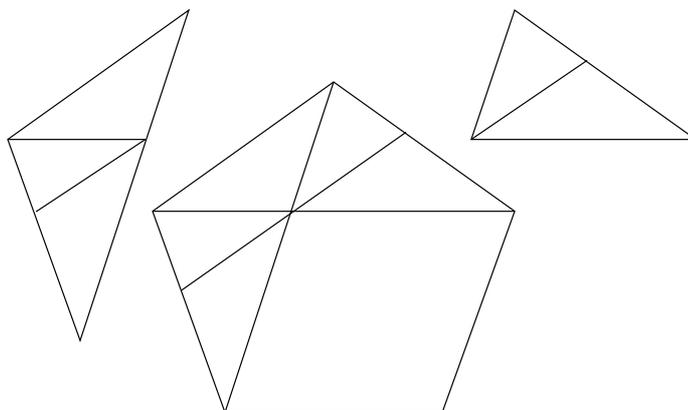


DIE ZAHL FÜNF UND DIE QUASIKRISTALLE

J.-H. ESCHENBURG

Hermann Karcher gewidmet



1. ZAHLEN SIND INDIVIDUEN

Der Gegenstand der Mathematik ist das Allereinfachste: die wiederholte Zusammensetzung des Gleichen, der Einheit. So entstehen die positiven ganzen Zahlen $1, 2, 3, \dots$, die den Grundstoff der Mathematik bilden. Interessant werden sie erst durch die Umkehrung des Zusammensetzungsprozesses: die Zerlegung oder Teilung in gleiche Anteile. Hier beginnen sich die Zahlen zu unterscheiden und ihre jeweilige Eigenart zu entwickeln: Die vierfache Zusammensetzung der Einheit lässt sich in zwei, die sechsfache in drei gleiche Teile zerlegen, die fünf- oder siebenfache aber nur in seine ursprünglichen Bestandteile. Die Zahlen sind nicht nur "Nummern", sondern echte Individuen! Seit den Ursprüngen des Denkens haben Menschen diese Verschiedenheit wahrgenommen und den Zahlen unterschiedliche Charaktere und Bedeutungen zugemessen.

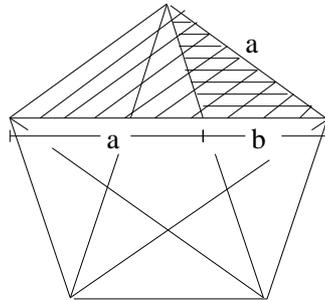
Die Zahl Fünf spielt eine gewisse Sonderrolle. Wegen der Fünzfahl unserer Finger und Zehen haben wir Menschen sozusagen das innigste Verhältnis zu ihr, und da unser Dezimalsystem auf diesen Umstand

Date: 7. Mai 2004.

gegründet wurde, ist die Fünf auch die Freundin der Schulkinder, die das Einmaleins lernen müssen: 5, 10, 15, 20, ..., das können alle! Auch sonst ist sie in der belebten Natur vielfältig vertreten, z.B. bei vielen Blütenpflanzen, etwa der Akelei oder den Rosengewächsen; selbst ein Blumenverächter kennt wenigstens das fünfeckige Kerngehäuse eines Apfels.

2. DER GOLDENE SCHNITT

Mit dem Fünfeck eng verbunden ist das Verhältnis des *Goldenen Schnitts*,¹ das ebenfalls sehr häufig in der Natur und auch in der bildenden Kunst auftritt.² Viele Proportionen z.B. am menschlichen Körper, aber auch an Bauwerken und Gemälden stehen in diesem Zahlenverhältnis, das oft zu Ehren des altgriechischen Bildhauers Phidias mit dem Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet wird: Eine Strecke wird durch den Goldenen Schnitt so in zwei ungleiche Teile a und b zerlegt, dass sich die Teile untereinander verhalten wie das Ganze zum größeren Teil: $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$. Für das Längenverhältnis $\frac{a}{b} = \Phi$ ergibt sich $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ und daraus der Zahlenwert $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$. Im regelmäßigen Fünfeck stehen Diagonale und Seitenlänge im Verhältnis des Goldenen Schnittes; wir sehen dies aus der Ähnlichkeit (Formgleichheit bei unterschiedlicher Größe) der beiden gleichschenkligen Dreiecke, die aus einer Diagonale und zwei Seiten einerseits sowie einer Seite und den kürzeren Abschnitten von zwei sich kreuzender Diagonalen andererseits bestehen.



Etwas weniger offensichtlich ist die Rolle des Goldenen Schnittes bei der Anordnung von Blatt- und Fruchtständen (*Phyllotaxe*), z.B. bei Kiefernzapfen³ oder Sonnenblumen.⁴ Die Samen der Sonnenblume sind in "goldenen Spiralen" (vgl. Fußnote 1) angeordnet. Auf der in Fußnote

¹<http://www.fonline.de/rs-ebs/spiele/denk27.htm>

²<http://www.goldenmuseum.com/>

³<http://www.math.smith.edu/phylo/OldFiles/Pictures/pinecone.html>

⁴<http://www.sciencenews.org/20020831/mathtrek.asp>

4 zitierten Seite wird eine Erklärung dafür versucht: Nur so können die einzelnen Samenkörner regelmäßig und doch überall etwa gleich dicht angeordnet werden. Dies hängt mit einem Umstand zusammen, auf den wir noch zu sprechen kommen: Die Zahl Φ ist irrational und in einem bestimmten Sinne sogar die “irrationalste” Zahl überhaupt!

3. GEHEIME KRÄFTE DER FÜNF?

Vielleicht ist es diese enge Verbindung der Fünf zur belebten Natur, die dazu führte, dass so manche menschliche Vereinigung im Laufe der Geschichte sich ihrer bemächtigte, vor allem in Form des fünfzackigen Sterns, auch *Pentagramm* oder *Drudenfuß* genannt. Das Symbol ist vermutlich babylonischen Ursprungs, und angefangen von den Pythagoräern über die Gnostiker, die Katharer, die Rosenkreutzer bis hin zu den Freimaurern und Illuminaten haben diverse Geheimbünde im Laufe der Geschichte dieses Symbol zum Zeichen gewählt. Wenn wir heute im Internet nach dem Begriff “Drudenfuß” suchen, finden wir alle nur denkbaren Hexenspukseiten. Dort wird uns erklärt, dass es sich bei den Druden um nächtliche Plagegeister handelt, deren Fußabdruck ein Pentagramm hinterlässt und die daher auch mit einem solchen Symbol vor der Türschwelle ferngehalten werden können. Statt dieser eher zweifelhaften Quellen können wir auch Goethes “Faust” bemühen: Bei seiner ersten Begegnung mit Faust sitzt der Teufel zunächst in der Falle:

“Gesteh ich’s nur! Dass ich hinausspaziere,
verbiestet mir ein kleines Hindernis:
der Drudenfuß auf eurer Schwelle -”

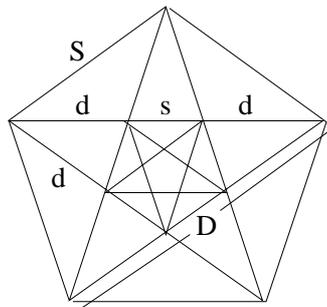
Der “Herr der Ratten und der Mäuse, der Fliegen, Frösche, Wanzen, Läuse” muss erst eine Ratte herbeirufen, die für ihn eine Spitze des Pentagramms abnagt und damit den Bann löst. Die Tiere scheinen mit solchem Hokuspokus weniger Probleme zu haben, was sehr für ihre Vernunft spricht.

4. DIE ENTDECKUNG DER IRRATIONALITÄT

Die für uns interessanteste Gruppe, die das Pentagramm als Symbol verwendete, sind die Pythagoräer, eine von Pythagoras⁵ um 530 v. Chr. gegründete Geheimgesellschaft in Süditalien. Zu ihren größten wissenschaftlichen Leistungen gehört nicht so sehr der bekannte Satz über die Seitenlängen rechtwinkliger Dreiecke, der wesentlich älter ist, sondern viel mehr der historisch erste Beitrag zur mathematischen Physik: Pythagoras erforschte systematisch den Zusammenhang zwischen

⁵http://math-www.uni-paderborn.de/~rinkens/veranst/elgeo2000/kapitel1/I8_3.html

der Länge einer schwingenden Saite und der Höhe des erzeugten Tons. Er erkannte, dass die grundlegenden Tonintervalle (Oktave, Quinte, Quarte, ...) durch einfache Zahlenverhältnisse für die Saitenlängen ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, ...) wiedergegeben werden. Dies passte wunderbar in seine Philosophie, nach der die Harmonie der Welt auf ganzen Zahlen aufgebaut ist ("Alles ist Zahl"). Eine andere, ebenso bedeutsame Entdeckung der Pythagoräer aber passte leider gar nicht dazu: Schon bei sehr einfachen geometrischen Figuren treten Längen auf, die zueinander nicht mehr im Verhältnis von zwei ganzen Zahlen stehen, wie immer man diese auch wählen mag; ihr Verhältnis ist eine *irrationale* Zahl. Einige Autoren schreiben diese Erkenntnis einem Schüler des Pythagoras mit Namen Hippasos von Metapont zu; zumindest soll er sie verraten und damit die Statuten des Geheimbundes gebrochen haben. Einer Legende gemäß wurde er für diesen Frevel mit dem Tode des Ertrinkens bestraft.



Man vermutet, dass die Pythagoräer ausgerechnet durch ihr eigenes Symbol, das Pentagramm, auf diese für sie so unangenehme Wahrheit gestoßen wurden. Der Goldene Schnitt, das Verhältnis von Seitenlänge und Diagonale im regelmäßigen Fünfeck, ist nämlich irrational. Dies ist einfach zu erkennen: Die Diagonalen des Fünfecks bilden ein Pentagramm, das innen ein kleineres Fünfeck umschließt. Mit den Bezeichnungen S, D, s, d für Seite und Diagonale im großen und im kleinen Fünfeck sehen wir: $S = d + s$ und $D = d + s + d$. Wären D und S ganzzahlige Vielfache einer Einheitslänge e , so wären auch $d = D - S$ und $s = S - d$ Vielfache dieser Einheit. Die Diagonalen des kleinen Fünfecks wiederum umschließen ein noch kleineres, und nach demselben Argument wären auch dessen Seitenlänge und Diagonale ganze Vielfache von e . So könnten wir immer weiter fortfahren, doch in jedem Schritt wird das Fünfeck um einen bestimmten Faktor (nämlich $1/\Phi^2$) kleiner, und schließlich ist seine Seitenlänge kleiner als e und kann daher kein Vielfaches von e mehr sein. Das ist ein Widerspruch, und somit kann es keine solche Einheit geben.

Es gibt eine viel später gefundene algebraische Variante dieses Arguments, die noch mehr zeigt: Der goldene Schnitt Φ ist die “irrationalste” unter allen Zahlen! Aus der Gleichung $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ sehen wir durch erneutes Einsetzen $\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = \dots$ Eine solche Darstellung nennt man einen *Kettenbruch*. Jede positive Zahl x kann in der Form eines Kettenbruches $x = k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \dots}}$ mit natürlichen Zahlen k_1, k_2, k_3, \dots dargestellt werden: k_1 ist der ganzzahlige Anteil von x mit Rest $r_1 = x - k_1 < 1$; sein Kehrwert $\frac{1}{r_1}$ hat wiederum einen ganzzahligen Anteil k_2 , der Kehrwert des Restes $r_2 = \frac{1}{r_1} - k_2$ hat einen ganzzahligen Anteil k_3 usw. Wenn man bei k_n abbricht, so erhält man eine rationale Zahl (ein Verhältnis ganzer Zahlen) x_n nahe bei x , und zwar umso näher, je kleiner der Rest r_n und je größer somit der ganzzahlige Anteil k_{n+1} von $\frac{1}{r_n}$ ist. Da 1 die kleinste positive ganze Zahl ist, ist $\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \dots}$ in diesem Sinne am weitesten von allen rationalen Zahlen entfernt, also am “irrationalsten”.

Für $x = \Phi$ sind die approximierenden Brüche x_n die Verhältnisse aufeinanderfolgender *Fibonacci-Zahlen* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..., die jeweils durch Addition ihrer beiden Vorgänger entstehen; $\frac{8}{5}$, $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$ usf. sind gute Approximationen von Φ . Die Fibonaccizahlen treten auch als Anzahlen der “goldenen Spiralen” in der Phyllotaxe auf (s.o.) und in vielen anderen Zusammenhängen.

5. WARUM STÖRT DIE FÜNF DIE KRISTALLE?

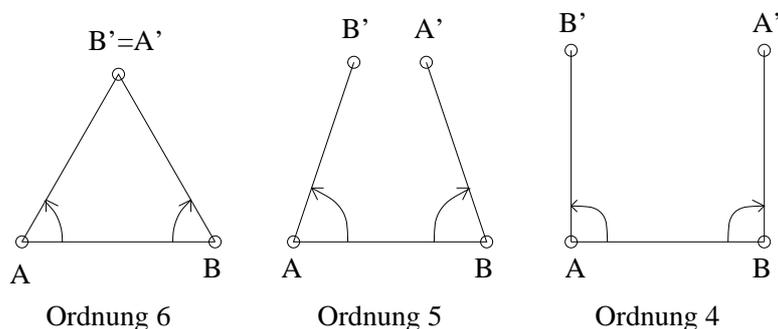
Wir haben über die Bedeutung der Fünf in der belebten Natur gesprochen; wie steht es mit der unbelebten? Die Vielfalt und Schönheit der Kristalle erscheint uns geradezu paradigmatisch für die ambivalente Rolle der Mathematik. So beschreibt Thomas Mann in seinem Roman “Zauberberg” die Schneeflocken folgendermaßen:

“Eine endlose Erfindungslust in der Abwandlung und Ausgestaltung eines und immer desselben Grundschemas, des gleichseitig-gleichwinkligen Sechsecks, herrschte da; aber in sich selbst war jedes der kalten Erzeugnisse von unbedingtem Ebenmaß und eisiger Regelmäßigkeit, ja, dies war das Unheimliche, Widerorganische und Lebensfeindliche daran; sie waren zu regelmäßig, die zum Leben geordnete Substanz war es niemals in diesem Grade; dem Leben schauderte vor der genauen Richtigkeit, es empfand sie als tödlich, als das Geheimnis des Todes selbst, und Hans Castorp glaubte zu verstehen, warum

Tempelbaumeister der Vorzeit absichtlich und insgeheim kleine Abweichungen von der Symmetrie in ihren Säulenordnungen angebracht hatten.”

Aber es sind eben die Zahlen 6 und auch 4, 3 und 2, die wir bei Kristallen finden, nicht 5. Sollte die Fünf etwa mit dem Leben verbündet sein gegen die “hexagonale Regelmäßigkeit” (a.a.O.)? Wir werden auf diese Frage zurückkommen. Zunächst wollen wir den Grund dafür suchen, warum die Zahl Fünf den Kristallen fremd ist: Es ist wirklich deren Regelmäßigkeit! Ein Kristall besteht ja aus einem *Gitter* von regelmäßig angeordneten Atomen. Wenn wir uns der Einfachheit halber auf eine Ebene beschränken, die von drei Punkten des Gitters aufgespannt wird, so erhalten wir einen “zweidimensionalen Kristall”, d.h. ein *regelmäßiges ebenes Muster*. Diese sind uns als Tapeten-, Fliesen- oder Kachelmuster bestens vertraut; besonders großen Anteil an der Erfindung der schönsten Muster hat die islamische Kunst.⁶ “Regelmäßig” soll ein Muster heißen, das sich in zwei Richtungen in regelmäßigen Abständen wiederholt; es kommt also bei bestimmten *Verschiebungen* wieder mit sich selbst zu Deckung. Bei vielen Mustern tritt derselbe Effekt der Deckungsgleichheit auch durch bestimmte *Drehungen* ein; z.B. lässt das aus regelmäßigen Sechsecken gebildete Bienenwabenmuster Drehungen von 60° um die Mittelpunkte der Sechsecke, von 120° um ihre Eckpunkte und von 180° um die Kantenmittelpunkte zu; da nach 6, 3 oder 2 solchen Drehungen die ursprüngliche Lage wieder erreicht ist, sprechen wir von Drehzentren der *Ordnungen* 6, 3 oder 2. Drehungen der Ordnung 4 treten auch auf, nicht im Bienenwaben-, aber im vertrauten Rechenkästchenmuster.

Wir wollen nun zeigen, dass kein regelmäßiges Muster ein Drehzentrum der Ordnung 5, d.h. mit Drehwinkel 72° besitzen kann. Der Nachweis geschieht ähnlich wie vorher bei der Irrationalität von Φ .



⁶vgl. A. Amberger: *Die ebenen periodischen Muster*, Wiesner-Verlag Augsburg 2000

Wir stellen uns vor, es gäbe ein solches Drehzentrum. Da das Muster sich periodisch wiederholt, gibt es dann auch gleich ganz viele. Wir wählen zwei davon aus, die so nahe wie möglich beieinander liegen, und nennen sie A und B . Mit der 72° -Drehung um A (nach links) entsteht aus B ein anderes Drehzentrum B' , und ebenso wirft die Drehung von -72° um B (nach rechts) das Drehzentrum A auf ein weiteres Drehzentrum A' . Aber die neuen Drehzentren A' und B' liegen näher beieinander als A und B , was wir gerade ausgeschlossen hatten. Das ist ein Widerspruch; so ein Drehzentrum kann es also nicht geben. Hätten wir stattdessen Drehzentren der Ordnung 6 betrachtet, so wären die Punkte A' und B' identisch gewesen, und bei den Ordnungen 4, 3 und 2 wären sie mindestens ebensoweit voneinander entfernt gewesen wie A und B ; diese Fälle sind also möglich. Bei kleineren Drehwinkeln als 60° , also bei Drehordnungen von 7 und mehr hätte B' näher bei B gelegen als A ; solche Drehzentren sind daher ebenfalls unmöglich.

6. QUASIKRISTALLE UND PENROSE-MUSTER

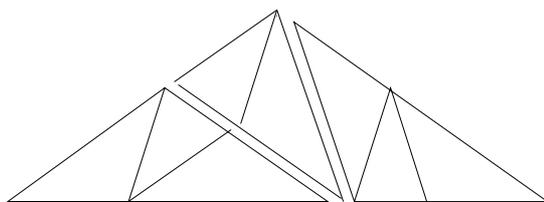
Schickt man Strahlen einer geeigneten Wellenlänge durch ein Kristallgitter hindurch, so werden sie gestreut und die erzeugten Beugungsbilder geben über die Anordnung der Atome im Kristall Auskunft. Da Drehsymmetrien der Ordnung 5 ausgeschlossen sind, wie wir gesehen haben, sollten auch die Beugungsbilder keine solchen Symmetrien besitzen. Und dennoch gibt es Beugungsbilder mit 5-zähliger und sogar 10-zähliger Drehsymmetrie!⁷ Wie ist das möglich? Es handelt sich dabei um eine neue Art von Festkörpern, die erst 1984 entdeckt worden sind, die *Quasikristalle*.⁸ Sie erzeugen Beugungsbilder mit Symmetrien, die bei Kristallen nicht vorkommen können, denn sie sind nicht periodisch, sondern nur *quasiperiodisch*: Jedes Detail wiederholt sich, aber immer in einer anderen Umgebung. Auch die im Beugungsbild beobachtete 5- oder 10-zählige Drehsymmetrie ist im Quasikristall selbst nur *lokal* vorhanden, d.h. sie betrifft nicht das Ganze, sondern nur Ausschnitte. Inzwischen wurden diese "illegitime Brüder" in den Club der Kristalle aufgenommen, die jetzt allgemeiner als Festkörper definiert werden, deren Beugungsbild weitgehend aus voneinander getrennten Punkten besteht; damit hat nun auch die Fünf ihren Weg zu den Kristallen gefunden.

Meistens werden physikalische Entdeckungen erst später von Mathematikern untersucht, aber in diesem Fall war es einmal umgekehrt:

⁷<http://www.math.ualberta.ca/~rvmoody/rvm/>

⁸D.Shechtman et al.: *Metallic phase with long-ranged orientational order and no translational symmetry*, Phys. Review Letters **53** (1984), 1951 - 1953

Zweidimensionale Quasikristalle wurden bereits in den 70'ger Jahren von R. Penrose entdeckt. Penrose-Muster⁹ sind ebene Muster, die eine strenge lokale und globale Ordnung aufweisen, aber keine Periodizität. Sie basieren auf dem regelmäßigen Fünfeck, das sie gewissermaßen entfalten. Es sind Fliesen- oder Kachelmuster, die aus zwei Sorten von rhombenförmigen Fliesen bestehen, einer breiten und einer schmalen.¹⁰ Diese Rhomben (Rauten) sind die symmetrischen Ergänzungen der beiden gleichschenkligen Dreiecke, die im Fünfeck mit seinem Diagonalenpentagramm vorkommen, und die wir *Halbrhomben* nennen wollen. Sie lassen sich in formgleiche kleinere Dreiecke zerlegen, so wie es in der Figur am Anfang des Artikels gezeigt ist. Die kleineren Dreiecke sind wieder auf die gleiche Weise unterteilbar, und wenn die Unterteilungen benachbarter Dreiecke zusammenpassen sollen, geht das nur auf eine einzige Art. Durch Wiederholung kommt man daher zu immer feineren, auf jeder Stufe vollständig festgelegten Unterteilungen der beiden gleichschenkligen Dreiecke.



Die erstaunlichste Eigenschaft der Penrose-Muster ist die Umkehrbarkeit dieses Prozesses, genannt *Inflation*: An jeder Stelle des Musters lassen sich mehrere benachbarte Halbrhomben so zusammenfassen, dass sie große Rhomben der gleichen zwei Formen (breite und schmale) bilden, wobei die Unterteilung der großen Halbrhomben durch die kleineren wie die eben gezeigte Zerlegung aussieht, und die großen Rhomben bilden zusammen wieder ein (neues) Penrose-Muster! Auch dieser Schritt lässt sich beliebig oft wiederholen, und so wird das Muster aus größeren und immer größeren Fliesen zusammengesetzt, die alle exakt die gleiche Unterteilung durch die Ausgangs-Halbrhomben besitzen. Alle Penrose-Muster bestehen aus solchen Fliesen von beliebig wählbarer Größe und sehen daher überall absolut gleich aus; darin ähneln sie den periodischen Fliesenmustern. Dennoch gibt es unendlich (sogar überabzählbar) viele verschiedene von ihnen. Sie gleichen darin den Wegen in einem Baum, dessen Äste von einer Wurzel ausgehend sich endlos wieder und wieder verzweigen. Von jedem Punkt aus gibt es

⁹R.Penrose: *Pentaplexity - a class of nonperiodic tilings of the plane*, Mathematical Intelligencer **2** (1979), 32 - 37

¹⁰<http://www.innerx.net/personal/tsmith/pwtile240.html>

nur einen einzigen Weg nach unten zur Wurzel, und alle Wege derselben Länge sehen absolut gleich aus (dies entspricht der Gleichheit der unterteilten großen Fliesen), nach oben hin aber gibt es unendlich viele verschiedene Wege, denn in jedem weiteren Verzweigungspunkt hat man eine neue Wahlmöglichkeit. So gibt es auch immer neue Möglichkeiten, ein gegebenes endliches Stück eines Penrose-Musters fortzusetzen;¹¹ die Verzweigungen entsprechen den beiden möglichen Rollen einer schmalen Halbrhombe als Teil entweder einer schmalen oder einer breiten Rhombe, wie unsere Figuren zeigen. Kein Teil legt also fest, wie das ganze Muster aussehen wird; insofern unterscheiden sich die Quasikristalle von ihren periodischen Brüdern durch ihre Unbestimmtheit, ihren Mangel an Starrheit, womit sie wieder eine Ähnlichkeit zur belebten Natur gewinnen.

Doch viele dieser Wahlmöglichkeiten führen in Sackgassen; dann lassen sich die Muster nicht weiter fortsetzen. Wir wollen im Folgenden die Konstruktion aller Penrose-Muster beschreiben, die keine Sackgassen besitzen, die also die ganze Ebene bedecken.¹²

7. SCHATTEN AUS FÜNF DIMENSIONEN

Die Penrose-Muster sind zweidimensionale Schatten des einfachsten regulären Musters, des Würfelmusters, im fünfdimensionalen Raum.¹³ Wir wollen zunächst eine analoge Konstruktion in drei Dimensionen schildern. Das einfachste reguläre Muster in der Ebene ist das Rechenkästchenmuster, das aus gleich großen Quadraten zusammengesetzt ist. Analog dazu gibt es im Raum das Würfelmuster. Wir betrachten nun die Schatten, die diese Würfel auf eine schiefe Ebene E im Raum werfen, wobei wir uns vorstellen, dass das Licht senkrecht auf diese Ebene fällt (*orthogonale Projektion*). Jeder Würfel wird von Quadraten begrenzt, und es sind eigentlich deren Schatten, die uns interessieren. Um ein wirres Durcheinander von Schatten zu vermeiden, beschränken

¹¹<http://www.geom.umn.edu/apps/quasitiler/start.html>

¹²N.G. de Bruijn: *Algebraic theory of Penrose non-periodic tilings of the plane*, Indag. Math. **43** (1981), 27 - 37

¹³Durch Einführung von Koordinatenachsen können wir ja jeden Punkt in der Ebene durch zwei, jeden Punkt im Raum durch drei Zahlen eindeutig festlegen. Es ist danach nur ein kleiner Schritt zu sagen: Die Ebene *ist* die Gesamtheit der Zahlenpaare, der Raum *ist* die Gesamtheit der Zahlentripel. Damit kann aber die Grenze der Anschauung bei der Dimensionszahl überwunden werden, denn es gibt keinen Grund, nicht auch die Gesamtheit der Zahlen-Quartetts oder Quintetts usw. zu untersuchen. Erstaunlicherweise gelten dort noch immer viele der aus zwei und drei Dimensionen vertrauten geometrischen Gesetze, so dass wir die Sprache der Geometrie auch in diesem Bereich jenseits der Anschauung weiterhin verwenden können.

wir uns auf Quadrate in der Nähe von E ; genauer soll es für jedes zugelassene Quadrat einen Punkt auf E geben, dessen Koordinaten kleiner als die Eckpunktkoordinaten dieses Quadrats sind und auch nach unten um weniger als eine Einheit von ihnen abweichen. Die Ebene E wollen wir dabei so wählen, dass sie durch keinen einzigen Punkt mit ausschließlich ganzzahligen Koordinaten geht. Die Schatten aller zugelassenen Quadrate bilden ein rhombisches Fliesenmuster auf der Ebene E , das je nach Lage von E vollkommen unterschiedlich ausfällt. Wenn die Steigungen der schiefen Ebene E irrational sind, hat das Muster keine Perioden, ist aber *quasiperiodisch*; insbesondere wiederholt sich jedes endliche Stück wieder und wieder, doch jeweils in einer neuen Umgebung. Durch die gleiche Konstruktion entstehen auch die Penrose-Muster; wir müssen lediglich den dreidimensionalen Raum durch den fünfdimensionalen ersetzen. Um die zwei Rhomben des Penrose-Musters zu erzeugen, muss die Ebene E allerdings sehr speziell gewählt werden, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

8. DIE ZYKLISCHE KOORDINATENVERTAUSCHUNG

Betrachten wir zum Vergleich zunächst noch einmal den dreidimensionalen Raum und darin die Ebene E senkrecht zur Raumdiagonale $(1, 1, 1)$. Die Schatten (Orthogonalprojektionen) der drei positiven Koordinatenachsen sind Strahlen in E , die den Winkel 120° einschließen, was man sieht, wenn man in Richtung der Raumdiagonale auf eine Ecke des Zimmers schaut. Bei zyklischer Vertauschung der drei Koordinaten $((x, y, z) \mapsto (y, z, x))$ werden daher die Punkte von E um 120° gedreht. Das zugehörige Muster ist allerdings langweilig; es ist periodisch und besteht nur aus 60° -Rhomben. In fünf Dimensionen ist die Situation etwas anders: Senkrecht zur "Raumdiagonale" $d = (1, 1, 1, 1, 1)$ finden wir nicht eine, sondern zwei zueinander senkrechte Ebenen E_1 und E_2 , auf denen die Projektionen der positiven Koordinatenachsen fünf Strahlen mit Winkel 72° bilden, und die zyklische Vertauschung der fünf Koordinaten $(x, y, z, u, v) \mapsto (y, z, u, v, x)$ ist auf E_1 eine Drehung um den Winkel 72° , auf E_2 um den doppelten Winkel 144° .

Um dies zu einzusehen, müssen wir die Lineare Algebra bemühen und die Eigenvektoren der zyklischen Koordinatenvertauschung, d.h. der linearen Abbildung $A : (x, y, z, u, v) \mapsto (y, z, u, v, x)$ auf dem \mathbb{R}^5 aufsuchen. Diese finden wir nur, wenn wir zunächst auch komplexe Koordinaten zulassen: Für jede komplexe Zahl γ mit $\gamma^5 = 1$ (*fünfte Einheitswurzel*) ist der Vektor $w_\gamma = (1, \gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4)$ ein Eigenvektor von A , denn $Aw_\gamma = (\gamma, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, 1) = \gamma w_\gamma$. Für $\gamma = 1$ ist $w_\gamma = (1, 1, 1, 1, 1)$ die Raumdiagonale, die von A fix gelassen wird. Außer 1

gibt es noch vier weitere, nicht reelle fünfte Einheitswurzeln, nämlich $\gamma \in \{\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4\}$ mit $\zeta = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = e^{2\pi i/5}$. Mit den zugehörigen Eigenvektoren w_γ können wir noch nicht viel anfangen, weil sie eben nicht reell sind. Aber erinnern wir uns: Wenn eine reelle Matrix A einen komplexen Eigenvektor $w = u + iv$ zum komplexen Eigenwert $\gamma = \alpha + i\beta$ besitzt, $Aw = \gamma w$, so können wir diese Gleichung in ihren Real- und Imaginärteil aufspalten: $Aw = A(u + iv) = Au + iAv$ und $\gamma w = (\alpha + i\beta)(u + iv) = \alpha u - \beta v + i(\alpha v + \beta u)$, also $Au + iAv = \alpha u - \beta v + i(\alpha v + \beta u)$ und damit

$$(1) \quad Au = \alpha u - \beta v, \quad Av = \alpha v + \beta u.$$

Also lässt A die von $u = \operatorname{Re} w$ und $v = \operatorname{Im} w$ aufgespannte reelle Ebene invariant. In unserem Fall ist $\gamma = \zeta^k$ und damit $\alpha = \cos \frac{2\pi k}{5}$ und $\beta = \sin \frac{2\pi k}{5}$. In der Tat beschreibt (1) eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi k}{5} = k \cdot 72^\circ$, denn die Vektoren u und v haben die gleiche Länge und stehen senkrecht aufeinander, siehe Gleichung (2) weiter unten. Der Grund hierfür ist, dass $w = w_\gamma$ ein *isotroper* komplexer Vektor ist, d.h. $w^2 = 0$, die Quadratsumme seiner Komponenten ist Null:

$$1^2 + \gamma^2 + \gamma^4 + \gamma^6 + \gamma^8 = 1 + \gamma^2 + \gamma^4 + \gamma + \gamma^3 = (1 - \gamma^5)/(1 - \gamma) = 0,$$

wobei wir die geometrische Summenformel $(1 + x + \dots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n$ verwendet haben. Daher ist $0 = w^2 = (u + iv)^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$ und somit

$$(2) \quad u^2 - v^2 = 0, \quad uv = 0,$$

wobei $uv = \langle u, v \rangle$ das Skalarprodukt (Summe der Komponentenprodukte) der Vektoren u und v bezeichnet.

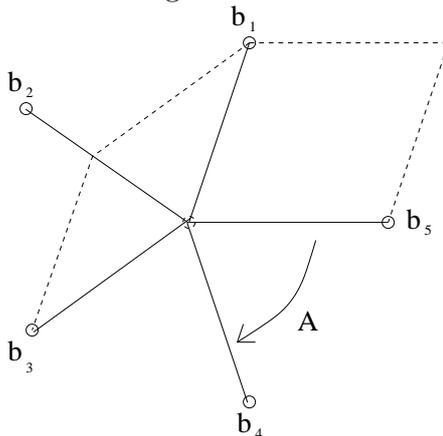
Auf diese Weise erhalten wir eine Ebene E_1 durch den Ursprung, die vom Real- und Imaginärteil des Vektors w_ζ aufgespannt wird und auf der A als Drehung um $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$ wirkt, sowie eine dazu senkrechte Ebene E_2 , die von Real- und Imaginärteil von w_{ζ^2} aufgespannt wird und auf der A als Drehung um den Winkel $\frac{4\pi}{5} = 144^\circ$ wirkt, und beide Ebenen sind senkrecht zur Diagonale $w_1 = d = (1, 1, 1, 1, 1)$. Die Vektoren w_{ζ^3} und w_{ζ^4} sind konjugiert komplex zu w_{ζ^2} und w_ζ , und ihre Real- und Imaginärteile spannen somit dieselben Ebenen E_2 und E_1 auf.

Wir betrachten nun die orthogonalen Projektionen π_1 und π_2 des fünfdimensionalen Raumes \mathbb{R}^5 auf die Ebenen E_1 und E_2 . Da die Ebenen von der orthogonalen Abbildung A invariant gelassen werden, sind die Projektionen mit A vertauschbar: $\pi_k A = A \pi_k$ ($k = 1, 2$). Insbesondere betrachten wir die Projektionsbilder $b_i = \pi_1 e_i$ und $c_i = \pi_2 e_i$ ($i = 1, \dots, 5$) der fünf Basisvektoren $e_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \dots, e_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$

des \mathbb{R}^5 . Da

$$(3) \quad A\pi_k e_i = \pi_k A e_i = \pi_k e_{i-1}$$

(wobei i modulo 5 gerechnet wird), folgt $Ab_i = b_{i-1}$ und $Ac_i = c_{i-1}$, und somit schließen b_i und b_{i-1} den Winkel 72° und c_i, c_{i-1} den Winkel 144° ein. Die Vektoren e_1, \dots, e_5 sind die Kantenvektoren im Würfelgitter von \mathbb{R}^5 , deshalb sind die E_1 -Projektionen von zweidimensionalen Seiten der fünfdimensionalen Würfel gerade die beiden Penrose-Rhomben.



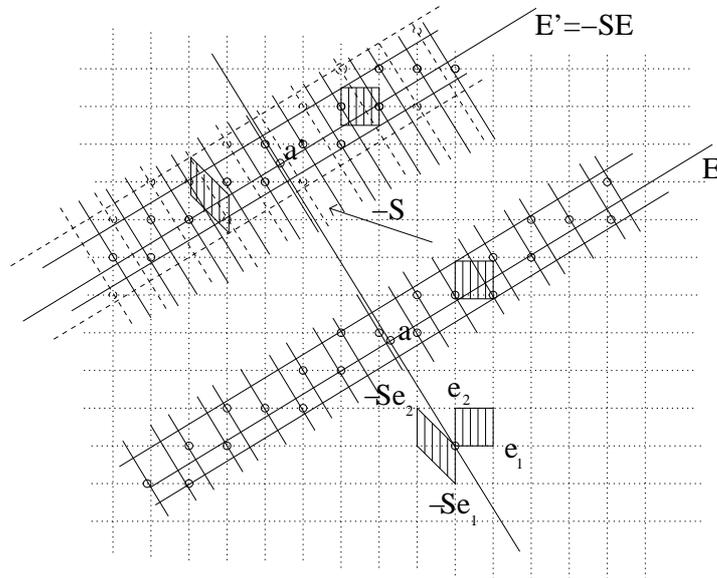
Die Projektionsebene E des Penrose-Musters kann allerdings nicht die Ebene E_1 selber sein, da diese ja durch den Ursprung geht, also durch einen Punkt mit ganzzahligen Koordinaten. Wir müssen sie daher vom Ursprung wegschieben und setzen $E = E_1 + a$ für einen Vektor $a \in E_2$ mit der einzigen Einschränkung, dass E keinen ganzzahligen Punkt enthält; z.B. kann a deshalb nicht Null sein. Für zwei verschiedene solche Vektoren $a, a' \in E_2$ ergeben $E = E_1 + a$ und $E' = E_1 + a'$ zwei unterschiedliche Penrose-Muster, sofern sich E' und E nicht einfach nur durch einen ganzzahligen Vektor unterscheiden. Wir erhalten damit überabzählbar viele Penrose-Muster.

9. INFLATION

Woher rührt nun die erwähnte Inflationseigenschaft der Penrose-Muster? Das hat mit einer weiteren linearen Abbildung S auf \mathbb{R}^5 zu tun, die ebenfalls das ganzzahlige Gitter \mathbb{Z}^5 erhält. Wir wollen uns dies zunächst in einer einfacheren Situation ansehen. Anstelle des \mathbb{R}^5 betrachten wir nur den \mathbb{R}^2 und darauf die ganzzahlig invertierbare lineare Abbildung $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit der Umkehrmatrix $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix $-S$ hat die Eigenvektoren $w_1 = \begin{pmatrix} \Phi \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \Phi \end{pmatrix}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1 = -\frac{1}{\Phi}$ und $\lambda_2 = \Phi$, wobei $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ der Goldene Schnitt ist. Setzen wir $E_k = \mathbb{R}w_k$ und $E = E_1 + a$ für

ein $a \in E_2$, so erhalten wir mit der Projektionsmethode ein quasiperiodisches Fliesenmuster auf der Geraden E , das wir M_E nennen wollen: Die ganzzahligen Gitterpunkte im Streifen $E + I^2$, wobei I das offene Einheitsintervall $(0, 1)$ bezeichnet, werden orthogonal auf E projiziert und bilden dort die Eckpunkte der Fliesen.

Die Abbildung $-S$ bildet die Gerade E auf eine Parallele $E' = -SE$ ab und den Streifen $E + I^2$ um E auf den Streifen $E' - SI^2$ um E' . Dabei werden die ganzzahligen Gitterpunkte in $E + I^2$ bijektiv auf die ganzzahligen Gitterpunkte im Bildstreifen $E' - SI^2$ abgebildet. Projiziert man sie orthogonal auf E' , so erzeugen sie ein gespiegeltes und um den Faktor $\varphi = \frac{1}{\Phi}$ verkleinertes Abbild SM_E des ursprünglichen Musters M_E , denn S ist mit der Orthogonalprojektion π_1 auf E_1 vertauschbar und hat auf E_1 den Eigenwert $-\varphi$.



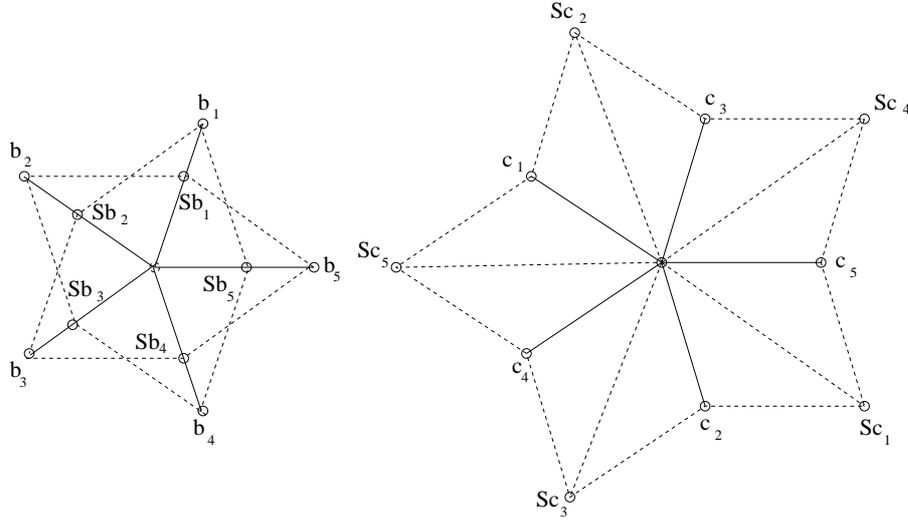
Andererseits gibt es auf E' auch das analoge Muster $M_{E'}$, das durch Projektion der Gitterpunkte im Streifen $E' + I^2$ zustandekommt. Da S in Richtung von E_2 alles um den Faktor Φ vergrößert, ist der Streifen $S(E + I^2) = E' - SI^2$ um diesen Faktor Φ breiter und enthält damit mehr Gitterpunkte als der Streifen $E' + I^2$; wegen dieser Eigenschaft werden wir $-S$ als *Expansionsabbildung* bezeichnen. Das zu M_E ähnliche Muster $-SM_E$ ist somit eine echte Verfeinerung von $M_{E'}$. Umgekehrt ist das ursprüngliche Muster M_E eine Verfeinerung des Musters $-S^{-1}M_{E'}$ auf E , dessen Fliesen um den Faktor Φ größer sind als die von M_E . Damit haben wir Inflationseigenschaft gezeigt: Die Fliesen von M_E lassen sich zu größeren Fliesen zusammensetzen, die ein analoges Muster bilden.

Im Falle des echten zweidimensionalen Penrose-Musters wird die Expansionsabbildung durch die ganzzahlig lineare Abbildung auf \mathbb{R}^5 mit folgenden Werten auf den Basisvektoren gegeben:

$$(4) \quad Se_i = e_{i-1} + e_{i+1}$$

für $i = 1, \dots, 5$, wobei der Index wieder modulo 5 gerechnet wird. Diese Abbildung ist offensichtlich mit der zyklischen Permutation A vertauschbar und erhält somit die Eigenräume von A , also auch die Ebenen E_1 und E_2 sowie die Diagonale $D = \mathbb{R}d$. Auf E_1 hat S den Eigenwert $\varphi = \frac{1}{\Phi}$, da

$$Sb_i = S\pi_1 e_i = \pi_1 Se_i = b_{i-1} + b_{i+1} = \varphi b_i,$$



wobei Φ wieder der goldene Schnitt ist, während auf E_2 der Eigenwert $-\Phi$ beträgt, weil die Winkel von c_i zu c_{i-1} und c_{i+1} jeweils nicht 72° , sondern 144° betragen (siehe Figur):

$$Sc_i = S\pi_2 e_i = \pi_2 Se_i = c_{i-1} + c_{i+1} = -\Phi c_i.$$

Die Situation ist also ganz ähnlich wie vorher: Die Abbildung $-S$ kontrahiert in Richtung E_1 um den Faktor $-\varphi$ und expandiert in Richtung E_2 um Φ . Wieder betrachten wir die zu E_1 parallele Ebene $E = E_1 + a$ für ein geeignetes $a \in E_2$ und das zugehörige Penrose-Muster M_E auf E , das durch Projektion auf E der ganzzahligen Gitterpunkte (Elemente von \mathbb{Z}^5), die im Streifen $E + I^5$ liegen, zustandekommt. Wieder ist das Bildmuster $-SM_E$ auf der parallelen Ebene $E' = -SE = E_1 - Sa$ ein um den Faktor φ verkleinertes und um 180° gedrehtes Abbild von M_E , und da S in den Richtungen von E_2 und D expandiert, umschließt $E' - SI^5$ den Streifen $E' + I^5$.

Aber jetzt gibt es ein Problem, die Analogie fortzusetzen: Zwar ist $-S$ ganzzahlig und bildet daher alle Gitterpunkte in $E + I^5$ auf Gitterpunkte in $E' - SI^5$ ab, aber S ist nicht mehr ganzzahlig *invertierbar*, denn der Diagonalenvektor $d = (1, 1, 1, 1, 1) = \sum_i e_i$ wird auf $2d$ abgebildet und liegt daher nicht in $S(\mathbb{Z}^5)$. Damit $-SM_E$ eine Verfeinerung des Musters $M_{E'}$ ist, muss die E' -Projektion der Bildmenge $-S((E + I^5) \cap \mathbb{Z}^5)$ die E' -Projektion von $(E' + I^5) \cap \mathbb{Z}^5$ enthalten; da S auf \mathbb{Z}^5 nicht umkehrbar ist, müssen wir diese Bildmenge nun genauer bestimmen. Zum Glück gibt es eine andere ganzzahlige lineare Abbildung T , die wenigstens beinahe ein Inverses zu $-S$ ist. Sie ist auf den Basisvektoren folgendermaßen definiert:

$$(5) \quad Te_i = e_{i-2} + e_{i+2}$$

(mit der üblichen Vereinbarung, den Index i modulo 5 zu rechnen). Diese Abbildung erhält ebenfalls die Unterräume D, E_1, E_2 , und es gilt

$$(6) \quad STe_i = TSe_i = d - e_i.$$

Auf $D^\perp = E_1 + E_2$ ist T also ein Inverses zu $-S$. Damit werden wir das Problem lösen können.

10. DAS BILD DER EXPANSIONSABBILDUNG

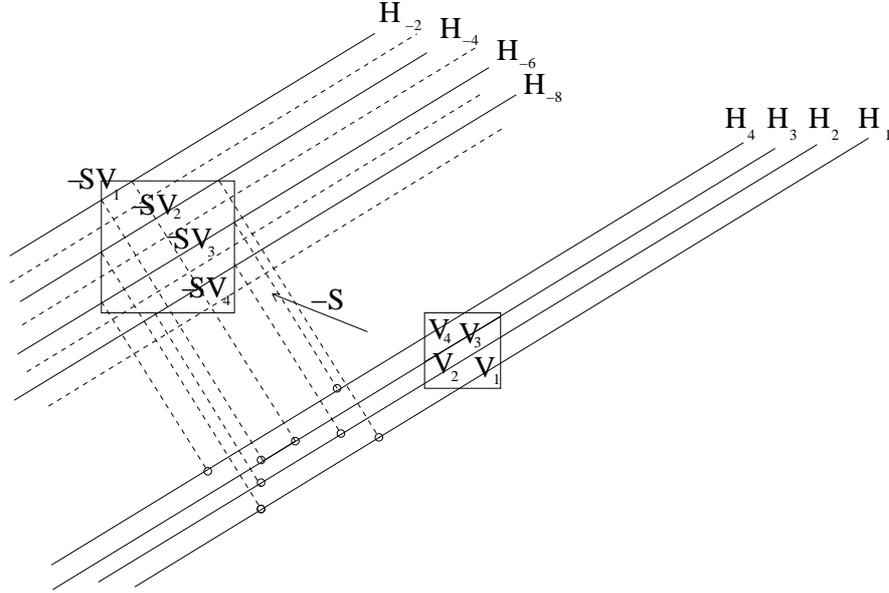
Jeder Punkt $z \in \mathbb{Z}^5$ liegt auf einer der zu D^\perp parallelen Hyperebenen

$$(7) \quad H_k = \{x \in \mathbb{R}^5; \langle x, d \rangle = k\} = D^\perp + ke_1 = D^\perp + \frac{k}{5}d$$

für ein ganzzahliges k , da $\langle z, d \rangle = \sum_i z_i \in \mathbb{Z}$. Liegt $z \in \mathbb{Z}^5$ zudem noch im Streifen $E + I^5$, d.h. $z = x + v$ mit $x \in E$ und $v \in I^5$, so ist $\langle z, d \rangle = \langle v, d \rangle = \sum_i v_i \in (0, 5) \cap \mathbb{Z}$ und damit ist $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Wir sind nur an den ganzzahligen Punkten von H_k interessiert, also an der Menge $\Gamma_k = H_k \cap \mathbb{Z}^5$. Die Projektionen auf eine zu E_1 parallele Ebene in D^\perp bleibt dieselbe, wenn wir Γ_k durch $\Gamma_{k \pm 5} = \Gamma_k \pm d$ ersetzen; da wir lediglich an diesen Projektionen interessiert sind, können wir den Index k also modulo 5 rechnen.

Die Abbildung $-S$ wirft H_k auf H_{-2k} und bildet dabei das Gitter Γ_k bijektiv auf Γ_{-2k} ab; daher wird Γ_k mit $k = 1, 2, 3, 4$ bijektiv auf Γ_l mit $l = 3, 1, 4, 2$ ab (bis auf ganzzahlige Vielfache von d).



Wir wollen sehen, ob die Projektion von $-S((E + I^5) \cap \mathbb{Z}^5)$ die Projektion von $(E' + I^5) \cap \mathbb{Z}^5$ enthält. Der Streifen $E + I^5$ lässt sich schreiben als $E + \pi^\perp(I^5)$, wobei π^\perp die Orthogonalprojektion auf $E_1^\perp = E_2 + D$ bezeichnet. Wir können uns dabei auf H_k mit $k = 1, 2, 3, 4$ beschränken. Setzen wir

$$(8) \quad V_k = \pi^\perp(I^5 \cap H_k),$$

so können wir $(E + I^5) \cap \mathbb{Z}^5$ durch $(E + V_k) \cap \Gamma_k$ und $S((E + I^5) \cap \mathbb{Z}^5)$ durch $(E' + SV_k) \cap \Gamma_l$ ersetzen. Wir wollen zeigen:

$$(9) \quad (E' - SV_k) \cap \Gamma_l \stackrel{!}{\supset} (E' + V_l) \cap \Gamma_l$$

(wobei wir stillschweigend alles nach D^\perp projiziert haben). Es kommt also auf die Größe von $-SV_k$ im Vergleich zu V_l an; wir werden zeigen:

$$(10) \quad -SV_k \stackrel{!}{\supset} V_l,$$

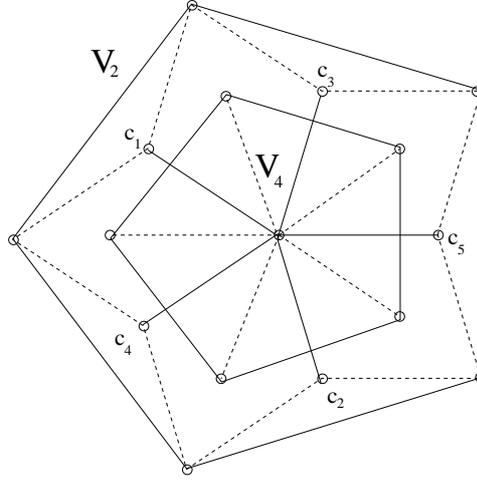
und da k und l verschieden sind, ist das trotz der Expansionseigenschaft von $-S$ nicht selbstverständlich. Die vorstehende Figur macht das Prinzip klar: Trotz der Vergrößerung ist dort $-SV_k$ kleiner als V_l für $k = 1, l = 2$.

Um ein solches Verhalten auszuschließen, bestimmen wir

$$V_k = \pi_2(I^5 \cap H_k)$$

für $k = 1, 2, 3, 4$. Als Projektion des konvexen Polyeders $I^5 \cap H_k$ ist V_k ein konvexes Polygon, dessen Ecken Projektionen von Eckpunkten

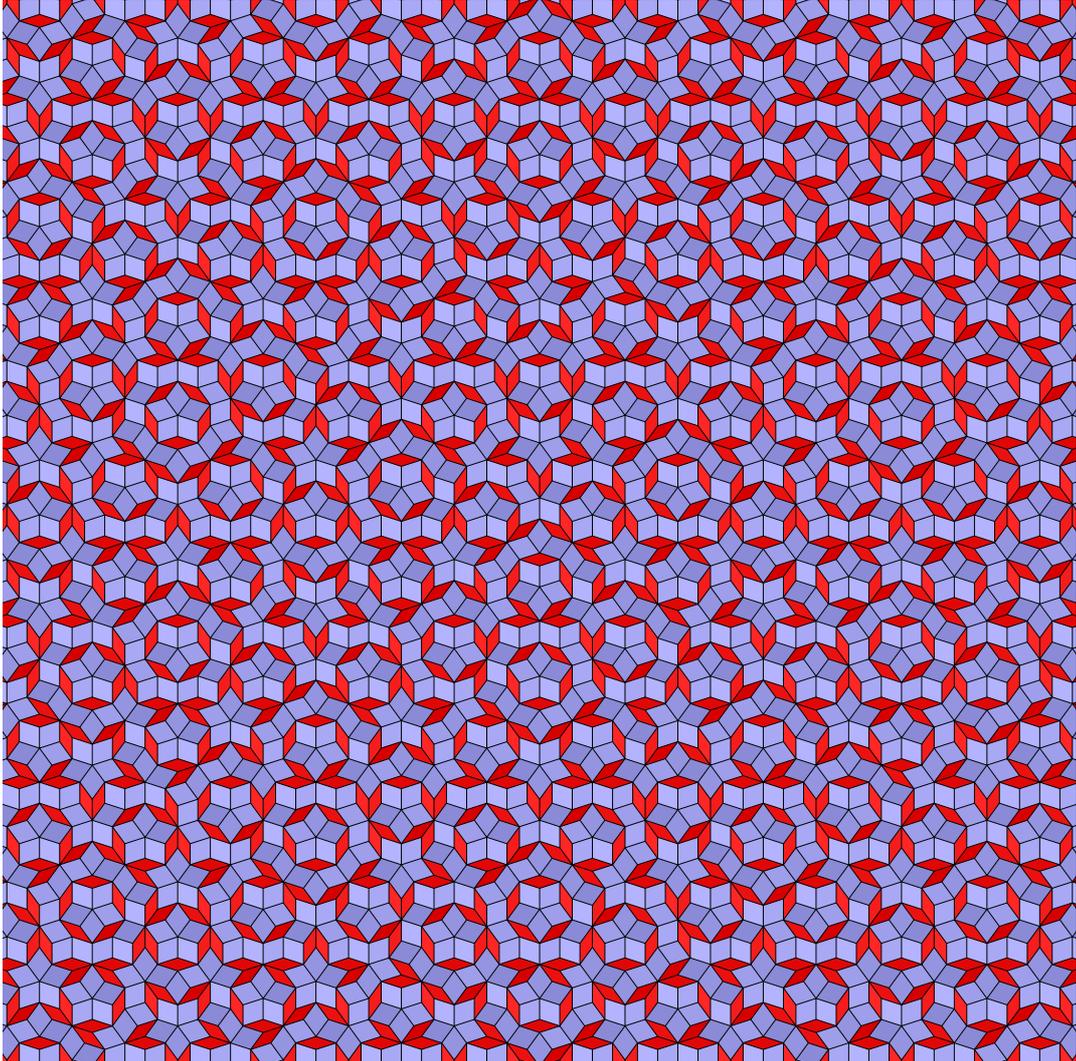
von $I^5 \cap H_k$ sind, d.h. von $e_{i_1} + \dots + e_{i_k}$ für untereinander verschiedene Indizes i_1, \dots, i_k .



Die projizierten Vektoren $c_{i_1} + \dots + c_{i_k}$ sind Eckpunkte von V_k , wenn sie maximale Länge haben (sonst liegen sie im Inneren von V_k); dazu müssen die Summanden c_{i_1}, \dots, c_{i_k} benachbart sein. Demnach ist V_1 die konvexe Hülle der c_i und V_2 die der Summen von je zwei Nachbarvektoren $c_i + c_{i+2}$. Da $\sum_i c_i = 0$, ist $V_3 = -V_2$ und $V_4 = -V_1$; zum Beispiel ist $c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = -c_1$. Der Vergrößerungsfaktor der Abbildung S ist der Goldene Schnitt Φ , der genau ausreicht, um die gewünschte Beziehung (10) für alle Paare $(k, l) \in \{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ zu beweisen. In der Figur ist der kritische Fall $(4, 2)$ dargestellt, wo genau die Gleichheit $-SV_4 = V_2$ gilt. Damit ist $-SM_E$ eine Verfeinerung von $M_{E'}$, und umgekehrt verfeinert M_E das Muster $TM_{E'}$, womit die Inflationseigenschaft gezeigt ist.

Die nachfolgende Abbildung¹⁴ zeigt eins der beiden Penrose-Muster mit einer globalen fünfzähligen Drehsymmetrie (mit $E = E_1 + k(\frac{d}{5} - e_1)$, $k = 1, 2$), die durch Inflation wechselseitig auseinander hervorgehen. Das Drehzentrum liegt in der Figur ganz unten in der Mitte und sieht wie eine Rose mit fünf Blütenblättern aus. Man sieht deutlich ein Inflationmuster (nach dreifacher Inflation), dessen Eckpunkte die aus fünf Rauten zusammengesetzten Sterne sind; sie bilden das zweite Penrose-Muster mit fünfzähliger Drehsymmetrie. Die Eckpunkte eines noch größeren Inflationmuster vom zweiten Typ (nach zwei weiteren Inflationsschritten) werden von den Sternen gebildet, die ganz von einem Kranz breiter Rauten umgeben sind, einem Kranz, der entweder wie ein Fünfeck oder wie ein fünfzackiger Stern geformt ist.

¹⁴<http://www.geom.umn.edu/apps/quasitiler/start.html>



Die Entdeckung dieser Muster, besonders der beiden symmetrischen, durch Roger Penrose 1978 scheint mir von einer ähnlich grundlegenden Bedeutung zu sein wie die Entdeckung der fünf platonischen Körper. Zweifellos gehört sie zu den wichtigen mathematischen Entdeckungen aus neuerer Zeit, die man auch jedem Laien plausibel machen kann. Sie benutzt die Abmessungen des Fünfecks, die zweieinhalb Jahrtausende früher zur Entdeckung der Irrationalität geführt haben, und ist damit ein später Triumph für den armen Hippasos. Sie sollte viel bekannter sein.

E-mail address: eschenburg@math.uni-augsburg.de