GLEICHUNGEN
EINE QUELLE MATHEMATISCHER IDEEN

J.-H. ESCHENBURG

Einfürung

Gleichungen sind mathematische Rätsel: Gesucht eine Zahl x mit $f(x) = 0$ für eine gegebene Funktion $f(x)$. Für bekanntes x ist es leicht, einen Ausdruck der Form

$$f(x) = a - bx + cx^2 - dx^3 + ... \tag{1}$$

zu berechnen, aber hier ist die Umkehraufgabe gefragt: Das Ergebnis 0 is gegeben, gesucht sind diejenigen Zahlen x, die in f eingesetzt zu diesem Ergebnis führen. Das Lösen von Gleichungen gehört zum Kernbestand mathematischen Handelns auf jeder Schwierigkeitsstufe. Wir möchten die Gleichungen niedriger Ordnungen studieren und diskutieren, welche mathematischen Ideen damit verbunden sind oder sich daraus entwickelt haben. Die *Ordnung* einer Gleichung ist die höchste x-Potenz, die vorkommt. Hier eine kurze Vorschau:

1. Ordnung: $a - bx = 0$ oder $x = a/b$: Verhältnis (Proportionalität)
2. Ordnung: $a-bx+cx^2 = 0$: quad. Gleichungen und Selbstähnlichkeit
3. Ordnung: $a-bx+cx^2-dx^3 = 0$: Die Geburt der komplexen Zahlen
4. Ordnung: $a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 = 0$: Lösen durch Resolventen
5. Ordnung: $a-bx+cx^2-dx^3+ex^4-fx^5 = 0$: Ikosaeder-Resolventen

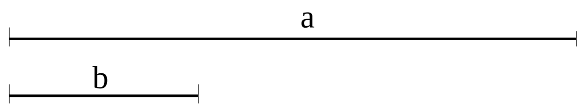
1. Gleichung 1. Ordnung: Proportion

Mit der Gleichung $a - bx = 0$ oder $x = a/b$ kehren wir an einen der Ausgangspunkte der Mathematikgeschichte zurück, der Proportionenlehre.

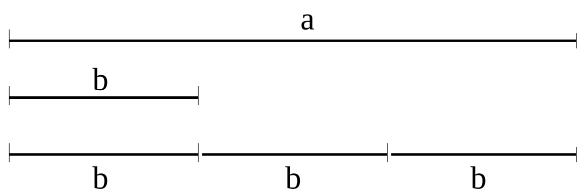
In der Antike kannte man zunächst nur die natürlichen Zahlen. Sie dienten zum Zählen von endlichen *Mengen*, d.h. von Zusammenfassungen von Individuen nach bestimmten Gesichtspunkten. Insofern ist die Mengenlehre die Grundlage der Mathematik; die Zahlen kommen später: Bevor man zählen kann, muss man wissen, was man zählen will, und die Vereinigung von Mengen ist ursprünglicher als die Addition von Zahlen.

Date: 8. Oktober 2014.

Doch schon früh, sicher schon in ägyptischer oder babylonischer Zeit erkannte man, dass die Zahlen noch zu etwas anderem dienen konnten: zum *Vergleichen* von *Größen*. Das waren zum Beispiel Längen, Flächen- und Rauminhalte, Massen und Gewichte, Zeitspannen. Da es keine allgemein anerkannten Maßeinheiten gab, konnte man solche Größen nicht einfach durch Zahlen ausdrücken. Aber man konnte zwei von ihnen miteinander vergleichen, zum Beispiel eine größere Strecke a mit einer kleineren b.



Zunächst kann man nur feststellen: dass a größer ist als b. Aber *um wieviel* größer? Im besten Fall gewinnen wir a durch mehrfaches Aneinanderlegen von b:[1]

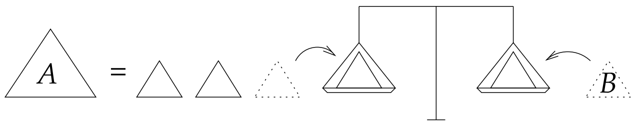


In unserer Figur erhalten wir a durch 3-faches Aneinanderlegen von (Kopien von) b, also $a = 3b$. Weder a noch b sind Zahlen, aber gemeinsam definieren sie eine Zahl, nämlich ihr *Verhältnis* $a/b = 3$.

Ein anderes Beispiel ist der Vergleich großer Mengen. Ich stelle mir zwei ägyptische Bauern vor – nennen wir sie A und B – die zum staatlichen Getreideeinkäufer nach Memphis kommen, zur Zeit von "Joseph dem Ernährer" während der der "sieben fetten Jahre". Beide haben einen Sack Getreide mitgebracht, A einen großen und B einen kleinen. Sie wollen gerecht entlohnt werden. A muss mehr Lohn bekommen, aber wieviel mehr? Den Gewichten, die der Einkäufer bereithält, trauen sie nicht. Aber mit einer Balkenwaage kann man nicht allzu sehr betrügen:

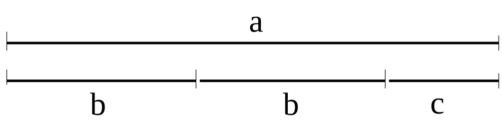
[1]Die vier mit b bezeichneten Strecken sind allerdings durchaus unterschiedlich, da sie sich ja an verschiedenen Orten befinden. Aber sie gehen aus der ursprünglich b genannten Strecke durch Verschieben hervor, wobei Länge und Richtung nicht geändert wird; in dem Sinne sind sie *gleich*. "Das Gleiche" ist bekanntlich nicht "dasselbe". Gleichheit bezieht sich nur auf ein Wesensmerkmal der beiden Gegenstände, hier die Länge und vielleicht noch die Richtung. Den Gleichheitsbegriff treffen wir bereits beim Zählen an, also schon beim ursprünglichen Gebrauch der Zahlen: Zwei durchaus unterschiedliche Mengen werden als gleichartig angesehen, wenn sie gleich viel Elemente haben, also nur in dem Wesensmerkmal "Anzahl" übereinstimmen. Wenn bestimmte Waren nach Stückzahl verkauft werden, hängt der Preis nicht davon ab, welche Waren gekauft wurden, sondern nur von der Anzahl.

Wenn sie vor und nach dem Beladen beider Schalen im Gleichgewicht ist, sind die Lasten auf beiden Seiten gleich. Also lädt der Einkäufer das Getreide von B auf die eine Waagschale und soviel von dem Getreide von A auf die andere, bis sie im Gleichgewicht ist. Dann lässt er den zu A gehörigen Haufen auf die Seite schaffen und wiederholt das Gleiche mit dem restlichen Getreide von A, so oft, bis es aufgebraucht ist.

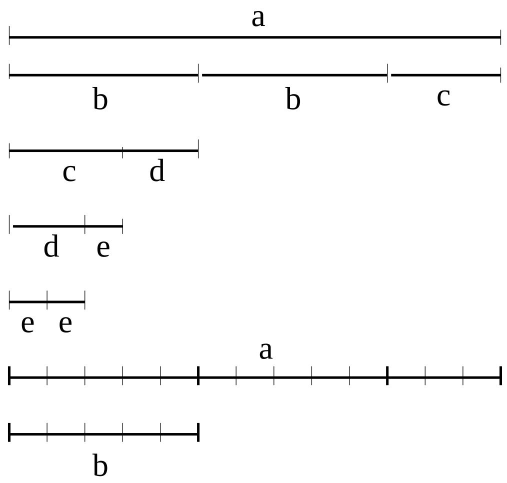


Auch hier erscheint eine Zahl: A hat 3-mal soviel Getreide wie B. Wie haben nicht die Körner gezählt; es sind ja "unzählige", sondern die Gleichheit der vier (durchaus unterschiedlichen) kleinen Haufen als Gleichheit der Gewichte definiert. Die "Gleichheit" unterschiedlicher Haufen ist bereits im ursprünglichen Begriff der Zählens vorhanden: Hätten wir die Körner zählen können und gleiche Anzahlen festgestellt, hätten wir auch die Haufen als "gleich" angesehen. Das Neue hier liegt also nicht im Begriff der Gleichheit, sondern in der Methode des "Zählens des Unzählbaren" durch Gewichts- oder Längenmessung; wir sind von *Zählen* zum *Messen* übergegangen. Wann dieser wichtige Schritt zum ersten Mal vollzogen wurde, verliert sich im Dunkel der frühen Geschichte.

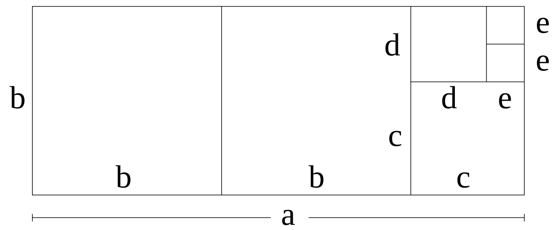
Aber was machen wir, wenn es "nicht auskommt"? In unserer zweiten Figur passt b zweimal in a hinein, und es bleibt noch ein Rest c. Dieser ist kleiner als b, sonst würde ja noch ein drittes Exemplar von b in a hineinpassen.



Zunächst können wir nur sagen, dass das Verhältnis a/b zwischen 2 und 3 liegen muss. Um Genaueres zu sagen müssen wir c näher bestimmen, indem wir c mit b vergleichen. Das geht auf gleiche Weise wie vorher: Wieder haben wir eine große und eine kleine Strecke, statt a und b diesmal b und c, und wieder prüfen wir, wie oft c in b hineinpasst: in unserer Figur geht es einmal, und es bleibt ein Rest d, der kleiner als c ist. Nun vergleichen wir d mit c; wieder passt d einmal in c hinein mit einem Rest e, der in unserem Beispiel schließlich genau zweimal in d aufgeht.



Dasselbe in einer anderen figürlichen Darstellung:



In unserem Beispiel ist[2][3]

$$\left.\begin{array}{rcl} a &=& 2b+c \\ b &=& c+d \\ c &=& d+e \\ d &=& 2e \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcccccc} d &=& & & & & 2e \\ c &=& d+e &=& 2e+e &=& 3e \\ b &=& c+d &=& 3e+2e &=& \underline{5e} \\ a &=& 2b+c &=& 2\cdot 5\,e+3e &=& \underline{13\,e}\,. \end{array}\right.$$

Wir stellen also fest, dass b in a zwar nicht mehr ganzzahlig aufgeht, dass es aber eine kleinere Strecke e gibt, die sowohl in a als auch in b ganzzahlig aufgeht, 13-mal in a und 5-mal in b. Wir haben keine Maßeinheit gebraucht, um dies festzustellen; die beiden Strecken haben sich nämlich die für den Vergleich am besten geeignete Maßeinheit, ihr

---

[2]Wir können stattdessen auch gleich das Verhältnis a/b ausdrücken: $\frac{a}{b} = 2 + \frac{c}{b}$, $\frac{b}{c} = 1 + \frac{d}{c}$, $\frac{c}{d} = 1 + \frac{e}{d}$, $\frac{d}{e} = 2$ und damit $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$. Einen solchen Ausdruck nennen wir einen *regelmäßigen Kettenbruch* und schreiben dafür kurz $\frac{a}{b} = [2; 1, 1, 2]$. Das hier beschriebene Verfahren der *Wechselwegnahme* ist dasselbe wie die regelmäßige Kettenbruchentwicklung des Verhältnisses a/b.

[3]Wenn wir die Gleichung anders herum auflösen, können wir auch das gemeinsame Maß e durch die gegebenen Größen a und b ausdrücken:

$$e = c-d,\ \ d = b-c,\ \ c = a-2b,\ \ \Rightarrow\ \ e = c-(b-c) = 2c-b = 2(a-2b)-b = 2a-5b.$$

"gemeinsames Maß" e, selbst gesucht. Damit können wir wieder das genaue Verhältnis a/b feststellen, nämlich 13/5.

Halten wir noch einmal fest: Größen sind keine Zahlen, aber zwei Größen a und b können miteinander verglichen werden: Sie können gleich sein oder eine von beiden, sagen wir a, ist größer als die andere, $a > b$. Die kleinere Größe b können wir mehrfach (sagen wir: p-mal) vervielfältigen und die Kopien zu einer neuen Größe pb zusammensetzen. Wir können das so oft machen, dass pb gerade noch in a hineinpasst; noch eine weitere Kopie von b passt nicht mehr. Wenn es nicht "aufgeht", wenn also $pb < a$, dann vergleichen wir b mit dem Rest $c = a - pb$, der sicher kleiner als b ist (sonst würde ja noch eine weitere Kopie von b in a hineinpassen). Was wir vorher mit a und b gemacht haben, das machen wir nun mit b und c: Wir kopieren die kleinere Strecke c so oft (sagen wir: q-mal), dass $qc \le b$, aber $(q+1)c > b$. Damit haben wir einen *Algorithmus* geschaffen, ein Rechenverfahren, das den immer gleichen Rechenschritt auf immer neue Eingaben anwendet, die im Laufe des Verfahrens erst produziert werden. Dieses Verfahren heißt *Wechselwegnahme* oder *euklidischer Algorithmus*, weil es von *Euklid*[4] beschrieben worden ist. Es ist aber sehr viel älter und war zum Beispiel Pythagoras[5] vor 500 v.Chr. bestens bekannt. Vielleicht hat er es auf seinen ausgedehnten Reisen nach Ägypten und Mesopotamien kennen gelernt. Jedenfalls hat er die Bedeutung dieses Verfahrens voll erkannt und soll in den Jubelruf "Alles ist Zahl" ausgebrochen sein, weil sich auf diese Weise die Verhältnisse beliebiger Größen, aus welchem Bereich auch immer sie stammen mochten (Geometrie, Astronomie, Mechanik, Musik,[6] Wirtschaft), durch ein Verhältnis von Zahlen ausdrücken ließen. Es war die Geburtsstunde der angewandten Mathematik.

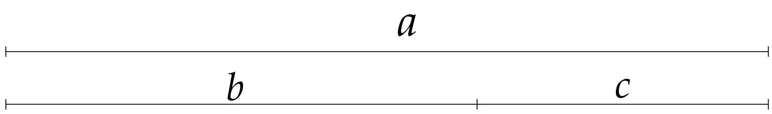
[4]Euklid von Alexandria, ca. 325 - 265 v.Chr. (Alexandria, Ägypten), fasste um 300 v.Chr. das gesamte mathematische Wissen seiner Zeit in seinem Lehrbuch "Elemente" zusammen. Die Proportionenlehre findet sich im 5. Buch der "Elemente".

[5]Pythagoras von Samos, ca. 570 - 510 v.Chr.

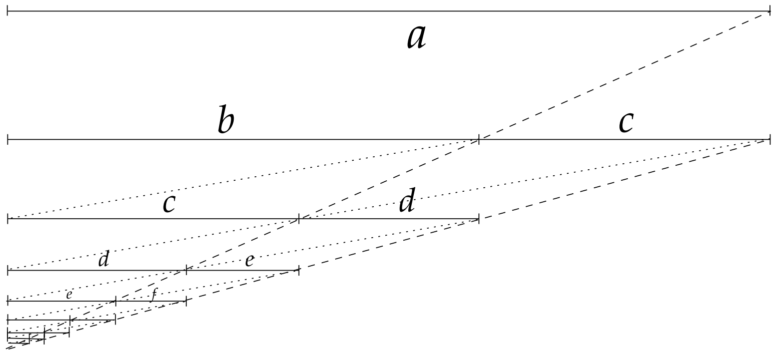
[6]Pythagoras erkannte, dass Tonverhältnisse mit bestimmten Streckenverhältnissen korrespondieren: Unterteilt man eine Saite in der Mitte, ertönt die Oktave, drittelt man sie, hört man die Quinte über der Oktave usw. Die bekannten Tonintervalle sind auf diese Weise einfachen Zahlenverhältnissen zugeordnet:

2/1	Oktave	9/8	Großer Ganzton
3/2	Quinte	10/9	Kleiner Ganzton
4/3	Quarte	16/15	Großer Halbton
5/4	Große Terz	25/24	Kleiner Halbton
6/5	Kleine Terz	81/80	Syntonisches Komma

Doch nur wenige Jahre später schüttete ein Schüler des Pythagoras, vermutlich Hippasos,[7] reichlich Wasser in diesen schönen Wein, durch eine der folgenreichsten mathematischen Erkenntnisse der Antike: Es gibt Strecken a und b, deren Verhältnis mit der Wechselwegnahme niemals genau ermittelt werden kann; immer bleibt noch ein Rest und das Verfahren endet nie. Vermutlich geschah diese Entdeckung am Verhältnis des *Goldenen Schnitts*. Dabei wird eine Strecke a so in zwei ungleiche Teile b und c unterteilt, dass sie sich zum größeren Teil b so verhält wie b zum Rest c, also $a/b = b/c$ oder $\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c}$.[8]



Die Teilstrecke b passt also einmal in a hinein, und der Rest c steht zu b wieder im gleichen Verhältnis wie vorher b zu a, also $b/c = a/b$. Beim Vergleich von c mit b stehen wir daher wieder vor der gleichen Situation; b und c bilden ein verkleinertes Abbild von a und b, weil ja die Verhältnisse (Proportionen) gleich sind. Wieder passt c einmal in b hinein, und für den Rest d gilt wiederum $b/c = c/d$.



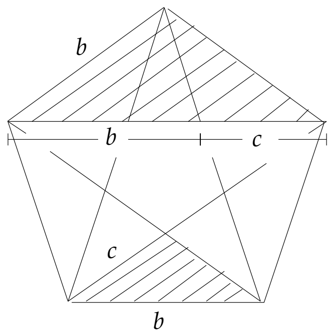
Diese Situation wiederholt sich auf jeder Stufe; das Verfahren bricht niemals ab und wir finden deshalb kein gemeinsames Maß.

Der Goldene Schnitt war in der Zeit um 500 v.Chr. nicht nur den Mathematikern, sondern auch den Künstlern bestens bekannt und fand vielfache Verwendung. Die Schule des Pythagoras hatte sogar ein besonders enges Verhältnis dazu, denn ihr Symbol war das Pentagramm,

[7]Hippasos von Metapont, ca. 550 - 470 v.Chr., Metapont (Süditalien)

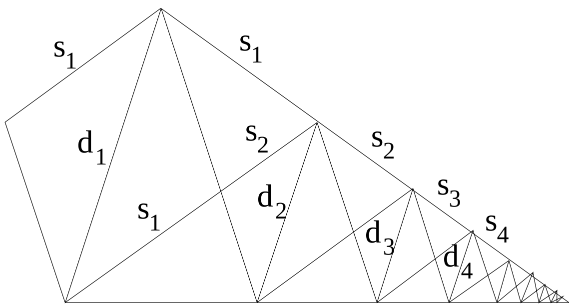
[8]Aus der Gleichung $\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c}$ lässt sich der Wert dieses Verhältnisses $x = a/b = b/c$ ermitteln: $x = \frac{b}{c} = \frac{b+c}{b} = 1 + \frac{c}{b} = 1 + \frac{1}{x}$. Multiplikation mit x auf beiden Seiten ergibt die quadratische Gleichung $x^2 = x + 1$ mit der positiven Lösung $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618$ (die zweite Lösung $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ ist negativ). Diese Zahl x und ihr Kehrwert $\frac{1}{x} = x - 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$ werden *Goldener Schnitt* genannt.

der Diagonalenstern des regelmäßigen Fünfecks, und je zwei Diagonalen unterteilen sich gegenseitig im Verhältnis des goldenen Schnittes. Dies folgt aus der *Ähnlichkeit* (gleiche Form bei unterschiedlicher Größe) der beiden in der nachfolgenden Figur schraffierten gleichschenkligen Dreiecke:



Das Verhältnis von großer und kleiner Seite ist in den beiden ähnlichen Dreiecken dasselbe, also folgt das goldene Schnittverhältnis $\frac{b+c}{b} = \frac{b}{c}$.

Mit dieser Konstruktion können wir sehr anschaulich erkennen, dass es wirklich kein gemeinsames Maß zwischen a und b oder zwischen b und c gibt (nicht nur, dass wir keins finden konnten). Möglicherweise ist auch Hippasos so zu seiner Erkenntnis gelangt. Dazu betrachten wir eine Kette von immer kleineren Fünfecken, wobei die Seite s_k des k-ten Fünfecks die Diagonale d_{k+1} des $(k+1)$-ten Fünfecks ist:



Aus der Figur sehen wir $d_2 = s_1$ und $s_2 = d_1 - s_1$, allgemein

$$(*) \qquad d_{k+1} = s_k, \quad s_{k+1} = d_k - s_k.$$

Wenn d_1 und s_1 ein gemeinsames Maß hätten, also ganze Vielfache einer Strecke e wären (wie klein diese auch immer sein mag), dann wären auch $d_2 = s_1$ und $s_2 = d_1 - s_1$ ganze Vielfache von e, und durch Wiederholung des Schlusses würde dasselbe für alle d_k und s_k gelten:

Alle sind ganzzahlige Vielfache von e, und doch werden sie beliebig klein und schließlich kleiner als e, ein Widerspruch![9]

Diagonale und Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks besitzen somit kein gemeinsames Maß, sie sind *inkommensurabel.* Ihr Verhältnis (das goldene Schnittverhältnis) lässt sich nicht mehr als Verhältnis ganzer Zahlen schreiben; es ist *irrational.*[10][11]

Pythagoras' Erkenntnis "Alles ist Zahl" war daher falsch, solange man unter "Zahl" nur die natürlichen Zahlen und ihre Verhältnisse verstand. Das Zahlverständnis änderte sich aber im Verlauf der folgenden zwei Jahrhunderte; man fing an, auch irrationale Verhältnisse zwischen Größen als Zahlen anzuerkennen. Der Ersatz für die Darstellung von Größenverhältnissen $\frac{a}{b}$ als Verhältnis natürlicher Zahlen $\frac{k}{n}$ war das *Archimedische Axiom*,[12] das Archimedes selbst aber dem Eudoxos[13] zuschreibt und das bereits der Wechselwegnahme zugrunde liegt:

> Zu je zwei Größen a, b mit $a > b$ gibt es eine natürliche Zahl k mit $kb \leq a < (k+1)b$.

Wenn wir diesen Grundsatz statt auf a und b auf na und b für eine beliebig große Zahl $n \in \mathbb{N}$ anwenden, finden wir ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$kb \leq na < (k+1)b$$

und damit $\frac{k}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{k+1}{n} = \frac{k}{n} + \frac{1}{n}$. Das Verhältnis $\frac{a}{b}$ ist also fast gleich dem ganzzahligen Verhältnis $\frac{k}{n}$; es weicht davon um höchstens $\frac{1}{n}$ ab.

Dies war die erste bewusst durchgeführte *Zahlbereichserweiterung* der Mathematikgeschichte. Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ waren geboren als Größenverhältnisse, die durch Verhältnisse ganzer Zahlen zwar nicht immer ausgedrückt, aber doch angenähert werden konnten.

---

[9]Es ist sehr bemerkenswert, dass gerade das ganzzahlige Gleichungssystem $(*)$ zu einer Nicht-Ganzzahligkeits-Aussage führt: Diagonale und Seitenlänge sind nicht ganzzahlige Vielfache eines gemeinsamen Maßes.

[10]Die *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ (von lat./engl. "ratio" = Verhältnis) sind die Quotienten ganzer Zahlen k/n (Brüche). "Irrational" bedeutet: Kein Verhältnis ganzer Zahlen.

[11]Der Goldene Schnitt ist nicht nur irgend eine irrationale Zahl, sondern die "irrationalste" Zahl überhaupt: In jedem Schritt passt der Rest nur einmal in die Teilstrecke hinein, er ist also fast so groß wie diese, und deshalb sind wir maximal weit von einem rationalen Verhältnis entfernt.

[12]Archimedes von Syrakus, ca. 287 - 212 v.Chr.

[13]Eudoxos von Knidos, ca. 408 - 355 v.Chr.

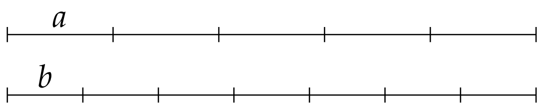
Übungen

1.1. **Kommensurabel = Rationales Verhältnis.** Zeigen Sie: Zwei Größen $a > b$ haben genau dann ($\iff$) ein rationales Verhältnis, wenn die Wechselwegnahme abbricht, d.h. wenn sie nach endlich vielen Schritten mit dem Rest 0 endet und damit ein “gemeinsames Maß” produziert. Zu zeigen ist also:
  a) Wenn a/b rational, dann bricht die Wechselwegnahme ab,
  b) Wenn die Wechselwegnahme abbricht, dann ist a/b rational.

1.2. **Anwendung auf das “Zählbare”.** Bestimmung des ggT (größten gemeinsamen Teilers) von zwei natürlichen Zahlen a und b durch Wechselwegnahme. Beispiel:
  a) $a = 112$ und $b = 91$.
  b) $a = 544$ und $b = 323$.

Drücken Sie umgekehrt den ggT durch die gegebenen Zahlen aus.

1.3. **Gemeinsame Verfeinerung.** Gegeben sind zwei gleichmäßige Unterteilungen derselben Strecke in 5 bzw 7 gleiche Teile (a bzw. b). Konstruieren Sie graphisch die gemeinsame Verfeinerung und überzeugen Sie sich, dass dadurch die Teilstrecke a in 7 und die Teilstrecke b in 5 gleiche Teile geteilt wird. Führen Sie auch die Wechselwegnahme für a und b durch, wobei $5a = 7b$ zu beachten ist: $a = b+c$, $7b = 5a = 5b+5c$, $2b = 5c$, $b = 2c+d$, $5c = 2b = 4c+2d$, $c = 2d$, $b = 2c+d = 4d+d = 5d$, $a = b + c = 5d + 2d = 7d$. Probieren Sie ein anderes Beispiel, etwa $7a = 11b$. Was hat das mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung zu tun?



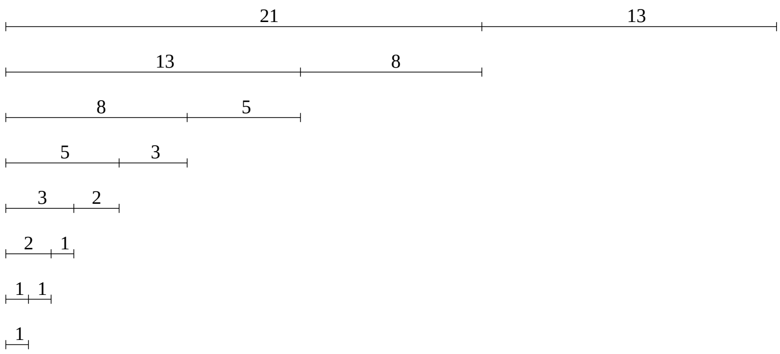
1.4. **Zahlen ohne eindeutige Primfaktorzerlegung.** Die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in den ganzen Zahlen ist nicht selbstverständlich. In manchen Zahlbereichen ist sie nicht gegeben. Das einfachste Beispiel ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{m + n\sqrt{-5};\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ (mit $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$). In dieser Menge von (komplexen) Zahlen kann man unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren, genau wie in den ganzen Zahlen. Solche Zahlen heißen *Primzahlen*, wenn sie keinen echten Teiler mehr haben (außer ± 1). Zeigen Sie: Die Zahl 6 hat zwei Zerlegungen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, nämlich $6 = 2{\cdot}3$ sowie $6 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$. Überzeugen Sie sich, dass 2 und 3 auch in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ immer noch Primzahlen sind, und zwar folgendermaßen: Aus $3 = a \cdot b$ folgt auch $3 = \bar{a} \cdot \bar{b}$, wobei $\bar{a}, \bar{b}$ die komplex Konjugierten zu a, b sind: Wenn $a = m + n\sqrt{-5}$ und

$b = p + q\sqrt{-5}$, so ist $\bar{a} = m - n\sqrt{-5}$ und $\bar{b} = p - q\sqrt{-5}$. Zeigen Sie: Durch Multiplizieren der Gleichungen $3 = a \cdot b$ und $3 = \bar{a} \cdot \bar{b}$ folgt die ganzzahlige Gleichung $9 = a \cdot \bar{a} \cdot b \cdot \bar{b} = (m^2 + 5n^2)(p^2 + 5q^2)$. Wie folgt daraus, dass a oder b gleich ± 1 sein muss?

1.5. **Fibonacci-Zahlen:** Wenn man den letzten Rest beim Goldenen Schnitt vernachlässigt, entstehen die Fibonaccizahlen 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...: die jeweils nächste Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 2, \\ f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \end{aligned}$$

für $k = 2, 3, \ldots$. Machen Sie sich dieses an der Figur klar.



2. Gleichung 2. Ordnung: Selbstähnlichkeit

Aus der zweiten Figur auf Seite 7 sehen wir, das die quadratische Gleichung des Goldenen Schnittes, $x^2 = x + 1$ mit *Selbstähnlichkeit* zu tun hat: Eine Figur heißt *selbstähnlich*, wenn sie eine Teilfigur enthält, die zur ganzen Figur ähnlich ist (kongruent nach Verkleinerung). Dem antiken griechischen Mathematiker Theodoros von Kyrene (ca. 460 - 390 v.Chr.) verdanken wir die Erkenntnis, dass dies für viele quadratische Gleichungen der Fall ist; man kann daraus die Irrationalität der Lösungen ablesen und diese beliebig genau berechnen.

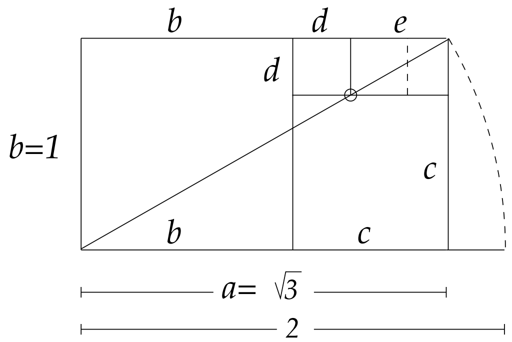
Theodoros war der Lehrer eines sehr viel bekannteren Mathematikers, Theaitetos (415 - 369 v.Chr.), dem wir die Entdeckung des Dodekaeders und Ikosaeders sowie den Beweis der Irrationaliät aller Quadratwurzeln von Primzahlen verdanken, so wie er später in den "Elementen" des Euklid überliefert wurde und heute noch geführt wird.[14]

[14] $\sqrt{p} = \frac{k}{n} \Rightarrow p = \frac{k^2}{n^2} \Rightarrow (*)\ n^2 p = k^2$. In einer Quadratzahl wie k^2 und n^2 kommt jeder Primfaktor in gerader Potenz vor. In der Gleichung $(*)$ kommt also der Primfaktor p links in ungerader Potenz, rechts in gerader Potenz vor, Widerspruch!

In dem gleichnamigen Dialog von Platon erinnert Theaitetos an diese Leistung und vergleicht sie mit der seines Lehrers:

> "Über Quadratwurzeln ('dynamis') zeichnete uns Theodoros hier etwas, womit er von den Quadraten von drei und fünf Quadratfuß Flächeninhalt bewies, dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige. Und so ging er jede Quadratwurzel einzeln durch bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß; bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel so etwas ein, da der Quadratwurzeln unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchen, sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir diese Quadratwurzeln alle behandeln könnten."

Mein kürzlich verstorbener Kollege Benno Artmann hat einen Aufsatz geschrieben, in dem er zeigt, was Theodoros vermutlich gezeichnet hat und warum er nicht weiter als bis 17 gekommen ist.[15] Hier ist die Figur für $\sqrt{3}$, die Theodoros vermutlich gefunden hat:



Zur geometrischen Konstruktion von $\sqrt{3}$ benötigt man ein Rechteck mit Höhe $b = 1$ und Diagonale 2, dann ist die Breite $a = \sqrt{3}$ (denn $1^2 + \sqrt{3}^2 = 2^2$). Dieses ist leicht konstruierbar. Nun führen wir die Wechselwegnahme von $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$ durch wie in der Rechteckfigur auf Seite 4: Wir versuchen, das Rechteck durch jeweils möglichst große Quadrate auszufüllen. Zuerst spalten wir ein Quadrat der Seitenlänge b ab, danach eins der Seitenlänge $c = a - b$, danach eins mit Seitenlänge $d = b - c$. Von dieser Sorte würde noch ein zweites Quadrat in den freien Raum passen. Aber schon beim ersten Quadrat mit Seitenlänge d macht Theodoros eine entscheidende Beobachtung: Der rechte untere Eckpunkt (in der Figur eingekreist) liegt auf der Diagonale des ursprünglichen Rechtecks! Ob Theodoros das wirklich bewiesen

[15] B. Artmann: A proof for Theodoros' theorem by drawing diagrams, Journal of Geometry 49 (1994). Siehe auch Janina Deininger: Ein Beweis des Theorems von Theodoros durch graphische Darstellung, Zulassungsarbeit, Augsburg 2012.

hat oder nur an der Zeichnung abgelesen, wissen wir nicht. Ein algebraischer Beweis dafür ist schnell gegeben: Zu zeigen ist $e/d = a/b$ oder, was dasselbe ist, $be = ad$. Dabei ist

$$e = c - d, \quad d = b - c, \quad c = a - b,$$

also

$$\begin{aligned} be &= b(c-d) = b(c-b+c) = 2bc - b^2 = 2b(a-b) - b^2 = 2ab - 3b^2\,, \\ ad &= a(b-c) = a(b-a+b) = 2ab - a^2\,, \end{aligned}$$

also

$$be = ad \iff 2ab - 3b^2 = 2ab - a^2 \iff 3b^2 = a^2 \iff a/b = \sqrt{3}.$$

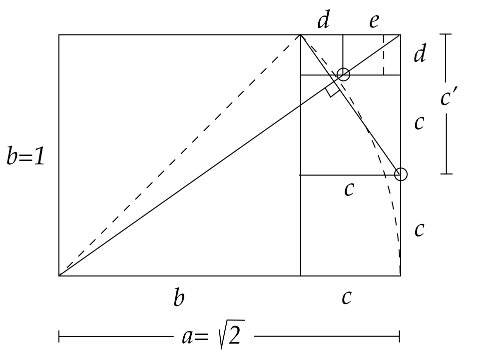
Theodoros hat mit diesen Zeichnungen weit mehr geleistet, als ihm sein Schüler in Platons Dialog zugesteht: Er hat nicht nur die Irrationalität der Quadratwurzeln der Primzahlen von 2 bis 17 bewiesen ("dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige"), sondern seine Zeichnungen enthalten die volle Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzeln, aus der sie mit beliebiger Genauigkeit berechnet, d.h. durch Brüche approximiert werden können. Im vorliegenden Fall $a/b = \sqrt{3}$ haben wir

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b}, \quad \frac{b}{c} = 1 + \frac{d}{c}, \quad \frac{c}{d} = 1 + \frac{e}{d} = 1 + \frac{a}{b}$$

und daraus

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{a}{b}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+\dots}}} = [1; \overline{1,2}]\,.$$

Sehen wir uns die entsprechende Figur für $\sqrt{2}$ an:



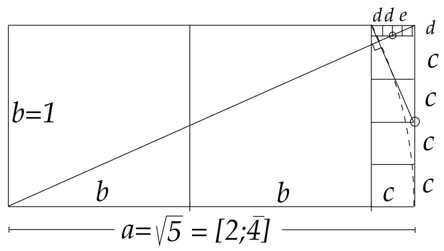
Auch hier wird zunächst $\sqrt{2}$ konstruiert, indem die Diagonale des Einheitsquadrates in die Horizontale gedreht wird. Auf den ersten Blick sieht das Bild sehr ähnlich aus wie das von $\sqrt{3}$, nur dass $c = a-b$ kleiner ist und daher zwei Quadrate mit Kantenlänge c übereinander passen. Aber es gibt einen wichtigen Unterschied: Nicht nur das Rechteck oben rechts mit Kantenlängen e und d ist ähnlich zum Ausgangsrechteck, sondern bereits das (um 90 Grad gedrehte) Rechteck mit Kantenlängen $c' = c + d = b - c$ und c, denn seine Diagonale steht senkrecht auf der Diagonale des Ausgangsquadrats; das Seitenverhältnis muss also (nach Vertauschen von Breite und Höhe) das gleiche sein wie beim Ausgangsquadrat. In der Tat ist

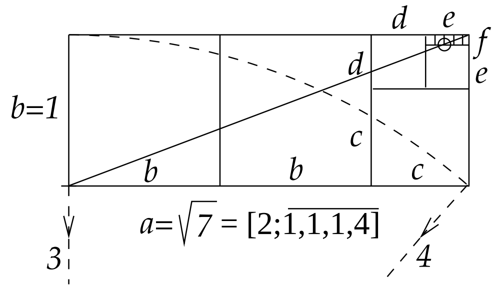
$$\begin{array}{rcrcl} a/b = c'/c & \iff & ac & = & bc' \\ & & & = & b(b-c) \\ & \iff & a(a-b) & = & b(b-(a-b)) \\ & & & = & b(2b-a) \\ & \iff & a^2 - ab & = & 2b^2 - ba \\ & \iff & a^2 & = & 2b^2 \\ & \iff & a/b & = & \sqrt{2}. \end{array}$$

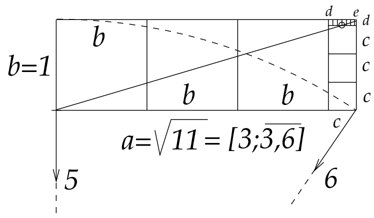
Aus den Relationen $\frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{d}$, $\frac{b}{c} = 1 + \frac{c'}{c} = 1 + \frac{a}{b}$ folgt die Kettenbruchentwicklung

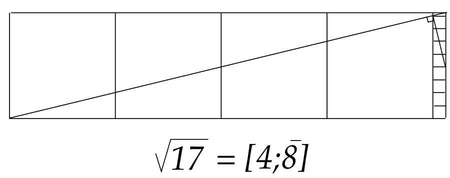
$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}} = [1; \overline{2}]$$

Hier noch die Figuren für $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ und $\sqrt{17}$:





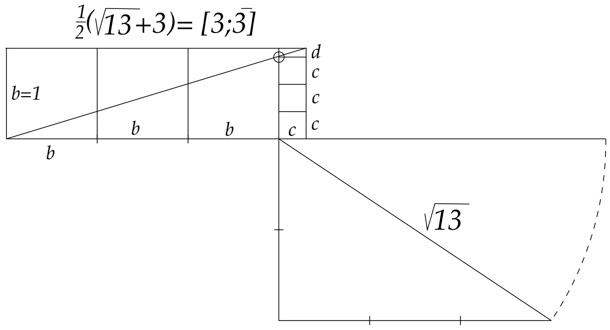




Der Fall $\sqrt{13}$ liegt etwas anders; seine Kettenbruchentwicklung[16] ist $[3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$. Mit der langen Periode und der großen Zahl 6 am Periodenende wäre er noch viel schwieriger zu zeichnen als $\sqrt{7}$. Aber es gibt eine einfachere Möglichkeit, wenn man etwas allgemeinere quadratische Gleichungen zulässt. Die einfachsten periodischen Kettenbrüche haben

[16] Vgl. http://mathworld.wolfram.com/PeriodicContinuedFraction.html

Periode 1 und sind daher von der Gestalt $x = k + \frac{1}{k+\frac{1}{k\ldots}} = k + \frac{1}{x}$; ihre Gleichung $x = k + \frac{1}{x}$ führt auf die quadratische Gleichung $x^2 = kx + 1$, also $x = \frac{1}{2}(k + \sqrt{4 + k^2})$. Für $k = 1$ erhalten wir den goldenen Schnitt $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, für $k = 3$ ist $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$.



Warum kam Theodoros nicht weiter als bis $\sqrt{17}$? Weil $\sqrt{19}$ die Kettenbruchentwicklung $[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ hat, die mit ihren 8 winzigen Quadraten am Ende einer langen Periode sehr schwer sauber zu zeichnen ist.

Aber gibt es zu jeder Quadratwurzel eine periodische Kettenbruchentwicklung? Das hat erst Lagrange[17] über 2000 Jahre später gezeigt. Der Beweis ist für uns, die wir in Variablen und Variablentransformationen denken, einfach.

Sehen wir uns noch einmal den Fall $\sqrt{3}$ von der algebraischen Seite an. Das Verhältnis $x_1 = a/b$ ist die positive Lösung der Gleichung $x_1^2 = 3$. Wir betrachten nacheinander die folgenden Verhältnisse:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & = & a/b & & & & \\
x_2 & = & c/b & = & (a-b)/b & = & x_1 - 1\,, \\
x_3 & = & b/c & = & 1/x_2\,, & & \\
x_4 & = & d/c & = & (b-c)/c & = & x_3 - 1\,, \\
x_5 & = & c/d & = & 1/x_4\,, & & \\
x_6 & = & e/d & = & (c-d)/d & = & x_5 - 1
\end{array}$$

Jedes diese Verhältnisse ist die positive Lösung einer quadratischen Gleichung:[18]

[17]Joseph-Louis Lagrange, 1736 (Turin) - 1813 (Paris)

[18]Man beachte im Folgenden: Mit $x = 1/\tilde{x}$ gilt $ax^2 - bx = c \iff a/\tilde{x}^2 - b/\tilde{x} = c \iff a - b\tilde{x} = c\tilde{x}^2$.

$$\begin{array}{lrcccl}
(a) & x_1^2 & = & 3\,, & x_1 & = & x_2+1 \\
(b) & x_2^2+2x_2 & = & 2\,, & x_2 & = & 1/x_3 \\
(c) & 1+2x_3 & = & 2x_3^2\,, & x_3 & = & x_4+1 \\
(d) & 1+2(x_4+1) & = & 2(x_4^2+2x_4+1) & & \Rightarrow & \\
 & 1-2x_4 & = & 2x_4^2\,, & x_4 & = & 1/x_5 \\
(e) & x_5^2-2x_5 & = & 2\,, & x_5 & = & x_6+1 \\
(f) & x_6^2+2x_6+1-2(x_6+1) & = & 2 & & \Rightarrow & \\
 & x_6^2 & = & 3\,. & & &
\end{array}$$

Das letzte Verhältnis x_6 erfüllt also wieder dieselbe Gleichung wie das erste x_1, d.h. $x_6 = x_1 = \sqrt{3}$, was wir ja schon auf Seite 12 gesehen haben.

Um dieses Verfahren besser zu verstehen, betrachten wir beliebige quadratische Gleichungen

$$ax^2 + bx = c \tag{2}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c. Die beiden Lösungen

$$x_\pm = \frac{1}{2a}(b \pm \sqrt{b^2+4ac}) \tag{3}$$

haben unterschiedliche Vorzeichen genau dann, wenn $ac > 0$, was wir voraussetzen wollen. Genauer können wir sogar annehmen, dass $a > 0$ und $c > 0$. Auf die Variable x wenden wir in jedem Schritt des Verfahrens eine von zwei mögliche Transformationen an:

(A) Die Verschiebung nach links, $\tilde{x} = x - k$ mit $k \in \mathbb{N}$, aber nicht zu weit nach links: die positive Lösung x_+ soll auch nach der Verschiebung positiv bleiben: $x_+ - k > 0$, d.h. $k < x_+$,

(B) Die Inversion $\tilde{x} = 1/x$.

Bei diesen Transformationen ändern sich die Koeffizienten; die transformierte Variable $\tilde{x}$ erfüllt eine neue Gleichung

$$\tilde{a}\tilde{x}^2 + \tilde{b}\tilde{x} = \tilde{c},$$

aber auch die neuen Koeffizienten $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ sind ganze Zahlen und $\tilde{a}, \tilde{c}$ sind positiv. Zudem hat die *Diskriminante*

$$d = b^2 + 4ac \tag{4}$$

sich nicht geändert, $\tilde{d} = d$. Das ist klar für die Verschiebung (A), weil die Differenz $x_+ - x_- = d/a$ (gemäß der “Mitternachtsformel” (3)) bei Verschiebungen gleich bleibt und auch $\tilde{a} = a$ gilt. Für die Inversion (B) gilt $\tilde{a} = c$, $\tilde{c} = a$ und $\tilde{b} = -b$, also wiederum $\tilde{d} = d$ nach (4).

Nun gibt es aber für gegebenes d nur eine begrenzte Anzahl von Tripeln ganzer Zahlen (a, b, c) mit $a, b > 0$ und $d = b^2 + 4ac$. Die Transformationskette A-B-A-B-A-B ... des obigen Verfahrens muss deshalb nach endlich vielen Schritten auf eine Gleichung führen, die im Verfahren schon einmal vorher aufgetreten ist; von da an wiederholt sich alles. Die Lösungen x der Gleichungen (2) mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c und $ab > 0$ haben also eine periodische Wechselwegnahme oder Kettenbruchentwicklung. Stellt man diese graphisch dar durch Ausfüllen eines Rechtecks durch Quadrate, so erhält man stets eine selbstähnliche Figur.

Die Methode von Theodoros beruht also in der Tat auf einem allgemeinen Verfahren, das für alle Quadratwurzeln und weit darüber hinaus Gültigkeit hat.

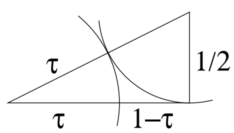
Übungen

2.1. **Konstruierbarkeit von Quadratwurzeln.** Man zeige, dass jede ungerade Zahl Differenz von zwei (sogar benachbarten) Quadratzahlen ist.

2.2. **Beweis der Selbstähnlichkeit.** Man mache sich den Beweis der Selbstähnlichkeit des Rechtecks für $\sqrt{3}$ klar und übertrage ihn auf die Rechtecke für $\sqrt{5}$ und $\sqrt{11}$.

2.3. **Einfache Perioden.** Was ist die nächste "halbe" Wurzel, die mit mit einem Kettenbruch der Periode Eins darstellen kann?

2.4. **"Goldenes Rechteck".** Man konstruiere die selbstähnliche Figur für den Goldenen Schnitt $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Der Goldene Schnitt kann zum Beispiel wie folgt konstruiert werden:



2.5. **Anzahl der Tripel** (a, b^2, c)**.** In der Gleichung $x^2 = 3$ ist $a_o = 1$, $b_o = 0$ und $c_o = 3$, also $d = b_o^2 + 4a_oc_o = 12$. Finden Sie alle ganzzahligen Tripel (a, b^2, c) mit $a, c > 0$ UND $b^2 + 4ac = 12$. Welche von ihnen kommen in dem beschriebenen Verfahren vor?

3. Gleichung 3. Ordnung: Geburt der komplexen Zahlen

Das europäische Mittelalter war in mathematischer Hinsicht eine Zeit des Stillstandes. Mathematik fand anderswo statt, vor allem in der islamischen Welt, die das antike Erbe übernahm und fortführte und mit der indischen Mathematik verband. Die Algebra wuchs neben der Geometrie zu einem eigenständigen Zweig der Mathematik heran. Europa nahm diese Entwicklung erst im ausgehenden Mittelalter zur Kenntnis. Dann begann eine rege Übersetzungstätigkeit, besonders in Spanien und Süditalien, wo die beiden Kulturen in Kontakt standen. Auch viele der antiken Schriften wurden erst durch Rückübersetzung aus dem Arabischen in Europa wieder zugänglich, was schließlich zur "Wiedergeburt" (*Renaissance*) der antiken Wissenschaft in Europa führte.

Der erste substantielle Beitrag der europäischen Mathematik zur Algebra war um 1520 die Lösung der *kubischen Gleichung*[19]

$$x^3 + ax = b. \tag{5}$$

Man sieht zunächst nicht, wie diese Gleichung gelöst werden kann. Aber es gibt andere kubische Gleichungen, deren Lösung auf der Hand liegt: Die Gleichung

$$(x + u)^3 = v^3 \tag{6}$$

hat offensichtlich die Lösung

$$x = v - u. \tag{7}$$

Die Idee ist nun, die einfache Gleichung (6) auf die Form der schwierigen (5) zu bringen: Es gilt

$$(x + u)^3 = x^3 + 3x^2u + 3xu^2 + u^3 = x^3 + 3xu(x + u) + u^3\,,$$

und weil wir $x + u$ gemäß (7) durch v ersetzen können (das ist der Trick), verwandelt sich (6) in die Gleichung

$$x^3 + 3uvx = v^3 - u^3. \tag{8}$$

Diese Gleichung ist tatsächlich von der Form (5) mit

$$a = 3uv, \quad b = v^3 - u^3. \tag{9}$$

Wenn also die Koeffizienten a, b der "schwierigen" Gleichung (5) die Form (9) haben, dann ist $x = v - u$ eine Lösung. Um solche u und v

[19] Die allgemeinste kubische Gleichung ist $x^3 + ax^2 + bx = c$. Sie lässt sich aber leicht auf die Form (5) bringen, wenn man anstelle von x den Ausdruck $\tilde{x} - \alpha/3$ einsetzt ("*substituiert*"); dann ergibt sich eine kubische Gleichung in $\tilde{x}$ ohne $\tilde{x}^2$-Term.

zu finden, müssen wir die Gleichungen (9) nach u und v auflösen:

$$u = a/(3v), \quad v^3 = b + u^3 = b + a^3/(3v)^3.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung noch einmal mit v^3, so erhalten wir eine quadratische Gleichung für v^3, nämlich $v^6 = bv^3 + (\frac{a}{3})^3$. Quadratische Gleichungen können wir lösen: $v^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{D}$ mit $D := (\frac{a}{3})^3 + (\frac{b}{2})^2$, und folglich $-u^3 = b - v^3 = \frac{b}{2} \mp \sqrt{D}$. Als Lösung $x = v - u$ erhalten wir daher

$$x = \sqrt[3]{b/2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{b/2 - \sqrt{D}}, \quad D = (a/3)^3 + (b/2)^2. \tag{10}$$

Diese Formel wurde um 1520 von del Ferro[20] entdeckt, der sie aber nur an einen seiner Schüler weitergab. Davon erfuhr Tartaglia[21] und fand die Formel 1535 selbst. Er gab sie 1539 an seinen Freund Cardano[22] weiter, der sie 1545 in seinem Buch "Ars Magna" veröffentlichte;[23] seither heißt sie *Cardanosche Formel*. Danach waren Cardano und Tartaglia nicht mehr so gut befreundet.

Beispiel 1: $x^3 - 6x = 9$. Dann ist

$$\frac{a}{3} = -2, \ \frac{b}{2} = \frac{9}{2}, \ D = -8 + \frac{81}{4} = \frac{81 - 32}{4} = \frac{49}{4}.$$

Damit ist $\sqrt{D} = \frac{7}{2}$ und $\frac{b}{2} + \sqrt{D} = \frac{9+7}{2} = 8$ und $\frac{b}{2} - \sqrt{D} = \frac{9-7}{2} = 1$, also $x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$. Probe: $3^3 - 6 \cdot 3 = 27 - 18 = 9$.

Beispiel 2: $x^3 - 6x = 4$. Dann ist

$$\frac{a}{3} = -2, \ \frac{b}{2} = 2, \ D = -8 + 4 = -4.$$

Jetzt haben wir ein Problem: Weil D negativ ist, können wir die Quadratwurzel $\sqrt{D}$ nicht ziehen! Die Lösungsmethode scheint zu versagen. Cardano wusste keinen Rat und gab diesem Fall den Namen *Casus irreducibilis* (unlösbarer Fall). Das war eigentlich ein Skandal, denn das Polynom $f(x) = x^3 - 6x - 4$ hat mit Sicherheit Nullstellen, weil $f(0) = -4$ und $f(3) = 27 - 18 - 4 = 5$; die Werte von f steigen also zwischen $x_o = 0$ und $x_1 = 3$ von $f(x_o) = -4$ auf $f(x_1) = 5$ und müssen irgendwo dazwischen die Null treffen.[24] Man muss im vorliegenden Fall auch nicht lange danach suchen: $x = -2$ ist eine Nullstelle,

[20]Scipione del Ferro, 1465 - 1526, Bologna

[21]Nicolo Tartaglia, 1499 - 1557, Breschia, Venedig

[22]Girolamo Cardano, 1501 - 1576, Mailand, Pavia

[23]Anlass war die Lösung der *quartischen Gleichung* durch Cardanos Schüler Lodovico Ferrari (Bologna 1522 - 1565), wobei die Lösung der kubischen Gleichung verwendet wurde.

[24]Der *Zwischenwertsatz* der Analysis berechnet diese Nullstelle sogar.

denn $f(-2) = -8 + 12 - 4 = 0$. Aber Cardano wusste nicht, wie man diese Lösung mit seiner Formel finden sollte.

Gut 20 Jahre nach Cardanos "Ars Magna" unternahm ein Ingenieur namens Bombelli[25] einen neuen Anlauf und war erfolgreich. Wir erklären seine Methode am Beispiel 2 oben. Bombelli wusste, dass negative Zahlen wie -4 keine Quadratwurzel haben, denn das Quadrat negativer wie positiver Zahlen ist positiv, Minus mal Minus ergibt Plus.[26] Aber wir können einmal so tun, als gäbe es solche Zahlen doch (sie wurden später "*imaginäre*" Zahlen genannt, Zahlen, die nur in der Vorstellung existieren) und damit wie gewohnt rechnen. Eigentlich genügt sogar eine einzige "imaginäre" Zahl, nämlich $i := \sqrt{-1}$; denn dann wäre $i^2 = -1$ und damit $(2i)^2 = 4i^2 = -4$, also $\sqrt{-4} = 2i$. Die Lösung gemäß Cardanos Formel (10) ist demnach

$$x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}. \tag{11}$$

Doch was sollen wir mit einem solchen Ergebnis anfangen? Wie sollen wir die 3. Wurzel aus $2 + 2i$ ziehen? Das wusste auch Bombelli nicht. Aber die Umkehrung, die 3. Potenz solcher Zahlen konnte er immerhin berechnen, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (-1+i)^3 &= -1 + 3i - 3i^2 + i^3 \\ &= -1 + 3i + 3 - i \\ &= -1 + 3 + (3-1)i \\ &= \ 2 \ + \ 2i \end{aligned}$$

und ebenso $(-1-i)^3 = 2-2i$. Das ist ein Glücksfall für unser Beispiel: Die dritte Potenz ergibt genau die Zahlen, deren dritte Wurzel wir suchen; diese sind also *Kubikzahlen*, dritte Potenzen bekannter Zahlen, wie auch 1 und 8 in Beispiel 1. Also ist $\sqrt[3]{2 \pm 2i} = -1 \pm i$ und aus (11) erhalten wir

$$x = (-1+i) + (-1-i) = -2.$$

Wie durch Zauberei sind die "imaginären" Wurzeln negativer Zahlen verschwunden und wir erhalten die uns schon bekannte Lösung $x = -2$.

Bombelli veröffentlichte seine Ergebnisse 1572 in seinem Algebra-Lehrbuch. Eine Sternstunde der Mathematik: Er hatte es gewagt, die Grenzen der bisherigen Vorstellung ("Quadratwurzeln negativer Zahlen

[25] Rafaele Bombelli, 1526 - 1572, Bologna

[26] Auch diese Erkenntnis war noch nicht so alt. Erst seit Kurzem hatte man gelernt, mit negativen Zahlen zu rechnen. Ursache hierfür war das besonders in Oberitalien aufkommende Banken- und Kreditwesen. Damit erst hatte man die reellen Zahlen vervollständigt und war vom Zahlenstrahl zur Zahlengeraden übergegangen.

gibt es nicht") zu verlassen, und gelangte damit zu richtigen Ergebnissen! Er hatte eine weitere Zahlbereichserweiterung gewagt. Es dauerte mehr als zwei Jahrhunderte, bis die "imaginären Zahlen" ihrer Mystik ganz entkleidet und voll akzeptiert waren. Summen von reellen und imaginären Zahlen, wie sie bei den Rechnungen aufgetreten sind, nennt man *komplexe* (= "zusammengesetzte") Zahlen.

Man muss sich bei den komplexen Zahlen allerdings von einigen gewohnten Vorstellungen trennen. Zum Beispiel stimmt es nicht mehr, dass eine Größe sich durch Hinzufügen (Addition) einer anderen vermehrt, aber das war ja schon bei den negativen Zahlen nicht mehr wahr. Dieses Phänomen wurde unter dem Namen *Interferenz* zu einer Grundtatsache der Physik des 20. Jahrhunderts, aus der die komplexen Zahlen deshalb nicht mehr wegzudenken sind.[27]

Außerdem muss man sich eine neue geometrische Vorstellung von den Zahlen machen: Zahlenstrahl und Zahlengerade werden durch die *Zahlenebene* abgelöst. Diesen Schritt hat erst *C.F. Gauß* um 1800 vollzogen.

Übungen

3.1. **Cardanosche Formel. (a)** Finden Sie mit der Cardanoschen Formel (10) eine Lösung x für die kubische Gleichung

$$x^3 - 18x = 35. \tag{12}$$

(b) Wie findet man alle kubischen Gleichungen, für die die Cardanoschen Formeln "aufgehen"? Starten Sie dazu mit zwei beliebigen Kubikzahlen[28] k_+ und k_- mit $k_+ > k_-$. Berechnen Sie b und $\sqrt{D}$ aus den Gleichungen $k_+ = b/2 + \sqrt{D}$ und $k_- = b/2 - \sqrt{D}$. Setzen Sie

$$(a/3)^3 = D - (b/2)^2 \tag{13}$$

mit $D := (\sqrt{D})^2$. Was ist dann die Cardanosche Lösung x der Gleichung

$$x^3 + ax = b \tag{14}$$

für dieses a und b? Aus (13) kann man nicht erkennen, dass a rational ist, aber aus (14), wieso? Probieren Sie alles aus für die Kubikzahlen $k_+ = 3^3 = 27$ und $k_- = 2^3 = 8$ (Hinweise: $19^2 = 361$, $35^2 = 1225$, $\frac{1225-361}{4} = 216 = 6^3$; überzeugen Sie sich selbst!) und vergleichen Sie mit Teilaufgabe (a).

---

[27] www.quantenphysik-schule.de, www.didaktik.physik.uni-erlangen.de

[28] Eine ganze Zahl k heißt *Kubikzahl*, wenn es eine ganze Zahl m mit $m^3 = k$ gibt.

3.2. **Kubische Gleichung, Casus Irreducibilis.** Lösen Sie die kubische Gleichung

$$x^3 - 9x = 10 \tag{15}$$

mit Hilfe der Cardanoschen Formel (10). Hinweis: Berechnen Sie zuvor die komplexe Zahl $(1 \pm \sqrt{2}\, i)^3$.

4. Gleichung 4. Ordnung: Resolventen

Die allgemeine quartische Gleichung

$$p(x) := x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0 \tag{16}$$

wurde zuerst von Ludovico Ferrari,[29] einem Schüler von Cardano gelöst. Die Methode war ähnlich der Lösung der kubischen Gleichung durch Vergleich mit einer einfacher zu lösenden Gleichung, wobei $p(x)$ als Produkt von zwei quadratischen Ausdrücken angesetzt wurde (siehe Übungen). Aber bei der quintischen Gleichung versagt die analoge Methode (Vergleich mit dem Produkt eines quadratischen und eines kubischen Ausdrucks), denn sie führt auf Gleichungen, die komplizierter sind als die Ausgangsgleichung. Man möchte gerne verstehen, wo eigentlich der Unterschied liegt.

Die Zahlen a, b, c, d sind gegeben, die Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4 gesucht. Der umgekehrte Process, nämlich a, b, c, d aus x_1, x_2, x_3, x_4 zu berechen, wäre viel einfacher: Das normierte quartische Polynom mit den Nullstellen $x_1, \dots, x_4$ ist gerade

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Durch Ausmultiplizieren und Vergleich mit (16) können wir a, b, c, d in Abhängigkeit von $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3, x_4)$ berechnen:

$$\begin{array}{rcccl} a &=& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &=& : e_1(\vec{x}), \\ b &=& x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &=& : e_2(\vec{x}), \\ c &=& x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &=& : e_3(\vec{x}), \\ d &=& x_1x_2x_3x_4 &=& ; e_4(\vec{x}). \end{array} \tag{17}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite sind besondere Funktionen der vier Variablen $x_1, \dots, x_4$: Ihr Wert ist unabhängig von der Reihenfolge der Variablen $x_1, \dots, x_4$. Diese Eigenschaft ist keineswegs selbstverständlich; für die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ zum Beispiel gilt sie nicht. Setzen wir etwa $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, so ist $f(1, 2) = 1 \cdot 2 = 2$, aber $f(2, 1) = 4 \cdot 1 = 4$. Funktionen von $\vec{x}$, deren Werte von der Reihenfolge der Variablen unabhängig sind, heißen *symmetrische Funtionen.*

[29] 1522 - 1565, Bologna

Diese hier, e_1, e_2, e_3, e_4, sind besonders einfache symmetrische Funktionen; alle anderen symmetrischen Funktionen kann man aus ihnen zusammensetzen, deshalb heißen sie *elementarsymmetrisch.* Anders gesagt, jeden symmetrischen Ausdruck in $\vec{x} = (x_1, \dots, x_4)$ kann ich aus den Koeffizienten a, b, c, d berechnen, ohne die Lösungen $x_1, \dots, x_4$ zu kennen.

Eigentlich wollen wir ja den umgekehrten Weg gehen und aus den Koeffizienten a, b, c, d die Lösungen x_1, x_2, x_3, x_4 berechnen. Dazu suchen wir eine Zwischenstation, nämlich Ausdrücke y_1, y_2, y_3, die aus a, b, c, d errechnet werden können und aus denen $\vec{x}$ wiederum berechnet werden kann; solche Ausdrücke heißen *Resolventen.* Die y_j werden auch Funktionen von $\vec{x}$ sein, so wie die Koeffizienten a, b, c, d, aber anders als diese wird ihr Wert nicht unter allen 24 Umordnungen (Permutationen) unverändert bleiben, sondern nur unter einigen wenigen Umordnungen, nämlich den gleichzeitigen Vertauschungen zweier Argumente, (12)(34), (13)(24) und (14)(23);[30] wir wollen sie "halbsymmetrisch" nennen. Die einfachsten solchen Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1+x_2)(x_3+x_4) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 \\ y_2 &= (x_1+x_3)(x_2+x_4) = x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_2 + x_3x_4 \\ y_3 &= (x_1+x_4)(x_2+x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_4x_2 + x_4x_3 \end{aligned} \tag{18}$$

Auf Grund seiner Bildung ist y_1 unverändert ("invariant") unter der Permutation (12)(34), aber erstaunlicherweise ist es auch invariant unter (13)(24) und (14)(23), weil

$$(x_3+x_4)(x_1+x_2) = (x_1+x_2)(x_3+x_4) = (x_4+x_3)(x_2+x_1),$$

und dasselbe gilt für y_2 und y_3. Diese neuen Ausdrücke y_1, y_2, y_3 sind die Lösungen einer kubischen Gleichung, nämlich

$$0 = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3) = y^3 - uy^2 + vy - w\,. \tag{19}$$

Ganz rechts steht der ausmultiplizierte Ausdruck, und wie wir bereits wissen, sind die Koeffizienten u, v, w die elementarsymmetrischen Funktionen in $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\begin{aligned} u &= y_1 + y_2 + y_3 &&= \sigma_1(\vec{y}) \\ v &= y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &&= \sigma_2(\vec{y}) \\ w &= y_1y_2y_3 &&= \sigma_3(\vec{y}) \end{aligned} \tag{20}$$

Setzt man (18) ein, so werden diese Ausdrücke Funktionen in $\vec{x}$, und zwar wieder symmetrische Funktionen (Halbsymmetrie der y_j zusammen mit den symmetrischen Ausdrücken in $\vec{y}$). Zum Beispiel können

[30] (12)(34) ist die Umordnung, die x_1 und x_2 miteinander vertauscht und gleichzeitig x_3 und x_4, und entsprechend die anderen.

wir den ersten Koeffizienten leicht ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
u &= \qquad y_1 + y_2 + y_3 \\
&= \quad x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 \\
&\quad + x_1x_2 + x_1x_4 + x_3x_2 + x_3x_4 \\
&\quad + x_1x_2 + x_1x_3 + x_4x_2 + x_4x_3 \\
&= \qquad 2b\,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Ähnlich, aber mit viel mehr Rechenaufwand erhalten wir

$$v = b^2 + ac - 4d \tag{22}$$

$$w = abc - a^2d - c^2 \tag{23}$$

Damit kennen wir die Koeffizienten von (19). Diese kubische Gleichung können wir lösen (vgl. den vorigen Abschnitt) und ermitteln damit die Zahlen y_1, y_2, y_3. Daraus sind die x_1, x_2, x_3, x_4 leicht zu berechnen: Setzen wir $z_i = x_1 + x_i$ mit $i = 2, 3, 4$, so gilt wegen $a = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$z_i^2 - az_i = -y_{i-1}\,, \tag{24}$$

und z_i ist eine Lösung dieser quadratischen Gleichung. Da $z_2 + z_3 + z_4 = 2x_1 + a$, haben wir x_1 ermittelt und damit auch $x_i = z_i - x_1$ für $i = 2, 3, 4$.

Beispiel:

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0 \tag{25}$$

mit $a = 2$, $b = -13$, $c = -14$, $d = 24$. Nach den obigen Gleichungen für u, v, w gilt

$$
\begin{aligned}
u &= 2b = -26 \\
v &= b^2 + ac - 4d \\
&= 169 - 28 - 96 = 45 \\
w &= abc - a^2d - c^2 \\
&= 28 \cdot 13 - 96 - 14 \cdot 14 \\
&= 14 \cdot (26 - 14) - 96 = (14 - 8) \cdot 12 = 72.
\end{aligned}
$$

Die zugehörige kubische Gleichung lautet also

$$y^3 + 26y^2 + 45y - 72 = 0. \tag{26}$$

Eine Lösung von (26) ist $y_1 = 1$, denn $1 + 26 + 45 - 72 = 0$. Wir können die linke Seite von (26) also durch $y - 1$ teilen und erhalten $(y^3 + 26y^2 + 45y - 72) : (y - 1) = y^2 + 27y + 72$. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $y^2 + 27y + 72 = 0$ sind[31] $y_2 = -24$ und $y_3 = -3$. Für $z = x_1 + x_i$ $(i = 2, 3, 4)$ finden wir mit (24) die Gleichung $z^2 - 2z = -y$ mit $y \in \{1, -24, -3\}$, also $(z - 1)^2 = -y + 1 \in \{0, 25, 4\}$

[31] $(y + \frac{27}{2})^2 = y^2 + 27y + \frac{27^2}{4} = \frac{9^3}{4} - 72 = \frac{9}{4} \cdot (81 - 32) = (\frac{3}{2} \cdot 7)^2 \Rightarrow y = -\frac{27}{2} \pm \frac{21}{2}$.

und $z \in \{1, 1 \pm 5, 1 \pm 2\}$. Welche Lösung der quadratischen Gleichung jeweils die richtige ist, muss ausprobiert werden; hier sind die richtigen Lösungen $1, 1-5, 1+2$, also: $x_1+x_2 = 1$, $x_1+x_3 = -4$, $x_1+x_4 = 3$. Die Summe dieser drei Terme ist einerseits $2x_1+2$, weil $x_1+x_2+x_3+x_4 = a = 2$, andererseits ist sie gleich $1-4+3 = 0$, also ist $2x_1+2 = 0$ und damit $x_1 = -1$ sowie $x_2 = 1+1 = 2$, $x_3 = 1-4 = -3$, $x_4 = 1+3 = 4$.

Das dies in der Tat die richtigen Lösungen sind, kann man durch Einsetzen in die elementarsymmetrischen Funktionen sehen; die so entstehenden Zahlen müssen die Koeffizienten sein.

Übungen

4.1. **Probe.** Zeigen Sie durch Einsetzen der Lösungen $-1, 2, -3, 4$ in die elementarsymmetrischen Funktionen, dass wir tatsächlich die Koeffizienten von (25) zurückerhalten.

4.2. **Ferraris Methode.** Ludovico Ferrari löste um 1540 die allgemeine quartische Gleichung[32] $f(x) = 0$ mit

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c\,, \tag{1}$$

indem er $f(x)$ mit einem Produkt von quadratischen Polynomen verglich,

$$f(x) = (x^2 + ux + v)(x^2 - ux + w) \tag{2}$$

für Zahlen u, v, w, die aus a, b, c zu berechnen sind. Zeigen Sie, dass dies durch Lösung einer kubischen Gleichung möglich ist! Somit sind die Nullstellen von f einfach die (leicht zu berechnenden) Nullstellen der beiden quadratischen Polynome $x^2 + ux + v$ und $x^2 - ux + w$.

Anleitung: Bringen Sie das "einfache" Polynom (2) durch Ausmultiplizieren auf die Form des "schwierigen" (1) und vergleichen Sie die Koeffizenten in (1) und (2). Sie erhalten drei Gleichungen; die dritte ist $vw = c$. Dieses Gleichungssystem müssen Sie nach den Variablen u, v, w auflösen. Die ersten beiden Gleichungen können Sie als Gleichungen für $w + v$ und $w - v$ auffassen. Durch Addition und Subtraktion bekommen Sie Gleichungen für $2w$ und $2v$. Wenn Sie diese miteinander multiplizieren und $vw = c$ ausnutzen, erhalten Sie eine kubische Gleichung für u^2. Wenn u^2 bekannt ist (muss nicht berechnet werden!), können auch v und w bestimmt werden.

[32] Der x^3-Term kann ja leicht beseitigt werden.

4.3. **Permutationen und Würfeldrehungen.** Zeigen Sie, dass es gleichviele Permutationen von vier Gegenständen wie Würfeldrehungen gibt, nämlich 24. Folgern Sie, dass die Würfeldrehungen genau den Permutationen der vier Raumdiagonalen des Würfels entsprechen. Die Permutationen (12)(34), (13)(24), (14)(23) entsprechen dabei den 180-Grad-Drehungen um die drei Raumachsen.
Hinweis: Statt der Würfeldrehungen zählt man besser die Lagen des Würfels: Jede der 6 Seiten kann oben liegen, jede der vier Kanten kann vorn liegen.

5. Gleichung 5. Grades: Ikosaederresolvente

Lösungsformeln für die Gleichungen dritten und vierten Grades wurden schon im 16. Jahrhundert gefunden, aber die Gleichung 5. Grades widerstand allen Versuchen, eine Lösungsformel zu finden. Erst um 1800 gelang es Ruffini[33] und Abel zu zeigen, dass es keine Lösungsformel geben kann, die außer den vier Grundrechenarten nur Wurzeln (beliebigen Grades) benutzt, wir werden noch sehen, warum. Aber Hermite[34] und Felix Klein[35] fanden dennoch einen Lösungsweg, der hier kurz skizziert werden soll.[36]

Wieder spielen die Permutationen eine große Rolle, diesmal von 5 Gegenständen. Ähnlich wie die Permutationen von 4 Gegenständen durch die Drehungen des Würfels ausgedrückt werden können (vgl. Übung 4.3), haben die Permutationen von 5 Gegenständen[37] mit den Drehungen eines anderen platonischen Körpers zu tun, des *Ikosaeders*, das von zwanzig gleichseitigen Dreiecken mit 12 Eckpunkten und 30 Kanten begrenzt wird.

---

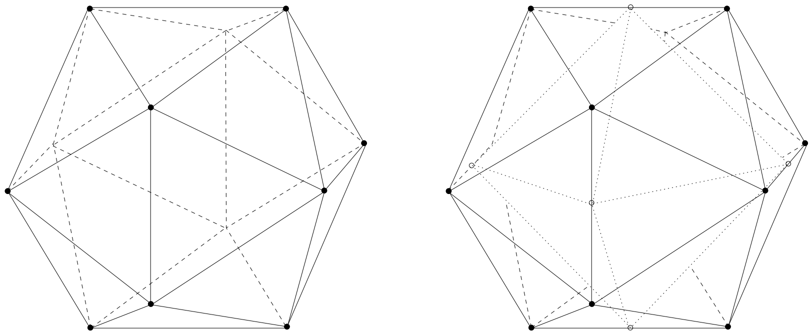
[33] Paolo Ruffini, 1765 (Valentano) - 1822 (Modena)

[34] Charles Hermite, 1822 (Dieuze, Lothringen) - 1901 (Paris)

[35] Felix Klein, 1849 (Düsseldorf) - 1925 (Göttingen)

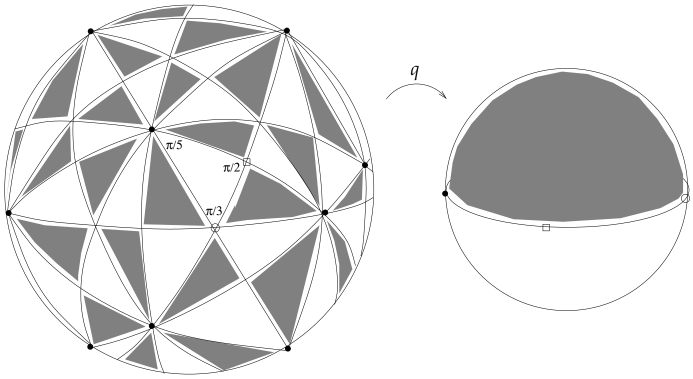
[36] J.-H. Eschenburg, L. Hefendehl-Hebeker: Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar? Math. Semesterberichte 47 (2000), 193 - 220, www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu

[37] Man muss sich dabei auf die *geraden* Permutationen beschränken, solche, die aus einer geraden Anzahl von Paarvertauschungen zusammengesetzt sind. Sie bilden eine halb so große eine Teilmenge A_5 der Menge S_5 aller Permutationen, A_5 hat also 60 Elemente.



Wir können das Ikosaeder so positionieren, dass 6 der 30 Kanten parallel zu den drei Raumachsen sind; die Mittelpunkte dieser Kanten können wir durch die Kanten eines einbeschriebenen *Oktaeders*[38] verbinden. Nach einer Drehung des Ikosaders übernehmen 6 andere Kanten diese Rolle. Somit enthält das Ikosaeder $30/6 = 5$ Oktaeder, die durch die Drehungen des Ikosaeders permutiert werden. Auf diese Weise definiert jede Ikosaederdrehung eine Permutation der Menge der einbeschriebenen Oktaeder, die wir mit der Zahlenmenge $\{1, \ldots, 5\}$ identifizieren können, und verschiedene Drehungen definieren verschiedene Permutationen. Die Ikosaedergruppe wird dadurch zu einer Untergruppe der Gruppe S_5, die $5! = 120$ Elemente besitzt. Weil der Ikosaeder 20 Flächen hat, deren jede nach oben gedreht werden kann, und jede Fläche von drei Kanten berandet wird, deren jede nach vorne gedreht werden kann, gibt es $20 \cdot 3 = 60$ Positionen des Ikosaeders und ebenso viele Drehungen. Die Ikosaedergruppe wird damit zu einer Untergruppe mit 60 Elementen von S_5, und die einzige solche Untergruppe ist die A_5. Die Drehgruppe des Ikosaeders ist also isomorph zur A_5. Wenn wir jedes der 20 Dreiecke durch die Schwerelinien in 6 Teildreiecke aufteilen und das so entstandene Muster auf die Kugelfläche auftragen, die die Ikosaederecken enthält, dann entstehen auf der Kugelfläche 120 sphärische Dreiecke mit Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{5}$. Jedes zweite Dreieck wird gefärbt, und die Drehgruppe des Ikosaeders bildet alle gefärbten Dreiecke ebenso wie alle ungefärbten aufeinander ab.

[38]Das Oktaeder ist die Doppelpyramide über einem Quadrat, begrenzt von 8 gleichseitigen Dreiecken.



Wir betrachten nun eine Funktion q von der Kugelfläche auf die Kugelfläche, die die gefärbten Dreiecke auf die obere Halbkugel und die ungefärbten auf die untere Halbkugel abbildet und dabei invariant unter der Ikosaedergruppe ist: $q(gx) = q(x)$ für alle Punkte x der Kugelfläche und jede Ikosaederdrehung g. Wenn wir die Kugelfläche mit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren,[39] wobei eine der Ikosaederecken auf den Punkt ∞ zu liegen kommt, dann kann man q als Quotienten von Polynomen (rationale Funktion) ausdrücken: $q = f^3/h^5$ mit Polynomen f, h, deren Koeffizienten aus den gegebenen Daten berechnet werden können (die genauen Formeln sind für uns aber nicht bedeutsam):

$$\begin{aligned} 12f(x) &= x^{20} - 228x^{15} + 494x^{10} + 228x^5 + 1 \\ h(x) &= x^{11} - 11x^6 - x \end{aligned}$$

Diese rationale Funktion q übernimmt die Rolle der k-ten Potenz, der rationalen Funktion $x \mapsto x^k$; ihre Umkehrfunktion[40] wird die neu benötigte Rechenart sein, analog zur k-ten Wurzel, der Umkehrung der k-ten Potenz.

Gegeben sei nun eine allgemeine Gleichung 5. Grades. Durch eine Variablentransformation *Tschirnhaus-Transformation* kann man die ersten beiden Koeffizienten zum Verschwinden bringen und die Gleichung in der Form

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{27}$$

[39] Das geschieht mit Hilfe der *Stereographischen Projektion*; vgl. z.B. mein Skriptum "Geometrie", Seite 82, auf www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu .

[40] Die Funktion q ist natürlich nicht eindeutig umkehrbar: Ist x ein Punkt im Inneren eines der Dreiecke, sagen wir, eines gefärbten, so hat $q(x)$ in jedem anderen gefärbten Dreieck ebenfalls ein Urbild x' mit $q(x') = q(x)$. Alle diese 60 Urbilder stehen für die Umkehrfunktion zur Auswahl, ähnlich wie ja auch die k-te Wurzel $\sqrt[k]{(y)}$ k verschiedene Werte annehmen kann.

schreiben. Weil der x^4-Koeffizient verschwindet, gilt die lineare Beziehung

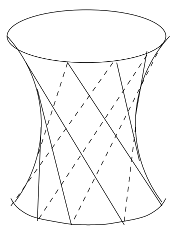
$$e_1(\vec{x}) = x_1 + \cdots + x_5 = 0. \tag{28}$$

Weil auch der x^3-Koeffizient verschwindet, gilt die quadratische Beziehung $e_2(\vec{x}) = 0$, aber wegen $p_2 = e_1^2 - 2e_2$ (mit $p_2(\vec{x}) = \sum_i x_i^2$) kann diese Beziehung auch in der Form

$$p_2(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_5^2 = 0 \tag{29}$$

geschrieben werden. Das ist wegen (28) eigentlich eine Gleichung in vier Variablen, da z.B. $x_5 = -(x_1 + \cdots + x_4)$. Außerdem genügt es, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_5)$ nur bis auf ein Vielfaches zu bestimmen, also nur $\vec{x}' = t\vec{x}$ mit unbekanntem $t \in \mathbb{C}$. Denn $e_3(\vec{x}') = t^3 e_3(\vec{x}) = -t^3 a$ und analog $e_4(\vec{x}') = t^4 b$, also ist $t = -\frac{a e_4(\vec{x}')}{b e_3(\vec{x}')}$ leicht zu berechnen. Wir können also eine der fünf Koordinaten willkürlich gleich Eins setzen; dann wird (29) zu einer Beziehung zwischen drei Koordinaten. Die Lösungsmenge dieser quadratischen Gleichung ist eine *Fläche* (zwei Koordinaten lassen sich willkürlich vorgeben, dann kann die dritte aus der Gleichung berechnet werden), eine "Quadrik" Q. Wir kennen solche Quadriken aus der reellen Geometrie, zum Beispiel den Hyperboloiden

$$Q_H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$



Das Besondere: Auf dieser krummen Fläche liegen zwei Scharen von Geraden! Diese zweifache Geradenschar sieht man noch einfacher, wenn man (29) (nach Einsetzen von $x_5 = -(x_1 + \cdots + x_4)$ und $x_4 = 1$) durch eine lineare Variablensubstitution $\vec{x} = \vec{x}(\lambda, \mu, \nu)$ auf die Form

$$\lambda\mu = \nu \tag{30}$$

gebracht hat, denn für jedes konstante λ oder μ beschreibt diese Gleichung eine Gerade. Über den reellen Zahlen gibt es zwar auch Quadriken ohne Geraden, zum Beispiel die Sphäre, die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, aber über den komplexen Zahlen können wir jede (nicht-entartete) Quadrik durch eine lineare Substitution auf die Form (30) bringen.

Jede Permutation $\sigma \in S_5$ erhält die Gleichungen (28), (29) und damit ihre Lösungsmenge, die Quadrik Q. Außerdem bildet σ Geraden auf Geraden ab. Wenn σ gerade ist ($\sigma \in A_5$), so werden die Geraden der beiden Scharen $\lambda = const$ und $\mu = const$ auf Geraden der gleichen Schar abgebildet, die ungeraden Permutationen dagegen vertauschen die beiden Scharen. Jedes $\sigma \in A_5$ wirkt also auf den Punkten (λ, μ) in der Form $(\lambda, \mu) \mapsto (\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\mu))$, und die Abbildungen $\sigma_j : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ($j = 1, 2$) sind Ikosaederdrehungen, wobei $\hat{\mathbb{C}}$ wieder mit der Kugelfläche identifiziert wird. Also sind $q(\lambda)$ und $q(\mu)$ invariant unter der A_5 und daher berechenbare Funktionen der Koeffizienten a, b, c.[41] Durch Umkehrung von q gewinnen wir λ aus $q(\lambda)$ und μ aus $q(\mu)$ und aus λ, μ und $\nu = \lambda\mu$ den Vektor $\vec{x}'$ und daraus schließlich $\vec{x}$.

Übungen

5.1. **Ikosaederdrehungen.** Zeigen Sie, dass es 60 verschiedene Drehungen des Ikosaeders gibt, nämlich 60 verschiedene Positionen. Beachten Sie, dass jede Seite nach oben und jede Kante nach vorn gedreht werden kann. Überlegen Sie sich andererseits, dass es 120 Permutationen von 5 Gegenständen gibt: Der erste Gegenstand hat 5 Plätze zur Wahl, der zweite noch 4, der dritte noch 3 usw. Die Hälfte davon, also 60, sind gerade Permutationen. Schließen Sie daraus, dass die Drehungen des Ikosaeders genau den geraden Permutationen der fünf einbeschriebenen Oktaeder entsprechen.

5.2. **Geraden auf dem einschaligen Hyperboloid.** Das einschalige Hyperboloid besteht aus allen Punkten mit Koordinatentripeln (x, y, z), die die Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

erfüllen. Finden Sie die Geraden auf dieser Fläche. Es genügen zwei; die übrigen entstehen dann durch Drehung um die z-Achse.

[41] Wenn ein Polynom $f(\vec{x})$ nur unter A_n statt S_n invariant ist, setzen wir $f^*(\vec{x}) = f(x_2, x_1, x_3, \dots)$. Dann sind $f + f^*$ und $(f - f^*)^2$ invariant unter S_n und daher rationale Funktionen der elementarsymmetrischen Polynome e_i. Damit sind auch f und f^* aus den Koeffizienten berechenbar.

Inhaltsverzeichnis

Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135, Augsburg
E-mail address: `eschenburg@math.uni-augsburg.de`