Lebesgue-Integration

1995, 2009

J.-H. Eschenburg
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

1. Mängel des Riemannschen Integralbegriffs

Das Riemannsche Integral ist völlig ausreichend, solange man es nur mit der Integration *einer* Funktion zu tun hat. Probleme gibt es erst mit Funktions*folgen*: Nur bei gleichmäßiger Konvergenz wissen wir, dass Limes und Integral vertauschen. Das ist in vielen Situationen nicht ausreichend. Die einfachste solche Situation haben wir bereits bei uneigentlichen Integralen wie $\int_0^1 (1/\sqrt{x})dx$ oder $\int_1^\infty x^2 dx$ angetroffen: Das erste dieser beiden Integrale läßt sich z.B. als $\lim_{k\to\infty} \int f_k$ deuten für die Funktionenfolge $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = 1/\sqrt{x}$ für $1/k < x < 1$ und $f_k(x) = 0$ für $0 < x \le 1/k$. Die Limesfunktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ist nicht beschränkt und daher nicht Riemann-integrierbar, und die Konvergenz $f_k \to f$ ist nicht gleichmäßig; dennoch definieren wir ein "uneigentliches" Integral für f mit dem Wert $\int_0^1 f = \lim \int_0^1 f_k = \frac{1}{2}\sqrt{x}|_0^1 = 1/2$.

Man könnte meinen, dass es nur die Unbeschränktheit der Funktion oder des Integrationsbereiches ist, die hier Probleme macht, aber das ist nicht so, wie das nächste Beispiel zeigt, in dem wir die charakteristische Funktion einer offenen Teilmenge des Intervalls $(0,1)$ betrachten: Es sei $\{q_1, q_2, ...\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen in $(0,1)$ und

$$\begin{aligned} U_k &= \bigcup_{j=1}^{k} (q_j - \epsilon/2^j, q_j + \epsilon/2^j) \cap (0,1) \\ U &= \bigcup_{j=1}^{\infty} (q_j - \epsilon/2^j, q_j + \epsilon/2^j) \cap (0,1) \end{aligned}$$

Dann ist U_k Jordan-messbar bzw. $f_k = 1_{U_k}$ Riemann-integrierbar mit

$$\int f_k = \mu(U_k) \leq \sum_{j=1}^{k} 2\epsilon/2^j \leq 2\epsilon.$$

Aber $f = 1_U = \lim f_k$ ist nicht Riemann-integrierbar bzw. $U = \bigcup U_k$ nicht Jordan-messbar, denn da U dicht in $(0,1)$ ist (U enthält ja alle rationalen Zahlen in $(0,1)$), ist das äußere Maß $\int^* f = \mu^*(U) = 1$, während für das innere Maß gilt:

$$\int_* f = \mu_*(U) = \lim \mu(U_k) \leq 2\epsilon.$$

Beweis: Um das innere Maß zu berechnen, müssen wir U von innen durch endlich viele kompakte Intervalle ausschöpfen. Ist A solch ein kompaktes Intervall mit $A \subset U$, so gibt aber bereits ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A \subset U_k$, denn andernfalls hätte die Folge $(A \setminus U_k)$ von immer kleiner werdenden kompakten Mengen einen nichtleeren Durchschnitt, also $A \setminus U \neq \emptyset$ und somit $A \not\subset U$. Eine beliebige endliche Vereinigung von kompakten Intervallen $A_i \subset U$ ist daher bereits in einem der U_k enthalten und damit $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \mu(U_k)$. Da wir $\mu_*(U)$ durch $\mu(\bigcup_i A_i)$ approximieren, folgt $\mu_*(U) = \lim \mu(U_k)$.

Beiden beschriebenen Situationen ist gemeinsam, dass die Funktionsfolge (f_k) *monoton* gegen f konvergiert ("$f_k \nearrow f$") und die Folge der Integrale $(\int f_k)$ beschränkt und natürlich auch monoton ist ($f_{k+1} \geq f_k \;\Rightarrow\; \int f_{k+1} \geq \int f_k$) und deshalb konvergiert. In einer solchen Situation würden wir gerne auch die Limesfunktion $f = \lim f_k$ integrierbar nennen mit $\int f = \lim \int f_k$. Um dies zu erreichen, muß der Begriff der Integrierbarkeit ausgeweitet werden.

Monotone Konvergenz sollte allerdings auch nicht das entscheidende Kriterium für Integrierbarkeit sein. Die Monotonie geht durch eine geringe Abänderung der f_k bereits verloren, ohne dass sich dies auf die Konvergenz auswirken muß. Das richtige Kriterium ist, anschaulich gesprochen, dass zwischen den Graphen von f_{k+1} und f_k, besser noch zwischen den Graphen von f_{k+m} und f_k (für beliebige m) ein sehr kleines Volumen liegt, wenn k groß wird. In Formeln heißt das:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{k,l\geq N} \int |f_k - f_l| < \epsilon.$$

Eine solche Folge von integrierbaren Funktionen (f_k) werden wir L^1-*Cauchyfolge* nennen, und der ausgeweitete Integralbegriff von Lebesgue wird gerade so gemacht sein, dass die Limesfunktionen solcher Folgen, $f = \lim f_k$, auch integrierbar sind mit $\int f = \lim \int f_k$. Für alle Theorien, die sich mit Funktionenräumen beschäftigen, zum Beispiel Wahrscheinlichkeitstheorie (Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen), Physik (Raum der Wellenfunktionen) oder Variationsrechnung (Raum der Funktionen, auf denen ein gegebenes Funktional minimiert werden soll), ist dieser erweiterte Integralbegriff unentbehrlich.

Wir werden sehen, dass wir zunächst sogar einen Schritt zurück gehen und statt aller Riemann-integrierbaren Funktionen nur die stetigen mit kompaktem Träger betrachten dürfen, also die stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, die außerhalb einer kompakten Menge Null sind. (Der *Träger* einer Funktion ist der Abschluß der Menge, auf der die Funktion nicht Null ist.) Der Vektorraum aller stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $C_0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Die Lebesgue-integrierbaren Funktionen (darunter alle Riemann-integrierbaren) werden genau die Limiten von L^1-Cauchyfolgen in $C_0(\mathbb{R}^n)$ sein. Der Vorteil dieser Einschränkung ist, dass solche L^1-Cauchyfolgen tatsächlich richtige Cauchyfolgen für eine Norm auf $C_0(\mathbb{R}^n)$ sind, nämlich für die *L^1-Norm*

$$\|f\|_1 := \int |f|.$$

Man zeige als Übung, dass dies eine Norm auf $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist (vgl. §1)! Wir werden nun zunächst abstrakt erklären, wie man einen normierten Vektorraum oder allgemeiner einen sog. *Metrischen Raum* durch Hinzunahme aller "Limiten" von Cauchyfolgen *vervollständigen* kann, so wie man die reellen Zahlen durch Limiten von Cauchyfolgen rationaler Zahlen gewinnt. Wir werden zeigen, dass zu jedem abstrakten Limes einer L^1-Cauchyfolge eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Funktion gehört, gegen die eine Teilfolge der Cauchyfolge "fast überall" punktweise konvergiert, und dass insbesondere alle Riemann-integrierbaren Funktionen (mit dem bisherigen Integralwert) dazugehören. Schließlich werden wir sehen, welche Grenzwertsätze in dieser neuen Integrationstheorie gelten. Die hier gegebene Darstellung lehnt sich stark an [Alt] an.

2. Vervollständigung metrischer Räume

Um das Problem der Vervollständigung möglichst einfach und unabhängig von allen speziellen Eigenschaften des Integrals zu beschreiben, führen wir einen sehr abstraken Begriff ein. (Der Sinn der Abstraktion ist ja überhaupt, dass von allen speziellen Eigenschaften, die für das ins Auge gefaßte Phänomen unwesentlich sind und die Sicht nur verstellen, abgesehen werden kann.) Eine *Metrik* oder *Abstandsfunktion* auf einer Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle $x, y, z \in X$ gilt:

- 1. (Positivität) $d(x,y) \geq 0$ mit $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
- 2. (Symmetrie) $d(y,x) = d(x,y)$,
- 3. (Dreiecksungleichung) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Diese drei Axiome enthalten alle Eigenschaften, die ein vernünftiger Abstandsbegriff wie z.B. der Abstand im $\mathbb{R}^n$, $d(x,y) = |x-y|$, haben sollte. Ist X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit einer Norm $\| \ \|$, so ist $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik auf X. Statt $d(x,y)$ wollen wir in Zukunft wieder $|x-y|$ schreiben; das Zeichen "$-$" meint nicht notwendig eine Differenz, sondern der ganze Ausdruck $|x-y|$ soll nur den Funktionswert $d(x,y)$ beschreiben. Eine Menge X mit einer Metrik d auf X heißt auch *metrischer Raum*.

Die Begriffe *Cauchyfolge* und *konvergente Folge* sind wie bisher definiert: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (kurz: (x_k)) eine *Folge* in X, d.h. eine Abbildung $k \mapsto x_k : \mathbb{N} \to X$, so definiert man

$$\begin{aligned} (x_k) \text{ Cauchyfolge} \quad &\iff \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{k,l\geq N}\ |x_k - x_l| < \epsilon, \\ x_k \to x \quad &\iff \quad \forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{k\geq N}\ |x_k - x| < \epsilon. \end{aligned}$$

Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen, aber nicht notwendig umgekehrt.[1] Wenn alle Cauchyfolgen konvergieren, so heißen die Metrik und der metrische Raum *vollständig*.

Ist X nicht vollständig, so wollen wir einen größeren metrischen Raum $\bar{X}$ konstruieren, der vollständig ist, die *Vervollständigung* von X. Das einfachste Modell dafür ist $X = \mathbb{Q}$ (rationale Zahlen) und $\bar{X} = \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl läßt sich z.B. durch einen unendlichen Dezimalbruch $n+0, a_1a_2a_3...$ beschreiben. Dieser stellt eine Cauchyfolge von endlichen Dezimalbrüchen, also rationalen Zahlen $q_k = n+0, a_1...a_k$ dar. Jede reelle Zahl lässt sich also als Cauchyfolge rationaler Zahlen beschreiben, und in diesem Sinne könnten wir $\mathbb{R}$ als die Menge der Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bezeichen. Allerdings läßt sich dieselbe reelle Zahl auf viele verschiedene Weisen durch Cauchyfolgen rationaler Zahlen beschreiben: Dual-, Trial-, Dezimal-, Hexadezimalzahlen usw., andere unendliche Reihen, Kettenbrüche u.a.m. Daher müssen wir alle diejenigen Cauchyfolgen miteinander "identifizieren" (als "gleich" ansehen), die dieselbe reelle Zahl beschreiben; dies ist für zwei Cauchyfolgen (x_k) und (y_k) genau

[1] Allerdings gilt für jede Cauchyfolge (x_k): Falls $x_{k_j} \to x$ für eine Teilfolge (x_{k_j}), so gilt $x_k \to x$, denn $|x_k - x| \leq |x_k - x_{k_j}| + |x_{k_j} - x|$, und der erste Summand auf der rechten Seite ist klein wegen der Cauchy-Eigenschaft von (x_k), der zweite wegen der Konvergenz von (x_{k_j}).

dann der Fall, wenn $|x_k - y_k| \to 0$. Mit anderen Worten, Elemente von $\bar{X}$ sind nicht einzelne Cauchyfolgen, sondern *Äquivalenzklassen* von Cauchyfolgen unter der Äquivalenzrelation

$$(x_k) \sim (y_k) \iff |x_k - y_k| \to 0. \tag{1}$$

In einem beliebigen metrischen Raum X machen wir es ebenso und definieren $\bar{X}$ als die Menge aller Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen in X unter der durch (1) definierten Äquivalenzrelation. Man könnte zwei solche Cauchyfolgen *kofinal* (= "mit gemeinsamem Zielpunkt") nennen. Für zwei Cauchyfolgen $\bar{x} = (x_k)$ und $\bar{y} = (y_k)$ in X definieren wir nun einen "Abstand"

$$|\bar{x} - \bar{y}| := \lim |x_k - y_k|. \tag{2}$$

Nach (1) ist $\bar{x} \sim \bar{y} \iff |\bar{x} - \bar{y}| = 0$, und es ist sofort zu sehen, dass wir damit auf $\bar{X}$ eine Metrik definiert haben (Übung). Der ursprüngliche metrische Raum X kann als Teilmenge von $\bar{X}$ aufgefaßt werden, indem wir jedes $x \in X$ als Äquivalenzklasse der konstanten Folge (x_k) mit $x_k = x$ für alle k auffassen. Nach (2) ist der Abstand von zwei Punkten $x, y \in X$ derselbe in X und $\bar{X}$, daher ist $\bar{X}$ wirklich eine Erweiterung von X.

1. Satz: *$\bar{X}$ ist vollständiger metrischer Raum.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass jede "alte" Cauchyfolge (x_k) mit $x_k \in X$ in $\bar{X}$ konvergiert, nämlich gegen ihre eigene Äquivalenzklasse $\bar{x} = [(x_k)]$. Dazu müssen wir den Abstand $|x_k - \bar{x}|$ in $\bar{X}$ berechnen, d.h. jedes einzelne x_k als konstante Folge auffassen und die Definition (2) anwenden: Da (x_k) Cauchyfolge ist, gilt

$$|x_k - \bar{x}| = \lim_{l \to \infty} |x_k - x_l| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

und somit $x_k \to \bar{x}$ in $\bar{X}$.

Wir müssen aber viel mehr zeigen, nämlich dass *alle* Cauchyfolgen in $\bar{X}$, also auch die vielen neu hinzugekommenen, konvergent sind. Es sei also $(\bar{x}_k)$ eine Cauchyfolge in $\bar{X}$. Jedes Folgenglied $\bar{x}_k$ repräsentiert eine Cauchyfolge $(x_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$ in X. Eine beliebige Cauchyfolge (y_j) in X hat nun folgende Eigenschaft: Sie konvergiert zwar vielleicht nicht wirklich, aber doch "beinahe", d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in X$ mit der Eigenschaft

$$\exists_N \forall_{j \geq N} \ |y_j - y| < \epsilon; \tag{3}$$

nach Definition einer Cauchyfolge können wir z.B. $y = y_m$ für genügend großes m wählen. Fassen wir die Cauchyfolge (y_k) in X wieder als

Repräsentant eines Elements $\bar{y} \in \bar{X}$ auf, so können wir (3) auch so ausdrücken (vgl. (2)):

$$|\bar{y} - y| \leq \epsilon.$$

Somit können wir also auch für unsere $\bar{x}_k \in \bar{X}$ ein $x_k \in X$ finden mit

$$|\bar{x}_k - x_k| \leq 1/k \tag{4}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folgen $(\bar{x}_k)$ und (x_k) in dem metrischen Raum $\bar{X}$ sind damit kofinal, d.h. $|\bar{x}_k - x_k| \to 0$, und insbesondere ist mit $(\bar{x}_k)$ auch (x_k) eine Cauchyfolge in $\bar{X}$.[2]

Da aber (x_k) sogar in X liegt, ist (x_k) in $\bar{X}$ konvergent, wie wir eingangs gesehen haben, nämlich $x_k \to \bar{x}$, wobei $\bar{x} \in \bar{X}$ die Äquivalenzklasse von (x_k) ist. Da die Folgen $(\bar{x}_k)$ und (x_k) kofinal sind, konvergiert auch $(\bar{x}_k)$ gegen $\bar{x}$, wie man sofort sieht (Übung); dies war zu zeigen. □

Bemerkung. Ist X ein normierter Vektorraum, also $|x - y| = \|x - y\|$, so gilt dasselbe für $\bar{X}$ (Übung). In diesem Fall ist also $\bar{X}$ ein vollständiger normierter Vektorraum (*Banachraum*).

3. Limesfunktionen von L^1-Cauchyfolgen

Eine *ϵ-Menge* für ein beliebiges $\epsilon > 0$ ist eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^n$, die in der Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Quadern $A_1, A_2, ...$ mit "Gesamtmaß" $\sum_j \mu(A_j) \leq \epsilon$ enthalten ist. Eine *Nullmenge* (im Sinne von Lebesgue) in $\mathbb{R}^n$ ist eine ϵ-Menge für *jedes* $\epsilon > 0$. Der einzige Unterschied zur früher definierten Riemannschen Nullmenge (vgl. §23) ist, dass jetzt nicht nur endliche, sondern auch abzählbar unendliche Überdeckungen durch Quader mit kleinem Gesamtmaß zugelassen sind. Natürlich sind endliche Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen, aber jetzt eben auch abzählbar unendliche Vereinigungen: Sind $N_1, N_2, ...$ Lebesgue-Nullmengen, so ist auch $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ eine Lebesgue-Nullmenge. Für jedes N_k finden wir nämlich eine Überdeckung durch Quader $A_{k1}, A_{k2}, ...$ mit $\sum_j \mu(A_{kj}) \leq \epsilon/2^k$; alle A_{kj} zusammen überdecken N, und es gilt

$$\sum_{k,j} \mu(A_{kj}) \leq \sum_k \epsilon/2^k \leq \epsilon.$$

Da jeder Punkt natürlich eine Nullmenge bildet, sind also alle abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ Nullmengen, z.B. die Menge der Punkte mit rationalen Koordinaten. Auch $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ und alle m-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $m < n$ sind Nullmengen: Man überdecke z.B. R^{n-1} mit abzählbar vielen $n-1$-dimensionalen Quadern

[2] $|x_k - x_l| \leq |x_k - \bar{x}_k| + |\bar{x}_k - \bar{x}_l| + |\bar{x}_l - x_l| \to 0$ für $k, l \to \infty$.

$B_1, B_2, \ldots$ mit $n-1$-dimensionalem Maß Eins und mache daraus n-dimensionale Quader

$$A_j = B_j \times (-\epsilon/2^j, \epsilon/2^j) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

mit $\mu(A_j) = 2\epsilon/2^j$; das Gesamtmaß aller A_j ist dann 2ϵ.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, ($f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$) wenn f *fast überall*, d.h. außerhalb einer beliebigen Nullmenge, punktweiser Limes einer L^1-Cauchyfolge (f_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist. Für eine L^1-Cauchyfolge (f_k) ist die Folge der Integrale $(\int f_k)$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ (also konvergent), denn für genügend großes k, l ist

$$|\int f_k - \int f_l| \leq \int |f_k - f_l| = \|f_k - f_l\|_1 < \epsilon.$$

Wir können daher einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f \doteq \lim f_k$ ("$\doteq$" heißt "fast überall gleich") den Integralwert

$$\int f := \lim \int f_k$$

zuweisen; wir müssen allerdings noch zeigen, dass dieser Wert wohldefiniert ist, also nur von f und nicht von der Folge (f_k) abhängt. Da $||f_k| - |f_l|| \leq |f_k - f_l|$, ist auch $(|f_k|)$ eine L^1-Cauchyfolge, und daher ist $|f| \doteq \lim |f_k|$ Lebesgue-integrierbar. Dasselbe gilt für $|f_k - f|$ für alle k, und es folgt $\int |f_k - f| = \lim_l \int |f_k - f_l| \leq \epsilon$, also

$$\int |f_k - f| \to 0.$$

Beispiel: Es sei (f_k) eine monoton wachsende Folge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit beschränkter Integralfolge $(\int f_k)$ und es gelte $f_k \nearrow f$. Dann ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge und somit f Lebesgue-integrierbar, denn da $(\int f_k)$ monoton und beschränkt, also Cauchyfolge ist, gilt für genügend große $k \leq l$:

$$\|f_k - f_l\|_1 = \int |f_k - f_l| = \int (f_l - f_k) = \int f_l - \int f_k < \epsilon.$$

Lebesgue-integrierbare Funktionen werden wir auch *L^1-Funkionen* nennen. Diese bilden offensichtlich einen Vektorraum, den wir mit $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wollen.

Wir werden nun das Ergebnis von §2 auf den normierten Vektorraum $X := C_0(\mathbb{R}^n)$ mit der L^1-Norm $\|f\|_1 = \int |f|$ anwenden. Wir wollen aber Äquivalenzklassen von L^1- Cauchyfolgen in X durch L^1-Funktionen ersetzen. Dies ist möglich, wenn wir drei Dinge nachgewiesen haben:

- 1. Jede L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ besitzt eine fast überall punktweise konvergente Teilfolge,
- 2. Sind (f_k) und (g_k) äquivalente (= kofinale) L^1-Cauchyfolgen in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit Teilfolgen, die fast überall punktweise gegen Funktionen f und g konvergieren, so sind f und g *fast überall* gleich.
- 3. Ist (f_k) eine Cauchyfolge, die fast überall gegen Null konvergiert, so gilt $\|f_k\|_1 \to 0$. Wenn also zwei L^1-Cauchyfolgen f_k und $\tilde{f}_k$ fast überall gegen dieselbe Funktion f konvergieren, so sind (f_k) und $(\tilde{f}_k)$ kofinal, $\|f_k - \tilde{f}_k\|_1 \to 0$.

Wir werden dann zwei L^1-Funktionen f und g als gleich ansehen, wenn sie fast überall gleich sind, sich also nur auf einer Nullmenge unterscheiden. Dann können wir nach 1. und 2. jeder Äquivalenzklasse von L^1-Cauchyfolgen bijektiv die Limesfunktion einer Teilfolge zuordnen und erhalten so einen Isomorphismus von $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$ (= Vervollständigung von $C_0(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der L^1-Norm) auf $L^1(\mathbb{R}^n) := \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)/\doteq$. Die Norm auf $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$ geht dabei über in die L^1-Norm $\|f\|_1 = \int |f|$ auf $L^1(\mathbb{R}^n)$, und somit ist $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der L^1-Norm vollständig.

Die Argumente zu 1., 2. und 3. beruhen auf dem folgenden Lemma, das Riemann-integrierbare Funktionen g mit kleiner L^1-Norm kennzeichnet: Die Menge, auf der $|g|$ groß ist, muß klein sein. Ist $T \subset \mathbb{R}^n$, so sei $\complement T := \mathbb{R}^n \setminus T$ die *Komplementmenge.*

2. Lemma 1. *Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit Träger in einem Quader Q und mit $\int |g| < \delta$, so gibt es zu eine Teilmenge $T \subset Q$, die endliche Vereinigung von Teilquadern ist, so dass gilt:*

$$\mu(T) \leq \sqrt{\delta} \quad \text{und} \quad |g| \leq \sqrt{\delta} \text{ auf } \complement T$$

Beweis. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung Z des Quaders Q, so dass

$$0 \leq \sum_{A \in Z} c_A \mu(A) - \int |g| < \epsilon,$$

wobei $c_A := \sup_A |g| \geq 0$ für jedes $A \in Z$. Nach Voraussetzung ist $\int |g| < \delta$. Wir können daher ϵ so klein wählen, dass auch noch $\sum_{A \in Z} c_A \mu(A) < \delta$. Nun sei

$$Z_\delta = \{A \in Z;\ c_A > \sqrt{\delta}\} \text{ und } T = \bigcup \{A;\ A \in Z_\delta\}.$$

T ist also die Vereinigung aller $A \in Z$ mit $c_A > \sqrt{\delta}$. Außerhalb T gilt offensichtlich $|g| \leq \sqrt{\delta}$, und wegen

$$\delta > \sum_{A \in Z} c_A \mu(A) \geq \sum_{A \in Z_\delta} c_A \mu(A) \geq \sum_{A \in Z_\delta} \sqrt{\delta} \cdot \mu(A) = \sqrt{\delta} \cdot \mu(T)$$

folgt $\mu(T) \leq \sqrt{\delta}$. $\square$

Bemerkung. Wir können diesen Beweis auch so deuten, dass wir $|g|$ durch die *Treppenfunktion*

$$t = \sum_{A \in Z} c_A 1_A$$

mit $|g| \leq t$ und $\int t \leq \delta$ ersetzen (denn $\int t$ ist der Ausdruck $\sum_{A \in Z} c_A \mu(A)$). Für

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n;\ t(x) > \sqrt{\delta}\}$$

gilt dann $|g| \leq t \leq \sqrt{\delta}$ auf $\complement T$ und

$$\delta > \int t \geq \int_T t \geq \sqrt{\delta} \cdot \mu(T),$$

also $\mu(T) < \sqrt{\delta}$.

3. Satz 1. *Ist (g_j) eine Folge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|g_j\|_1 \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gibt es eine Teilfolge (g_{j_k}), die außerhalb einer ϵ-Menge (für beliebiges $\epsilon > 0$) gleichmäßig und außerhalb einer Nullmenge punktweise gegen Null konvergiert.*

Beweis. Wir wählen die Teilfolge g_{j_k} so, dass $\|g_{j_k}\|_1 < \delta_k := 1/2^{2k}$. Nach Lemma 1 ist $|g_{j_k}| < \sqrt{\delta_k} = 1/2^k$ außerhalb einer Menge T_k, die endliche Vereinigung von Quadern ist und Maß $\mu(T_k) < \sqrt{\delta_k} = 1/2^k$ hat. Setzen wir nun $S_l = \bigcup_{k \geq l+1} T_k$, so wird S_l von abzählbar vielen Quadern mit Gesamtmaß

$$\sum_{k \geq l+1} \mu(T_k) \leq \sum_{k \geq l+1} 1/2^k = 1/2^l$$

überdeckt, und für jedes $x \in \complement S_l$ gilt $|g_{j_k}(x)| < 1/2^k$ für alle $k > l$. Somit konvergiert g_{j_k} sogar gleichmäßig auf $\complement S_l$. Setzen wir $N = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} S_l$, so ist N Nullmenge, da $N \subset S_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Jedes $x \in \complement N$ liegt im Komplement von mindestens einem S_l, daher gilt $|g_{j_k}| \leq 1/2^k \to 0$ für $k > l$. (Die Konvergenz auf $\complement N$ ist allerdings nicht gleichmäßig, da das l von x abhängt.) $\square$

Bemerkung. Leider folgt aus $\|g_j\|_1 \to 0$ nicht, dass die *ganze* Folge (g_j) fast überall punktweise konvergiert, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt, das ich Jens Heber verdanke: Wir betrachten die (divergente) harmonische Reihe $s_j = \sum_{k=2}^{j} 1/k$ für $j \geq 2$ und setzen $s_1 = 0$. Wir definieren nun $g_j : [0,1] \to \{0,1\}$ als die charakteristische Funktion einer Teilmenge $I_j \subset [0,1]$, die folgende Vereinigung von ein oder zwei abgeschlossenen Intervallen ist: Es sei $[s_j]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich s_j ist. Da $s_j - 1 < s_{j-1} < s_j$, gilt stets einer der folgenden zwei Fälle:

$$\begin{array}{ll} \text{Fall (a)}: & [s_j] \le s_{j-1} \le s_j, \\ \text{Fall (b)}: & [s_j] - 1 < s_{j-1} < [s_j] \le s_j. \end{array}$$

Wir setzen dann

$$\begin{array}{rcl} I_j & = & [s_{j-1} - [s_j], s_j - [s_j]] \ \text{ im Fall (a)}, \\ & = & [0, s_j - [s_j]] \cup [s_{j-1} - ([s_j] - 1), 1] \ \text{ im Fall (b)}. \end{array}$$

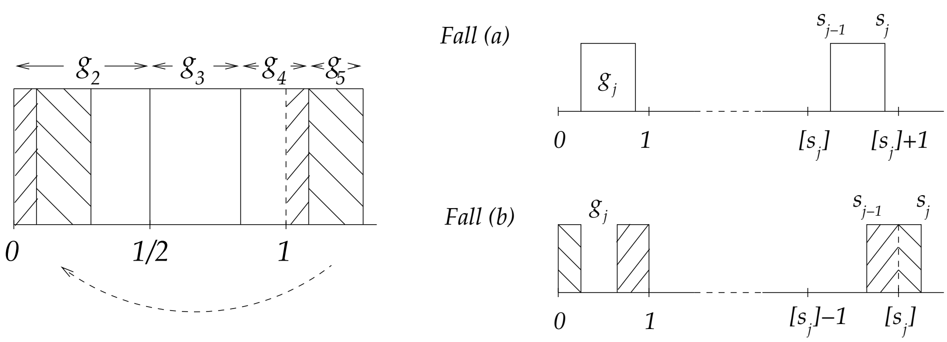

Abbildung 1

Die lückenlos aneinandergrenzenden Intervalle $[s_{j-1}, s_j]$ sind auf diese Weise maßerhaltend auf das Einheitsintervall transplantiert worden (Abb. 55). Es gilt

$$\int |g_j| = \int g_j = \int 1_{[s_{j-1}, s_j]} = s_j - s_{j-1} = 1/j \to 0,$$

aber jeder Punkt $x \in [0,1]$ liegt in unendlich vielen der I_j, so dass $(g_j(x))$ für unendlich viele Indizes j den Wert Eins hat und daher nicht gegen Null konvergiert.

Das Beispiel hat allerdings noch den Schönheitsfehler, dass die Funktionen g_j nicht stetig sind. Dies läßt sich aber leicht beheben: Ist $[a_j, b_j]$ eine der (zwei möglichen) Zusammenhangskomponenten von I_j, so ersetzen wir dort die charakteristische Funktion g_j durch die stetige Funktion

$$\begin{array}{rcll} \tilde{g}_j(x) & = & (x - a_j)/\epsilon_j & \text{für } a_j \le x \le a_j + \epsilon_j \\ & = & 1 & \text{für } a_j + \epsilon_j \le x \le b_j - \epsilon_j \\ & = & (b_j - x)/\epsilon_j & \text{für } b_j - \epsilon_j \le x \le b_j \end{array}$$

(Abb. 56), wobei $\epsilon_j = \epsilon/2^j$ für beliebig kleines $\epsilon > 0$. Das Gesamtmaß aller Intervalle, auf denen sich irgendein $\tilde{g}_j$ von g_j unterscheidet, ist somit höchstens $\sum_j 4 \cdot \epsilon/2^j = 4\epsilon$. Das Komplement dieser Menge ist also sicher keine Nullmenge, und dort gilt nach wie vor, dass die Folge $(\tilde{g}_j(x)) = (g_j(x))$ keine Nullfolge ist.

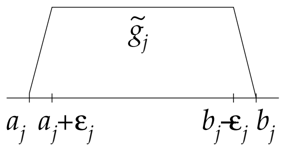

Abbildung 2

4. Korollar *Es seien (f_i) und $(\tilde{f}_j)$ kofinale L^1-Cauchyfolgen in $C_0(\mathbb{R}^n)$ (d.h. $\|\tilde{f}_k - f_k\|_1 \to 0$), für die jeweils eine Teilfolge fast überall punktweise konvergiert: $f_{i_k} \to f$ auf $\complement N$ und $\tilde{f}_{j_k} \to \tilde{f}$ auf $\complement \tilde{N}$ für Nullmengen $N, \tilde{N}$. Dann gilt $\tilde{f} \doteq f$.*

Beweis. Wir setzen $g_k = \tilde{f}_{j_k} - f_{i_k}$. Dann ist (g_k) eine L^1-Nullfolge, denn

$$\|g_k\|_1 \leq \|\tilde{f}_{j_k} - f_{i_k}\|_1 + \|f_{i_k} - f_{j_k}\|_1 \to 0.$$

Nach Satz 1 gibt es also eine Nullmenge $\bar{N}$ und eine Teilfolge (g_{k_l}) mit $g_{k_l} \to 0$ auf $\complement \bar{N}$. Da

$$g_{k_l} = \tilde{f}_{j_{k_l}} - f_{i_{k_l}}$$

und die rechte Seite auf $\complement(\tilde{N} \cup N)$ gegen $\tilde{f} - f$ konvergiert, gilt $\tilde{f} = f$ auf $\complement(\bar{N} \cup \tilde{N} \cup N)$. $\square$

5. Satz 2. *Jede L^1-Cauchyfolge (f_j) in $C_0(\mathbb{R}^n)$ besitzt eine Teilfolge, die außerhalb einer ϵ-Menge (für beliebiges $\epsilon > 0$) gleichmäßig und außerhalb einer Nullmenge punktweise gegen eine Funktion f konvergiert.*

Beweis. Folgende Vorbemerkung (Erinnerung) könnte nützlich sein: Jede Folge (a_k) in $\mathbb{R}$ kann ich bekanntlich auch als Partialsummenfolge einer Reihe schreiben: $a_k = a_0 + \sum_{j=1}^k d_k$ mit $d_k = a_k - a_{k-1}$ für alle $k \geq 1$. Besitzt $\sum_j d_j$ eine konvergente Majorante, also $|d_j| \leq c_j$ mit $\sum c_j < \infty$, z.B. $c_j = 1/2^j$, so ist die Reihe $\sum_j d_j$ und damit die Folge (a_k) konvergent.

Der Beweis selbst ist sehr ähnlich zu dem von Satz 1. Wir finden eine Teilfolge (f_{j_k}), so dass für die Differenzen $d_k = f_{j_k} - f_{j_{k-1}}$ gilt:

$$\|d_k\|_1 \leq \delta_k := 1/2^{2k}.$$

Nach Lemma 1 folgt wieder $|d_k| \leq \sqrt{\delta_k} = 1/2^k$ auf $\complement T_k$, wobei T_k endliche Vereinigung von Quadern ist mit $\mu(T_k) \leq \sqrt{\delta_k} = 1/2^k$. Nach der Vorbemerkung ist somit (f_{j_k}) gleichmäßig konvergent auf $\complement S_l$ mit

$S_l = \bigcup_{k>l} T_k$. Somit konvergiert (f_{j_k}) punktweise auf $\bigcup_l (\complement S_l) = \complement N$, wobei $N = \bigcap_l S_l$ Nullmenge ist (vgl. Beweis von Satz 1). $\square$

6. Satz 3. *Ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$, so dass f_k fast überall gegen Null geht, so gilt $\|f_k\|_1 \to 0$.*

Beweis. Nach Satz 2 wissen wir: Nach Übergang zu einer Teilfolge[3] konvergiert (f_k) punktweise außerhalb einer Nullmenge N und gleichmäßig außerhalb einer ϵ-Menge gegen eine Funktion f, und nach Voraussetzung außerhalb einer anderen Nullmenge N' gegen 0. Deshalb ist $f = 0$ außerhalb der Nullmenge $N \cup N'$, und somit konvergiert (f_k) gleichmäßig außerhalb einer ϵ-Menge S gegen Null.

Leider kann man damit noch nicht $\int |f_l| \xrightarrow{l\to\infty} 0$ zeigen: Zwar können wir $|f_l| \le \epsilon$ auf $\complement S$ und $\mu(S) < \epsilon'$ annehmen, aber das reicht noch nicht:

$$\int |f_l| = \int_{\complement S} |f_l| + \int_S |f_l| \le \epsilon\mu(\complement S) + \epsilon' \sup |f_l|,$$

und wir können weder $\mu(\complement S)$ (Problem a) noch $\sup |f_l|$ für $l \to \infty$ (Problem b) abschätzen.

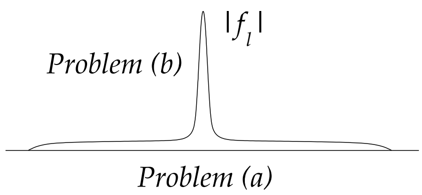

Abbildung 3

Beide Probleme werden im Folgenden dadurch gelöst, dass $\|f_k - f_l\|_1 = \int |f_k - f_l|$ beliebig klein wird: Zu festem $\epsilon > 0$ finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\int |f_k - f_l| < \epsilon$ für alle $l > k$. Der Träger von diesem f_k ist in einem Quader Q_k enthalten. Wir spalten $\int |f_l|$ auf in die Integrale über Q_k und $\complement Q_k$. Da $f_k = 0$ auf $\complement Q_k$, kann ich im zweiten Integral den Integranden $|f_l|$ durch $|f_l - f_k|$ ersetzen:

$$\int |f_l| = \int_{Q_k} |f_l| + \int_{\complement Q_k} |f_l - f_k| \le \int_{Q_k} |f_l| + \epsilon.$$

Jetzt erst wählen wir eine ϵ'-Menge S, außerhalb derer die Konvergenz gleichmäßig ist, und wir spalten $\int_{Q_k} |f_l|$ wieder nach S und $\complement S$ auf:

$$\int_{Q_k} |f_l| \le \int_S |f_l| + \int_{Q_k \setminus S} |f_l|.$$

[3]Teilfolgen sind bei Cauchyfolgen kein Problem: Wenn wir $\|f_{k_j}\|_1 \to 0$ zeigen können, dann gilt auch $\|f_k\|_1 \to 0$, vgl. Fußnote 1.

Wir wählen nun l so groß, dass $|f_l| < \epsilon/\mu(Q_k)$ auf $\mathsf{C}S$, was ja wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathsf{C}S$ möglich ist. Dann ist der zweite Summand $< \epsilon$. Auf den ersten Summanden wenden wir noch einmal den Trick mit f_k an:

$$\int_S |f_l| \leq \int_S |f_k| + \int_S |f_l - f_k|,$$

und wieder kann der zweite Summand durch ϵ abgeschätzt werden. Für den ersten Summanden aber gilt:

$$\int_S |f_k| \leq \mu(S) \sup |f_k| \leq \epsilon' \sup |f_k|,$$

und wenn wir $\epsilon' = \epsilon / \sup |f_k|$ wählen, so ist auch dieser Summand $< \epsilon$. Setzen wir alles zusammen, dann sehen wir

$$\|f_l\|_1 = \int |f_l| < 4\epsilon$$

für genügend großes l, also folgt $\|f_l|_1 \to 0$ für $l \to \infty$. □

Als Folgerung erhalten wir die Eindeutigkeit des Lebesgue-Integrals: Ist $f \doteq \lim f_k \doteq \lim g_k$ für zwei L^1-Cauchyfolgen (f_k) und (g_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$, so folgt $\lim(f_k - g_k) \doteq 0$ und damit $\|f_k - g_k\|_1 \to 0$ nach dem obigen Satz, also sind (f_k) und (g_k) kofinal bezüglich der L^1-Norm, und es folgt $\lim \int f_k = \lim \int g_k$. Insbesondere ist $\|f\|_1 = \int |f|$ für jedes $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ erklärt, und $\|f\| = 0 \iff f \doteq 0$. Somit definiert $\| \ \|_1$ eine Norm auf $L^1(\mathbb{R}^n) = \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)/\doteq$.

Wir können die bisherigen Ergebnisse in folgendem Satz zusammenfassen:

7. Satz 4. *Die Abbildung, die jeder L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ die Limesfunktion einer fast überall konvergenten Teilfolge zuordnet, definiert einen linearen Norm-erhaltenden Isomorphismus der Vervollständigung $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$ von $C_0(\mathbb{R}^n)$ auf $L^1(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere ist $L^1(\mathbb{R}^n)$ vollständig, und der L^1-Limes einer L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist die Limesfunktion einer fast überall konvergenten Teilfolge.*

Beweis. Nach Satz 2 gibt es stets eine fast überall konvergente Teilfolge. Die Wohldefiniertheit (Unabhängigkeit von der Wahl der L^1-Cauchyfolge unter allen kofinalen) und die Linearität folgen aus dem Korollar zu Satz 1: Jede Teilfolge einer Cauchyfolge (f_k) ist kofinal zu (f_k), und wenn $f \doteq \lim f_k$ und $g \doteq \lim g_k$, so ist $f + g \doteq \lim(f_k + g_k)$ und $\alpha f \doteq \lim \alpha f_k$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Die Injektivität folgt aus Satz 3. Die Surjektivität und die Norm-Treue ergibt sich aus der Definition von $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$

und des Integrals auf $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$: Eine Lebesgue-integrierbare Funktion f ist fast überall Limes einer L^1-Cauchyfolge (f_k), und da auch $(|f_k|)$ eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist, gilt

$$\|f\|_1 = \int |f| = \lim \int |f_k| = \lim \|f_k\|_1 = \|\bar{f}\|_1,$$

wobei $\bar{f}$ wie in §2 die Äquivalenzklasse der Cauchyfolge (f_k) als Element der Vervollständigung $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$ bezeichnet. □

8. Satz 5. *(Monotonie des Lebesgue-Integrals) Sind $f, g \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $f \geq g$ fast überall, so gilt $\int f \geq \int g$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $g \equiv 0$ ist, indem wir nötigenfalls f durch $f - g$ ersetzen. Es sei (f_k) eine Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \to f \geq 0$ fast überall. Leider folgt daraus noch nicht $f_k \geq 0$ (dann könnten wir sofort $\int f \geq 0$ schließen wegen $0 \geq \int f_k \to \int f$), aber wir können f_k durch seinen positiven Anteil $f_k^+ \geq 0$ ersetzen:

$$f_k^+ = \max(f_k, 0) = \frac{1}{2}(f_k + |f_k|).$$

Die Funktionen f_k^+ liegen immer noch in $C_0(\mathbb{R}^n)$ und bilden wegen $|f_k^+ - f_l^+| \leq |f_k - f_l|$ auch eine L^1-Cauchyfolge, und da $f \geq 0$ außerhalb einer Nullmenge, gilt dort auch $|f_k^+ - f| \leq |f_k - f| \to 0$. Nach Satz 3 folgt $\|f_k^+ - f\|_1 \to 0$ und damit $\int f = \lim \int f_k^+ \geq 0$, denn aus $f_k^+ \geq 0$ folgt $\int f_k^+ \geq 0$ (Eigenschaft des Riemann-Integrals). □

4. Riemann- und Lebesgue-Maß

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Lebesgue-messbar*, wenn die charakteristische Funktion 1_M Lebesgue-integrierbar ist, und $\mu_L(M) := \int 1_M$ heißt das *Lebesgue-Maß* von M. Wir wollen in diesem Abschnitt einige Lebesgue-messbare Mengen kennenlernen, insbesondere die beschränkten offenen und abgeschlossenen Mengen, und zeigen, dass das Lebesgue-Maß mit dem Riemann- oder Jordan-Maß übereinstimmt, wenn dieses definiert ist. Wir werden dazu die charakterische Funktion einer beschränkten abgeschlossenen Menge A oder offenen Menge U im $\mathbb{R}^n$ monoton durch $C_0(\mathbb{R}^n)$-Funktionen approximieren (vgl. Abb. 58).

Hierzu führen wir de *Abstandsfunktion von einer abgeschlossenen Menge* ein. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene Teilmenge, so sei $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} |x - a|.$$

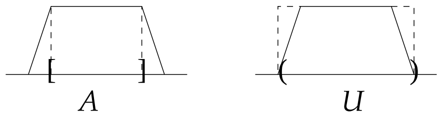

ABBILDUNG 4

Das Infimum ist in Wahrheit ein Minimum, also $d_A(x) = |x - a_x|$ für ein $a_x \in A$, denn für festes $x \in \mathbb{R}^n$ nimmt die stetige Funktion $a \mapsto |x - a|$ auf der kompakten Menge $A \cap K_R(x)$ ein Minimum an, wobei $R = |x - a_0|$ für irgend ein $a_0 \in A$; dieser minimale Wert ist auch das Minimum von $|x - a|$ für *alle* $a \in A$, denn für $a \in A \setminus K_R(x)$ ist $|x - a|$ ja ohnehin größer als $|x - a_0|$. Der Punkt $a_x \in A$, wo das Minimum angenommen wird, heißt der *zu x nächstliegende Punkt in A*.

Die so definierte Funktion d_A ist stetig, sogar Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante Eins (*schwach kontrahierend*), denn für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} d_A(x) &\leq |x - a_y| \leq |x - y| + |y - a_y| = |x - y| + d_A(y), \\ d_A(y) &\leq |y - a_x| \leq |y - x| + |x - a_x| = |y - x| + d_A(x), \end{aligned}$$

wobei a_x und a_y die zu x und y nächstliegenden Punkte in A sind. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben die gewünschte Lipschitz-Abschätzung

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Offensichtlich gilt außerdem

$$d_A(x) = 0 \iff x \in A.$$

Ist nun $\chi = 1_A$ die charakteristische Funktion einer beschränkten abgeschlossenen Menge A, so approximieren wir diese durch die Funktionen

$$1_k^+ = \alpha_k \circ d_A,$$

wobei $\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $\alpha_k \equiv 1$ auf $(-\infty, 0]$ und $\alpha_k \equiv 0$ auf $[1/k, \infty)$ sowie $\alpha_k(x) = 1 - kx$ für $x \in [0, 1/k]$ (s. Abb. 59).

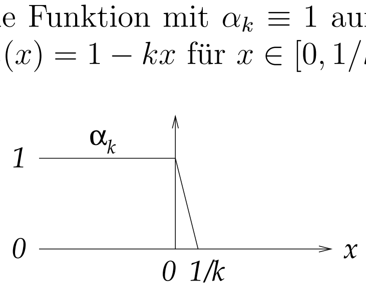

ABBILDUNG 5

Da α_k und d_A stetig sind, ist auch 1_k^+ stetig, und alle 1_k^+ sind Null außerhalb der Menge $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n;\ d_A(x) \leq 1\}$; diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt, nämlich im Ball $B_{R+1}(0)$ enthalten, wenn $A \subset B_R(0)$. Also ist $1_k^+ \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Außerdem gilt $1_k^+ \searrow \chi$, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ sind entweder alle $1_k^+(x)$ Null oder alle Eins oder der Wert $1_k^+(x)$ springt ab irgendeinem k von Eins auf Null (nämlich falls $0 < d_A(x) < 1$). Die Integralfolge $\int 1_k^+$ ist uniform beschränkt durch das Maß eines Quaders, der A_1 enthält, also ist (wegen der Monotonie) (1_k^+) eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ (vgl. S. 2) und somit $\chi \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mu_L(A) = \int \chi = \lim \int 1_k^+.$$

Ist A zusätzlich Jordan-messbar, so ist der Rand ∂A eine Jordan-Nullmenge. Nur in der Nähe des Randes unterscheiden sich aber die Riemann-integrierbaren Funktionen 1_k^+ und χ, nämlich auf der Menge

$$B_k = \{x \in \mathbb{R}^n;\ 0 < d_A(x) < 1/k\}.$$

Überdecken wir die Nullmenge ∂A mit offenen Quadern $Q_1, ..., Q_N$ mit Gesamtmaß $\mu(Q_1) + ... + \mu(Q_N) < \epsilon$, so überdecken diese Quader auch B_k für genügend großes k. Andernfalls gäbe es nämlich für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_k \in B_k$, der in keinem der Q_i enthalten ist; die Folge (x_k) läge in der kompakten Menge A_1 und besäße daher eine konvergente Teilfolge $x_{k_j} \to x$. Auch der Limespunkt x wäre in keinem der Q_i enthalten, da $\mathbb{R}^n \setminus Q_i$ abgeschlossen ist, aber andererseits wäre $d_A(x) = \lim d_A(x_{k_j}) = 0$, also wäre $x \in A$ und damit $x \in \partial A$, denn x ist ja Limes einer Folge in $\mathbb{R}^n \setminus A$. Dann wäre x aber doch in einem der Q_i enthalten, da diese ja ∂A überdecken, Widerspruch! Da $0 \leq 1_k^+ - \chi \leq 1$, erhalten wir für die Riemann-Integrale

$$|\int 1_k^+ - \int \chi| = \int |1_k^+ - \chi| \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) < \epsilon$$

und damit konvergiert $\int 1_k^+$ auch gegen das Riemann-Integral von χ, womit $\mu(A) = \mu_L(A)$ gezeigt ist.

Ist andererseits $U \subset \mathbb{R}^n$ eine *offene* und beschränkte Teilmenge, so benutzen wir die Abstandsfunktion von der Komplementmenge $\complement U = \mathbb{R}^n \setminus U$, die ja abgeschlossen ist. Die Approximation der charakteristischen Funktion $\chi = 1_U$ ist diesmal

$$1_k^- = \beta_k \circ d_{\complement U}$$

mit $\beta_k := 1 - \alpha_k$ (Abb. 60). Dies Funktion ist Null außerhalb von U, da dort $d_{\complement U}$ verschwindet, und ist Eins auf einer etwas kleineren Teilmenge

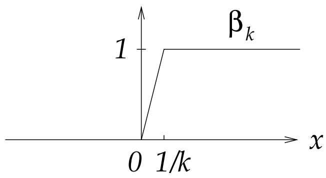

Abbildung 6

von U. Wieder ist $1_k^- \in C_0(\mathbb{R}^n)$, und diesmal gilt $1_k^- \nearrow \chi$, wobei die Integralfolge durch das Maß jedes Quaders, der U enthält, beschränkt ist. Also ist χ wieder Limes einer L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ und somit Lebesgue-integrierbar mit $\mu_L(U) = \int \chi = \lim \int 1_k^-$, und mit derselben Begründung wie vorher gilt $\mu(U) = \mu_L(U)$, falls U Jordan-messbar und damit ∂U eine Jordan-Nullmenge ist. Wir haben also gezeigt:

9. Satz. *Jede beschränkte offene oder abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, und falls M auch Jordan-messbar ist, stimmen das Lebesgue-Maß und das Jordan-Maß überein.* □

Eine unmittelbare Folgerung ist, dass alle Quader auch Lebesgue-messbar sind mit demselben Maß, denn jeder Quader unterscheidet sich von seinem Abschluß nur durch eine Jordan-Nullmenge, die erst recht eine Lebesgue-Nullmenge ist; die charakteristischen Funktionen des Quaders und seines Abschlusses sind also "fast überall" gleich und haben daher gleiches Lebesgue-Integral. Damit sehen wir auch, dass alle Treppenfunktionen (endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von Quadern) Lebesgue-integrierbar mit dem bekannten Integralwert sind. Weil alle Riemann-integrierbaren Funktionen sich durch Treppenfunktionen (im L^1-Sinn) approximieren lassen, folgt daraus auch, dass jede Riemann-integrierbare Funktion auch Lebesgue-integrierbar mit demselben Integralwert ist, wie wir im nächsten Abschnitt noch genauer sehen werden. Eine andere Folgerung, die wir ebenfalls in allgemeinerem Rahmen sehen werden, ist die Lebesque-messbarkeit von unendlichen Vereinigungen von Quadern, wie sie in den Beweisen von §3 immer wieder vorkamen.

Bemerkung. Wir können den Satz leicht noch etwas verbessern: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen oder offen, so gilt

$$\begin{aligned} \mu_L(M) &= \mu^*(M) \quad \text{falls } M \text{ abgeschlossen,} \\ \mu_L(M) &= \mu_*(M) \quad \text{falls } M \text{ offen,} \end{aligned}$$

wobei $\mu^*(M)$ das äußere und $\mu_*(M)$ das innere Maß bezeichnen (vgl. §22, S. 77f Analysis-Skript). Dies sieht man so: Ist M eine beliebige beschränkte Menge (in einem Quader Q), so konstruieren wir zu jedem $\epsilon > 0$ jeweils eine offene und eine abgeschlossene Jordan-messbare Menge T_+ und T_- (endliche Vereinigung von Quadern) mit

$$T_+ \supset M \supset T_-, \quad \mu(T_+) \approx_\epsilon \mu^*(M), \quad \mu(T_-) \approx_\epsilon \mu_*(M)$$

folgendermaßen: Zu einer genügend feinen Zerlegung Z von Q wählen wir T_+ und T_- in der Form

$$T_+ = \bigcup_{P \in Z_+(M)} P_+, \quad T_- = \bigcup_{P \in Z_-(M)} P_-$$

wobei P_+ ein etwas größerer offener Quader mit $\bar{P} \subset P_+$ und P_- ein etwas kleinerer abgeschlossener Quader mit $P_- \subset P$ ist. Ist nun M abgeschlossen, so nimmt die Abstandsfunktion $d_{\complement T_+}$ auf der kompakten Menge M ein Minimum $\delta > 0$ an. Für $1/k < \delta$ ist daher

$$1_{T_+} \geq 1_k^+ \geq 1_M$$

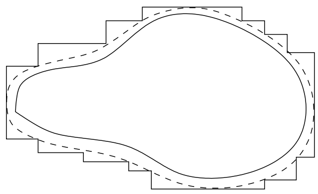

Abbildung 7

(Abb. 61) und somit gilt

$$\mu^*(M) = \lim_{k \to \infty} \int 1_k^+ = \mu_L(M).$$

Ist M dagegen offen, so nimmt $d_{\complement M}$ auf der kompakten Menge T_- einen Minimalwert $\delta > 0$ an, also gilt für $1/k < \delta$

$$1_{T_-} \leq 1_k^- \leq 1_M$$

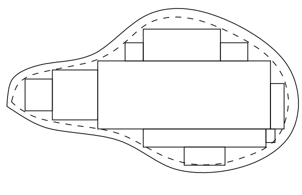

Abbildung 8

(Abb. 62) und damit

$$\mu(M) = \lim_{k\to\infty} 1_k^- = \mu_L(M).$$

5. Konvergenzsätze

Wir haben gesehen, dass $L^1(\mathbb{R}^n)$ vollständig ist, d.h. jede L^1-Cauchyfolge (f_k) in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert im L^1-Sinn gegen eine integrierbare Funktion f, d.h. $\|f_k - f\|_1 \to 0$. Wir werden dafür $f_k \xrightarrow{L^1} f$ schreiben. Sind die Funktionen (f_k) stetig mit kompaktem Träger, also in $C_0(\mathbb{R}^n)$, so folgt nach Satz 2 in §3 nach Übergang zu einer Teilfolge auch $f_k \dot{\to} f$, also punktweise Konvergenz fast überall. Diese Aussage wollen wir jetzt auch für beliebige L^1-Cauchyfolgen in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ zeigen.

10. Satz 1. *Ist (f_k) eine Folge in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \xrightarrow{L^1} f$, so folgt $f_{k_l} \dot{\to} f$ für eine Teilfolge (f_{k_l}).*

Beweis. Jede L^1-Funktion ist L^1-Limes von $C_0(\mathbb{R}^n)$-Funktionen. Es gibt also Folgen $(\phi_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\psi_l \xrightarrow{L^1} f, \quad \phi_{kl} \xrightarrow{L^1} f_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2 gibt es nach Übergang zu Teilfolgen ϵ-Mengen S'_l, S''_{kl} zu $\epsilon := 1/2^l$ mit

$$\begin{aligned} |\psi_l - f| &\le 1/2^l \text{ auf } \complement S'_l, \\ |\phi_{kl} - f_k| &\le 1/2^l \text{ auf } \complement S''_{kl}. \end{aligned} \tag{1}$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir ein festes $l \ge k$, das der letzteren Bedingung genügt, und setzen

$$\phi_k := \phi_{kl}, \quad S''_k := S''_{kl}$$

für dieses l. Dann gilt jedenfalls $\mu_L(S''_k) < 1/2^k$ und

$$|\phi_k - f_k| \le 1/2^k \text{ auf } \complement S''_k. \tag{2}$$

Wir dürfen weiterhin ohne Einschränkung zusätzlich annehmen, dass etwa

$$\|\phi_k - f_k\|_1 < 1/2^{2k+1}, \quad \|\psi_k - f\|_1 < 1/2^{2k+1},$$

so dass $\|\phi_k - \psi_k\|_1 < 1/2^{2k}$ und somit nach Lemma 1, §3 gilt:

$$|\phi_k - \psi_k| \le 1/2^k \text{ auf } \complement T_k, \tag{3}$$

wobei T_k eine Jordan-messbare Menge (endliche Vereinigung von Quadern) ist mit $\mu(T_k) < 1/2^k$. Aus (1), (2), (3) folgt

$$|f_k - f| \le |f_k - \phi_k| + |\phi_k - \psi_k| + |\psi_k - f| \le 3/2^k$$

außerhalb der Menge $S_k := S'_k \cup S''_k \cup T_k$, die von Quadern mit Gesamtmaß $\leq 3/2^k$ überdeckt wird ("$3/2^k$-Menge"). Setzen wir nun $R_j := \bigcup_{k>j} S_k$, so gilt $|f_k - f| < 3/2^k$ auf $\complement R_j$ für *alle* $k > j$ gleichzeitig, und R_j wird immer noch von Quadern mit Gesamtmaß $\leq \sum_{k>j} 3/2^k = 3/2^j$ überdeckt. Dann ist $N = \bigcap_j R_j$ eine Nullmenge, da $N \subset R_j$ für alle j, und $f_k(x) \to f(x)$ für alle $x \in \complement N$. □

11. Korollar. *Ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \dot{\to} f$, so ist $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ und $f_k \xrightarrow{L^1} f$.*

Beweis. Wegen der Vollständigkeit gibt es $\tilde{f} \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \xrightarrow{L^1} \tilde{f}$, und nach Satz 1 folgt $f_{k_j} \dot{\to} \tilde{f}$, also $\tilde{f} \doteq f$ und die Behauptung folgt. □

Nachdem wir nun gesehen haben, dass L^1-Konvergenz und punktweise Konvergenz außerhalb einer Nullmenge für L^1-Cauchyfolgen im wesentlichen dasselbe sind, können wir die beiden wichtigsten Konvergenzsätze für das Lebesgue-Integral zeigen: Den Satz von Levi über die monotone Konvergenz und den Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz.

12. Satz 2. (B. Levi) *(Monotone Konvergenz) Es sei (f_k) eine monotone Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit beschränkter Integralfolge. Dann ist (f_k) fast überall konvergent, und $f :\doteq \lim f_k$ ist Lebesgue-integrierbar mit $f_k \xrightarrow{L^1} f$; insbesondere ist $\int f = \lim \int f_k$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei die Folge (f_k) monoton wachsend, also $f_k \leq f_{k+1}$. g auch die Folge $(\int f_k)$ monoton wachsend (vgl. Satz 5 in §3) und nach Voraussetzung beschränkt, also an jeder Stelle eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Damit ist (f_k) eine L^1-Cauchyfolge, denn für $k < l$ gilt wegen $f_k \leq f_l$:

$$\|f_l - f_k\|_1 = \int (f_l - f_k) = \int f_l - \int f_k < \epsilon,$$

wenn k genügend groß ist. Wegen der Vollständigkeit von $L^1(\mathbb{R}^n)$ gibt es $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^N)$ mit $f_k \xrightarrow{L^1} f$, und nach Satz 1 folgt $f_k \dot{\to} f$. Insbesondere gilt $\int f_k \to \int f$, denn

$$|\int f_k - \int f| \leq \int |f_k - f| = \|f_k - f\|_1 \to 0.$$

□

13. *Folgerung 1. Ist (S_k) eine monoton wachsende Folge von Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$, also $S_k \subset S_{k+1}$ für alle k, so dass die Folge* *der Maße* $(\mu_L(S_k))$ *beschränkt ist, so ist* $S = \bigcup_k S_k$ *Lebesgue-messbar mit* $\mu_L(S) = \lim \mu_L(S_k)$.

Beweis. Die Funktionen $f_k := 1_{S_k}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2 mit $f_k \to f := 1_S$. □

14. *Folgerung 2. Jede Riemann-integrierbare Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *ist auch Lebesgue-integrierbar, und Riemann- und Lebesgue-Integral stimmen überein.*

Beweis. Nach Definition der Riemann-Integrierbarkeit hat f kompakten Träger, der in einem Quader Q enthalten ist, und es gibt monotone Folgen von Treppenfunktionen $t_k^- \nearrow$, $t_k^+ \searrow$ (zu immer feineren Unterteilungen von Q) mit

$$\begin{aligned} t_k^- &\leq f \leq t_k^+, \\ \|t_k^+ - t_k^-\|_1 &= \int (t_k^+ - t_k^-) \to 0. \end{aligned}$$

(Wir sahen schon in §4, dass Treppenfunktionen Lebesgue-integrierbar sind mit dem "richtigen" Integralwert.) Nach Satz 1 folgt daraus $t_k^+ - t_k^- \stackrel{\cdot}{\to} 0$ und daher $t_k^- \stackrel{\cdot}{\to} f$ und $t_k^+ \stackrel{\cdot}{\to} f$. Nach Satz 2 ist $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit Lebesque-Integral $\int f = \lim \int t_k^-$, und dieser Wert ist gleich dem Riemann-Integral für f. □

15. Satz 4. (H.Lebesgue) *(Majorisierte Konvergenz) Es sei* (f_k) *eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit* $f_k \stackrel{\cdot}{\to} f$, *und es gebe eine Funktion* $F \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $|f_k| \leq F$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ *und* $f_k \xrightarrow{L^1} f$; *insbesondere folgt* $\int f = \lim \int f_k$.

Beweis. Wir machen die Konvergenz monoton, um den Satz von Levi anwenden zu können. Dazu definieren wir $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$g_k(x) = \sup\{f_l(x);\ l \geq k\} \leq F(x)$$

Offensichtlich ist die Folge $(g_k(x))$ monoton fallend, da das Supremum über eine immer kleiner werdende Menge gebildet wird. Der Limes dieser Folge ist der Limes Superior der Folge $(f_k(x))$; da diese Folge für fast alle x konvergiert, gilt

$$\lim_k g_k = \limsup f_k \doteq \lim f_k \doteq f.$$

Um den Satz von Levi anwenden zu können, müssen wir $g_k \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ nachweisen. Dazu benutzen wir abermals den Satz von Levi, indem wir g_k als Limes einer monoton wachsenden Folge darstellen, nämlich der Folge $(g_{km})_{m \geq k}$ mit

$$g_{km}(x) = \max\{f_l(x);\ m \geq l \geq k\}.$$

Das Maximum von zwei integrierbaren Funktionen a, b ist wieder integrierbar, da $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$, also ist auch das Maximum von endlich vielen L^1-Funktionen wieder integriebar, also ist $g_{km} \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ für alle $k \leq m$. Natürlich gilt $g_{km} \nearrow g_k$ für $m \to \infty$, denn es wird ja das Maximum über immer mehr Werte gebildet. Da $g_{km} \leq F$, ist die Integralfolge $(\int g_{km})_{m \geq k})$ durch $\int F$ nach oben beschränkt. Damit erfüllt die Folge $(g_{km})_{m \geq k}$ alle Voraussetzungen des Satzes von Levi, und es folgt $g_k \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$.

Nun können wir den Satz von Levi auf die monoton fallende Folge (g_k) anwenden. Die Integralfolge ist beschränkt, da $|g_k| \leq F$. Also ist $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ und $g_k \xrightarrow{L^1} f$. Dies ist aber noch nicht ausreichend, denn wir wollen $f_k \xrightarrow{L^1} f$ zeigen. Dazu wiederholen wir das ganze Argument, wobei wir jetzt das Supremum durch das Infimum ersetzen. Wir definieren also $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h_k(x) = \inf\{f_l(x);\ l \geq k\} \geq -F(x).$$

Ganz analog wie vorher gilt $h_k \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ und $h_k \nearrow f$ fast überall mit $\int h_k \leq \int F$ für alle k, also folgt nach Levi auch $h_k \xrightarrow{L^1} f$. Insbesondere folgt $g_k - h_k \xrightarrow{L^1} 0$. Da $h_k \leq f_l \leq g_k$ für alle $l \geq k$ und damit auch $h_k \leq f \leq g_k$, ist $|f_l - f| \leq |g_k - h_k|$ und damit

$$\|f_l - f\|_1 \leq \|g_k - h_k\|_1 \to 0.$$

□

6. Integration über Teilmengen, Transformationssatz, Fubini

Wir nennen eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar*, wenn $\phi \cdot g \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Der Raum aller lokal integrierbaren Funktionen heiße $\mathsf{L}_{lok}(\mathbb{R}^n)$. Jede integrierbare Funktion f ist natürlich erst recht lokal integrierbar, denn ist $f \doteq \lim \phi_k$ für eine L^1-Cauchyfolge (ϕ_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$, so ist auch $(\phi \cdot \phi_k)$ eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$ für jede Funktion $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, da

$$\|\phi \cdot \phi_k - \phi \cdot \phi_l\|_1 \leq \max |\phi| \cdot \|\phi_k - \phi_l\|_1,$$

und $\phi \cdot \phi_k \stackrel{\cdot}{\to} \phi \cdot f$, also $\phi \cdot f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$. Weitere Beispiele von lokal integrierbaren Funktionen sind charakteristische Funktionen von beliebigen offenen oder abgeschlossenen Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$. Ist nämlich $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$, so ist $\phi \cdot 1_M = \phi \cdot 1_{M'}$ für eine *beschränkte* offene oder abgeschlossene Menge M'; wir schneiden dazu einfach M mit einem offenen oder abgeschlossenen Ball, der den Träger von ϕ enthält. Die charakteristische Funktion $\chi := 1_{M'}$ läßt sich (nach §4) durch eine L^1-Cauchyfolge (1_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$ approximieren, und wie oben ist $(\phi \cdot 1_k)$ ebenfalls eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$, die gegen $\phi \cdot 1_M$ konvergiert, also ist $\phi \cdot 1_M \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ und damit $1_M \in \mathsf{L}_{lok}(\mathbb{R}^n)$.

Allgemeiner heiße eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ *lokal messbar*, wenn $1_M \in \mathsf{L}_{lok}(\mathbb{R}^n)$. Ist M eine solche Menge, so heiße eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *integrierbar über* M, wenn $f \cdot 1_M \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$, und $\mathsf{L}(M)$ sei der Raum der über M integrierbaren Funktionen. Eine über M integrierbare Funktion braucht natürlich nur auf M definiert zu sein; wir setzen sie einfach durch 0 auf $\mathbb{R}^n \setminus M$ fort.

Bemerkung. Auch $\mathsf{L}(M)$ ist vollständig bezüglich der L^1-Norm. Die in §3 bewiesenen Eigenschaften von $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ lassen sich auf $\mathsf{L}(M)$ übertragen.

16. Satz 1. *Ist $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ und $g \in \mathsf{L}_{lok}(\mathbb{R}^n)$ mit $|g| < C$ (also g beschränkt), so gilt $f \cdot g \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Es gibt eine Folge (ϕ_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_k \dot{\to} f$ und $\phi_k \xrightarrow{L^1} f$. Dann ist $\phi_k \cdot g \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ (nach Definition der lokalen Integrierbarkeit) und $\phi_k \cdot g \dot{\to} f \cdot g$. Die Folge $(\phi_k \cdot g)$ ist eine L^1-Cauchyfolge in $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$, denn

$$\|\phi_k \cdot g - \phi_l \cdot g\|_1 = \int (|\phi_k - \phi_l| \cdot |g|) \leq C \cdot \|\phi_k - \phi_l\|_1.$$

Nach Satz 1 in §5 gibt es (nach Übergang zu einer Teilfolge) $\tilde{f} \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_k \cdot g \xrightarrow{L^1} \tilde{f}$ und $\phi_k \cdot g \dot{\to} \tilde{f}$, also $\tilde{f} \doteq f \cdot g$, und damit $f \cdot g \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$. □

17. Korollar. *Jede integrierbare Funktion $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ ist über jede lokal messbare Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, da $f \cdot 1_M \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$.*

18. Satz 2 (Transformationssatz) *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f \in \mathsf{L}(V)$. Dann ist $(f \circ \Phi)|\det D\Phi| \in \mathsf{L}(U)$ und*

$$\int_V f = \int_U ((f \circ \Phi)|\det D\Phi|).$$

Beweis. Es sei $g := f \cdot 1_V \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine L^1-Cauchyfolge (ϕ_k) in $C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi_k \xrightarrow{L^1} g$ und $\phi_k \dot{\to} g$. Wir dürfen annehmen, dass ϕ_k Träger in V hat. Dazu ersetzen wir ϕ_k durch $\phi_k 1_l^-$ für genügend großes l, wobei $1_l^- \nearrow 1_V$ die in §4 angegebene stetige Approximation von 1_V ist: Da $1_l^- \phi_k \xrightarrow{\cdot} 1_U\phi_k$ und $|1_l^- \phi_k| \leq 1_U|\phi_k| \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$, folgt $\|1_l^- \phi_k - 1_U\phi_k\|_1 \to 0$ nach Lebesgue (Satz 4 in §5), und da ferner $\|1_U\phi_k - g\|_1 = \int_U |\phi_k - g| \leq \|\phi_k - g\|_1 \to 0$, folgt diese Behauptung.

Nach dem Transformationssatz für stetige Funktionen mit kompaktem Träger (Spezialfall von Satz 26.2) ist

$$\|(((\phi_k - \phi_l) \circ \Phi)| \det D\Phi|)\|_1 = \|\phi_k - \phi_l\|_1,$$

also ist $(\phi_k \circ \Phi| \det D\Phi|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(\mathbb{R}^n)$, und da diese Folge fast überall gegen $g \circ \Phi| \det D\Phi|$ konvergiert, ist die letztere Funktion integrierbar mit

$$\int (g \circ \Phi)| \det D\Phi| = \lim \int (\phi_k \circ \Phi)| \det D\Phi| = \lim \int \phi_k = \int g.$$

Dies war zu zeigen, denn $(g \circ \Phi)| \det D\Phi| = ((f \circ \Phi)| \det D\Phi|) \cdot 1_U$. $\square$

Jetzt seien $X \subset \mathbb{R}^p$ und $Y \subset \mathbb{R}^q$ lokal messbar, z.B. $X = \mathbb{R}^p$ und $Y = \mathbb{R}^q$. Der Satz von Fubini, den wir für Riemann-integrierbare Funktionen bereits kennengelernt haben, führt die Integration über $X \times Y \subset \mathbb{R}^{p+q}$ auf Integrationen über X und Y zurück. Für jede Funktion $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ und jedes $y \in Y$ sei $f^y : X \to \mathbb{R}$ definiert durch,

$$f^y(x) = f(x, y).$$

19. Satz 3. (Fubini) *Es sei $f \in \mathsf{L}(X \times Y)$. Dann gilt:*

- *(a) $f^y \in \mathsf{L}(X)$ für fast alle $y \in Y$,*
- *(b) Eine Funktion $F : Y \to \mathbb{R}$ mit $F(y) = \int_X f^y$ für fast alle $y \in Y$ ist integrierbar, d.h. $F \in \mathsf{L}(Y)$ mit*

$$\int_Y F = \int_{X\times Y} f,$$

also $\int_{X\times Y} f = \int_Y (\int_X f(x, y)dx)dy$.

Beweis. Auf den ersten Blick scheint der Beweis klar zu sein: f ist Limes einer L^1-Cauchyfolge (ϕ_k) in $C_0(X \times Y)$, also $\phi_k \xrightarrow{\cdot} f$ und $\phi_k \xrightarrow{L^1} f$. Da für stetige Funktionen mit kompaktem Träger (sogar für alle Riemann-integrierbaren Funktionen) der Satz von Fubini bereits gilt, folgt er durch einen Grenzübergang wohl auch für beliebige $f \in \mathsf{L}(X \times Y)$. Allerdings gibt die Formulierung des Satzes schon etwas zu denken: Wir müssen ja zunächst einmal die Integrierbarkeit der Funktionen f^y und F aus dem Satz nachweisen! Die Sätze von Levi und Lebesgue bieten hier keine Hilfe; wir müssen schon auf die Definition der integrierbaren Funktionen als Limiten von L^1-Cauchyfolgen zurückgreifen. Wir müssen also zunächst zeigen, dass die Folge (ϕ_k^y) für fast alle y eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(X)$ bilden (wobei wieder $\phi_k^y(x) := \phi_k(x,y)$ gesetzt wird).

Aus der Cauchyfolgen-Eigenschaft der Folge (ϕ_k) folgt

$$\int_Y \left(\int_X |\phi_k^y(x) - \phi_{k-1}^y(x)| dx \right) dy \to 0 \qquad (*)$$

für $k \to \infty$. Wir wollen das innere Integral $\psi_k(y)$ nennen und definieren damit Funktionen $\psi_k \in C_0(Y)$ mit

$$\psi_k(y) = \int_X |\phi_k^y(x) - \phi_{k-1}^y(x)| dx = \|\phi_k^y - \phi_{k-1}^y\|_1.$$

Nach $(*)$ ist $(\int \psi_k)$ eine Nullfolge; durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, dass

$$\int \psi_k = \|\psi_k\|_1 < 1/2^{2k}.$$

Mit dem vielbenutzten Lemma 1 in §3 (S. 8) folgt $|\psi_k| < 1/2^k$ außerhalb einer kleinen Jordan-messbaren Menge $T_k \subset Y$ mit $\mu(T_k) < 1/2^k$. Außerhalb der Vereinigung $S_k = \bigcup_{l>k} T_l$ gilt daher

$$|\psi_l| < 1/2^l \ \forall_{l>k},$$

und S_l ist eine ϵ-Menge für $\epsilon = 1/2^k$, also eine $1/2^k$-Menge. Für alle $y \in Y \setminus S_k$ und für alle $m > l \geq k$ gilt daher

$$\|\phi_l^y - \phi_m^y\|_1 \leq \sum_{j=l+1}^{m} \psi_j < \sum_{j>l} 1/2^j = 1/2^l.$$

Somit ist (ϕ_l^y) eine L^1-Cauchyfolge in $C_0(X)$ für alle $y \in Y \setminus S_k$ für beliebiges k, also für $y \in \bigcup_k (Y \setminus S_k) = Y \setminus \bigcap_k S_k$, und $N_1 := \bigcap_k S_k$ ist eine Nullmenge in Y (da $N_1 \subset S_k$ für alle k).

Für alle $y \in Y \setminus N_1$ gibt es also eine Funktion $\tilde{f}^y \in \mathsf{L}(X)$ mit $\phi_l^y \stackrel{.}{\to} \tilde{f}^y$ und $\phi_l^y \xrightarrow{L^1} \tilde{f}^y$. Wir möchten gerne $\tilde{f}^y = f^y$ schließen, aber das ist nicht ohne weiteres möglich, da ϕ_l ja nur außerhalb einer Nullmenge N in $X \times Y$ gegen f strebt; wir müssen wissen, ob der Schnitt von N mit den Mengen $X \times \{y\}$ wieder eine Nullmenge ist. Dies sagt uns das folgende Lemma, das ein Spezialfall des Satzes von Fubini für charakteristische Funktionen von Nullmengen ist:

20. Lemma. *Ist $N \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge, so ist $N^y := \{x \in \mathbb{R}^p;\ (x,y) \in \hat{N}\}$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$ eine Nullmenge.*

Wir verschieben den Beweis dieses Lemmas an das Ende dieses Abschnittes und beenden zunächst den Beweis von Satz 2. Nach dem Lemma wissen wir jetzt, dass $\phi_l^y \dot{\to} f^y$ für alle y außerhalb einer Nullmenge $N_2 \subset Y$. Also gilt $\tilde{f^y} \doteq f^y$ für alle $y \in Y \setminus N_3$, wobei $N_3 = N_1 \cup N_2$. Für diese y folgt also $f^y \in \mathsf{L}(X)$ und $\phi_l^y \xrightarrow{L^1} f^y$. Insbesondere sehen wir für alle $y \in Y \setminus N_3$:

$$\Phi_l(y) := \int_X \phi_l^y \to \int_X f^y =: F(y).$$

Damit sind Funktionen $\Phi_l, F : Y \to \mathbb{R}$ definiert mit $\Phi_l \in C_0(Y)$ und $\Phi_l \dot{\to} F$ (wobei F auf N_3 z.B. Null gesetzt wird). Die Φ_l bilden sogar eine L^1- Cauchyfolge in $C_0(Y)$, denn für genügend große $l < m$ ist

$$\|\Phi_l - \Phi_m\|_1 = \int_Y |\Phi_l - \Phi_m| = \int_{X \times Y} |\phi_l - \phi_m| < \epsilon.$$

Somit ist $F \doteq \lim_l \Phi_l \in \mathsf{L}(Y)$ und $\Phi_l \xrightarrow{L^1} F$, und insbesondere folgt $\int_Y \Phi_l \to \int_Y F$. Andererseits gilt nach Wahl der ϕ_l:

$$\int_Y \Phi_l = \int_{X \times Y} \phi_l \;\to\; \int_{X \times Y} f,$$

und somit folgt die Behauptung $\int_{X \times Y} f = \int_Y F$. □

Beweis des Lemmas. Wir setzen $X := \mathbb{R}^p$ und $Y := \mathbb{R}^q$. Für jede Teilmenge $S \subset X \times Y$ und alle $y \in Y$ sei S^y der Schnitt von S mit $X \times \{y\}$, genauer:

$$S^y := \{x \in X;\ (x, y) \in S\}.$$

Unsere Nullmenge N liegt für jedes $\epsilon > 0$ in einer Lebesgue-messbaren Menge $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, wobei A_k Quader in $X \times Y$ von beliebig kleinem Gesamtmaß sind, etwa

$$\mu_L(S) \le \sum_k \mu(A_k) \le \epsilon^2.$$

Jeder dieser Quader A_k ist kartesisches Produkt $A_k = B_k \times C_k$ von Quadern $B_k \subset X$ und $C_k \subset Y$. Für festes $y \in Y$ ist S^y die Vereinigung von einigen dieser Quader B_k, und zwar gehört B_k genau dann zu S^y, wenn der zugehörige “Partner” C_k das y trifft. Insbesondere ist S^y als höchstens abzählbare Vereinigung von Quadern wieder Lebesgue-messbar (Folgerung 1 in §5, S. 20). Wir definieren jetzt

$$Y_S := \{y \in Y :\ \mu_L(S^y) > \epsilon\}.$$

Wir wollen zeigen, dass Y_S Lebesgue-messbar ist mit $\mu_L(Y_S) \le \epsilon$ falls $\mu_L(S) < \epsilon^2$. Wenn S selbst ein Quader $B \times C$ ist, ist dies klar: Dann ist $Y_S = C$ falls $\mu(B) > \epsilon$ (andernfalls ist $Y_S = \emptyset$), und $\mu(C) < \epsilon$, da $\mu(B)\mu(C) \leq \epsilon^2$. Ebenso leicht folgt dies, wenn S endliche Vereinigung von Quadern ist, etwa $S = A_1 \cup ... \cup A_N$ mit $\sum_i \mu(A_i) \leq \epsilon^2$ und $A_i = B_i \times C_i$. Ohne Einschränkung sei y genau in $C_1, ..., C_k$ enthalten, und unter den Quadern $B_1, ..., B_k$ gelte $\mu(B_i) > \epsilon$ genau für $i = 1, ..., j$ (mit $j \leq k$), also $Y_S = C_1 \cup ... \cup C_j$. Dann ist

$$\epsilon^2 \geq \sum_{i=1}^{j} \mu(B_i)\mu(C_i) > \epsilon \cdot \sum_{i=1}^{j} \mu(C_i) \geq \epsilon \cdot \mu(Y_S).$$

Ist schließlich S unendliche Vereinigung von Quadern $A_1, A_2, ...$, so ist $S = \bigcup_N S^N$ mit $S^N = A_1 \cup ... \cup A_N$, und $Y_S = \bigcup_N Y_{S^N}$. Also ist Y_S abzählbare Vereinigung von Quadern und damit Lebesgue-messbar, und da $\mu(S^N) \leq \epsilon^2$ für alle N, folgt $\mu_L(Y_S) = \lim_N \mu(Y_{S^N}) \leq \epsilon$.

Wir wählen nun eine monoton fallende Mengenfolge $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $S_k \supset N$, so dass jedes S_k eine $1/2^{2k}$-Menge ist, also von Quadern mit Gesamtmaß $\leq 1/2^{2k}$ überdeckt wird. Definieren wir

$$Y_k = \{y \in Y;\ \mu((S_k)^y) > 1/2^k\},$$

so ist nach der vorstehenden Überlegung $\mu_L(Y_k) \leq 1/2^k$. Dann hat $Y^k := \bigcup_{l>k} Y_l$ ebenfalls Lebesgue-Maß $\mu_L(Y^k) \leq 1/2^k$, und für alle $y \in Y \setminus Y^k$ und für alle $l > k$ gilt $\mu_L((S_l)^y) \leq 1/2^l$. Für jedes $y \in \bigcup_k (Y \setminus Y^k) = Y \setminus N'$ mit $N' = \bigcap_k Y_k$ gilt also $\mu_L((S_l)^y) \leq 1/2^l$ für genügend große l. Da $N^y \subset (S_l)^y$ für alle l, ist N^y eine Nullmenge in X für alle $y \in Y \setminus N'$, und N' ist eine Nullmenge in Y. Dies war zu zeigen.

Literatur

- [Alt] H.W..Alt: Lineare Funktionalanalysis, Springer 1985
- [Aulbach] B.Aulbach: Analysis I/II. Vorlesungsskriptum 1992/93, Institut für Mathematik, Universität Augsburg
- [Barner-Flohr] M.Barner, F.Flohr: Analysis II. De Gruyter 1983
- [Forster] O. Forster: Analysis I,II,III, Vieweg 1977-1981
- [Heuser] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner 1989
- [Milnor] J. Milnor: Morse Theory. Princeton 1962

- [Königsberger] K. Königsberger: Analysis II, Springer 1990
- [Spivak] M. Spivak: Calculus on Manifolds, Benjamin 1965
- [Wüst] R. Wüst: Höhere Mathematik für Physiker, Teil 2, De Gruyter 1995

Symbolverzeichnis

- $\|A\|$ Matrixnorm
- A^T Transposition
- $B_r(x)$ offener Ball vom Radius r um x
- C^1 (C^k) (k-mal) stetig differenzierbar
- $C_0(\mathbb{R}^n)$ Stetige Funktionen mit kompaktem Träger
- $\overline{C_0(\mathbb{R}^n)}$ Vervollständigung von $C_0(\mathbb{R}^n)$
- $\complement T$ Komplementmenge
- $D_i f$ i-te partielle Ableitung
- ∂T Rand
- $\partial_M T$ relativer Rand (bezüglich M
- $\|f\|$ Supremumsnorm
- $\|f\|_1$ L^1-Norm
- $f_k \xrightarrow{L^1} f$ L^1-Konvergenz
- $f_k \xrightarrow{glm} f$ gleichmäßige Konvergenz
- $f_k \dot{\to} f$ Konvergenz fast überall
- $f \xrightarrow{pw} f$ Punktweise Konvergenz
- $f_k \nearrow f$ monotone Konvergenz
- $f \doteq g$ fast überall gleich
- $f \circ g$ Verkettung $(f \circ g)(x) := f(g(x))$
- $K_r(x)$ abgeschlossene Kugel vom Radius r um x
- $\mathsf{L}(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue-integrierbare Funktionen
- $\mathsf{L}_{lok}(\mathbb{R}^n)$ lokal Lebesgue-integrierbare Funktionen
- $\mathsf{L}(M)$ Lebesque-integrierbare Funktionen über M
- $L^1(\mathbb{R}^n)$ (fast überall gleiche L^1-Funktionen identifiziert)
- $\mu(T)$ Jordan-Maß
- $\mu_L(M)$ Lebegue-Maß
- $\mathsf{R}(Q)$ Riemann-integrierbare Funktionen über Q
- $\mathsf{R}(\mathbb{R}^n)$ Riemann-integrierbare Funktionen über $\mathbb{R}^n$
- $S \triangle T$ symmetrische Mengendifferenz
- $\bar{T}$ Abschluß
- T_b Translation $x \mapsto x + b$
- $T_x M$ Tangentialraum
- U^n, V^n offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$
- $\langle x, y \rangle$ Skalarprodukt
- $[x, y]$ Strecke von x nach y
- $\approx_\epsilon$ ungefähr gleich, Fehler $< \epsilon$
- $\perp$ senkrecht
- $\forall$ "für alle", $\exists$ "existiert"
- $\wedge$ "und"

Index