \mathbb{R}$ und beweist die Existenz der *größten unteren Schranke*, des *Infimums* $\inf T$ für eine *unten beschränkte* Menge T.

13. Unendliche Reihen

Oft treten Folgen (s_n) in einer besonderen Form auf: Nicht die Folgenglieder s_n selbst werden angegeben, sondern ihre Differenzen $a_n = s_n - s_{n-1}$. Mit $a_0 := s_0$ ist dann $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, $\dots$, $s_n = a_0 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. In dieser Form geschriebene Folgen (s_n) nennen wir (*unendliche*) *Reihen*, ihre Glieder *Partialsummen*. Wir

---

[55] Wäre $s < t$, so wäre $\epsilon := t - s > 0$ und wegen $s_k \to s$ gäbe es ein k mit $s_k - s < \epsilon = t - s$, also $s_k < t$ im Widerspruch zu $s_k \geq T$.

notieren solche Folgen als

$$(s_n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \tag{32}$$

und wenn sie konvergieren, bezeichnen wir den Grenzwert mit demselben Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Dabei kann die untere Summationsgrenze statt 0 jede andere ganze Zahl n_0 sein. Zum Beispiel hatten wir in Satz 9.3 die Dezimalbruchentwicklung $c_n = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot 10^{N-k}$ einer beliebigen Zahl $c > 1$ besprochen; mit der neuen Notation können wir dafür einfach schreiben:

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \cdot 10^{N-k}. \tag{33}$$

Wir könnten uns nun darüber wundern, wie man unendlich viele Zahlen zusammenzählen kann und doch etwas Endliches herausbekommt. Voraussetzung dafür ist natürlich, dass die Summanden a_k für große k praktisch keine Rolle mehr spielen, d.h. dass (a_k) eine *Nullfolge* ist. Diese Eigenschaft folgt auch aus dem Cauchykriterium (29): Für große n, m muss $|s_n - s_m|$ und insbesondere $|s_n - s_{n-1}| = |a_n|$ beliebig klein werden.

Erstaunlicherweise aber reicht das für die Konvergenz der Reihe noch nicht aus; ein berühmtes Gegenbeispiel ist die *harmonische Reihe*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots, \tag{34}$$

die Summe über die Nullfolge $a_k = 1/k$. Wenn man die Partialsummen berechnet, so scheinen sie zunächst tatsächlich zu konvergieren:

$$\begin{aligned} s_{10} &= 2,92897..., \\ s_{100} &= 5,18738..., \\ s_{500} &= 6,79282..., \\ s_{1000} &= 7,48547..., \end{aligned}$$

was kann nach $n = 1000$ schon noch schief gehen? Alles, wie das folgende einfache Argument zeigt:

Satz 13.1. $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty$.

Beweis.

$$\begin{array}{rclcll} s_{10} - s_1 & = & \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{10} & \geq & 9 \cdot \frac{1}{10} & = \frac{9}{10} \\ s_{100} - s_{10} & = & \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{100} & \geq & 90 \cdot \frac{1}{100} & = \frac{9}{10} \\ s_{1000} - s_{100} & = & \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{1000} & \geq & 900 \cdot \frac{1}{1000} & = \frac{9}{10} \end{array}$$

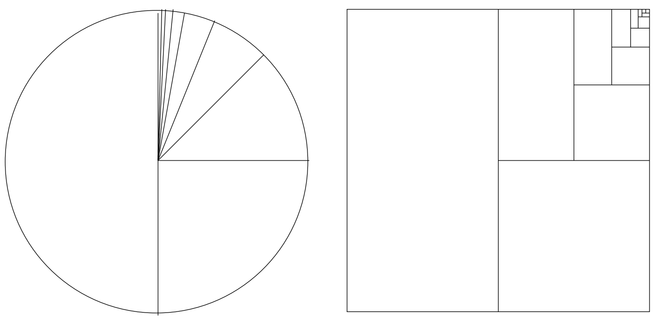
usw. In jedem Teilabschnitt der Summe $\sum \frac{1}{k}$ zwischen $k = 10^j + 1$ und $k = 10^{j+1}$ wird mehr als $\frac{9}{10}$ dazuaddiert. Die Summe von $k = 1$ bis $k = 10^n$ ist daher größer als $n \cdot \frac{9}{10}$ und somit folgt $s_{10^n} > n \cdot \frac{9}{10} \to \infty$. $\square$

Das war aus der sukzessiven Berechnung der Folgenglieder nicht zu ersehen; in unserem Beweis wächst nämlich die Zahl der Summanden in jedem Schritt um eine Zehnerpotenz, also *exponentiell*! In der Tat werden wir später (Skriptum "Integration", S. 29) eine enge Verbindung der harmonischen Reihe zur *Exponentialfunktion* und ihrer Umkehrung, dem *Logarithmus* sehen.

Unser erstes Beispiel ging also gewissermaßen daneben; die Summe über die Nullfolge $(1/k)$ ist nicht endlich; die Folge $(1/k)$ ist nicht *summierbar*, wie man sagt:

Definition Eine Nullfolge (a_k) heißt *summierbar*, wenn die zugehörige Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent ist.

Welche Nullfolgen sind summierbar? Wir werden zunächst Beispiele angeben, wo die Partialsummen explizit berechnet werden können. Das erste ist uns in Spezialfällen wohlbekannt: Wie verteilt man eine Pizza an eine unbekannte Anzahl von Leuten? Die Lösung ist einfach, wenn auch nicht eben gerecht: Der erste bekommt die Hälfte, der zweite ein Viertel, der dritte ein Achtel, der k-te den 2^k-ten Teil. Jedesmal bleibt gerade noch so viel übrig, wie der letzte bekommen hat.



In Formeln: $\sum_{k=1}^{n}(1/2)^k = 1 - (1/2)^n$ und folglich $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k = 1$. Dies ist ein Beispiel für die *Geometrische Reihe*[56] $\sum_k a^k$:

Satz 13.2. *Für alle $a \neq 1$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\,. \tag{35}$$

Falls $|a| < 1$, folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}\,. \tag{36}$$

Beweis. Die erste Gleichung (35) folgt wegen

$$\begin{aligned}(1+a+\cdots+a^n)(1-a) &= 1+a+\cdots+a^n \\ &\qquad -a-a^2-\cdots-a^{n+1} \\ &= 1 \qquad\qquad\qquad -a^{n+1}.\end{aligned}$$

Wenn $|a| < 1$, ist (a^{n+1}) eine Nullfolge (Satz 8.5) und die zweite Gleichung (36) folgt. □

Beispiel: *Periodische Dezimalbrüche.* Eine Dezimalbruchentwicklung $c = \sum_{k=1}^{\infty} z_k/10^k$ heißt *periodisch*, wenn es ein Zahl $p \in \mathbb{N}$ gibt mit $z_{k+p} = z_k$ für alle k. Setzen wir $\tilde{c} = \sum_{k=0}^{p} z_k/10^k$, so folgt

$$c = \tilde{c} + \tilde{c}/10^p + \tilde{c}/10^{2p} + \cdots = \tilde{c} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(1/10^p)^k = \frac{\tilde{c}}{1-1/10^p} = \frac{\tilde{C}}{10^p - 1}$$

mit $\tilde{C} = 10^p \cdot \tilde{c} = \sum_{k=1}^{p} z_k \cdot 10^{p-k} \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist c rational.[57]

Es gibt außer der geometrischen noch andere Reihen, für die wir die Partialsummenfolge berechnen können, z.B. die folgende:

Satz 13.3.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \;\to\; 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \tag{37}$$

[56] Eine Folge der Form (a^k) nennt man auch *geometrische Progresssion.* Vermutlich hat man dabei die geometrischen Begriffe Länge der Strecke, Fläche des Quadrats, Volumen des Würfels im Sinn gehabt.

[57] Jeder periodische Dezimalbruch definiert also eine rationale Zahl. Das kann man auch ohne geometrische Reihe sehen: Wenn x die Dezimalbruchentwicklung $x = 0,\overline{x_1 \ldots x_p}$ hat, so gilt $10^p x = N + x$ mit $N = x_1 \ldots x_p$, also $x = \frac{N}{10^p} + \frac{x}{10^p}$, also $x(1 - \frac{1}{10^p}) = \frac{N}{10^p}$ und damit $x = \frac{N}{10^p - 1}$. Der allgemeine Fall $x = x_n \ldots x_0, x_1 \ldots, x_k\overline{x_{k+1} \ldots x_{k+p}}$ lässt sich leicht darauf zurückführen.
Für die Umkehrung, dass nämlich jede rationale Zahl eine periodische Dezimalbruchentwicklung besitzt, vgl. Fußnote 46, S. 32.

Beweis. Der Trick ist die Beobachtung $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ (Hauptnenner!).[58] Somit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$. □

Wir haben also zwei summierbare Nullfolgen kennengelernt: (a^k) für $|a| < 1$ und $(\frac{1}{k(k+1)})$. Wie im Abschnitt 8 gewinnen wir daraus neue:

Satz 13.4. Majorantenkriterium (2): *Wenn (b_k) eine positive summierbare Nullfolge ist und (a_k) eine Folge mit*

$$|a_k| \le b_k \tag{38}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ oder wenigstens für alle $k \ge k_o$ für irgendein k_o, dann ist auch (a_k) eine summierbare Nullfolge.

Beweis. Es sei $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ und $t_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Nach Voraussetzung ist (t_n) konvergent. Wir wenden das Cauchy'sche Konvergenzkriterium an. Dazu müssen wir zeigen, dass $|s_n - s_m|$ klein wird für genügend große n, m. Wir dürfen dabei $m < n$ voraussetzen, dann ist

$$\begin{aligned} |s_n - s_m| &= |a_{m+1} + \cdots + a_n| \\ &\le |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| \\ &\le b_{m+1} + \cdots + b_n \\ &= t_n - t_m, \end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck wird beliebig klein, da (t_n) konvergent und damit Cauchyfolge ist. □

Bemerkung und Definition: Speziell können wir das Majorantenkriterium auf $b_k := |a_k|$ anwenden; *Wenn $\sum_{k=0}^\infty |a_k|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{k=0}^\infty a_k$ (wobei die Grenzwerte völlig unterschiedlich sind).* Wir nennen die Reihe $\sum a_k$ *absolut konvergent*, wenn diese stärkere Eigenschaft, die Konvergenz von $\sum |a_k|$ erfüllt ist. Aus Satz 13.4 können wir sofort die absolute Konvergenz folgern, denn die Nullfolge $(|a_k|)$ erfüllt die gleiche Voraussetzung wie (a_k).

Beispiel: *$\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$ konvergiert für $s = 2, 3, \ldots$.* Denn $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s = 1 + \sum_{k=1}^\infty 1/(k+1)^s$ und $a_k := 1/(k+1)^s \le 1/(k+1)^2 < 1/k(k+1) =: b_k$; die letztere Folge ist summierbar (Satz 13.3).[59]

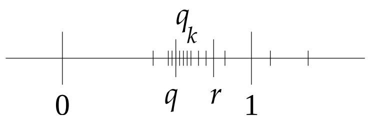
---

[58] Man nennt diese Zerlegung die *Partialbruchdarstellung* des Bruches $\frac{1}{k(k+1)}$. Es ist die Umkehrung der Rechnung, die einen Bruch auf den Hauptnenner bringt.

[59] Den Grenzwert wirklich zu berechnen ist natürlich viel schwieriger. Zum Beispiel ist $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2 = \pi^2/6$; diese Erkenntnis stammt von Leonhard Euler (1707 - 1783). Der Grenzwert $\sum_{k=1}^\infty 1/k^s$ wird mit $\zeta(s)$ ("Zeta von s") abgekürzt und lässt sich auch für $s \notin \mathbb{N}$ definieren. Die Bestimmung aller Lösungen s der Gleichung $\zeta(s) = 0$ ist das Thema des berühmtesten offenen Problems der Mathematik, der *Riemannschen Vermutung*.

Satz 13.5. Quotientenkriterium, Wurzelkriterium: *Gegeben sei eine Nullfolge* (a_k)*. Wir betrachten die Quotienten* $q_k = |a_{k+1}|/|a_k|$ *oder die Wurzeln* $w_k = \sqrt[k]{|a_k|}$*. Wenn es eine Zahl* $r < 1$ *gibt mit* $q_k \leq r$ *für alle* $k \geq k_o$ *oder* $w_k \leq r$ *für alle* $k \geq k_o$*, dann ist die Nullfolge* $(|a_k|)$ *summierbar und damit die Reihe* $\sum a_k$ *absolut konvergent.*

Bemerkung: Die Voraussetzung ist erfüllt, wenn q_k oder w_k gegen eine Zahl $q < 1$ konvergiert. Wir wählen dann eine Zahl r zwischen q und 1, z.B. $r = (q+1)/2$. Dann gilt $q_k < r$ für alle genügend großen k: Da $\epsilon := r - q$ positiv ist, gibt es ein k_o, so dass $q_k - q < \epsilon = r - q$ für alle $k \geq k_o$ und damit $q_k < r$ für solche k.



Beweis des Satzes: Das Wurzelkriterium ist leicht zu zeigen, denn $\sqrt[k]{|a_k|} \leq r$ bedeutet ja $|a_k| \leq r^k$, und damit ist (r^k) eine summierbare (weil $0 < r < 1$) Majorante von $(|a_k|)$; nach Satz 13.4 ist also auch $(|a_k|)$ summierbar.

Zum Beweis des Quotientenkriteriums benötigen wir noch einen weiteren Schritt. Die Voraussetzung $|a_{k+1}|/|a_k| \leq r$ für alle $k \geq k_o$ ist gleichbedeutend mit

$$\forall_{k \geq k_o} \; |a_{k+1}| \leq r \cdot |a_k|. \tag{39}$$

Setzen wir zur Abkürzung $|a_{k_o}| = a$, so folgt aus (39) $|a_{k_o+j}| \leq a \cdot r^j$ durch Induktion nach j.[60] Die Folgen (r^j) und natürlich auch $(a \cdot r^j)$ sind summierbar; nach dem Majorantenkriterium Satz 13.4 ist daher auch die Folge $(|a_{k_o+j}|)_{j \geq 0} = (|a_k|)_{k \geq k_o}$ summierbar. □

Bemerkung: Leider ist das Quotientenkriterium (ebenso das Wurzelkriterium) oft nicht anwendbar, obwohl die Reihe absolut konvergiert; z.B. im Fall $a_k = 1/k^2$ ist $a_{k+1}/a_k = (\frac{k}{k+1})^2 \to 1$ (denn $\frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \to 1$). Die Bedingung des Quotientenkriteriums ist also verletzt, aber $\sum 1/k^2$ ist dennoch konvergent (siehe Beispiel zu Satz 13.4). Wir werden später ("Integration", S. 29)) noch ein weiteres starkes Konvergenzkriterium kennenlernen, das greift, wenn (a_k) eine monoton fallende Nullfolge ist, das *Integralvergleichskriterium*: Ist f eine monoton fallende Funktion auf $(0, \infty)$, so gilt $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)dx < \infty$.

---

[60] Induktionsanfang $j = 1$: (39) für $k = k_o \Rightarrow |a_{k_o+1}| \leq a \cdot r^1$. Induktionsschritt $j \to j+1$: (39) für $k = k_o + j \Rightarrow |a_{k+1}| \leq r \cdot |a_k| \overset{\text{Ind'Vor}}{\leq} r \cdot a \cdot r^j = a \cdot r^{j+1}$.

Es gibt auch konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren. Die wichtigste Beispielklasse bilden die *alternierenden Reihen*, bei denen immer abwechselnd addiert und subtrahiert wird:

$$a_0 - a_1 + a_2 - + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

für eine positive Nullfolge (a_k). Für solche Folgen gilt das Konvergenzkriterium von *Leibniz*:[61]

Satz 13.6. Leibniz-Kriterium: *Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge, so ist die zugehörige alternierende Folge $((-1)^k a_k)$ summierbar, d.h. die Folge $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$ konvergiert.*

Beispiel:

$$\begin{aligned} s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} &= (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots \\ &= 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) - \ldots \end{aligned}$$

Die alternierende Reihe kann wahlweise als eine Summe positiver Terme oder als Eins minus eine Summe positiver Terme dargestellt werden. Die Partialsummen mit geradem Index, $s_0 = 1$, $s_2 = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})$, $s_4 = 1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{5})$ usw. werden immer kleiner, denn es wird jedesmal etwas Positives weggenommen, die mit ungeradem Index, $s_1 = 1 - \frac{1}{2}$, $s_3 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4})$ usw. werden dagegen immer größer, denn es kommt jedesmal etwas Positives hinzu. Die gesamte weitere Partialsummenfolge hält sich zwischen diesen Grenzen auf, die immer enger zusammenrücken. Die Reihe konvergiert also,[62] aber sie konvergiert nicht absolut, denn $\sum \frac{1}{k+1}$ ist ja divergent (Satz 13.1).

Beweis des Satzes: Das Beispiel gibt bereits die allgemeine Beweisidee: Die Partialsummen mit geradem Index, s_{2m}, bilden eine monoton fallende Folge, da $s_{2m+2} - s_{2m} = a_{2m+2} - a_{2m+1} \leq 0$ (weil (a_k) monoton fallend ist), und ebenso bilden die Partialsummen mit ungeradem Index, s_{2m+1}, eine monoton wachsende Folge, da $s_{2m+1} - s_{2m-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$. Ferner ist $s_{2m} - s_{2m+1} = a_{2m+1}$ eine positive Nullfolge. Deshalb bilden die Intervalle $I_m = [s_{2m+1}, s_{2m}]$ eine konvergente Intervallschachtelung, in die die Folge (s_n) hineinläuft. □

[61] Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 - 1716

[62] Der Grenzwert wurde von Leibniz berecnnet: $s = \ln 2$ (*natürlicher Logarithmus* von 2), wie wir später sehen werden (S. 117).

14. Die Zahl, die nicht sein darf

Das europäische Mittelalter war in mathematischer Hinsicht eine Zeit des Stillstandes. Mathematik fand anderswo statt, vor allem in der islamischen Welt, die das antike Erbe übernahm und fortführte. Die Algebra wuchs neben der Geometrie zu einem eigenständigen Zweig der Mathematik heran.[63] Europa nahm diese Entwicklung erst im ausgehenden Mittelalter zur Kenntnis. Es begann eine rege Übersetzungstätigkeit, besonders in Spanien und Süditalien, wo die beiden Kulturen in Kontakt standen. Auch viele der antiken Schriften wurden erst durch Rückübersetzung aus dem Arabischen in Europa wieder zugänglich, was schließlich zur "Wiedergeburt" (*Renaissance*) der antiken Wissenschaft in Europa führte.

Der erste substantielle Beitrag der europäischen Mathematik zur Algebra war um 1520 die Lösung der *kubischen Gleichung*[64]

$$x^3 + ax = b. \tag{40}$$

Man sieht zunächst nicht, wie diese Gleichung gelöst werden kann. Aber es gibt andere kubische Gleichungen, deren Lösung auf der Hand liegt: Die Gleichung

$$(x + u)^3 = v^3 \tag{41}$$

hat offensichtlich die Lösung

$$x = v - u. \tag{42}$$

Die Idee ist nun, die einfache Gleichung (41) auf die Form der schwierigen (40) zu bringen: Da

$$(x + u)^3 = x^3 + 3x^2u + 3xu^2 + u^3 = x^3 + 3xu(x + u) + u^3$$

und weil wir nach (42) $x + u$ durch v ersetzen können (das ist der Haupttrick!), verwandelt sich (41) in

$$x^3 + 3uvx = v^3 - u^3. \tag{43}$$

Diese Gleichung ist tatsächlich von der Form (40) mit

$$a = 3uv, \quad b = v^3 - u^3. \tag{44}$$

---

[63]Das Wort *Algebra* kommt von dem arabischen Verb "aljabr" = einrenken. Es wurde zuerst von dem arabisch-irakischen Mathematiker Al-Khwarizmi (ca. 780 - 850) in die Mathematik eingefürt; das Wort *Algorithmus* ist von seinem Namen abgeleitet. Die Araber übernahmen die indische Ziffernschreibweise, lösten quadratische und einige kubische Gleichungen und führten algebraische Schlussweisen ein.

[64]Die allgemeinste kubische Gleichung ist $x^3 + \alpha x^2 + \beta x = \gamma$. Sie lässt sich leicht auf die Form (40) bringen, wenn man anstelle von x den Ausdruck $\tilde{x} - \alpha/3$ einsetzt ("*substituiert*"); dann ergibt sich eine kubische Gleichung in $\tilde{x}$ ohne $\tilde{x}^2$-Term.

Wenn also die Koeffizienten a, b der "schwierigen" Gleichung (40) die Form (44) haben, dann ist $x = v - u$ eine Lösung. Diese Bedingung scheint immer erfüllt zu sein; wir können ja (44) nach u und v auflösen:

$$u = a/(3v), \quad v^3 = b + u^3 = b + a^3/(3v)^3.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung noch einmal mit v^3, so erhalten wir eine quadratische Gleichung für v^3, nämlich $v^6 = bv^3 + (\frac{a}{3})^3$. Quadratische Gleichungen können wir lösen: $v^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{D}$ mit $D := (\frac{a}{3})^3 + (\frac{b}{2})^2$, und folglich $-u^3 = b - v^3 = \frac{b}{2} \mp \sqrt{D}$. Als Lösung $x = v - u$ erhalten wir daher

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{D}}, \quad D = (a/3)^3 + (b/2)^2. \tag{45}$$

Diese Formel wurde um 1520 von del Ferro[65] entdeckt, der sie aber nur an einen seiner Schüler weitergab. Davon erfuhr Tartaglia[66] und fand die Formel 1535 selbst. Er gab sie 1539 an seinen Freund Cardano[67] auf dessen inständige Bitte weiter, ließ ihn jedoch schwören, sie für sich zu behalten. Als Cardano aber erfuhr, dass eigentlich del Ferro das Urheberrecht für die Formel zustand, fühlte er sich an seinen Eid nicht mehr gebunden und veröffentlichte sie 1545 in seinem Buch "Ars Magna"; seither heißt sie *Cardano'sche Formel.* Danach waren Cardano und Tartaglia nicht mehr so gut befreundet.

Beispiel 1: $x^3 - 6x = 9$. Dann ist

$$\frac{a}{3} = -2, \quad \frac{b}{2} = \frac{9}{2}, \quad D = -8 + \frac{81}{4} = \frac{81 - 32}{4} = \frac{49}{4}.$$

Damit ist $\sqrt{D} = \frac{7}{2}$ und $\frac{b}{2} + \sqrt{D} = \frac{9+7}{2} = 8$ und $\frac{b}{2} - \sqrt{D} = \frac{9-7}{2} = 1$, also $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$. Probe: $3^3 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$.

Beispiel 2: $x^3 - 6x = 4$. Dann ist

$$\frac{a}{3} = -2, \quad \frac{b}{2} = 2, \quad D = -8 + 4 = -4.$$

Jetzt haben wir ein Problem: Weil D negativ ist, können wir die Quadratwurzel $\sqrt{D}$ nicht ziehen! Die Lösungsmethode scheint zu versagen. Cardano wusste keinen Rat und gab diesem Fall den Namen *Casus irreducibilis*, das war's. Aber 20 Jahre später unternahm ein Ingenieur namens Bombelli[68] einen neuen Anlauf. Er sagte sich: Gewiss, negative

---

[65] Scipione del Ferro, 1465 - 1526, Bologna

[66] Nicolo Tartaglia, 1499 - 1557, Breschia, Venedig

[67] Girolamo Cardano, 1501 - 1576, Mailand, Pavia

[68] Rafaele Bombelli, 1526 - 1572, Bologna

Zahlen wie -4 haben keine Quadratwurzel, denn das Quadrat negativer wie positiver Zahlen ist positiv, Minus mal Minus ergibt Plus. Aber tun wir doch einmal so, als gäbe es solche Zahlen doch (sie wurden später "*imaginäre*" Zahlen genannt) und rechnen damit wie gewohnt. Eigentlich genügt sogar eine einzige solche "imaginäre" Zahl, nämlich $i := \sqrt{-1}$; denn dann wäre $i^2 = -1$ und damit $(2i)^2 = 4i^2 = -4$, also $\sqrt{-4} = 2i$. Die Lösung gemäß Cardanos Formel (45) ist demnach

$$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}. \tag{46}$$

Doch was sollen wir mit einem solchen Ergebnis anfangen? Wie sollen wir die 3. Wurzel aus $2+2i$ ziehen? Das wusste auch Bombelli nicht.[69] Aber die 3. Potenz solcher Zahlen konnte er schon berechnen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned}(-1+i)^3 &= -1+3i-3i^2+i^3 \\ &= -1+3i+3-i \\ &= -1+3+(3-1)i \\ &= \;2 \;+\; 2i\end{aligned}$$

und ebenso $(-1-i)^3 = 2-2i$. Hoppla, das nennt man Glück: Die dritte Potenz ergibt genau die Zahlen, deren dritte Wurzel wir suchten; es waren *Kubikzahlen*, wie auch 1 und 8 in Beispiel 1 Kubikzahlen waren (dritte Potenzen ganzer Zahlen). Also ist $\sqrt[3]{2 \pm 2i} = -1 \pm i$ und aus (46) erhalten wir

$$x = (-1+i) + (-1-i) = -2.$$

Hokus-Pokus, die Wurzeln negativer Zahlen sind nicht mehr da! Die Lösung stimmt: Für $x = -2$ ist $x^3 - 6x = -8 + 12 = 4$.

Bombelli veröffentlichte seine Ergebnisse 1572 in seinem Algebra-Lehrbuch. Eine Sternstunde der Mathematik: Er hatte es gewagt, die Grenzen der bisherigen Vorstellung ("Quadratwurzeln negativer Zahlen gibt es nicht") zu verlassen, und gelangte damit zu richtigen Ergebnissen! Es dauerte mehr als zwei Jahrhunderte, bis die "imaginären Zahlen" ihrer Mystik ganz entkleidet und voll akzeptiert waren. Summen von reellen und imaginären Zahlen, wie sie bei den Rechnungen aufgetreten sind, nennt man *komplexe* (= "zusammengesetzte") Zahlen.

Man muss sich bei den komplexen Zahlen von einigen gewohnten Vorstellungen trennen. Zum Beispiel stimmt es nicht mehr, dass eine Größe sich durch Hinzufügen (Addition) einer anderen vermehrt, aber das war ja schon bei den negativen Zahlen nicht mehr wahr. Dieses Phänomen wurde unter dem Namen *Interferenz* zu einer Grundtatsache

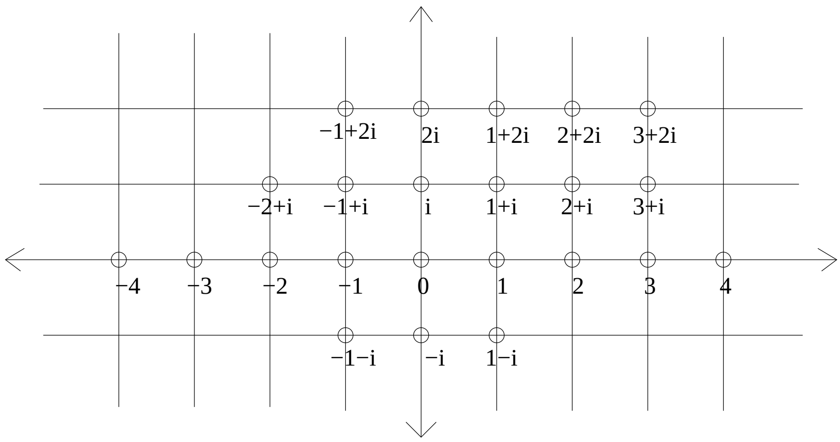
[69] Man vergleiche aber S. 70 unten.

der Physik des 20. Jahrhunderts, aus der die komplexen Zahlen deshalb nicht mehr wegzudenken sind.[70]

Außerdem muss man sich eine neue geometrische Vorstellung von den Zahlen machen: Zahlenstrahl und Zahlengerade werden durch die *Zahlenebene* abgelöst. Diesen Schritt hat erst *C.F. Gauß* um 1800 vollzogen.

15. Die komplexe Zahlenebene

Wo könnten wir die neue Zahl $i = \sqrt{-1}$ auf unserer Zahlengeraden unterbringen? Nicht rechts von der Null, denn dort sind die positiven Zahlen, deren Quadrat ja positiv ist, und auch nicht links davon, denn auch das Quadrat negativer Zahlen ist positiv und somit niemals -1. Auf der Zahlengeraden ist kein Platz für diese Zahl; sie wird also *neben* der Zahlengeraden liegen, und damit kommen wir in die zweite Dimension, in die *Ebene*.



Für die Ebene stellen wir uns *kartesische Koordinaten* vor; jeder ihrer Punkte entspricht damit einem Paar reeller Zahlen (a, b) und die ganze Ebene dem *kartesischen Produkt* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, das wir auch kurz mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnen. Der neuen Zahl i geben wir die Koordinaten $(0, 1)$, eine beliebige komplexe Zahl $a + bi$ hat demnach die Koordinaten (a, b). Eine komplexe Zahl kann also wahlweise als Ausdruck der Form $a + bi$, als eine Paar reeller Zahlen (a, b) oder als ein Punkt der koordinatisierten Ebene angesehen werden. Die Rechenoperationen haben wir schon gesehen; sie ergeben sich aus den (weiterhin gültigen) Rechenaxiomen

[70] www.quantenphysik-schule.de, www.didaktik.physik.uni-erlangen.de

zusammen mit der Regel $i \cdot i = -1$:

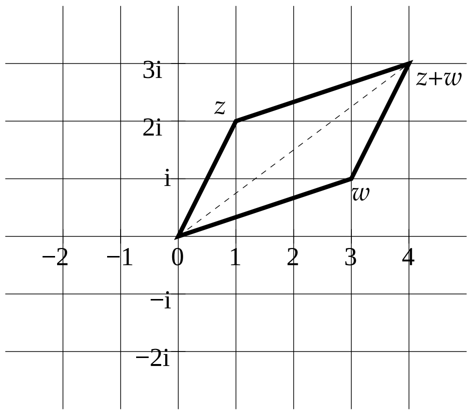
$$(47) \qquad (a+bi) \pm (c+di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(48) \qquad (a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$(49) \qquad (a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2}\, i$$

denn $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$ und daher $(a+bi) \cdot \frac{a-bi}{a^2+b^2} = 1$.[71] Die Zahl $a - bi$ heißt die zu $a + bi$ *komplex konjugierte* Zahl. Die Menge aller komplexen Zahlen wollen wir mit dem Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnen.

Wir wollen auch für komplexe Zahlen eigene Variable einführen, z.B. z und w. Wir können dann die Addition komplexer Zahlen genauso geometrisch deuten wie früher bei reellen Zahlen (Abschnitt 2, S. 5), nämlich als Aneinanderlegen von zwei Stäben, die jetzt allerdings unterschiedliche Richtungen haben können.



Jede komplexe Zahl z ist aus zwei reellen Zahlen x und y zusammengesetzt; wir schreiben $z = x + yi$ und nennen x den *Realteil* und y den *Imaginärteil*[72] von z, symbolisch: $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. Die zu z komplex konjugierte Zahl nennen wir $\overline{z}$, also $\overline{z} = x - yi$. Wir sehen dann

$$(50) \qquad \mathrm{Re}\, z = (z + \overline{z})/2, \quad \mathrm{Im}\, z = (z - \overline{z})/(2i).$$

[71] Die Gleichungen (47) - (49) zeigen, dass auch für die *komplexen* Zahlen die vier Grundrechenarten erklärt und die Rechenaxiome (RA), (RM), (RD) erfüllt sind. Einen solchen Zahlbereich nennen wir einen *Körper*. Wir haben damit bereits drei verschiedene Körper kennengelernt: die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Auch die "rationalen komplexen Zahlen" $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$ bilden einen Körper. Es gibt viele andere, vgl. z.B. "Linearität" S. 25-27.

[72] Vorsicht vor Missverständnissen: Der Imaginärteil ist nach Definition nicht imaginär, sondern reell, nicht iy, sondern nur y.

Das komplex-Konjugierte hat sehr einfache Recheneigenschaften:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}. \tag{51}$$

Wie bei reellen Zahlen gibt es auch bei komplexen Zahlen $z = x + yi$ einen *Absolutbetrag*:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}. \tag{52}$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist eine positive reelle Zahl (nur für $z = 0$ ist $|z| = 0$) und erfüllt dieselben Rechenregeln wie der Betrag einer reellen Zahl:

Satz 15.1.

$$|z+w| \leq |z| + |w| \tag{53}$$

$$|z| \cdot |w| = |zw|. \tag{54}$$

Beweis. Die zweite Gleichung (54) ist die einfachere: $|z|^2|w|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = z\,w\,\overline{z}\,\overline{w} = zw\overline{zw} = |zw|^2$ mit (51). Die erste Gleichung (53) folgt, weil $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ für jede komplexe Zahl z (denn $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \geq x = \mathrm{Re}\, z$) und insbesondere

$$\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|. \tag{$*$}$$

Andererseits ist

$$2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = z\overline{w} + \overline{z}w \tag{$**$}$$

denn für $w = u + vi$ ist $\overline{\overline{w}} = \overline{u - vi} = u + vi = w$. Daher gilt:

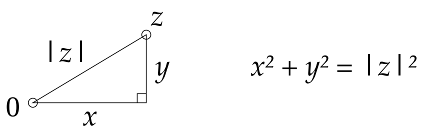
$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &\overset{(**)}{=} |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\overset{(*)}{\leq} |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2. \end{aligned} \qquad \square$$

Bemerkung: Weil der Betrag dieselben Rechenregeln für komplexe wie für reelle Zahlen erfüllt, können wir die Sätze über *absolute Konvergenz von Reihen* 13.4 und 13.5 sofort wörtich auch auf Reihen *komplexer* Zahlen, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ für komplexe Zahlen a_k übertragen.

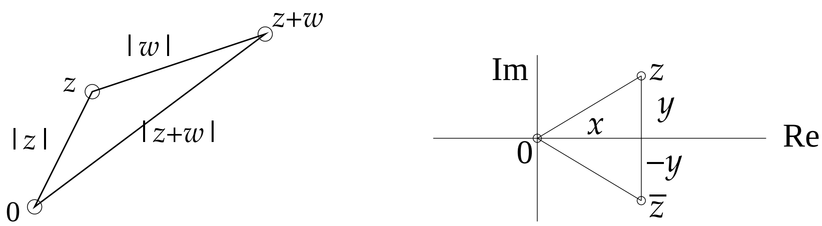
16. Komplexe Zahlen und ebene Geometrie

Es ist nicht nur eine Redeweise, wenn wir von der "*komplexen Ebene*" reden; die komplexen Zahlen spiegeln die ebene Geometrie in allen ihren Aspekten wieder. Der Grund ist, dass der Betrag einer komplexen Zahl,

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, nach dem Satz von *Pythagoras* gleich dem Abstand der Punkte z und 0 in der Ebene ist.[73]



Deshalb wird die Beziehung (53) $|z+w| \leq |z|+|w|$ *Dreiecksungleichung* genannt, denn sie sagt, dass in einem Dreieck eine Seite stets kürzer ist als die beiden anderen zusammen; der direkte Weg von 0 nach $z + w$ ist der kürzeste, kürzer als der Umweg über z (linke Figur).



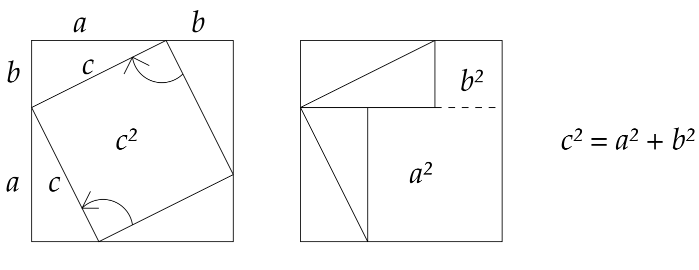
Das spezielle Dreieck $\Delta(0, z, z + w)$ kann durch ein Dreieck mit beliebigen Eckpunkten $p, q, r \in \mathbb{C}$ ersetzt werden; stets gilt

$$|p - r| \leq |p - q| + |q - r| \tag{55}$$

(man braucht nur $z = p - q$ und $w = q - r$ zu setzen).

Die komplexe Konjugation ist geometrisch die Spiegelung an der reellen Achse, siehe obige rechte Abbildung. Später (Abschnitt 20) werden wir auch die komplexe Multiplikation geometrisch interpretieren.

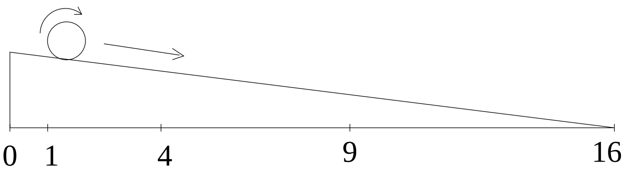
[73] Der vielleicht schönste Beweis des Satzes von Pythagoras ist vermutlich indischen Ursprungs. Dabei wird das rechtwinklige Dreieck mit den Seitenlängen a, b, c zu einem Quadrat mit Kantenlänge $a + b$ ergänzt:



Wenn man viermal die Dreiecksfläche von der Quadratfläche wegnimmt, ergibt sich in der linken Figur c^2, in der rechten $a^2 + b^2$, also ist $c^2 = a^2 + b^2$.

II. Funktionen

17. Gesetze für Veränderungen



Leben bedeutet Veränderung; nichts bleibt so, wie es ist. Die Mathematik beschreibt deshalb nicht nur Größen, sondern auch deren *Veränderungen* in Abhängigkeit von anderen Größen. Zum Beispiel hat eine Kugel, die eine leicht geneigte gerade Rinne herabrollt, nach der ersten Sekunde vielleicht eine Strecke von 5 cm zurückgelegt, nach der zweiten schon die 4-fache Strecke, nach der dritten die 9-fache, nach der vierten die 16-fache und nach der n-ten Sekunde vermutlich die n^2-fache Strecke. Diese wenigen Beobachtungen geben uns Anlass, ein allgemeines Naturgesetz zu formulieren und es anschließend durch viele weitere Beobachtungen zu überprüfen: Die jeweils zurückgelegte Strecke, gemessen in Zentimetern, ist ein konstantes Vielfaches des Quadrats der dafür benötigten Zeitspanne, gemessen in Sekunden. Die Natur ist offenbar freundlich genug, ihre Gesetze nach unseren Rechenprozessen (z.B. dem Quadrieren) zu modellieren, was uns Anlass genug zum Staunen und zu weiteren Fragen gibt: Warum wählt die Natur ausgerechnet die zweite Potenz und nicht die erste oder dritte oder noch einen ganz anderen Rechenprozess? Gibt es dafür ein allgemeineres Prinzip? Hierüber wird noch zu reden sein.

Die Idee, die Fallbewegung durch eine *schiefe Ebene* langsamer und dadurch der Beobachtung leichter zugänglich zu machen,[74] stammt von Galileo Galilei (1564 - 1642). Er hat ganz besonders über die oben genannte Freundlichkeit der Natur, d.h. über ihre Beziehung zur Mathematik nachgedacht: "Die Wissenschaft ist in diesem großartigen Buch aufgeschrieben, das ständig vor unseren Augen aufgeschlagen daliegt (ich meine das Universum). Aber man kann es nicht verstehen, ohne vorher zu lernen, die Sprache zu verstehen und die Buchstaben zu erkennen, in denen es geschrieben ist. Es ist geschrieben in der Sprache der Mathematik, und die Buchstaben sind Dreiecke, Kreise und andere geometrische Figuren, und ohne diese Hilfsmittel ist es unmöglich,

[74] Die auf der schiefen Ebene herabrollende Kugel beschreibt eigentlich keine reine Fallbewegung, denn sie dreht sich ja auch. Aber der Drehanteil der kinetischen Energie, $m\omega^2 r$, ist proportional zum Translationsanteil $\frac{1}{2}mv^2$, denn beim *Rollen* sind Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit proportional: $v = r\omega$.

auch nur ein Wort davon zu verstehen; ohne sie ist es ein vergebliches Umherirren durch ein dunkles Labyrinth."[75]

Wir würden denselben Gedanken heute vielleicht so ausdrücken: Die Mathematik stellt die möglichen Gesetze zur Verfügung, nach denen Prozesse in der Natur ablaufen. Solche Gesetze, die mögliche Veränderungen von Größen beschreiben, werden in der Mathematik *Funktionen* oder *Abbildungen* genannt; neben den Zahlen bilden sie den wichtigsten Gegenstand der Mathematik. Anders als bei Zahlen benötigen wir bereits zur Beschreibung einer einzelnen Funktion das sprachliche Hilfsmittel der *Variablen.* Für unser Eingangsbeispiel des Weg-Zeit-Gesetzes brauchen wir zwei Variable, eine für die Zeit, x, und eine andere für die zurückgelegte Strecke, y. Das Gesetz lautet damit

$$y = 5x^2, \tag{56}$$

wobei die 5 die zurückgelegte Wegstrecke nach der ersten Sekunde (in unserem Beispiel 5 Zentimeter) angibt. Der Gebrauch von Variablen (Buchstaben als Platzhalter für beliebige Zahlen) ist unumgänglich, um die Allgemeingültigkeit des Gesetzes für *beliebige* Zeiten auszudrücken.

Die beiden Variablen spielen eine sehr unterschiedliche Rolle: y steht in der Gleichung (56) isoliert auf der linken Seite, x dagegen kommt auf der rechten Seite nur innerhalb eines komplizierteren Ausdrucks, eines Rechenprozesses ("Quadrieren und das Ergebnis mit 5 multiplizieren") vor. Wenn eine konkrete Zahl x (z.B. $x = 3$ Sekunden) gegeben ist, so können wir die zugehörige Zahl y ausrechnen, $y = 45$ Zentimeter. Umgekehrt ist es nicht so leicht möglich, x aus der Angabe von y zu berechnen; wir müssten die Gleichung erst in die Form $x = \sqrt{y/5}$ umschreiben, in der x isoliert auf der linken Seite steht. In komplizierteren Fällen (z.B. $y = x^3 - 6x$, vgl. S. 47) kann dies schwierig, oftmals sogar unmöglich sein; auch davon wird noch zu reden sein. Weil wir x beliebig vorgeben und daraus y berechnen können, aber nicht ohne Weiteres umgekehrt, heißt y die *abhängige* und x die *unabhängige* Variable.

Die unterschiedliche Bedeutung von x und y wird auch durch den Begriff der *Abbildung* deutlich: Wir stellen uns den durch $y = 5x^2$ beschriebenen Rechenprozess wie eine Art Fotoapparat vor: Er macht sozusagen ein Foto des x-Bereiches, wobei jedem gegebenen Element

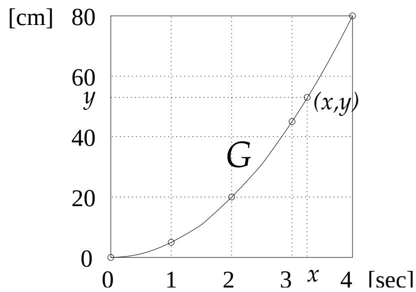
[75] "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi é un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto." Aus "Il Saggiatore" (Der Goldwäger), 1623

$x \in X$, dem *Urbild*, eindeutig ein Element y auf dem "Foto" Y, das *Bild* von x zugeordnet wird.

Drei Angaben sind nötig, um eine Funktion oder Abbildung zu definieren: Eine Menge X, genannt *Definitionsbereich*, eine zweite Menge Y, der *Wertebereich*, und eine *Zuordnungsvorschrift*, d.h. eine Formel nach dem Muster von (56), mit der y aus x berechnet werden kann. In unserem Beispiel ist $X = [0, 4]$ und $Y = [0, 80]$, und die Zuordnungsvorschrift wird $y = 5x^2$ oder $x \mapsto 5x^2$ geschrieben.

Alle drei Angaben sind im *Graphen* der Funktion zusammengefasst. Der Graph ist die Teilmenge $G \subset X \times Y$, die genau die Paare (x, y) enthält, deren Komponenten durch die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto y$ verbunden sind. Der Graph in unserem Beispiel ist

$$G = \{(x, y) \in [0, 4] \times [0, 80];\ y = 5x^2\}. \tag{57}$$



Häufig ist in der Mathematik von Funktionen die Rede, die nicht konkret durch Angabe einer Formel definiert werden; sie werden nur mit einem Buchstaben bezeichnet, oft mit f wie "Funktion". Dieser Buchstabe ist selbst wieder eine Variable, ein Platzhalter, aber diesmal nicht für eine Zahl, sondern eben für eine Funktion. Unter f muss man sich irgendeinen Rechenprozess vorstellen, ein Computerprogramm, das auf die Eingabe eines Elements $x \in X$ ein eindeutig festgelegtes Element $y \in Y$ als Ausgabe produziert. Statt $y = 5x^2$ wie im Beispiel schreiben wir im allgemeinen Fall

$$y = f(x) \tag{58}$$

und meinen damit, dass y durch Anwenden des Programms f auf die Eingabe x entsteht. Wenn die Funktion f den Definitionsbereich X, den Wertebereich Y und die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$ hat, schreiben wir dafür

$$f : X \to Y;\ x \mapsto f(x). \tag{59}$$

Der *Graph* von f ist[76]

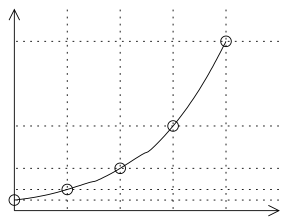
$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}. \tag{60}$$

Der Definitionsbereich X von f muss keineswegs immer ein Intervall sein. Wir haben bereits den Fall $X = \mathbb{N}$ kennengelernt: Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ist dasselbe wie eine *Folge*, wobei wir a_n statt $f(n)$ geschrieben haben. In der Tat hatten wir ja auch eine konvergente Folge als eine Art Prozess gedeutet, durch den die Limeszahl immer besser angenähert wurde. Der Definitionsbereich X kann auch ein kartesisches Produkt sein; die Addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ und die Multiplikation $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2$ sind solche Funktionen. Man spricht in diesem Fall von Funktionen von zwei (oder noch mehr) Variablen. Natürlich kann man $\mathbb{R}$ ebensogut durch $\mathbb{C}$ ersetzen.

Wir wollen noch ein Beispiel eines Prozesses angeben, für den die Zuordnungsvorschrift nicht so leicht gefunden werden kann: das natürliche Wachstum. Eine Population, eine Ansammlung von Zellen oder Individuen einer Gattung, wird sich unter günstigen Umständen (ausreichendes Nahrungsangebot usw.) vermehren. Da jedes Individuum der Population zur Vermehrung beiträgt, ist die Zuwachsrate proportional zum jeweiligen Bestand. Wenn $f(x)$ die Größe der Population zum Zeitpunkt x bezeichnet, so ist $f(x+1) - f(x)$ der Zuwachs im Zeitintervall $[x, x+1]$; dieser soll stets proportional zum Bestand $f(x)$ sein:

$$f(x+1) - f(x) = a \cdot f(x) \tag{61}$$

für alle x, wobei a eine positive Konstante ist.



Wir haben mit (61) also nur eine Art *Rekursionsformel* für die Funktion f, ähnlich wie früher bei manchen Folgen.[77] Ohne die allgemeinere

---

[76] Mit Hilfe der Graphen lässt sich eine alternative Definition von Funktionen geben: Eine Funktion $f : X \to Y$ entspricht einer Teilmenge $G \subset X \times Y$, die jede "Vertikale" $\{x\} \times Y$ genau einmal trifft: Für jedes $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in G$.

[77] Zum Beispiel war die *Fibonaccifolge* (f_n) rekursiv definiert worden (vgl. Fußnote 31, S. 23): $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auch die Fibonaccifolge hat mit Vermehrung einer Population zu tun: Fibonacci (Leonardo von Pisa, ca. 1180 - 1241) wollte damit ursprünglich die jeweilige Anzahl der Nachkommen eines Kaninchenpaars beschreiben, welches jeden Monat ein Pärchen wirft,

Sprache, bei der eine konkrete Formel wie $5x^2$ durch einen allgemeinen Ausdruck $f(x)$ ersetzt wird, wäre dieses Problem gar nicht formulierbar. Was aber ist f? Die frühere Funktion $f(x) = x^2$ ist sicher ungeeignet, denn deren Zuwachs $f(x+1) - f(x) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 = \sqrt{f(x)} + 1$ ist nicht proportional zu $f(x)$, und ebenso ist auch jede andere Potenz $f(x) = x^k$ ungeeignet. Die richtige Funktion f ist die *Exponentialfunktion*, mit der wir uns noch beschäftigen werden.

18. Rechnen mit Funktionen

Die Funktionen $f : X \to Y$ sind Gegenstand der Mathematik genauso wie die Zahlen, und auch mit ihnen kann man *rechnen*, d.h. aus einer oder mehreren gegebenen Funktionen neue gewinnen. Das gilt besonders dann, wenn $Y = \mathbb{R}$ oder auch $Y = \mathbb{C}$ ist (das letztere ist allgemeiner, weil ja $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), denn dann können wir die Grundrechenarten auf die Werte der Funktionen anwenden, wobei der Definitionsbereich X eine ganz beliebige Menge sein kann. Zu zwei gegebenen Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ definieren wir die Funktionen $f + g : X \to \mathbb{R}$ und $f \cdot g : X \to \mathbb{C}$ durch die Zuordnungsvorschriften $x \mapsto f(x) + g(x)$ bzw. $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, und wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, können wir auch die Funktion $f/g : X \to \mathbb{C}$ mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)/g(x)$ definieren.

Damit gewinnen wir viele neue Funktionen, wenn wir zu Beginn wenigstens einige zur Verfügung haben. Da sind zunächst die *Konstanten* $f = a$ für festes $a \in \mathbb{C}$ mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto a$ für alle $x \in X$. Die sind natürlich etwas langweilig, und auch mit den Rechenoperationen können wir aus Konstanten immer nur neue Konstanten gewinnen. Eine andere Funktion erhalten wir, wenn X selbst eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist. Sie sieht zunächst ebenso uninteressant aus wie die Konstanten: es ist die Funktion, die jedes Element von X auf sich selbst abbildet, mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x$; sie wird oft selbst mit dem Buchstaben x bezeichnet. Aber aus ihr lassen sich mit Hilfe der Rechenoperationen ungeheuer viele weitere Funktionen gewinnen: Die Potenzen $x^2 = x \cdot x$, $x^3 = x \cdot x \cdot x$, $x^{k+1} = x^k \cdot x$, die *Polynome* $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ (für Konstanten $a_0, \ldots, a_n$) und die *rationalen Funktionen* $p(x)/q(x)$ für zwei Polynome p, q mit $q(x) \neq 0$ für alle $x \in X$.

Es gibt noch einen weiteren "Rechenprozess" für Zahlen, den wir auf Funktionen übertragen können: Den Grenzwert von Folgen. Wenn wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f_n : X \to \mathbb{C}$ gegeben haben, also eine

---

das jeweils selbst nach zwei Monaten auf gleiche Weise zur Vermehrung beiträgt (www.ethbib.ethz.ch/exhibit/fibonacci/fibonacci-poster-04-kaninchen.html).

Funktionenfolge (f_n), und wenn für jedes $x \in X$ die reelle Folge $(f_n(x))$ konvergiert, dann erhalten wir eine neue Funktion $f = \lim f_n : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \lim f_n(x)$. Zum Beispiel konvergiert die Folge $f_n = \sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ für alle $x \in \mathbb{C}$ nach dem *Quotientenkriterium* (S. 43), denn für $a_k = x^k/k!$ gilt $|a_{k+1}/a_k| = |x|/(k+1) \to 0$. Die Limesfunktion $f = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ ist die bereits erwähnte *Exponentialfunktion*, die wir später (ab S. 61) genauer untersuchen werden.

Soweit haben wir die Rechenprozesse von Zahlen auf Funktionen in einfachster Weise übertragen: alle Zahlen hängen jetzt eben noch von einem Parameter x ab, das ist alles. Es gibt aber für Funktionen auch einen ganz neuen Rechenprozess, den wir bei Zahlen nicht kennen: Die *Verkettung* oder *Komposition* von Funktionen. Sind Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ für beliebige Mengen X, Y, Z gegeben, so definieren wir eine neue Funktion

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)). \tag{62}$$

Um die Funktion $g \circ f$ auf ein Element $x \in X$ anzuwenden, berechnen wir zunächst $f(x)$ und wenden auf dieses Element von Y die Funktion g an, d.h. wir ersetzen (*substituieren*) in dem Ausdruck $g(y)$ die Variable y an jeder Stelle, wo sie vorkommt, durch den komplizierteren Ausdruck $f(x)$. Die Variable von g darf natürlich auch anders benannt werden, sogar wieder x, was vor allem dann Sinn macht, wenn $X = Y$ ist; dann muss man eben im Ausdruck $g(x)$ das x an jeder Stelle durch $f(x)$ ersetzen (und darf dabei die beiden x-Variablen nicht durcheinanderbringen!). Sind zum Beispiel die Funktionen $f(x) = 2x + 1$ und $g(x) = x^2 + 2x - 1$ gegeben (mit $X = Y = Z = \mathbb{C}$), dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 + 2(2x+1) - 1 = 4x^2 + 8x + 2$ und $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+2x-1) = 2(x^2+2x-1)+1 = 2x^2+4x-1$.

19. Stetigkeit

In diesem Abschnitt seien X und Y Teilmengen von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$; z.B. kann X ein reelles Intervall sein. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie konvergente auf konvergente Folgen abbildet: Aus $x_n \to x$ folgt $f(x_n) \to f(x)$, mit anderen Worten,

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n). \tag{63}$$

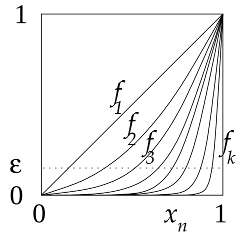
(Dabei müssen wir natürlich voraussetzen, dass die Folge (x_n) und ihr Limes x im Definitionsbereich X liegen.) Diese Eigenschaft erscheint sehr natürlich, wenn man bedenkt, dass man ja eine Zahl x meist gar nicht genau angeben, sondern nur durch eine Folge x_n (z.B. die Dezimalbruchfolge) approximieren kann; die Stetigkeitseigenschaft (63) garantiert, dass dann auch $f(x)$ durch $f(x_n)$ approximiert wird.

Manchmal betrachtet man allerdings auch Funktionen mit Unstetigkeitsstellen, z.B. die Vorzeichen-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x \geq 0$. Diese ist nicht stetig bei $x = 0$, denn für die Folge $x_n = -1/n \to 0$ gilt $f(x_n) = -1$ und daher $\lim f(x_n) = -1 \neq 1 = f(0) = f(\lim x_n)$. Aber das sind eher die Ausnahmen, die meisten Funktionen, mit denen wir arbeiten, sind stetig.

Natürlich ist die konstante Funktion $f = a$ stetig, denn jede Folge x_n wird auf die konstante Folge $f(x_n) = a$ abgebildet, die sicher konvergent ist. Auch die Funktion $x : x \mapsto x$ ist stetig, weil sie jede Folge auf sich selbst abbildet. Nach Satz 10.1 sind für stetige Funktionen f und g auch $f+g$, $f \cdot g$ und f/g (falls $g \neq 0$) stetig, denn für eine konvergente Folge $x_n \to x$ gilt z.B. $(f+g)(x_n) = f(x_n)+g(x_n) \to f(x)+g(x) = (f+g)(x)$. Damit sind alle *rationalen Funktionen* stetig. Auch die *Verkettung* stetiger Funktionen ist stetig: $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x))$, weil $f(x_n) \to f(x)$ (wegen der Stetigkeit von f) und damit $g(f(x_n)) \to g(f(x))$ (wegen der Stetigkeit von g).

Nicht ganz so klar ist die Sache für den *Limes* stetiger Funktionen: Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_k : X \to \mathbb{C}$, die an jeder Stelle $x \in X$ konvergiert; die Limesfunktion sei $f : X \to \mathbb{C}$, $f(x) = \lim f_k(x)$. Ist dann f wieder stetig? Um dies zu sehen, müssen wir eine beliebige konvergente Folge $x_n \to x$ in X betrachten und $f(x_n) \to f(x)$ zeigen. Wenn wir f durch f_k ersetzen dürften, wären wir fertig, denn $f_k(x_n) \to f_k(x)$, weil f_k ja stetig ist. Aber wenn k genügend groß ist, $k \geq K$, dann liegt ja $f_k(x)$ beliebig nahe bei $f(x)$ und $f_k(x_n)$ bei $f(x_n)$, also scheinen wir kein Problem zu haben: $f(x_n) \approx f_k(x_n) \approx f_k(x) \approx f(x)$, fertig!

Dieses Argument stammt immerhin von dem großen Cauchy, und doch ist es falsch! Hier ist ein Gegenbeispiel: $X = [0,1]$, $f_k(x) = x^k$. Dann gilt $f_k(x) = x^k \to 0$ für $0 \leq x < 1$ (vgl. Satz 8.5, S. 27), aber $f_k(1) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und die Limesfunktion $f = \lim f_k$ ist offensichtlich unstetig, denn $f(x) = 0$ für $x < 1$, aber $f(1) = 1$.



Was ist in Cauchys Argument falsch? Das Problem liegt natürlich bei $x = 1$. Je näher die Folgenglieder $x_n < 1$ an den Limes $x = 1$ rücken, desto größer müssen wir k wählen, um noch $f_k(x_n) \approx_\epsilon f(x_n) = 0$ zu erreichen[78] (d.h. $f_k(x_n) < \epsilon$), und wir finden kein einziges k, das uns *für alle (genügend großen) n gleichzeitig* diesen Gefallen tut! Um zu erreichen, dass die Limesfunktion stetig ist, müssen wir daher etwas stärkere Voraussetzungen an die Funktionenfolge (f_k) stellen, die die Abhängigkeit von x berücksichtigen:

Definition: Eine Funktionenfolge $f_n : X \to \mathbb{C}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : X \to \mathbb{C}$, wenn für jede Schranke $\epsilon > 0$ und für jedes genügend große k gilt: $|f_k - f| < \epsilon$, d.h. $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$ für *alle* $x \in X$; in Formeln:

$$(64) \qquad f_k \stackrel{\text{glm}}{\to} f \quad :\iff \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_K\forall_{k\geq K} \quad |f_k - f| < \epsilon$$
$$:\iff \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_K\forall_{k\geq K}\forall_{x\in X} \quad |f_k(x) - f(x)| < \epsilon$$

(vgl. (19), S. 29). Der wesentliche Punkt bei dieser Definition ist, dass hier die Konstante K in "$\exists_K$" für jedes $x \in X$ dieselbe ist; sie hängt ja nur von den voranstehenden Variablen ab, d.h. nur von ϵ, nicht von x.

Satz 19.1. *Wenn $f_k \stackrel{\text{glm}}{\to} f$ und wenn alle f_k stetig sind, dann ist auch f stetig.*

Beweis. Gegeben sei eine beliebige Folge $x_n \to x$ in X. Wir müssen $f(x_n) \to f(x)$ zeigen. Es sei also ein $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein N finden mit $|f(x_n)-f(x)| < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Die Idee ist immer noch, f durch f_k zu ersetzen. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir k so groß wählen, dass $|f_k(x_n)-f(x_n)| < \epsilon/4$ für alle x_n und ebenso $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon/4$. Wegen der Stetigkeit von f_k gilt $f_k(x_n) \to f_k(x)$, also gibt es N mit $|f_k(x_n) - f_k(x)| < \epsilon/2$ für alle $n \geq N$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &= |f(x_n) - f_k(x_n) + f_k(x_n) - f_k(x) + f_k(x) - f(x)| \\ &\leq |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/2 + \epsilon/4 = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 19.2. Majorantenkriterium (3): *Es sei (g_j) eine Funktionenfolge, alle $g_j : X \to \mathbb{C}$ seien stetig und durch eine summierbare positive Nullfolge (b_j) (summierbare Majorante) beschränkt:*

$$(65) \qquad |g_j(x)| \leq b_j$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$. Dann ist die Summenfolge $f_k = \sum_{j=1}^{k} g_j$ gleichmäßig konvergent und $f = \lim f_k = \sum_{j=1}^{\infty} g_j$ ist stetig.

---

[78] $a \approx_\epsilon b :\iff |a - b| < \epsilon$.

Beweis. Nach Satz 13.4, S. 45, ist $(g_j(x))$ eine summierbare Nullfolge für jedes $x \in X$ und daher konvergiert die Summenfolge $(f_k(x))$. Somit ist $f(x) = \lim f_k(x)$ definiert. Da $t_k := \sum_{j=1}^k b_j$ konvergiert, gibt es nach dem Cauchykriterium zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein K mit $|t_k - t_m| < \epsilon$ für alle $k, m \geq K$, und damit folgt für alle $x \in X$ (vgl. den Beweis von Satz 13.4):

$$|f_k(x) - f_m(x)| \leq |t_k - t_m| < \epsilon$$

und somit $|f_k(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_k(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$.[79] Damit folgt $f_k \overset{\text{glm}}{\to} f$, und nach dem vorigen Satz ist f stetig. □

Speziell sei $g_j(x) = a_j x^j$ für eine gegebene Folge (a_j), und es sei $X = \{x \in \mathbb{C};\ |x| \leq R\}$ für eine Zahl $R > 0$. Wann konvergiert $f_k = \sum_{j=0}^n g_j = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ gleichmäßig auf X? Eine Majorante für g_j ist $b_j = |a_j| R^j$. Wenn dies eine summierbare Nullfolge ist, gilt gleichmäßige Konvergenz, und $f = \sum_{j=0}^\infty a_j x^j$ ist auf X definiert und stetig. Eine solche Funktion f nennt man *Potenzreihe*; fast alle interessanten Funktionen gehören zu dieser Funktionenklasse! Aber welche Bedingungen müssen für die gegebenen Daten (a_j) und R erfüllt sein, um sicherzustellen, dass $b_j = |a_j| R^j$ eine summierbare Nullfolge ist? Wir geben zwei solche Bedingungen an:

Satz 19.3. *Die Potenzreihe $\sum_j a_j x^j$ konvergiert gleichmäßig auf $X = \{x \in \mathbb{C};\ |x| \leq R\}$ und definiert dort eine stetige Funktion f, wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:*
a) *(a_j) ist beschränkt, d.h. $|a_j| \leq C$ für alle j, und $R < 1$,*
b) *$R\,|a_{j+1}|/|a_j| \leq r < 1$ für alle $j \geq j_o$,*
c) *$R\sqrt[j]{|a_j|} \leq r < 1$ für alle $j \geq j_o$.*

Beweis.
a) Wenn die Folge $|a_j|$ beschränkt ist, $|a_j| \leq C$ für alle j, und wenn $R < 1$, dann ist $b_j \leq C \cdot R^j$ summierbar (Geometrische Reihe $\sum_j R^j$).
b) Nach dem Quotientenkriterium (Satz 13.5) ist $b_j = |a_j| R^j$ summierbare Nullfolge, wenn $b_{j+1}/b_j = R|a_{j+1}|/|a_j| \leq r < 1$ für alle $j \geq j_o$, wenn also $|a_{j+1}|/|a_j| \leq r/R$.
c) Nach dem Wurzelkriterium ist $b_j = |a_j| R^j$ summierbare Nullfolge, wenn $R\sqrt[j]{|a_j|} = \sqrt[j]{b_j} \leq r < 1$ für alle $j \geq j_o$, wenn also $\sqrt[j]{|a_j|} \leq r/R$. □

---

[79] Dass wir nur "$\leq \epsilon$" statt "$< \epsilon$" herausbekommen, spielt keine Rolle. Wir haben benutzt, dass eine *schwache* Ungleichung wie $|f_k(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ bei Limesbildung erhalten bleiben: Ist (a_m) eine Folge mit $a_m \to a$ und $a_m \leq b$ für alle m, dann gilt auch $a \leq b$. Beweis: Wäre $a > b$, so wäre $a_m - a > b - a$ für alle m, und zu $\epsilon = b - a > 0$ gäbe es kein m mit $|a_m - a| < \epsilon$.

Beispiel zu b): Es sei $a_j = 1/j!$ und $R > 0$ beliebig groß. Dann gilt $|b_{j+1}/b_j| = R/(j+1) \to 0$, also ist $f = \sum_{j=0}^{\infty} x^j/j!$ auf X (und damit auf ganz $\mathbb{C}$, weil R beliebig ist) definiert und stetig. Dies ist die *Exponentialfunktion* $f = \exp$, die wir im nächsten Abschnitt behandeln wollen.

20. Die Exponentialfunktion

Sie bringen Ihr Vermögen K zur Sparkasse. Der jährliche Zinssatz ist x, z.B. $x = 0{,}03$ (drei Prozent). Nach einem Jahr ist Ihr Vermögen dann auf $K + xK = (1+x)K$ angewachsen. Das ist Ihnen noch zu wenig, deshalb bitten Sie darum, Ihr Kapital monatlich zu verzinsen, mit einem Zinssatz von $x/12$ pro Monat, und die Zinsen werden jeden Monat dem Kapital zuzuschlagen. Nach einem Monat haben Sie den Betrag $K_1 = (1 + \frac{x}{12})K$ auf dem Konto, nach zwei Monaten $K_2 = (1 + \frac{x}{12})K_1 = (1 + \frac{x}{12})^2 K$ und nach 12 Monaten $(1 + \frac{x}{12})^{12} K$. Sehr viel bringt es nicht: Ein Jahreszinssatz von 3 Prozent wäre bei diesem Verfahren auf 3,04 Prozent zu verbessern. Nun stellen Sie sich vor, das Geld würde nicht 12-mal, sondern n-mal pro Jahr verzinst, jedesmal mit dem Zinssatz x/n. Dann wäre Ihr Kapital nach einem Jahr auf $(1+\frac{x}{n})^n K$ angewachsen. Was passiert im Limes für $n \to \infty$? Das würde vielleicht keine Bank mitmachen, aber bei natürlichen Wachstums- oder Zerfallsprozessen (negatives x) trägt der Bestand augenblicklich mit einer bestimmten Rate zum Wachstum oder zum Zerfall bei.

Satz 20.1. *Für alle x gilt* $(1 + \frac{x}{n})^n \to \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Beweis. Nach der binomischen Formel ist $(1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} x^k$, und wegen $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ ist

$$\binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = a_{n,k} \frac{x^k}{k!} \text{ mit } a_{n,k} := \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n} < 1.$$

Für festes $m < n$ teilen wir die Summe auf:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} a_{n,k} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{n} a_{n,k} \frac{x^k}{k!}.$$

Da alle $a_{n,k}$ für $n \to \infty$ (bei festem k) gegen 1 konvergieren, geht die erste Teilsumme für $n \to \infty$ gegen $\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$, während die zweite Teilsumme wegen $0 < a_{n,k} < 1$ betragsmäßig durch $s_{m,n} := \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$ abgeschätzt werden kann. Da $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{|x|^k}{k!}$ eine Cauchyfolge bildet (vgl. Beispiel am Ende des vorigen Abschnitts), geht $s_{m,n} = s_n - s_m$ für $m, n \to \infty$ gegen Null. $\square$

Ihre Vermögensverhältnisse haben Sie damit leider noch immer nicht entscheidend verbessert; der effektive Jahreszins ist jetzt auf 3,045 Prozent gestiegen. Aber Sie haben eine interessante Funktion entdeckt, die *Exponentialfunktion* oder *e-Funktion*

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,, \tag{66}$$

die auf ganz $\mathbb{R}$, sogar auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist.

Satz 20.2. *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y). \tag{67}$$

Beweis. Nach der Binomischen Formel (Satz 5.1) ist $\frac{1}{m!}(x+y)^m = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{m!}\binom{m}{j} x^j y^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!(m-j)!} x^j y^{m-j}$ und damit

$$\exp(x+y) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!}\frac{y^{m-j}}{(m-j)!}. \tag{68}$$

Andererseits gilt aber auch

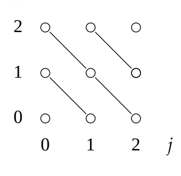
$$\exp(x)\exp(y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\frac{y^k}{k!} \overset{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} \frac{x^j}{j!}\frac{y^{m-j}}{(m-j)!}\,;$$

bei $(*)$ wurden die Summanden der Doppelsumme umgeordnet: Statt über j und k wurde über j und $m := j+k$ summiert und k durch $m-j$ ersetzt (siehe nachfolgende Bemerkung).

Bemerkung: Für absolut konvergente Reihen $\sum_j a_j$ und $\sum_k b_k$ gilt die *Cauchyproduktformel*:

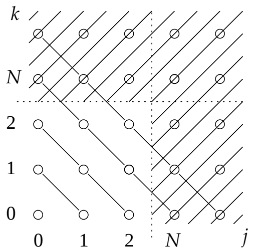
$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j}. \tag{69}$$

Begründung: Ein Produkt von *endlichen* Summen dürfen wir ausmultiplizieren, wobei die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt: $\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \sum_{k=0}^{r} b_k = (a_0 + \cdots + a_n)(b_0 + \cdots + b_r) = a_0b_0 + \cdots + a_nb_r$. Alle Summanden a_jb_k mit $j \in \{1, \dots, n\}$ und $k \in \{1, \dots, r\}$ treten auf.



Wir können diese nun so umordnen, dass wir zu Teilsummen immer die Summanden zusammenfassen, deren Indizes j und k eine konstante

Summe haben, $j + k = m$; die zugehörigen Indexpaare (j, k) liegen jeweils auf einer Diagonale (siehe Figur). Dabei kann m alle Werte zwischen 0 und $n+r$ annehmen, und k ist durch $m-j$ zu ersetzen, wobei $m - j = k \geq 0$ zu berücksichtigen ist. Bei $n = r = 2$ $(m = 0, \dots, 4)$ ergeben sich fünf Teilsummen: $a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + (a_1b_2 + a_2b_1) + a_2b_2$.



Absolut konvergente unendliche Summen lassen sich wie endliche behandeln, weil es nur auf endlich viele Summanden ankommt. Wir brauchen praktisch nur die Summe über die ersten Diagonalen zu berücksichtigen, weil die Restsummen $(\sum_{j\geq N} a_j)(\sum_k b_k)$ und $(\sum_j a_j)(\sum_{k\geq N} b_k)$ (schraffierter Indexbereich) für genügend großes N beliebig kleine Absolutbeträge haben.[80]

Die Zahl $\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2{,}718$ wird zu Ehren von Euler[81] mit dem Buchstaben e bezeichnet. Nach (67) folgt dann

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e^2$$

und allgemein $\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$, ebenso

$$\exp(-1) \cdot e = \exp(-1)\exp(1) = \exp(0) = 1$$

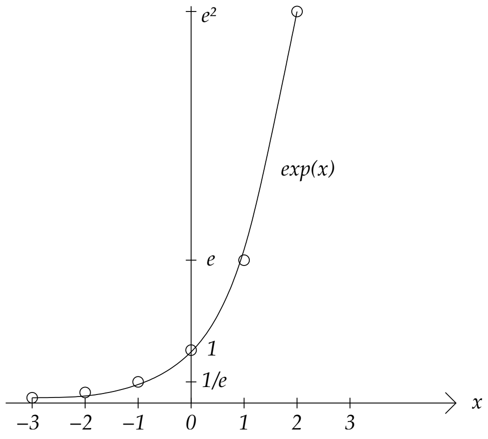
und damit $\exp(-1) = 1/e = e^{-1}$, und schließlich $\exp(1/2) = \sqrt{e} = e^{1/2}$, denn

$$(\exp(1/2))^2 = \exp(1/2)\exp(1/2) = \exp(1) = e,$$

. So sehen wir $\exp(x) = e^x$ für alle rationalen Zahlen x. Deshalb schreiben wir für beliebige (reelle und sogar komplexe) Zahlen x nun auch $\exp(x) = e^x$, obwohl z.B. $e^{\sqrt{2}}$ oder gar e^i als Potenz gesehen keinen Sinn macht (man kann e nicht i-mal mit sich selbst multiplizieren!); erst mit der Exponentialfunktion haben wir diesem Ausdruck einen Sinn gegeben und damit den Begriff der *Potenz* erweitert. Hier ist der bekannte nach rechts sehr steil ansteigende und nach links sich sehr schnell der x-Achse annäherende Graph der reellen e-Funktion.

[80] Ausführliches Argument bei O. Forster, Analysis 1, §8, Satz 3, S.74

[81] Leonhard Euler, 1707 (Basel) - 1783 (St. Petersburg)



Was aber passiert, wenn wir für x *imaginäre* Werte $x = it$, $t \in \mathbb{R}$ einsetzen? Das Ergebnis ist überraschend: Die Werte der Funktion $t \mapsto e^{it}$ wachsen in keiner Richtung, sondern behalten für alle t den Betrag Eins. Dazu müssen wir $|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}}$ berechnen. Für die *komplexe Konjugation* gilt [82]

$$\overline{e^z} = \overline{\sum_k z^k/k!} = \sum_k \overline{z}^k/k! = e^{\overline{z}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Speziell für $z = it$ mit $t \in \mathbb{R}$ ist $\overline{z} = -it$, also $\overline{e^{it}} = e^{\overline{it}} = e^{-it}$ und damit

$$|e^{it}|^2 = e^{it} \cdot \overline{e^{it}} = e^{it}e^{-it} = e^0 = 1. \tag{70}$$

Die komplexe Zahl e^{it} liegt also für alle $t \in \mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie!

Welche geometrische Bedeutung hat dabei die Zahl t? Sie ist der Winkel zwischen 1 und e^{it}, im Bogenmaß gemessen, d.h. $|t|$ ist die Länge des Kreisbogens zwischen den beiden Punkten 1 und e^{it}, und das Vorzeichen von t ist positiv, wenn der Kreis nach links, d.h. gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird, und in der anderen Richtung ist t negativ.

Wie können wir uns davon überzeugen? Wir müssen zunächst die Länge des Kreisbogens zwischen $z_0 = 1$ und $z = e^{it}$ definieren. Dazu unterteilen wir den Bogen durch eine große Anzahl n von Zwischenpunkten $z_k = e^{itk/n}$ mit $k = 0, \dots, n$. Die Länge s dieses Kreisbogens wird von unten angenähert durch die Summe der Abstände zwischen

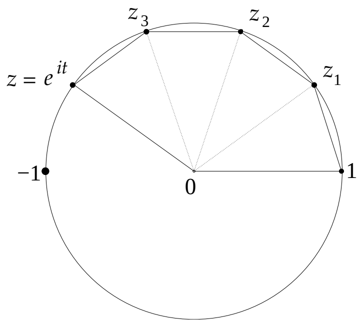
---

[82] Dabei benötigen wir neben den algebraischen Eigenschaften $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ beim Grenzübergang von der endlichen zur unendlichen Summe auch die Stetigkeit der komplexen Konjugation: Wenn $|z_n - z| \to 0$, dann $|\overline{z_n} - \overline{z}| = |\overline{z_n - z}| = |z_n - z| \to 0$.

benachbarten Unterteilungspunkten, nämlich

$$s_n = |z_0 - z_1| + |z_1 - z_2| + \dots |z_{n-1} - z_n| = \sum_{k=1}^{n} |z_{k-1} - z_k| \,. \tag{71}$$

Wenn wir immer mehr Unterteilungspunkte wählen, also $n \to \infty$ streben lassen, dann konvergiert s_n gegen die Länge s des Kreisbogens.



Den Ausdruck s_n können wir explizit berechnen:[83] Da $z_k = e^{k\cdot it/n} = (e^{it/n})^k$ für alle k, folgt $z_{k-1} - z_k = e^{i(k-1)t/n} - e^{ikt/n} = e^{i(k-1)t/n}(1 - e^{it/n})$ und

$$|z_{k-1} - z_k| = |e^{i(k-1)t/n}| \cdot |1 - e^{it/n}| = |1 - e^{it/n}| \,.$$

Damit sind alle Summanden auf der rechten Seite von (71) gleich und

$$s_n = n \cdot |1 - e^{it/n}| = |it| \cdot |\frac{1 - e^{it/n}}{it/n}| = |t| \cdot |f(it/n)|$$

mit $f(z) := \frac{e^z - 1}{z} = (z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots)/z = 1 + \frac{1}{2!}z + \frac{1}{3!}z^2 + \dots$. Dies ist wieder eine Potenzreihe, die nach Satz 19.3 b) auf ganz $\mathbb{C}$ stetig ist und bei $x = 0$ den Wert $f(0) = 1$ hat. Da $it/n \to 0$, folgt $f(it/n) \to 1$ und wir erhalten $s_n \to |t|$. Damit ist $|t|$ die Länge des Bogens.

An dieser Stelle kommt die Kreiszahl π ins Spiel; 2π ist nach Definition die Gesamtlänge der Kreislinie, die Länge des Halbkreisbogens zwischen 1 und -1 ist π. Daraus ergeben sich die bemerkenswerten Beziehungen

$$e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1\,; \tag{72}$$

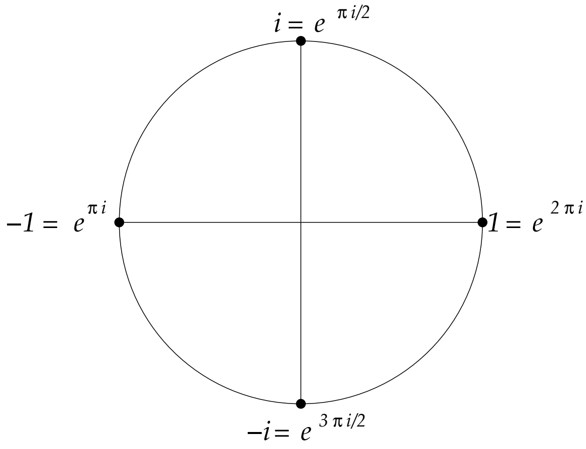
die letztere wird oft in der Form $e^{\pi i} + 1 = 0$ geschrieben und setzt die fünf wichtigsten Konstanten der Mathematik miteinander in Beziehung. Eine weitere Konsequenz ist die Periodizität:

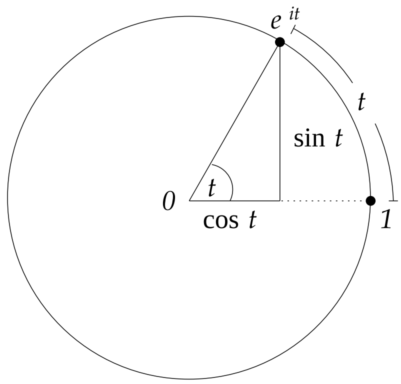
$$e^{i(t+2\pi)} = e^{it}e^{2\pi i} = e^{it}. \tag{73}$$

Wir können das Ergebnis in den folgenden Figuren zusammenfassen:

[83]Man beachte $e^{kz} = e^{z+\dots+z} = e^z \cdot \ldots \cdot e^z = (e^z)^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ (genaueres Argument mit Induktion über k).

Satz 20.3.





Nach der bekannten Schuldefinition[84] sind der *Sinus* und der *Cosinus* des Winkels t wie in der Figur definiert. Jetzt können wir diese Beziehung auf neue Weise interpretieren: $\cos t$ und $\sin t$ sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl e^{it}, mit anderen Worten

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{74}$$

Diese phantastische Gleichung von Euler gibt uns auch eine neue Definition von Sinus und Cosinus als Funktionen von t; wir brauchen dazu nur die Potenzreihe von e^{it} in Real- und Imaginärteil zu zerlegen:

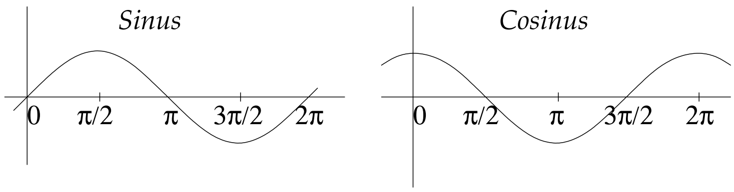
$$\begin{aligned}
e^{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \\
&= 1 + it + i^2\frac{t^2}{2!} + i^3\frac{t^3}{3!} + i^4\frac{t^4}{4!} + i^5\frac{t^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - - + + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - + \ldots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - + \ldots\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}$$

[84]Sinus = Gegenkathete zu Hypothenuse, Cosinus = Ankathete zu Hypothenuse

Der Vergleich mit Gleichung (74) ergibt die Potenzreihen für Cosinus und Sinus:

$$(75) \qquad \cos t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \dots ,$$

$$(76) \qquad \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + \dots .$$



Auch die zahllosen Beziehungen dieser Funktionen lassen sich aus der Gleichung (74) ableiten, z.B.

$$(77) \qquad \cos(s+t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t,$$

$$(78) \qquad \sin(s+t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t,$$

$$(79) \qquad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t,$$

$$(80) \qquad \sin 2t = 2 \cos t \sin t,$$

$$(81) \qquad 1 = \cos^2 t + \sin^2 t,$$

$$(82) \qquad 1 + \cos 2t = 2\cos^2 t,$$

$$(83) \qquad 1 - \cos 2t = 2\sin^2 t$$

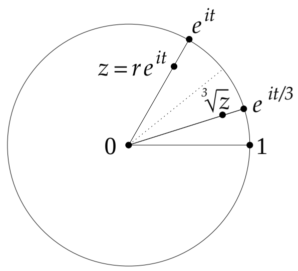
Um (77) und (78) einzusehen, brauchen wir nur den Real- und Imaginärteil von $e^{i(s+t)}$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} e^{i(s+t)} = e^{is}e^{it} &= (\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) \\ &= \cos s \cos t - \sin s \sin t + i(\sin s \cos t + \cos s \sin t). \end{aligned}$$

Mit $s = t$ folgen (79) und (80), mit $\cos^2 t + \sin^2 t = |\cos t + i \sin t|^2 = |e^{it}|^2 = 1$ folgt (81), und (81) $\pm$ (79) ergibt (82) und (83).

Die komplexe e-Funktion erspart uns das Lernen von einer Menge von Formeln; man braucht stattdessen nur die eine Formel $i \cdot i = -1$ zu kennen!

Eine andere Folgerung ist, dass wir jetzt aus einer beliebigen komplexen Zahl z jede Wurzel ziehen können. Wir müssen dazu außer dem Absolutbetrag $|z| = r$ auch die Richtung von z kennen, die durch den Winkel $t = \angle(z, 0, 1)$ zwischen der z-Richtung und der positiven reellen Halbachse gegeben wird. Dann ist $z = r \cdot e^{it}$, und $w := \sqrt[n]{r} \cdot e^{it/n}$ ist eine n-te Wurzel von z, denn $w^n = r \cdot e^{it} = z$.



21. Gleichungen

Die Lösung von Gleichungen ist eine Grundaufgabe der Mathematik von ihren Anfängen bis zur Gegenwart: Gesucht wird eine Größe x, die durch eine Bedingung, meistens eine *Gleichung* beschrieben ist, z.B. $x^2 = 2$ oder $x^2 = x + 1$ oder $x^3 - 6x = 9$ oder $\cos x = 0$ oder allgemein $f(x) = y$ für eine gegebene Funktion f und einen gegebenen Wert y.[85]

Gleichungen sind also eng mit Funktionen $f : X \to Y$ verbunden. Die Gleichung

$$f(x) = y \tag{84}$$

zu lösen (y gegeben, x gesucht) ist die *Umkehrung* der Aufgabe, die Funktion f an der Stelle x zu berechnen (x gegeben, y gesucht). Diese Umkehraufgabe ist gewöhnlich viel schwieriger: Im Beispiel $f(x) = x^2$ (mit $X = Y = \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$) ist es einfach, für gegebenes x das Quadrat zu berechnen, aber zu gegebenem y (z.B. $y = 2$) ein x mit $x^2 = y$ oder $x = \sqrt{y}$ zu finden, ist schwierig und erfordert einen ganz neuen Rechenprozess, das Wurzelziehen. Die bekannten Rechenprozesse reichen oft gar nicht aus; wie sollte man z.B. die Gleichung $e^x + x = 0$ lösen? Folgende Fragen stellen sich gleich zu Beginn:

(1) Existenz einer Lösung?
Wenn es zu jedem $y \in Y$ *mindestens* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, nennt man die Funktion f *surjektiv.*

(2) Eindeutigkeit der Lösung?
Wenn es zu jedem $y \in Y$ *höchstens* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, nennt man die Funktion f *injektiv.*

---

[85] Zur Jahrtausendwende wurde eine Liste von sieben mathematischen Problemen aufgestellt, für deren Lösung jeweils eine Million Dollar geboten wird: http://www.claymath.org/millennium/. Mehrere dieser Probleme behandeln die Lösung von Gleichungen. Dazu gehört das berühmteste offene Problem der Mathematik, die *Riemannsche Vermutung* (Bernhard Riemann, 1826 - 1866): Gefragt wird nach den Lösungen der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^x = 0$. Ein anderes der Probleme behandelt die *Navier-Stokes-Gleichung*, die die für unser Wetter entscheidenden Größen bestimmt. Sie ist lange bekannt und doch noch immer weitgehend unverstanden.

(3) Existenz und Eindeutigkeit?
Wenn es zu jedem $y \in Y$ *genau* ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt, nennt man die Funktion f *bijektiv.* oder *umkehrbar.*

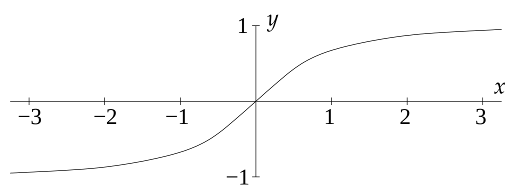
Der Fall (3) ist gewissermaßen der beste: f ist bijektiv, also zugleich injektiv und surjektiv, und die Abbildung f lässt sich rückgängig (umkehren) machen durch die Abbildung $g : Y \to X$, die jedem y die Lösung x der Gleichung $y = f(x)$ zuordnet, $g(y) = x$; im Beispiel $f(x) = x^2$ wäre $g(y) = \sqrt{y}$. Diese Funktion g nennt man die *Umkehrfunktion* von f und schreibt dafür meist f^{-1} anstelle von g. Da $x = f^{-1}(y)$ die Gleichung $f(x) = y$ löst, gilt $f(f^{-1}(y)) = y$, und weil $f(x) = y$, gilt $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$, somit

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad f^{-1}(f(x)) = x \tag{85}$$

für alle $y \in Y$ und $x \in X$. Die Funktion $y \mapsto y$ auf Y bezeichnen wir oft mit $\mathrm{id_Y}$ (*identische Funktion* oder *Identität* auf Y) und entsprechend $x \mapsto x$ auf X mit $\mathrm{id_X}$; damit können wir (85) auch folgendermaßen schreiben:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id_Y}, \quad \mathrm{f^{-1} \circ f} = \mathrm{id_X}\,. \tag{86}$$

Beispiel: $y = x/\sqrt{1+x^2} \Rightarrow y^2 = x^2/(1+x^2) \Rightarrow y^2(1+x^2) = x^2 \Rightarrow y^2 = x^2(1-y^2)$. Wenn $1-y^2 > 0$ $(*)$, folgt daraus $y^2/(1-y^2) = x^2$ und durch Wurzelziehen $x = y/\sqrt{1-y^2}$ oder $x = -y/\sqrt{1-y^2}$. Die zweite Möglichkeit scheidet aber aus, da x und y verschiedenes Vorzeichen haben, in der Ausgangsgleichung $y = x/\sqrt{1+x^2}$ aber das gleiche. Um zu sehen, dass wir auch zurückschließen können, ist eine Probe nötig, siehe unten. Die Zusatzbedingung $(*)$ irritiert uns noch; was hat sie zu bedeuten? Das wird klar, wenn wir uns Definitions- und Wertebereich der Funktion $f(x) = x/\sqrt{1+x^2}$ ansehen: Sie ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, aber die Werte erfüllen $|f(x)| < 1$, da $|x| < \sqrt{1+x^2}$. Wenn wir also $X = \mathbb{R}$ voraussetzen, müssen wir $Y = (-1, 1)$ wählen, dann ist $f : X \to Y$ bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1} : Y \to X$, $y \mapsto y/\sqrt{1-y^2}$. Einsetzen ("Probe") zeigt die Gleichungen (85): Ist $y \in (-1, 1)$ und $x = f^{-1}(y) = y/\sqrt{1-y^2}$, so ist $f(x) = x/\sqrt{1+x^2} = y$, da $x = y/\sqrt{1-y^2}$ und $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2/(1-y^2)} = \sqrt{1/(1-y^2)} = 1/\sqrt{1-y^2}$, und die zweite Gleichung folgt ganz ähnlich.



Wie können wir einer Funktion $f : X \to Y$ ansehen, ob sie injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist? Wenn X und Y reelle Intervalle sind, kann man die *Injektivität* oft aus der *strengen Monotonie* ablesen: Die Funktion f heißt *streng monoton wachsend*, $f \nearrow\!\!\nearrow$, wenn sie jede strikte Ungleichung erhält:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \tag{87}$$

für alle $x_1, x_2 \in X$, oder mit anderen Worten,

$$h > 0 \Rightarrow f(x+h) > f(x) \tag{88}$$

sofern $x, x+h \in X$; wenn f dagegen jede strikte Ungleichung umkehrt, $f(x+h) < f(x)$, dann heißt sie *streng monoton fallend*, $f \searrow\!\!\searrow$. Jede *Potenz* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^p$ ist streng monoton wachsend: Das ist klar für $p = 1$, und per Induktion ist $(x+h)^{p+1} = (x+h)^p(x+h) > x^p(x+h) > x^p x = x^{p+1}$. Auch die *Exponentialfunktion* $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend, denn $e^{x+h} = e^x e^h > e^x$ für $h > 0$, weil $e^h = 1 + h + h^2/2! + h^3/3! + \cdots > 1$. Für eine streng monotone Funktion f kann die Gleichung $f(x) = y$ nicht zwei verschiedene Lösungen $x_1 \neq x_2$ haben: Ist $x_1 < x_2$, so sind $f(x_1)$ und $f(x_2)$ nach (87) verschieden, können also nicht beide gleich y sein.

Soviel zur Injektivität; wie aber können wir die Surjektivität von $f : X \to Y$ erkennen? Wir können ja nicht immer sämtliche Werte von f berechnen und uns davon überzeugen, dass alle Elemente von Y wirklich auftreten. Wieder gibt es einen einfachen Ausweg, wenn X und Y reelle Intervalle sind: Wenn f *stetig* ist, sind mit zwei Werten y_1 und y_2 auch alle dazwischenliegenden Zahlen im Bild von f:

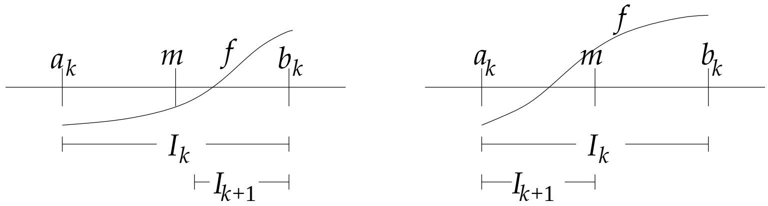
Satz 21.1. Zwischenwertsatz (1): *Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $X \subset \mathbb{R}$ und $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in X$ seien Werte von f mit $y_1 < y_2$. Dann sind auch alle Zahlen y zwischen y_1 und y_2 Werte, d.h. die Gleichung $f(x) = y$ kann für jedes $y \in [y_1, y_2]$ gelöst werden.*

Wir können diese Aussage stark vereinfachen: Wenn wir statt f die Funktion $\tilde{f} = f - y$ betrachten, haben wir die Gleichung $\tilde{f}(x) = 0$ zu lösen, d.h. wir suchen nur noch eine *Nullstelle* von $\tilde{f}$. Außerdem dürfen wir $x_1 < x_2$ annehmen; andernfalls betrachten wir statt f eben die Funktion $-f$. Mit diesen Vereinfachungen haben wir (mit neuen Bezeichnungen $x_1 = a$, $x_2 = b$) den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 21.2. Zwischenwertsatz (2): *Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $X \subset \mathbb{R}$. Es gebe $a, b \in X$ mit $a < b$ und $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Dann besitzt f im Intervall $[a, b]$ eine Nullstelle, genauer: Wir können $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$ konstruieren.*

Beweis. Wir werden die Nullstelle x durch eine *Intervallschachtelung* explizit konstruieren; der Beweis gibt also einen (recht simplen) Algorithmus zum Lösen einer beliebigen Gleichung $f(x) = 0$. Wir starten mit $I_0 = [a, b]$ und konstruieren folgendermaßen induktiv eine Folge von Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ (mit $a_0 = a$, $b_0 = b$), deren Länge jeweils halb so groß ist wie die des Vorgängerintervalls I_{k-1}, mit der Eigenschaft

$$f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k). \tag{89}$$



Wenn I_k bereits konstruiert ist, so betrachen wir den Mittelpunkt $m = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, der I_k in zwei gleich große Hälften teilt. Nun berechnen wir $f(m)$. Wenn $f(m) \leq 0$, dann wählen wir für I_{k+1} die obere Hälfte $[m, b_k]$, wenn dagegen $f(m) > 0$, wählen wir die untere Hälfte $[a_k, m]$. In jedem Fall gilt wieder $f(a_{k+1}) \leq 0 \leq f(b_{k+1})$. Weil (I_k) eine *konvergente Intervallschachtelung* bildet, konvergieren (a_k) und (b_k) beide gegen den Grenzwert x der Intervallschachtelung. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(a_k) \to f(x)$ und $f(b_k) \to f(x)$. Aus $f(a_k) \leq 0$ folgt also $f(x) \leq 0$ und aus $f(b_k) \geq 0$ folgt $f(x) \geq 0$; beides zusammen ergibt $f(x) = 0$. $\square$

Beispiel 1: Die Funkion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^p$ ist streng monoton wachsend, also injektiv. Sie ist auch surjektiv: Da $f(0) = 0$ und $f(n) = n^p$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, sind nach Satz 21.1 alle Zahlen y zwischen 0 und n^p ebenfalls Werte von f, d.h. die Bildmenge $f([0, n]) := \{f(x);\ 0 \leq x \leq n\}$ umfasst das Intervall $[0, n^p]$, also $f([0, n]) \supset [0, n^p]$, genauer (wegen der Monotonie) sogar $f([0, n]) = [0, n^p]$. Da $n^p \to \infty$ für $n \to \infty$, folgt $f([0, \infty)) = [0, \infty)$, und somit ist f surjektiv. Damit ist die Umkehrfunktion, die *p-te Wurzel* erklärt: $f^{-1} = \sqrt[p]{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Beispiel 2: Auch die Funktion $f = \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = e^x$ ist streng monoton wachsend, und $f([-n, n]) = [1/e^n, e^n]$ nach dem Zwischenwertsatz 21.1. Da $e^n \to \infty$ und folglich $1/e^n \to 0$, ist $f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. Die Umkehrfunktion heißt der *(natürliche) Logarithmus* $f^{-1} = ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Mit seiner Hilfe können wir die *allgemeine Potenz* x^α für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definieren:

$$x^\alpha := e^{\alpha \cdot \ln x}, \tag{90}$$

und aus den Eigenschaften der e-Funktion gewinnen wir sofort die Potenzgesetze: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $x > 0$ gilt

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \quad x^{\alpha \cdot \beta} = (x^\alpha)^\beta. \tag{91}$$

Satz 21.3. *Ist $f : [a,b] \to [c,d]$ stetig und bijektiv, so ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ stetig.*

Beweis. Wenn f^{-1} *nicht* stetig ist an einer Stelle $y \in [c,d]$, dann gibt es in $[c,d]$ eine Folge $y_n \to y$ und ein $\epsilon > 0$ mit $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)| \geq \epsilon$.[86] Aber $x_n := f^{-1}(y_n)$ liegt in $[a,b]$ und ist daher eine beschränkte Folge. Nach *Bolzano-Weierstraß* (Satz 11.4) gibt es eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x$ in $[a,b]$. Da f stetig ist, folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$, aber andererseits gilt auch $y_{n_k} \to y$, also $f(x) = y$. Damit haben wir $f^{-1}(y_{n_k}) = x_{n_k} \to x = f^{-1}(y)$ im Widerspruch zur unserer Annahme $|f^{-1}(y_{n_k}) - f^{-1}(y)| \geq \epsilon$. □

Insbesondere sind die p-te Wurzel und der Logarithmus auf jedem Intervall $[0,b]$ mit $b > 0$ und somit auf ganz $\mathbb{R}_+$ stetig. Auch die allgemeine Potenz $p_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \ln x)$ ist nun als Verkettung stetiger Funktionen selbst stetig auf $\mathbb{R}_+$.

---

[86] Was heißt die *Nichtkonvergenz* einer Folge, $x_n \not\to x$? Die Konvergenzdefinition

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n \geq N} \; |x_n - x| < \epsilon \tag{1}$$

wird folgendermaßen negiert:

$$\exists_{\epsilon>0} \forall_N \exists_{n \geq N} \; |x_n - x| \geq \epsilon; \tag{2}$$

beim *Negieren* einer Aussage werden alle *Quantoren* $\forall, \exists$ vertauscht und die am Ende stehende Formel ($|x_n - x| < \epsilon$) negiert. In (2) dürfen wir für N jede Zahl einsetzen ($\forall_N$); für das ϵ in (2) gilt demnach: Zu $N = 1$ gibt es ein $n_1 \geq 1$ mit $|x_{n_1} - x| \geq \epsilon$, zu $N = n_1 + 1$ gibt es $n_2 \geq n_1 + 1$ mit $|x_{n_2} - x| \geq \epsilon$, zu $N = n_2 + 1$ gibt es $n_3 \geq n_2 + 1$ mit $|x_{n_3} - x| \geq \epsilon$, und so weiter. Wir finden also eine *Teilfolge* (x_{n_k}) mit $|x_{n_k} - x| \geq \epsilon$ für alle k.

Index

Inhaltsverzeichnis