STERNSTUNDEN DER MATHEMATIK

J.-H. ESCHENBURG

Wolfgang Meyer in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Der Titel „Sternstunden der Mathematik" ist ausgeborgt von Stefan Zweigs[1] „Sternstunden der Menschheit", den „zwölf historischen Miniaturen" zur Weltgeschichte. Es sind nicht die bekanntesten historischen Ereignisse, an die in diesem Buch erinnert wird, sondern etwas verborgenere, in denen sich gleichwohl das Weltgeschehen fokussierte, wie die Entdeckung des Pazifik 1513 oder das Schicksal der Familie Suter, auf deren Besitz der kalifornische Goldrausch von 1849 begann, oder die erste Telegrafenleitung über den Atlantik 1858, die gleich wieder verstummte. Stefan Zweig schreibt im Vorwort zu seinem Buch: „Was ansonsten gemächlich nacheinander und nebeneinander abläuft, komprimiert sich in einem einzigen Augenblick, der alles bestimmt und alles entscheidet."

Von solchen Ereignissen hat auch die Mathematik viele zu bieten. Die Entdeckung der komplexen Zahlen durch Rafael Bombelli um 1572 ist durchaus mit der Entdeckung des Pazifischen Ozeans zu vergleichen, und das Schicksal von Évariste Galois war nicht weniger dramatisch und traurig als das von Johann August Suter. Das Buch, das aus einer Augsburger Vorlesungsreihe im Winter 2014/15 entstand, möchte versuchen, mathematische Ideengeschichte nachzuzeichnen anhand einer Auswahl von Ereignissen, die ganz von den Interessen und dem begrenzten Wissen des Autors bestimmt ist. Die herausgegriffenen Ereignisse stehen jeweils für eine ganze Entwicklung, die vorher begonnen hat und nachher weiter entfaltet wird.

Das Buch hat aber nicht in erster Linie den Anspruch, historische Ereignisse wiederzugeben. Vielmehr möchte es einen Beitrag leisten, mathematische Ideen und Vorstellungen in ihren Zusammenhängen vom Augenblick ihres Entstehens an verständlich darzustellen. Dabei gehe ich sehr frei mit den „Gewändern" um, den sprachlichen Ausdrücken, in die Ideen gekleidet wurden und die selbst starken Wandlungen unterlagen. So spreche ich bei Archimedes vom „Prinzip von Cavalieri", obwohl dieses erst viele Jahrhunderte später formuliert wurde, aber die Idee wurde implizit benutzt und ihre explizite Verwendung trägt zum Verstehen der Gedanken von Archimedes

Date: 15. November 2017.

[1]Stefan Zweig, 1881 (Wien) - 1942 (Petrópolis, Brasilien)

bei. Die Zahlbereichserweiterung von den (positiven) rationalen zu den reellen Zahlen sehe ich bereits in der Verhältnislehre der Antike (Eudoxos) weitgehend vollzogen, obwohl erst das 19. Jahrhundert formale Hilfsmittel dazu entwickelte. Die komplexen Zahlen galten jahrhundertelang als mystisch, und noch Gauß in seiner 1799 eingereichten Doktorarbeit über den Fundamentalsatz der Algebra vermied sie, aber ihre Verwendung macht vieles einfacher, was Gauß selbst anlässlich seines goldenen Doktorjubiläums 1849 zu einer Neubearbeitung nutzte.

Die einzelnen Kapitel beschreiben jeweils einen eng umrissenen Moment in der Mathematikgeschichte, aber sie bauen insgesamt aufeinander auf. Ein solcher Strang ist die Entwicklung der Gleichungslehre von der Antike über das islamische Mittelalter bis zur Galoistheorie und der quintischen Gleichung im 19. Jahrhundert. Ein anderer Strang beginnt bei Pascal, der sich für die Probleme von Glücksspielern interessierte und dabei auf die Binomialkoeffizienten stieß; diese waren unerlässlich für Eulers Entdeckung der Exponentialreihe, die erst den Fundamentalsatz der Algebra ermöglichte, ohne den die Untersuchung der Lösbarkeit von Gleichungen durch Galois keine Basis gehabt hätte, und der Beitrag von Riemann zur räumlichen Geometrie bildete die Grundlage wichtiger Entwicklungen, die in nachfolgenden Kapiteln beschrieben sind (Allgemeine Relativitätstheorie, globale Geometrie, Poincaré-Vermutung).

Das Buch ist 2017 bei Springer erschienen (ISBN 9783658172947); es kostet 19,99 Euro als Buch und 14,99 Euro als e-book.

`www.springer.com/de/book/9783658172947`

`www.spektrum.de/rezension/buchkritik-zu-sternstunden-der-mathematik/1504739`

Das Buch richtet sich an alle Mathematik-Interessierten, Laien wie Fachleute. In dieser Vorab-Information gebe ich eine Zusammenfassung der einzelnen Kapitel sowie einen Link zu den Videos, die die Vorlesung enthalten. Mathematik darzustellen ist nicht einfach, weil sie nur in der Formelsprache unmissverständlich wiedergegeben werden kann, diese aber gerade die Ideen eher verbirgt. Deshalb ist der Geburtsmoment der Ideen wichtig. Ich habe mich um eine möglichst wenig formale Sprechweise mit zahlreichen Bildern bemüht, die die Gedanken hoffentlich verständlich wiedergibt. Die „Übungen“ sind von mir genau überlegt und dienen zur Ergänzung und Vertiefung des jeweiligen Stoffes.

Vielen, die mich bei diesem Buch mit hilfreichen Kommentaren unterstützt haben, gilt mein Dank. Stellvertretend nenne ich Christoph Böhm, Kai Cieliebak, Ludwig Neidhart und ganz besonders Erich Dorner, der das Manuskript immer wieder gelesen und mich auf zahllose Fehler aufmerksam gemacht hat.

Augsburg, November 2017,
Jost-Hinrich Eschenburg

1. Pythagoras: Verhältnis und Unendlichkeit (−500)

Am Anfang der Mathematik steht die Zahl als Anzahl einer Menge von Gegenständen. Doch schon früh in der Menschheitsgeschichte trat neben das Zählen das Messen, mit dem „unzählbare“ Größen miteinander verglichen werden konnten, Längen, Abstände, Volumina, Gewichte. Dies geschah mit der Methode der Wechselwegnahme, dem vielleicht ältesten Algorithmus der Mathematikgeschichte. Pythagoras erkannte die große Bedeutung dieses Verfahrens, durch das Größen durch Zahlen beherrschbar wurden; „alles ist Zahl“, soll er gesagt haben. Doch die Anwendung der Zahlen über ihren ursprünglichen Bereich (das Zählen) hinaus auf das Vergleichen von Größen führte in eine Krise, als sich herausstellte, dass das Verfahren der Wechselwegnahme nicht immer abbrach (Entdeckung der Irrationalität). Von diesem Zeitpunkt an spielte das Unendliche in der Mathematik eine Rolle.

`www.youtube.com/watch?v=S8o3ovUcfjs`

2. Theodoros: Wurzeln und Selbstähnlichkeit (−399)

In Platons Dialog „Theaitetos“ findet sich die Bemerkung, ein gewisser Theodoros habe die Irrationalität der Qudratwurzeln bis $\sqrt{17}$ „durch Zeichnungen“ bewiesen, aber nicht weiter. Benno Artmann fand 1994 heraus, welche Zeichnungen Theodoros vermutlich angefertigt hat und warum die nachfolgende Wurzel $\sqrt{19}$ für ihn unerreichbar war. Diese verblüffend einfachen Figuren enthalten viel mehr als nur den Beweis der Irrationalität; aus ihnen lässt sich der Wert der Quadratwurzel mit beliebiger Genauigkeit ermitteln, denn sie kodieren den unendlichen Prozess der Wechselwegnahme für die Quadratwurzel im Verhältnis zu Eins. Der Prozess ist periodisch, was sich in der Selbstähnlichkeit der Figuren ausdrückt. Diese Eigenschaft wurde von Theodoros bis $\sqrt{17}$ beobachtet; erst über zwei Jahrtausende später hat Lagrange sie allgemein bewiesen. Wir geben ein sehr einfaches Argument dafür.

`www.youtube.com/watch?v=ffJpo_hpnQE`

3. Archimedes: Die Rechnung mit dem Unendlichen (−212)

Das Werk von Archimedes bildet einen Höhepunkt der antiken Mathematik. Das unerwünschte Unendliche, das seit der Entdeckung der Irrationalität in die Mathematik eingedrungen ist, wird bei ihm in eine Methode eingebaut, Flächeninhalte und Volumina von krumm berandeten Bereichen (Kreis, Kugel, Parabel, Spirale) exakt zu berechnen. So verdanken wir ihm die Erkenntnis, dass die Kugelfläche genau viermal so groß ist wie die Kreisfläche von gleichem Radius, und dass die Archimedische Spirale ein Drittel des Flächeninhalts ihres Umkreises umschließt, und er berechnet gute untere und obere Schranken der Kreiszahl π. Möglich werden diese Erkenntnisse, weil er physikalisch verstanden hat, dass Größe und Form bei Flächeninhalten und Volumina getrennt sind; das gleiche Volumen kann viele unterschiedliche

Formen annehmen. Man kann es in viele Teile zerlegen, am Ende sogar in unendlich viele, und diese Zerlegung für seine Berechnung nutzbar machen. Damit ist Archimedes ein Pionier der Infinitesimalrechnung, die erst viele Jahrhunderte später voll entwickelt wurde.

`www.youtube.com/watch?v=pDcIsD7tQ_Q`

4. Brunelleschi: Wo schneiden sich Parallelen? (1420)

Zu den frühesten mathematischen Entdeckungen der heraufdämmernden Neuzeit gehört um 1420 die Zentralperspektive, die von dem Erbauer der Kuppel des Doms von Florenz gefunden wurde, Filippo Brunelleschi. Der Standpunkt des Betrachters wird in die Darstellung einbezogen. Diese Entdeckung hatte Wirkungen weit über Architektur und Malerei hinaus. Es war die Geburtsstunde eines neuen Zweiges der Geometrie, der Projektiven Geometrie. Wir stellen die Gesetze der perspektivischen Darstellung vor, ihre Entstehung aus der Zentralprojektion, die Albrecht Dürer sehr anschaulich beschrieben hat, und ihre Weiterentwicklung zur Projektiven Geometrie mit den Sätzen von Desargues und Pascal und dem späteren Begriff des Projektiven Raums.

`www.youtube.com/watch?v=aFvPtqEL5HA`

5. Cardano: Kubische und quartische Gleichung (1545)

Das Wort „Algebra“ stammt aus dem Arabischen. Im arabisch-muslimischen Kulturkreis wurde im Mittelalter, besonders zwischen 700 und 1100, das Wissen aus der griechischen Antike und aus Indien gesammelt und weiterentwickelt. Die Algebra entstand dort als eigenes Gebiet mit neuen Methoden (dem Umgang mit Variablen) neben der Geometrie. In diesem Rahmen wurden quadratische und auch bereits kubische Gleichungen behandelt, großenteils aus der Geometrie motiviert; ihre Lösungen wurden als Schnitte von Kreisen und Parabeln dargestellt (Omar Khayyam). Der erste bedeutsame Beitrag der europäischen Mathematik zur Algebra war im 16. Jahrhundert die Entwicklung von Lösungsformel für Gleichungen dritten und vierten Grades, an der mehrere Mathematiker in Oberitalien beteiligt waren. Diese spannende Geschichte von Konkurrenz, Freundschaft und Verrat fand 1545 in dem Buch „Ars Magna“ von Gerolamo Cardano ihren Höhepunkt.

`www.youtube.com/watch?v=k1gtQrGhlag&edit=vd`

6. Bombelli: Die Zahl, die es nicht gibt (1572)

In Cardanos Lösungsformel für kubische Gleichungen wird eine Kubikwurzel aus einem Ausdruck gezogen, der selbst eine Quadratwurzel enthält. Manchmal ist der Radikand der Quadratwurzel negativ, und obwohl die kubische Gleichung offensichtlich Lösungen besitzt, scheint Cardanos Formel zu versagen, denn keine bekannte Zahl hat ein negatives Quadrat. Es war kein Mathematiker, sondern ein Wasserbau-Ingenieur aus Bologna, Rafael Bombelli, der um 1570 den Mut und das Gespür aufbrachte, mit Cardanos Formel dennoch zu rechnen und dabei vorübergehend Quadratwurzeln negativer Zahlen in Kauf zu nehmen, und er kam damit zu nachprüfbar richtigen Ergebnissen. Dazu musste er zunächst lernen, mit solchen „unmöglichen Zahlen“ korrekt zu rechnen. Was zunächst nur wie ein Rechentrick aussah, entpuppte sich später als eine der bahnbrechendsten Entdeckungen der Mathematikgeschichte, die Entdeckung der komplexen Zahlen, die unseren Zahlbegriff abermals revolutionierte.

`www.youtube.com/watch?edit=vd&v=YOtVVNaJXco`

7. Pascal: Gott würfelt nicht, aber der Mensch (1654)

Blaise Pascal war ein Universalgenie. Er hat sich in seinem Leben mit Philosophie und Theologie beschäftigt, aber auch mit projektiver Geometrie, Wahrscheinlichkeitstheorie, dem Bau von Rechenmaschinen und mit dem Luftdruck. Am bekanntesten sind vielleicht seine Arbeiten zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie, die sogar seine theologischen Überlegungen beeinflusst haben. Anlass bot eine Frage, die eigentlich nur Glücksspieler interessiert: Was ist mein Spiel wert, wenn es vorzeitig abgebrochen werden muss? Kann man aus dem bisherigen Spielverlauf entnehmen, welcher Anteil vom Gesamteinsatz mir dann zusteht? Pascal gelingt es, diese Frage exakt zu beantworten. Die Probleme, die er dazu lösen muss (z.B.: Wieviel Sequenzen der Länge n aus Nullen und Einsen gibt es, die genau k-mal die Eins enthalten?) sind sehr grundlegend und lassen sich auch auf andere mathematische Probleme anwenden, zum Beispiel die Berechnung von $(a+b)^n$ aus den Potenzen von a und b (binomische Formel).

`www.youtube.com/`
`watch?v=SS-905Yv_Ng&list=UUd-B668FPBVGwEMG-EbtPhw`

8. Gauss: Alle Gleichungen haben eine Lösung (1799)

Das Kapitel dreht sich um ein erstaunliches Resultat, das die Bedeutung der von Bombelli entdeckten komplexen Zahlen unterstreicht: Man kann nicht nur Quadratwurzeln negativer Zahlen ziehen, also die Gleichung $x^2 = -1$ lösen, sondern überhaupt jede Gleichung, die Potenzen der gesuchten Unbekannten enthält. Bis zu dieser Erkenntnis war ein weiter Weg. Zunächst konnte man in den komplexen Zahlen nicht einmal Wurzeln ziehen, d.h. die Gleichung $x^n = a$ lösen. Dazu musste erst die bei wirtschaftsmathematischen Überlegungen (Zinseszins) gefundene und von Leonhard Euler untersuchte Exponentialfunktion, deren Eigenschaften auf Pascals binomischer Formel beruhte, auf komplexe Zahlen erweitert werden. Danach konnte man andere Gleichungen vom Grad n als Variation von $x^n = a$ auffassen, daher sollten auch sie eine Lösung besitzen. Der junge C.F. Gauß setzte sich in seiner Doktorarbeit (1799) mit den lückenhaften Versuchen seiner

Vorgänger auseinander, dieses wirklich zu beweisen, und legte seine eigene Version vor, die darauf beruhte, dass gewisse Linien in der komplexen Ebene aus kombinatorischen Gründen einen Schnitt haben mussten.

www.youtube.com/
watch?v=P2tm7WkQ2cQ&index=1&list=UUd-B668FPBVGwEMG-EbtPhw

9. Galois: Welche Gleichungen sind lösbar? (29.5.1832)

Dass jede Gleichung eine Lösung hat, sagt noch nichts darüber, ob man diese durch Rechnung (Grundrechenarten und Wurzelziehen) auch finden kann. Die Frage, für welche Gleichungen dies gelingt und für welche nicht, hat Évariste Galois beantwortet. Obwohl er damit das bis dahin wichtigste Problem der Algebra gelöst hat, blieb ihm die Anerkennung zeitlebens versagt und er starb mit 20 Jahren unter tragischen Umständen durch ein Duell. Am Vorabend dieses Ereignisses fasste er in einem Brief an einen Freund seine wichtigsten mathematischen Leistungen, darunter seine Arbeiten zur Auflösbarkeit von Gleichungen, in großer Klarheit zusammen. Wir nehmen diesen Brief als Vorlage, um seine Gedanken nachzuzeichnen. Er ordnet einer Gleichung ein sehr viel einfacheres Objekt zu, eine endliche Gruppe, an der er die Frage der Auflösbarkeit entscheiden kann. Der Gruppenbegriff, der seitdem von zentraler Bedeutung für die Mathematik ist, erscheint bei dieser Gelegenheit zum ersten Mal. Andere damit zusammenhängende Fragen, z.B. geometrische Konstruktionsprobleme (17-Eck und Winkel-Drittelung) werden in den Übungen behandelt.

www.youtube.com/
watch?v=6A4XaTJf3sY&list=UUd-B668FPBVGwEMG-EbtPhw

10. Graves: Die Grenze des Zahlenreichs (26.12.1843)

Komplexe Zahlen lassen sich als Paare reeller Zahlen und damit als Koordinatenpaare von Punkten der Ebene deuten. Paare reeller Zahlen kann man also multiplizieren und dividieren. Der irische Mathematiker W.R. Hamilton fragte sich, ob Gleiches auch mit Tripeln statt Paaren, also mit den Koordinatentripeln der Punkte des Raumes möglich ist. Schließlich erkannte er, dass man dazu eine weitere Dimension brauchte, also Zahlenquartetts statt Zahlentripel, und so fand er die Quaternionen (1843). Sein Freund John Graves, dem er davon erzählte, ging noch weiter und konstruierte noch im gleichen Jahr die Oktaven, Oktetts reeller Zahlen, die ebenfalls eine Multiplikation und Division zuließen. Damit ist aber die absolute Grenze erreicht, wie wir sehen werden, was A. Hurwitz 1898 gezeigt hat.

www.youtube.com/watch?v=8kpUY1Zj_OY

11. Riemann: Die Geometrie des Raumes (10.6.1854)

Bernhard Riemann hat in seinem Habilitationsvortrag vom 10.6.1854 die Geometrie neu begründet. Bis dahin waren geometrische Begriffe, z.B. Entfernungen, mit dem Raum fest verbunden. Riemann entwarf eine neue Geometrie, die die Wirklichkeit besser abbildet: Entfernungen werden durch vielfaches Aneinanderlegen von Maßstäben gemessen, die an jeder Stelle vorhanden sein müssen. Wird die Länge der Maßstäbe irgendwo verändert, bekommt die Entfernung einen anderen Wert. Riemann lässt beliebige Maßstäbe zu unter der Bedingung, dass im Kleinen annähernd der Lehrsatz des Pythagoras gilt, also die euklidische Geometrie. Die so definierte „Riemannsche“ Geometrie verhält sich zur euklidischen wie die Geometrie einer krummen Fläche zu der der Ebene: Lokal nähert sie sich der euklidischen an, aber im Großen kann sie unzählige verschiedene Möglichkeiten realisieren. Wie bei Flächen unterscheiden sich euklidische und Riemannsche Geometrie lokal durch die „Krümmung“; dieser von Riemann definierte Begriff stimmt für Flächen mit der anschaulichen Krümmung überein.

`www.youtube.com/watch?v=_gZvfCOKMmQ`

12. F. Klein: Ikosaeder und quintische Gleichung (1884)

Wir hatten in Kapitel 9 gesehen, dass die allgemeine Gleichung 5. Grades keine Lösungsformel besitzt, die nur die Grundrechenarten und das Wurzelziehen beliebigen Grades benutzt. Und doch gibt es eine Lösungsformel; sie verwendet eben noch eine weitere Rechenart. Felix Klein hat 1884 den geometrischen Grund für diese merkwürdige Formel beschrieben, die nur für quintische Gleichungen gilt: Er hat eine enge Verbindung dieser Gleichung zur Geometrie des Ikosaeders aufgedeckt. Ein Indiz dafür ist, dass die Drehgruppe des Ikosaeders isomorph ist zur Galoisgruppe der quintischen Gleichung, ähnlich wie die Drehgruppe des Würfels isomorph zur Galoisgruppe der quartischen Gleichung ist (Übung 9.1).

`www.youtube.com/watch?v=OG2ypDOC48Q&edit=vd`

13. Einstein: Philosophisches Rätsel gelöst (25.11.1915)

Sind Ruhe und Bewegung absolute Größen oder sind sie lediglich vom gewählten Bezugssystem abhängig, also relativ? Diese alte philosophische Frage, die auch im Streit um die geozentrische oder heliozentrische Beschreibung des Planetensystems eine Rolle spielte, wurde von Albert Einstein 1915 durch die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) beantwortet. Diese ist eine Synthese seiner Speziellen Relativitätstheorie (SRT) mit der klassischen Newtonschen Gravitationslehre. In der SRT ist die Lichtgeschwindigkeit anstelle der Zeit eine absolute Größe, unabhängig vom Bezugssystem, was durch eine besondere Geometrie im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum („Raumzeit“) beschrieben wird. Bei Newton bewegen sich frei fallende Massen durch die Raumzeit auf Bahnen, die von der Größe der Masse unabhängig sind. Diese Bahnen werden in der ART zu Geodäten einer Riemannschen Metrik auf der Raumzeit, die lokal aber nicht (wie bei Riemann) die euklidische Geometrie, sondern die der SRT approximiert. Wie Newtons Gravitationsfeld durch die großen Massen erzeugt wird, so ist auch die Metrik der ART durch die Verteilung von Masse und Energie, den „Massetensor“ bestimmt: Dieser ist nämlich einer Kombination von Krümmungen der Metrik, dem „Einstein-Tensor“ gleich.

www.youtube.com/watch?v=E6_97S8MAFs&edit=vd

14. Gödel: Ist die Mathematik axiomatisierbar? (1931)

Gibt es einen endliche Menge von Grundsätzen (Axiomen) mit der Eigenschaft, dass alle wahren Sätze der Mathematik nach den Regeln der Logik daraus gefolgert werden können? Im Unterricht an den Hochschulen scheint es fast so: Die reellen Zahlen zum Beispiel werden durch Axiome definiert, die die Rechenregeln, den Umgang mit „$<$“ und „$>$“ sowie die Vollständigkeit nach außen (kein Ende) und innen (keine Lücken) beschreiben. Die Sätze der Analysis werden auf diese Axiome zurückgeführt. Und doch hat Kurt Gödel 1931 bewiesen, dass kein Axiomensystem die ganze Mathematik oder auch nur die Theorie der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ vollständig beschreiben kann: Wenn es widerspruchsfrei ist, dann gibt es wahre Sätze, die daraus nicht ableitbar sind. Die Widerspruchsfreiheit selbst aber kann nicht aus den Axiomen abgeleitet werden.

15. Bott: Periodizität der Dimensionszahl (1959)

Geometrie kann über die anschaulichen 3 Dimensionen hinaus fortgesetzt werden auf Räume beliebig hoher Dimensionszahl. Einer der tiefliegenden Sätze in dieser hochdimensionalen Geometrie ist der Periodizitätssatz von Raoul Bott (1959). Er beschreibt die „Löcher“ im Raum der Drehungen des hochdimensionalen Raumes. Ein k-dimensionales Loch in einem Raum X wird beschrieben durch eine stetige Abbildung (bis auf Deformation) vom Rand der k-dimensionalen Kugel (der (k–1)-dimensionalen Sphäre) nach X, die nicht auf das Innere der Kugel stetig fortsetzbar ist. Trennt man einen Würfel in zwei Teile oder durchbohrt ihn oder lässt eine kugelförmige Blase in seinem Inneren entstehen, so hat man Löcher der Dimension 1, 2 oder 3. Der Satz von Bott besagt, dass die Löcher im Raum der sehr hochdimensionalen Drehungen periodisch mit Periode 8 in der Dimension auftreten: Zu jedem Loch mit Dimension k gehört auch eins mit der Dimension $k + 8$, $k + 16$ usw. Die Periode 8 ist nicht zufällig die Dimension der von John Graves entdeckten Oktaven (Kapitel 10).

16. Klingenberg: Krümmung und Gestalt (1961)

Die Riemannsche Geometrie wurde zunächst in lokalen Koordinaten formuliert. Für globale Aspekte musste man ihre Konzepte, insbesondere den Begriff der Krümmung neu verstehen. Eine der ersten Resultate dieser neuen „Riemannschen Geometrie im Großen" war der Sphärensatz von Marcel Berger und Wilhelm Klingenberg (1961): Eine einfach zusammenhängende kompakte Mannigfaltigkeit mit Krümmung strikt zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 ist vom einfachsten topologischen Typ, dem der Sphäre. Die Ungleichung ist scharf: Wenn beide Schranken angenommen werden dürfen, gibt es Gegenbeispiele. Wir geben nicht den Originalbeweis wieder, sondern einen späteren, sehr viel anschaulicheren, der auf Michail Gromov zurückgeht und die Beziehung zwischen der Krümmung und der Konvexität der Abstandsbälle oder ihrer Komplemente ausnutzt.

`www.youtube.com/watch?v=85kQOeyynCU&edit=vd`

17. Shechtman: Unmögliche Kristalle (8.4.1982)

Kristalle sind regelmäßige Anordnungen von Atomen zu einem Gitter. Viele Gitter lassen bestimmten Drehungen zu, die sie in sich überführen, doch die Drehordnungen können nur 2, 3, 4 oder 6 sein. Doch 1982 beobachtete Dan Shechtman „unmögliche" Kristalle mit Drehordnung 5, wofür er 2011 den Chemie-Nobelpreis erhielt. Es handelte sich um kristallartige Strukturen, die nicht-periodisch sind und dennoch lokal überall gleich aussehen, „Quasikristalle". Mathematische Modelle für solche Strukturen in Dimension 2 und 3 waren in einem anderen Zusammenhang schon ein paar Jahre zuvor von Mathematikern gefunden worden. Als erster hatte Roger Penrose einfache nicht-periodische Pflasterungen der ganzen Ebene entdeckt. Solche Strukturen waren von manchen für unmöglich gehalten worden, denn das Muster musste ja mangels Wiederholung eine unendliche Vielfalt zeigen. Wir zeigen, wie diese Vielfalt durch Selbstähnlichkeit entsteht.

`www.youtube.com/watch?v=fsNGmlenMkE`

18. Perelman: Die dreidimensionale Welt (17.7.2003)

Riemann hat den Begriff „Mannigfaltigkeit" geprägt: Räume, deren Punkte lokal durch n reelle Zahlen (Koordinaten) beschrieben werden. Im Gegensatz zum euklidischen Raum können Mannigfaltigkeiten in sich geschlossen sein wie die Kugelfläche, die „2-Sphäre". Henri Poincaré hat 1904 vermutet, dass unter den dreidimensionalen geschlossenen Räumen der „Kugelraum" (die „3-Sphäre") der einzige ist, auf der jede Schlinge zusammenziehbar ist. Diese Vermutung wurde 2003 von Gregori Perelman bewiesen. Allgemeiner zeigte er: Alle geschlossenen 3-dimensionale Räume lassen sich in Bestandteile zerlegen, die (wie der Kugelraum) eine homogene Geometrie tragen können. Seine Methode war geometrisch und analytisch: Auf die Krümmung einer anfänglich gegebenen Riemannschen Metrik wird eine Art

Wärmefluss angewandt, analog dem Gesetz, nach dem sich Wärme in einem Raum gleichmäßig verteilt, doch anders als beim echten Wärmefluss stoppt dieser Vorgang immer wieder und muss neu angestoßen werden. Am Ende bilden sich die homogenen Bestandteile heraus.

Literatur

[1] Al-Khalili, Jim: *Im Haus der Weisheit. Die arabischen Wissenschaften als Fundament unserer Kultur*, Fischer Taschenbuch 2015
[2] Alten, H.-W., et al.: *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer 2003
[3] Attali, Jacques: *Blaise Pascal, Biographie eines Genies*, Klett-Cotta 2007
[4] Bell, E.T.: *Men of Mathematics*, Fireside 1937/1965
[5] Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Springer 1926
[6] Linden, Sebastian: *Die Algebra des Omar Chayyam*, Edition Avicenna 2012
[7] Mania, Hubert: *Gauß. Eine Biographie*, Rowohlt 2008
[8] Neffe, Jürgen: *Einstein. Eine Biographie*, Rowohlt 2006
[9] O'Shea, Donal: *Poincarés Vermutung. Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers.* S.Fischer, Frankfurt a.M. 2007
[10] Penrose, Roger: *The Road to Reality*, New York 2005
[11] Riemann, Bernhard: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Historisch und mathematisch kommentiert von Jürgen Jost, Springer 2013
[12] Scriba, C.J., Schreiber, P.: *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer 2001
[13] Sigmund, Karl: *Sie nannten sich Der Wiener Kreis. Exaktes Denken am Rande des Untergangs.* Springer Spektrum 2015
[14] Wußing, H.: *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Springer 2008, 2013

Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135, Augsburg
E-mail address: eschenburg@math.uni-augsburg.de