

FUNKTIONENTHEORIE, WS 08/09

J.-H. ESCHENBURG

1. MOTIVATION

Die Funktionentheorie ist die Theorie der komplex differenzierbaren Funktionen in einer komplexen Variablen. Der Definitionsbereich ist eine *offene* Teilmenge $\mathbb{C}_o \subset \mathbb{C}$, d.h. zu jedem $s \in \mathbb{C}_o$ gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset \mathbb{C}_o$, wobei $B_\epsilon(x) = \{\tilde{x}; |\tilde{x} - x| < \epsilon\}$ die offene Kreisscheibe (“Ball”) um x mit Radius ϵ bezeichnet. Eine Funktion $f : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *komplex differenzierbar* oder *holomorph*, wenn es für alle $x \in \mathbb{C}_o$ ein $a \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a. \quad (1)$$

Die komplexe Zahl a nennen wir dann die (komplexe) *Ableitung* von f an der Stelle x und bezeichnen sie mit $a = f'(z)$. Die Definition ist identisch mit der reellen Differenzierbarkeit in einer Veränderlichen, nur dass jetzt für h eben eine beliebige Nullfolge in \mathbb{C} eingesetzt werden darf. Warum interessiert man sich für komplexe Funktionen?

- \mathbb{C} ist wichtig, für die Physik vielleicht wichtiger als \mathbb{R} . Das universelle Phänomen der Interferenz wird dadurch beschrieben.
- Phänomene, die man schon an reellen Funktionen beobachtet, “entfalten” sich erst bei Fortsetzung nach \mathbb{C} , zum Beispiel Nullstellen, Pole und andere Singularitäten, oder auch die Taylorentwicklung. In \mathbb{R} ist nicht verstehbar, warum die aus der Geometrischen Reihe $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 \dots$ mit $q = -x^2$ stammende Identität

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - + \dots$$

nur für $x \in (-1, 1)$ Gültigkeit hat, obwohl doch an den Stellen 1 und -1 gar nichts Besonderes mit der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ passiert.

- Gewisse Integrale lassen sich durch Fortsetzung nach \mathbb{C} berechnen, obwohl keine Stammfunktion gefunden werden kann, wie zum Beispiel

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (2)$$

2. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN

Der Ursprung der Entdeckung der komplexen Zahlen war die Frage nach der Lösung kubischer Gleichungen (vgl. Skriptum Analysis 1). In den Cardanoschen Formeln kommen Quadratwurzeln vor, und manchmal sind die Radikanden negativ und die Lösungsmethode scheitert, obwohl offensichtlich (nach Zwischenwertsatz) eine Lösung existiert. Raffaele Bombelli wagte 1572, mit Wurzeln negativer Zahlen einfach zu rechnen und gelangte so zu richtigen (reellen) Lösungen. Er brauchte dazu nur eine einzige neue Zahl zu “erfinden”: Die Zahl i mit

$$i^2 = -1. \quad (3)$$

Die Bezeichnung stammt erst von Euler, 200 Jahre später, wobei i für “imaginär” steht. Alle anderen Wurzeln negativer Zahlen sind reelle Vielfache von i , die die Menge der imaginären Zahlen bilden; Summen von reellen und imaginären Zahlen sind die *komplexen* (= zusammengesetzten) Zahlen. Aber wo auf der Zahlengeraden soll die Zahl i liegen? Sie ist weder positiv noch negativ noch Null, also kann sie nicht auf, sondern muss neben der Zahlengeraden liegen, d.h. in der zweiten Dimension. Das war die Idee von Gauß, nochmal 50 Jahre nach Euler. Damit ist \mathbb{C} dasselbe wie \mathbb{R}^2 , wobei eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ identifiziert wird; die Komponenten x und y heißen *Real-* und *Imaginärteil* von z . Bei der Addition werden die beiden Komponenten einfach addiert; sie entspricht damit der Vektoraddition im \mathbb{R}^2 .

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen $z = x + iy$ und $a = p + iq$ ergibt

$$\begin{aligned} az = (p + iq)(x + iy) &= px - qy + i(qx + py) \\ &= \begin{pmatrix} px - qy \\ qx + py \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

Bezeichnen wir mit M_a die Multiplikation mit der komplexen Zahl a , also die Abbildung $z \mapsto az$, so ist dies die lineare Abbildung auf \mathbb{R}^2 mit

der Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Mit der Beobachtung $M_{a+b} = M_a + M_b$ und $M_{ab} = M_a M_b$ (wegen $M_a M_b z = M_a(bz) = a(bz) = (ab)z = M_{ab}z$) sehen wir, dass die Matrizenmenge

$$\mathbf{C} = \left\{ \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}; p, q \in \mathbb{R} \right\} \quad (6)$$

eine Unteralgebra¹ von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bildet, die isomorph zu \mathbb{C} ist. Insbesondere ist \mathbf{C} kommutativ, enthält die Eins I , und jedes Element $\neq 0$ besitzt ein Inverses, die Matrix $M_{a^{-1}}$, wobei $a^{-1} = \bar{a}/|a|^2$ mit $\bar{a} = p - iq$ und $|a|^2 = p^2 + q^2 = a\bar{a}$. Das kann man auch allein mit den Elementen von \mathbf{C} sehen (Übungen).

Welche lineare Transformation der Ebene wird durch die Matrix M_a beschrieben? Das sieht man am besten bei Verwendung der Polarkoordinatendarstellung

$$a = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r e^{i\phi}. \quad (7)$$

Dann wird $p = r \cos \phi$ und $q = r \sin \phi$ und

$$M_a = r \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Dies ist eine Verkettung der Drehung um den Winkel ϕ mit der zentrischen Streckung um den Faktor r , eine sogenannte *Drehstreckung*. Solche linearen Abbildungen der Ebene erhalten den orientierten *Winkel*. Wir können also \mathbf{C} als die Menge der Drehstreckungen der Ebene ansehen.

3. KOMPLEXE DIFFERENZIERBARKEIT

Satz 3.1. $f : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar (holomorph) \iff f ist total differenzierbar (als Abbildung auf \mathbb{R}_o^2), und für alle $z \in \mathbb{C}_o$ ist $Df_z \in \mathbf{C}$, d.h.

$$Df_z = M_a \quad (9)$$

für ein $a \in \mathbb{C}$, (nämlich $a = f'(z)$).

¹Eine *Algebra* ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $V \times V \rightarrow V$, genannt *Multiplikation*. Als Beispiel denken wir an die Matrizenalgebra, $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. Eine *Unteralgebra* $W \subset V$ ist ein Untervektorraum, der auch gegenüber der Multiplikation abgeschlossen ist: Für alle $a, b \in W$ folgt auch $ab \in W$.

Beweis. “ \Rightarrow ”: Wenn f komplex differenzierbar im Punkt $z \in \mathbb{C}_o$ ist, hat der Differenzenquotient einen Grenzwert: $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \rightarrow a$ mit $a = f'(z)$, also

$$d(h) := \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - a \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

und damit

$$f(z+h) = f(z) + ah + hd(h) = f(z) + M_a h + o(h)$$

mit $o(h) = hd(h)$; die Bezeichnung “ $o(h)$ ” ist berechtigt, denn

$$|o(h)|/|h| = |d(h)| \rightarrow 0.$$

Damit ist f in z total differenzierbar mit Jacobimatrix $Df_z = M_a$.

“ \Leftarrow ”: Ist umgekehrt f in z total differenzierbar mit $Df_z = M_a$, so folgt

$$f(z+h) - f(z) = M_a h + o(h) = ah + o(h)$$

und damit

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - a = \frac{o(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

also ist f in z komplex differenzierbar mit $f'(z) = a$. \square

Folgerung 3.1. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$f = u + iv = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar $\iff f$ ist total differenzierbar, und für die partiellen Ableitungen der Komponentenfunktionen u, v von f gilt:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (10)$$

Beweis. Für $a = p + iq$ ist

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = Df_u = M_a = \begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix},$$

also ist $u_x = p = v_y$ und $v_x = q = -u_y$. \square

Bemerkung: Wir können f in zweifacher Weise verstehen: als Funktion einer Variablen (die eben auch komplex sein darf) oder als Transformation der Ebene \mathbb{R}^2 . Die beiden Seiten von Satz 3.1 spiegeln diese zwei Auffassungen wider. Als Transformation der Ebene hat f an jeder Stelle eine Drehstreckung als Jacobimatrix. Drehstreckungen erhalten (orientierte) Winkel; es sind sogar genau die linearen Abbildungen, die orientierte Winkel erhalten.² Deshalb ist f *winkeltreu*, d.h. der Schnittwinkel von zwei regulären Kurven durch einen gemeinsamen Punkt

²Mit einer winkeltreuen linearen Abbildung A wird das Dreieck mit den Eckpunkten $0, e_1, e_2$ und den Winkeln $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$ in ein Dreieck $0, Ae_1, Ae_2$ mit gleichen Winkeln überführt; die Bildvektoren Ae_1, Ae_2 müssen daher rechtwinklig und gleich lang sein, also ist A Vielfaches einer Drehung.

$z \in \mathbb{C}_o$ bleibt nach Anwendung der Transformation f derselbe (außer in Punkten z mit $f'(z) = 0$); siehe die Übungsaufgabe zur logarithmischen Spirale.

Für holomorphe Funktionen gelten dieselben Rechenregeln (Summen-, Produkt- und Quotientenregel sowie Kettenregel) wie im Reellen, mit wörtlich denselben Beweisen, wobei das Inkrement h jetzt eben komplex sein darf (vgl. Skriptum “Analysis 1”, Satz 28.1, S. 92f und 28.2, S. 94). Deshalb können wir mit Hilfe der vier Grundrechenarten aus schon vorhandenen holomorphen Funktionen neue konstruieren. Holomorph sind sicherlich die Konstante $f(z) = a$ (mit Ableitung 0)³ und die identische Abbildung $f(z) = z$, die wir oft auch einfach mit z bezeichnen; hier ist die Ableitung gleich 1.⁴ Damit sind die Potenzen z^k und die Polynome $\sum_{k=0}^n a_k z^k$ holomorph, ebenso wie die rationalen Funktionen, die Quotienten von Polynomen (außerhalb der Nullstellen des Nenners). Auch die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ sind innerhalb ihres Konvergenzkreises holomorph, aber um das zu sehen, muss man etwas arbeiten.⁵ Wir werden dies bald ohne Rechnung einsehen können (Abschnitt 5).

4. STAMMFUNKTIONEN UND KURVENINTEGRALE

Stammfunktionen sind wie im Reellen als inverse Ableitungen definiert: Ist $f : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion,⁶ so heißt $F : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ eine *Stammfunktion* von f , wenn F holomorph ist mit Ableitung $F' = f$. In der reellen eindimensionalen Analysis haben wir Stammfunktionen zur Berechnung von Integralen verwendet (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Auch in der komplexen eindimensionalen Analysis gibt es eine enge Beziehung zwischen Stammfunktionen und Integralen. Aber wir stoßen von Anfang an auf ein Problem: Was soll $\int_{z_o}^{z_1} f(z) dz$ bedeuten? Wenn man an die reelle Analysis denkt, sollte dies Limes einer Summe sein, in der die Werte von f an irgendwelche Zwischenstellen zwischen z_o und z_1 vorkommen sollten. Aber was heißt hier “zwischen”? Wir sind ja in der Ebene, und viele Wege führen von z_o nach z_1 , auf denen wir Zwischenpunkte wählen könnten. Welchen dieser Wege sollen wir wählen? Es bleibt uns gar nichts anderes übrig, als zunächst einmal alle Wege in Betracht zu ziehen. Das führt uns auf den Begriff des *Kurvenintegrals*.

³ $f(z+h) - f(z) = a - a = 0$.

⁴ $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{h}{h} = 1$.

⁵Jänich: Funktionentheorie, 6. Aufl., S. 4.

⁶Später werden wir sehen, dass f selbst holomorph ist, wenn es eine Stammfunktion besitzt; davon sind wir aber noch weit entfernt.

Eine *Kurve* oder ein *Weg* zwischen zwei Punkten $z_o, z_1 \in \mathbb{C}$ ist eine C^1 -Abbildung⁷ $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_o$ mit $\gamma(a) = z_o$ und $\gamma(b) = z_1$; wir schreiben dafür kurz $\gamma : z_o \rightsquigarrow z_1$. Wir denken uns den Weg oft als Teilmenge von \mathbb{C}_o , nämlich als das Bild der Abbildung γ . Die Abbildung γ selbst wird oft auch als *Parametrisierung* dieses Weges bezeichnet.

Eine solcher Weg muss keineswegs für beliebige $z_o, z_1 \in \mathbb{C}^o$ existieren; wenn doch, so heißt die Menge $\mathbb{C}_o \subset \mathbb{C}$ (*wegweise*) *zusammenhängend*. Eine zusammenhängende offene Menge nennt man ein *Gebiet*. Gewöhnlich werden wir voraussetzen, dass der Definitionsbereich unserer Funktion ein solches Gebiet ist; es wird traditionell mit dem Buchstaben G (für "Gebiet") statt mit \mathbb{C}_o bezeichnet. Gebiete spielen für die komplexe Analysis dieselbe Rolle wie offene Intervalle für die reelle.

Ist nun $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, so definierten wir

$$\int_{\gamma} f := \int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (11)$$

Dabei wird sozusagen z durch $\gamma(t)$ und dz durch $\gamma'(t)dt$ substituiert. Die rechte Seite von (11) ist ein ganz gewöhnliches Integral über das reelle Intervall $[a, b]$; dass der Integrand komplexwertig ist, stört uns nicht; man denkt sich einfach Real- und Imaginärteil getrennt integriert.

Man kann die C^1 -Bedingung etwas abschwächen: $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_o$ heißt *stückweise C^1* , wenn γ stetig ist und es eine Unterteilung

$$a = t_o < t_1 < \dots < t_n = b$$

des Intervalls $[a, b]$ gibt derart, dass $\gamma_j := \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ eine C^1 -Kurve ist für alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist das Kurvenintegral über γ immer noch definiert:

$$\int_{\gamma} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f. \quad (12)$$

Satz 4.1. *Das Kurvenintegral ist unabhängig von der Parametrisierung des Weges in folgendem Sinn: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_o$ eine C^1 -Kurve und $\phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Abbildung mit*

$$\phi(a) = \tilde{a}, \quad \phi(b) = \tilde{b}, \quad (13)$$

dann gilt für $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{C}_o$:

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f. \quad (14)$$

⁷ C^1 bedeutet differenzierbar mit stetiger Ableitung

Beweis. Mit der Substitution $t = \phi(s)$ und $dt = \phi'(s)ds$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(s))\tilde{\gamma}'(s)ds = \int_{s=\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\phi(s))\gamma'(\phi(s)))\phi'(s)ds \\ &= \int_{t=\phi(\tilde{a})}^{\phi(\tilde{b})} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} f. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1: Wenn ϕ die Grenzen vertauscht, wenn also

$$\phi(a) = \tilde{b}, \quad \phi(b) = \tilde{a} \tag{15}$$

anstelle von (13), dann folgt

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = - \int_{\gamma} f. \tag{16}$$

Zum Beispiel sei $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\phi(t) = 1 - t$. Für einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ setzen wir $\gamma^- = \gamma \circ \phi$, also

$$\gamma^-(t) := \gamma(1 - t), \tag{17}$$

das ist der *umgekehrt durchlaufene* Weg, und es gilt für jede stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\int_{\gamma^-} f = - \int_{\gamma} f. \tag{18}$$

Bemerkung 2: Es kommt also beim Integrieren gar nicht wirklich auf die Abbildung γ an, sondern im Wesentlichen auf ihr Bild $\gamma([a, b])$, auch *Spur* oder *Bahn* von γ genannt, wobei allerdings auch die Durchlaufrichtung festgelegt sein muss. In Funktionentheoriebüchern findet man daher oft Bezeichnungen wie $\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$. Die Menge $\{z; |z - z_0| = r\}$ ist die Bildmenge der geschlossenen Kurve $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; über diese ist zu integrieren. Ein anderes Beispiel ist die Bezeichnung $\int_{\partial K} f$, wobei $K \subset G$ eine kompakte Teilmenge mit nichtleerem Inneren und glattem Rand ist. Dann ist der Rand ∂K Bild einer Kurve γ , die ihn genau einmal umrundet und die so parametrisiert sein muss, dass die Menge K immer (bezüglich der Durchlaufrichtung) links von γ liegt.⁸ Der Rand kann auch aus mehrere Zusammenhangskomponenten bestehen, dann muss man für jede Komponente eine solche Kurve wählen und die Integrale addieren.

⁸Mit andern Worten: Für jedes t ist $\gamma(t) + \epsilon i\gamma'(t) \in K$ für kleine $\epsilon > 0$.

Satz 4.2. *Besitzt eine stetige Funktion $f : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F : \mathbb{C}_o \rightarrow \mathbb{C}$ (also $F' = f$), so gilt für jede C^1 -Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}_o$:*

$$\int_{\gamma} f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad (19)$$

Insbesondere ist $\int_{\gamma} = 0$, wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \end{aligned}$$

denn

$$(F \circ \gamma)'(t) = DF_{\gamma(t)}\gamma'(t) = M_{F'(\gamma(t))}\gamma'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t). \quad \square$$

Bemerkung: Der Satz zeigt auch die Eindeutigkeit der Stammfunktion F einer stetigen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ bis auf eine komplexe Konstante: Wählen wir einen festen Punkt $z_o \in G$ und für jedes $z \in G$ einen Weg $\gamma_z : z_o \rightsquigarrow z$ in G , dann gilt nach (19)

$$F(z) = F(z_o) + \int_{\gamma_z} f. \quad (20)$$

Eine Kurve γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$. Für solche Wege gilt also $\int_{\gamma} f = 0$, falls F eine Stammfunktion besitzt. Auch die Umkehrung ist richtig; das ist der Satz von *Morera*.⁹ Um diesen Satz einzusehen, müssen wir noch den Begriff der *Verkettung* von Kurven oder Wegen diskutieren: Sind zwei stückweise C^1 -Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ gegeben, so definieren wir die *Verkettung* $\gamma_1 * \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow G$ folgendermaßen: In der ersten Hälfte des Intervalls $[0, 1]$ durchlaufen wir (mit doppelter Geschwindigkeit) den Weg γ_1 , in der zweiten Hälfte den Weg γ_2 , in Formeln:

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2(t - \frac{1}{2})) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (21)$$

⁹Giacinto Morera, 1856 (Novara) - 1907 (Turin)

Satz 4.3. Satz von Morera: $G \subset \mathbb{C}$ sei ein Gebiet (offen, zusammenhängend) und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:
 f besitzt Stammfunktion $\iff \int_{\gamma} f = 0$ für jeden geschlossen Weg γ in G .

Beweis. “ \Leftarrow ” haben wir schon bewiesen: Wenn $f = F'$, dann ist $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ für einen geschlossenen Weg γ .

“ \Rightarrow ”: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{\gamma} f = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ . Wir wählen $z_0 \in G$ fest. Weil G zusammenhängend ist, gibt es für jedes $z \in G$ einen Weg $\gamma_z : z_0 \rightsquigarrow z$. Wie in (20) setzen wir¹⁰

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f. \tag{22}$$

Wir wollen zeigen, dass dies eine Stammfunktion zu f ist. Dazu müssen wir den Differenzenquotienten $\frac{F(z+h)-f(z)}{h}$ berechnen. Da G offen ist, liegt mit z auch eine kleine Kreisscheibe um z ganz in G , d.h. $B_{\epsilon}(z) \subset G$. Wenn $|h| < \epsilon$, dann ist die Strecke

$$[z, z+h] = \{z+th; t \in [0, 1]\} \tag{23}$$

ganz in $B_{\epsilon}(z)$ und damit in G enthalten. Nun ist

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f, \tag{24}$$

denn $\gamma := \gamma_z * [z, z+h] * \gamma_{z+h}^-$ ist ein geschlossener Weg, und damit ist

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_z} f + \int_{[z, z+h]} f - \int_{\gamma_{z+h}} f = F(z+h) - F(z) - \int_{[z, z+h]} f.$$

In (24) rechts die Parametrisierung $t \mapsto z+th$ eingesetzt ergibt

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)h dt = \int_0^1 f(z+th)dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z). \quad \square$$

5. POTENZREIHEN

Eine *Potenzreihe* ist bekanntlich ein Ausdruck

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{25}$$

¹⁰Diese Definition ist natürlich unabhängig von der Wahl von γ_z , denn ist $\tilde{\gamma}_z : z_0 \rightsquigarrow z$ ein anderer Weg von z_0 nach z , dann ist $\gamma_z * \tilde{\gamma}_z^-$ geschlossen und $0 = \int_{\gamma_z * \tilde{\gamma}_z^-} f = \int_{\gamma_z} f - \int_{\tilde{\gamma}_z} f$.

für eine gegebene Folge (a_k) komplexer Zahlen. Die Potenzreihe konvergiert absolut in einer Kreisscheibe $B_R(0)$, wobei

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_k|^{1/k})} \quad (26)$$

und außerhalb des Abschlusses dieser Kreisscheibe, für $|z| > R$, divergiert sie. Der Radius R heißt *Konvergenzradius*. In jeder kleineren Kreisscheibe $B_r(0)$ mit $0 < r < R$ konvergiert die Reihe sogar *gleichmäßig*: Setzen wir $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, so gilt auf B_r

$$|f_n - f| < \epsilon \quad (27)$$

sofern nur n genügend groß ist (vgl. Skriptum "Analysis 1").

Wir können nun zeigen, dass Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden können, als wären es endliche Summen. Dazu zeigen wir folgenden allgemeineren Satz:

Satz 5.1. Stammfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz

Ist $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen mit $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ und ist F_n eine Stammfunktion von f_n mit $F_n(z_0) = 0$ für ein festes $z_0 \in G$. dann besitzt f eine Stammfunktion $F = \lim F_n$.

Beweis. Aus dem Satz von Morera 4.3 folgt, dass f eine Stammfunktion F besitzt, denn wegen $f_n \xrightarrow{\text{glm}} f$ gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G :

$$\int_{\gamma} f = \lim \int_{\gamma} f_n = 0.$$

Wir dürfen $F(z_0) = 0$ annehmen. Wählen wir wieder für jedes $z \in G$ einen Weg $\gamma_z : z_0 \rightsquigarrow z$, dann ist $F_n(z) = \int_{\gamma_z} f_n$ und

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f = \lim \int_{\gamma_z} f_n = \lim F_n. \quad \square$$

Satz 5.2. Holomorphie von Potenzreihen: *Jede Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist innerhalb seines Konvergenzkreises $B_R(0)$ holomorph mit Ableitung*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \quad (28)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die rechte Seite von (28), also die Reihe $g(z) = \sum_k k a_k z^{k-1}$ denselben Konvergenzradius R hat wie $f(z)$. Es ist etwas einfacher, die Reihe $zg(z) = \sum_k k a_k z^k$ zu betrachten, die

offensichtlich genau dann konvergiert, wenn $g(z)$ konvergiert. Der Konvergenzradius R' von $zg(z)$ erfüllt

$$1/R' = \limsup_{k \rightarrow \infty} (k^{1/k} |a_k|^{1/k}).$$

Aber der Vorfaktor $k^{1/k}$ konvergiert gegen 1, denn

$$k^{1/k} = e^{(\ln k)/k} \rightarrow 1$$

da $(\ln k)k \rightarrow 0$ (der Logarithmus wächst langsamer als jede positive Potenz). Deshalb gilt $R' = R$.

Nun wenden wir Satz 5.1 an auf $G = B_r(0)$ ($r < R$) und $g_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ anstelle von f_n . Da g_n die Stammfunktion f_n besitzt und $g_n \xrightarrow{\text{glm}} g$, ist g holomorph mit Stammfunktion f . (Eigentlich müssen wir die Stammfunktionen $f_n - a_0$ betrachten, die in $z_0 = 0$ den Wert 0 haben.) \square

6. DER CAUCHYSCHES INTEGRALSATZ

Wir haben jetzt verstanden, warum das Verschwinden des Wegintegrals

$$\int_{\gamma} f = 0 \tag{29}$$

für geschlossene Wege γ eine wichtige Eigenschaft ist: Dann gibt es eine Stammfunktion F , und wir können Integrale wie bei reellen Funktionen ausrechnen: $\int_{z_0}^{z_1} f = F(z_1) - F(z_0)$, wobei es egal ist, entlang welchen Weges von z_0 nach z_1 wir integrieren. Aber welche Funktionen erfüllen (29) und besitzen somit eine Stammfunktion? Reicht Stetigkeit dafür schon aus, wie im Reellen? Nein, wir brauchen Holomorphie, und auch dann gilt (29) noch lange nicht für alle geschlossenen Wege. Wir zeigen (29) zunächst für den Rand von einem *Rechteck*

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{s + it; a \leq s \leq b, c \leq t \leq d\} \tag{30}$$

im Definitionsgebiet G ; danach werden wir R recht drastisch verformen, und die Eigenschaft bleibt erhalten. Wir müssen uns also in \mathbb{C} ziemlich anstrengen für eine Eigenschaft, die in \mathbb{R} gar kein Problem ist (Existenz einer Stammfunktion), aber der Lohn für diese Anstrengung wird groß sein.

Satz 6.1. Cauchyscher Integralsatz für Rechtecke: *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $R \subset G$ ein Rechteck in G , dann gilt*

$$\int_{\partial R} f = 0. \tag{31}$$

Beweis. Der Beweis beruht auf den gleichen zwei Ideen wie die Sätze von Gauß (Divergenzsatz) und Stokes.¹¹ In der Tat kann er als Spezialfall des zweidimensionalen Divergenzsatzes angesehen werden. Aber wie so oft ist der Spezialfall viel einfacher als der allgemeine Fall. Die beiden Ideen sind:

- Das Rechteck R lässt sich in viele kleine Rechtecke R_k zerlegen, und das Integral über ∂R ist die Summe der Integrale über ∂R_k , weil die inneren Wege stets in beiden Richtungen durchlaufen werden und sich damit aufheben.
- In jedem Teilrechteck R_k kann f durch die affine Funktion

$$f_o(z) = f(z_o) + f'(z_o)(z - z_o)$$

approximiert werden; der Fehler ist klein genug.

Affine Funktionen besitzen aber Stammfunktionen, und daher verschwindet ihr Integral über jeden geschlossenen Weg.

Ausführung (Goursat): Wir könnten jede Kante des Rechtecks in N gleiche Teile unterteilen und R damit in N^2 kleine Rechtecke R_k zerlegen. Dann müssten wir aber alle Fehler gleichmäßig abschätzen können, wozu wir eine stärkere Voraussetzung brauchten: C^1 . In unserem Fall, wo am Ende alles Null sein soll, können wir anders vorgehen. Wir halbieren die Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ zunächst nur. Damit zerlegen wir R in 4 Teilrechtecke R_1, \dots, R_4 , und das Integral über ∂R ist die Summe der vier Integrale über $\partial R_1, \dots, \partial R_4$. Dann ist

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq \left| \int_{\partial R_1} f \right| + \left| \int_{\partial R_2} f \right| + \left| \int_{\partial R_3} f \right| + \left| \int_{\partial R_4} f \right|.$$

Einer der vier Summanden ist der größte; das zugehörige Teilrechteck benennen wir um in R^1 . Also ist

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4 \left| \int_{\partial R^1} f \right|.$$

Jetzt wird R^1 nach dem gleichen Muster in vier Teilrechtecke R_1^1, \dots, R_4^1 unterteilt und wieder der größte unter den Werten $\left| \int_{\partial R_j^1} f \right|$ aufgesucht; das zugehörige Rechteck wird in R^2 umbenannt, und wir erhalten

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4^2 \left| \int_{\partial R^2} f \right|.$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge von ineinander enthaltenen Rechtecken $R^1 \supset R^2 \supset \dots$, deren Kantenlänge jedesmal halbiert wird,

¹¹Vgl. Skriptum Analysis 2, S. 105.

und es gilt

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial R^k} f \right|.$$

Die Rechtecke ziehen sich auf einen Punkt $z_o \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R^k$ zusammen; sie bilden eine zweidimensionale konvergente Intervallschachtelung (vgl. Analysis 1). Wenn der Durchmesser des Anfangsrechtecks D beträgt (mit $D = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$), dann hat R^k den Durchmesser $D/2^k$, also ist

$$\forall z \in \partial R^k : |z - z_o| < D/2^k.$$

Wir benutzen nun die Differenzierbarkeit im Punkt z_o und erhalten $f(z) = f_o(z) + r(z)$ mit $f_o(z) = f(z_o) + f'(z_o)(z - z_o)$ und dem Restglied $r(z)$, wobei $q(z) := \frac{r(z)}{z - z_o} \rightarrow 0$ für $|z - z_o| \rightarrow 0$. Wir wählen k so groß, dass $|q(z)| < \epsilon$ für alle z mit $|z - z_o| < D/2^k$. Dann gilt für alle $z \in \partial R^k$:

$$|r(z)| = |z - z_o| |q(z)| \leq \epsilon D/2^k.$$

Weil f_o eine Stammfunktion besitzt (Stammfunktion einer affinen Funktion $az + b$ ist $az^2/2 + bz$), verschwindet $\int_{\partial R^k} f_o$, und wir erhalten:

$$\left| \int_{\partial R} f \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial R^k} (f_o + r) \right| = 4^k \left| \int_{\partial R^k} r \right| \stackrel{*}{\leq} 4^k \epsilon \frac{D}{2^k} \frac{U}{2^k} = \epsilon DU,$$

wobei $U = 2((b-a) + (d-c))$ der Umfang von R und damit $U/2^k$ der Umfang von R^k ist. Bei $*$ haben wir die sogenannte *Standardabschätzung* des Integrals durch das Betragsmaximum und die Länge des Integrationsweges benutzt, siehe nachfolgendes Lemma. Da D und U Konstanten sind und ϵ beliebig klein gewählt werden kann, folgt die Behauptung $\int_{\partial R} f = 0$. \square

Hilfssatz 6.1. Standardabschätzung: *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ ein Weg mit Bogenlänge L und es gelte $|f \circ \gamma| \leq M$. Dann gilt*

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq ML. \tag{32}$$

Beweis. $\left| \int_{\gamma} f \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)| dt = ML. \quad \square$

Satz 6.2. Cauchyscher Integralsatz für Bilder von Rechtecken
Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $\phi : R \rightarrow G$ eine C^1 -Abbildung, dann gilt

$$\int_{\phi(\partial R)} f = 0. \tag{33}$$

Beweis. Wir führen denselben Beweis durch mit $\phi(R^k)$ anstelle von R^k . Dabei ändern sich Durchmesser und Umfang, aber da die Maximumsnorm $\|D\Phi\|$ stetig und damit auf dem kompakten Rechteck R beschränkt ist,

$$\|D\phi\| \leq M,$$

werden alle Bogenlängen und Entfernungen höchstens um den konstanten Faktor M größer, was die Abschätzung nicht wesentlich verändert. \square

Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist, dass man Wege in G deformieren kann, ohne das Integral einer holomorphen Funktion zu verändern. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$ zwei C^1 -Wege von z_0 nach z_1 , dann ist eine *Deformation* oder *Homotopie* zwischen diesen Wegen eine C^1 -Abbildung $\phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow G$, $\phi(s, t) =: \phi_s(t)$, mit den Eigenschaften

a) $\phi_s : z_0 \rightsquigarrow z_1$ für alle $s \in [0, 1]$,

b) $\phi_0 = \gamma_0, \phi_1 = \gamma_1$.

Eine Homotopie *geschlossener* Wege $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$ ist etwas anders definiert als eine C^1 -Abbildung $\phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow G$, $\phi(s, t) = \phi_s(t)$ mit den Eigenschaften

a) ϕ_s ist geschlossen für alle $s \in [0, 1]$,

b) $\phi_0 = \gamma_0, \phi_1 = \gamma_1$.

Wege in G , zwischen denen eine Homotopie in G besteht, heißen *homotop* (in G). Als Anwendung von Satz 6.2 erhalten wir nur unmittelbar:

Satz 6.3. *Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow G$ in G homotope Wege (beide $z_0 \rightsquigarrow z_1$ oder beide geschlossen) und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f. \quad (34)$$

Beweis. Es sei $\phi : R \rightarrow G$ die Homotopie, wobei $R = [0, 1] \times [a, b]$. Nach Satz 6.2 ist $\int_{\phi(\partial R)} f = 0$. Andererseits besteht $\phi(\partial R)$ aus vier Komponenten; zwei davon sind die Wege γ_1 und γ_0^- , und die anderen zwei sind konstant im ersten Fall und gleich mit umgekehrter Orientierung im zweiten Fall. In beiden Fällen folgt

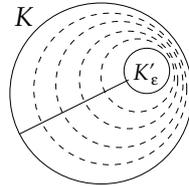
$$0 = \int_{\phi(\partial R)} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_0} f. \quad \square$$

7. CAUCHYSCHES INTEGRALFORMEL

Gegeben sei eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$. Das Gebiet G enthalte eine abgeschlossene Kreisscheibe

$$K = K_r(z_0) = \{z; |z - z_0| \leq r\}.$$

Dann erhalten wir aus dem Cauchyschen Integralsatz $\int_{\partial K} g = 0$, denn wir können K leicht als Bild eines Rechtecks darstellen.



Das bleibt auch dann noch richtig, wenn g an einer Stelle $a \in K \setminus \partial K$ nicht definiert, sonst aber überall holomorph und nahe a (d.h. in einer Kreisscheibe um a) beschränkt ist. Für jede kleine Kreisscheibe $K'_\epsilon := K_\epsilon(a) \subset K$ sind die geschlossenen Wege ∂K und $\partial K'_\epsilon$ homotop (siehe Figur). Damit erhalten wir nach Satz 6.3:

$$\int_{\partial K} g = \int_{\partial K'_\epsilon} g \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0, \tag{35}$$

denn $|\int_{\partial K'_\epsilon} g| \leq C \cdot 2\pi\epsilon \rightarrow 0$; also gilt immer noch $\int_{\partial K} g = 0$. Diese Überlegung wenden wir an auf den den Differenzenquotienten einer holomorphen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, d.h. auf die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Es ist also $\int_{\partial K} g = 0$ und damit

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{\partial K} \frac{f(a)}{z - a} dz \stackrel{1}{=} f(a) \cdot \int_{\partial K'_\epsilon} \frac{dz}{z - a} \stackrel{2}{=} f(a) \cdot 2\pi i, \tag{36}$$

wobei wir bei “ $\stackrel{1}{=}$ ” den Satz 6.3 angewandt haben und bei “ $\stackrel{2}{=}$ ” die Parametrisierung eingesetzt haben: $\partial K'_\epsilon$ wird parametrisiert durch $z = \gamma(t) = a + \epsilon e^{it}$ mit $t \in [0, 2\pi]$, also ist $dz = \gamma'(t)dt = i\epsilon e^{it}dt$ und

$$\int_{\partial K'_\epsilon} \frac{dz}{z - a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{it} dt}{\epsilon e^{it}} = 2\pi i.$$

Mit (36) haben wir eine Formel für den Wert $f(a)$ gefunden:

Satz 7.1. Cauchysche Integralformel: *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $K \subset G$ eine abgeschlossene Kreisscheibe, so gilt für jedes $a \in K \setminus \partial K$:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - a} dz. \tag{37}$$

Die Bedeutung dieser von Cauchy gefundenen Formel ist riesig; beinahe die gesamte Funktionentheorie kann als Korollar davon angesehen werden. Die Formel besagt, dass wir den Wert einer Funktion an einer

Stelle a durch ein Integral über ganz andere Werte weit weg von a erhalten können. Die Werteverteilung einer holomorphen Funktion ist also nicht beliebig; die Werte an verschiedenen Stellen hängen voneinander ab. Das ist etwas ganz Neues im Vergleich zu reell differenzierbaren Funktionen. Eine Konsequenz sehen wir sofort, die Mittelwerteigenschaft: $f(a)$ ist der Mittelwert über die Werte von f auf einer Kreislinie um a . Dies erhalten wir, indem wir $K = K_r(a)$ wählen; setzen wir die Parametrisierung $Z = \gamma(t) = a + re^{it}$ ein, so können wir die linke Seite von (37) berechnen:

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = i \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt$$

Mit Satz 7.1 ergibt sich also:

Satz 7.2. Mittelwerteigenschaft:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt. \quad (38)$$

Eine Folgerung davon wiederum ist das *Maximumprinzip* für holomorphe Funktionen: Real- und Imaginärteil von f können wegen (38) in a nicht größer sein als auf ∂K und das Gleiche gilt auch für $|f|$, denn

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})| dt. \quad (39)$$

Die reellwertigen Funktionen $u, v, |f|$ können also auf G kein striktes Maximum besitzen, oder anders gesagt: Wenn sie doch ein Maximum haben, dann müssen sie bereits konstant sein. dieses nicht strikt sein, d.h. die Funktion ist konstant.¹² Wir werden bald sehen, dass damit auch f bereits konstant sein muss.

8. POTENZREIHENENTWICKLUNG

Die Bedeutung von (37) wird deutlicher, wenn wir die Variablen umbenenne: z statt a und w statt z . Für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jede Kreisscheibe $K = K_r(z_0) \subset G$ gilt für alle $z \in K \setminus \partial K$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (40)$$

¹²Ein Maximum $M = u(a)$ heißt *strikt*, wenn es ein $z \in G$ mit $u(z) < u(a)$ gibt. Dann ist die Menge $\{z \in G; u(z) = a\}$ eine echte Teilmenge von G . Wenn wir a als Randpunkt dieser Menge wählen, dann gibt es einen kleinen Kreis $\partial K_r(a)$, auf dem einige Werte von u kleiner sind als M (und sonst gleich), also ist (38) für u verletzt.

Die rechte Seite hängt unter dem Integral in sehr einfacher Weise von der Variable z ab. Mit Hilfe der geometrischen Reihe können den Integranden leicht in eine Potenzreihe nach $z - z_o$ entwickeln. Mit $q := (z - z_o)/(w - z_o)$ ist

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_o - (z - z_o)} = \frac{1}{w - z_o} \frac{1}{1 - q}.$$

Da $|z - z_o| < r$ für $z \in K \setminus \partial K$ und $|w - z_o| = r$ für $w \in \partial K$, ist $|q| < 1$ und damit

$$\frac{1}{1 - q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k,$$

also erhalten wir

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_o} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_o)^k}{(w - z_o)^k}.$$

und damit aus (40):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(w)}{w - z_o} \frac{(z - z_o)^k}{(w - z_o)^k} dw.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Integranden (vgl. Satz 5.1) dürfen wir die unendliche Summe mit dem Integral vertauschen und erhalten

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw \right) (z - z_o)^k \quad (41)$$

Satz 8.1. *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $K = K_r(z_o) \subset G$, dann lässt sich f in K in eine Potenzreihe nach Potenzen von $z - z_o$ entwickeln: Für alle $z \in K \setminus \partial K$ gilt*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_o)^k \quad (42)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw. \quad (43)$$

Dieser Satz hat eine Menge Folgerungen; man kann mit einigem Recht behaupten, dass der Rest der Vorlesung nur aus Folgerungen dieses Satzes besteht. Es gibt zwei Sorten von Folgerungen: Solche, die nur die Tatsache der Potenzreihenentwicklung (42) benötigen, und solche, die die explizite Darstellung (43) der Koeffizienten berücksichtigen. Aus dieser Darstellung bekommen wir nämlich eine Abschätzung der a_k durch die Werte der Funktion:

Folgerung 8.1. Ist $|f| \leq M$ auf $K = K_r(z_o)$, dann ist

$$|a_k| \leq \frac{M}{r^k}. \quad (44)$$

Beweis. Mit der Standardabschätzung ist

$$|a_k| = \left| \int_{\partial K_r(z_o)} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw \right| \leq 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{k+1}} = \frac{M}{r^k}. \quad \square$$

Satz 8.2. Satz von Liouville Eine ganze (d.h. auf ganz \mathbb{C} holomorphe) und beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis. Dann gilt (44) für alle $r > 0$, aber $\frac{M}{r^k} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$, falls $k > 0$. Also $a_k = 0$ für alle $k > 0$ und somit $f = a_0$. \square

Satz 8.3. Fundamentalsatz der Algebra Jedes nichtkonstante Polynom auf \mathbb{C} besitzt eine Nullstelle.

Beweis. Wenn ein Polynom f keine Nullstelle besitzt, ist $1/f$ eine ganze Funktion, die für $|z| \rightarrow \infty$ gegen Null geht oder wenigstens beschränkt bleibt. Deshalb ist $1/f$ ganz und beschränkt und damit konstant. \square

Nun noch einige Folgerungen, die nur (42) verwenden:

Folgerung 8.2. Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich um jedes $z_o \in G$ in eine Reihe entwickeln, deren Konvergenzradius mindestens der Abstand von z_o nach ∂G ist. \square

Folgerung 8.3. Jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ hat holomorphe (erste, zweite, dritte, ...) Ableitung und wird in jedem Kreis $K = K_r(z_o) \subset G$ durch seine Taylorreihe in z_o dargestellt.

Beweis. Da $f(z) = \sum a_k(z - z_o)^k$ für alle $z \in K$, ist

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum k a_k (z - z_o)^{k-1} \\ f''(z) &= \sum k(k-1) a_k (z - z_o)^{k-2} \\ f^{(n)}(z) &= \sum k(k-1) \dots (k-n+1) a_k (z - z_o)^{k-n} \end{aligned}$$

und damit $f^{(n)}(z_o) = n! a_n$, also $a_n = f^{(n)}(z_o)/n!$ und

$$f(x) = \sum_k \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} (z - z_o)^k. \quad (45)$$

Somit wird f durch seine Taylorreihe dargestellt. \square

Folgerung 8.4. Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und besitzt eine Stammfunktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ (mit $F' = f$), so ist f holomorph. \square

Satz 8.4. Satz von Morera (2): *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und gilt $\int_{\partial\Delta} f = 0$ für jedes Dreieck $\Delta \subset G$, dann ist f holomorph.*

Beweis. Ein Dreieck ist die konvexe Hülle von drei Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, d.h. die Menge

$$\Delta = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$$

Der Rand $\partial\Delta$ besteht aus dem Streckenzug $\gamma = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_1]$, sofern Δ links von γ liegt, andernfalls ist $\partial\Delta = \gamma^-$. Der Beweis ist nun genauso wie in Satz 4.3, wobei wir uns auf eine beliebige offene Kreisscheibe $B = B_r(z_o) \subset G$ einschränken und für γ_z die Strecke $[z_o, z]$ wählen. Wir setzen also $F(z) = \int_{z_o}^z f$ für alle $z \in B$. Für das Dreieck Δ mit den Ecken $z_o, z, z+h$ (mit $z+h \in B$) gilt nach Voraussetzung $\int_{\partial\Delta} f = 0$ und damit $F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f$, und $\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z)$. Somit ist F eine Stammfunktion von f auf B und nach Folgerung 8.4 ist f auf B holomorph. Da das Zentrum z_o von B ein beliebiger Punkt von G war, ist f auf ganz G holomorph. \square

9. LOKALE UMKEHRFUNKTIONEN

Eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *umkehrbar*, wenn $f(G)$ wieder ein Gebiet¹³ ist und es eine holomorphe Funktion $g : f(G) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_{f(G)}$ und $g \circ f = \text{id}_G$. Man sagt dann auch, dass $f : G \rightarrow f(G)$ *biholomorph* (umkehrbar holomorph) ist. Die biholomorphen Abbildungen sind sozusagen die Isomorphismen der Funktionentheorie; Komposition mit ihnen bringt keine wesentliche Veränderung.

Die meisten Funktionen sind allerdings nicht biholomorph, allenfalls nach starker Einschränkung ihres Definitionsbereichs. Eine *lokale Umkehrfunktion* einer holomorphen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $g : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(\tilde{G}) \subset G$ und

$$f \circ g = \text{id}_{\tilde{G}}. \tag{46}$$

Wie findet man lokale Umkehrfunktionen? Wieviele davon gibt es? Und wie steht es mit der zweiten Gleichung $g \circ f = \text{id}$?

Um eine Konstruktion für eine lokale Umkehrfunktion g von f zu finden, nehmen wir zunächst an, dass eine solche bereits gegeben wäre und leiten eine notwendige Bedingung her, die uns g festlegt; durch diese definieren wir anschließend die gesuchte Funktion. Wenn also g mit $f \circ g = \text{id}$ gegeben ist, dann erhalten wir durch Ableiten mit Hilfe der Kettenregel:

$$1 = \text{id}' = (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$$

¹³Wir werden bald sehen, dass dies für jede holomorphe Funktion der Fall ist.

Insbesondere darf $f' \circ g$ keine Nullstellen haben, und dann ist

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}. \quad (47)$$

Das ist die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, die wir ja schon aus der reellen Analysis kennen. Wir verstehen sie hier als Bestimmungsgleichung für g .¹⁴

Besonders einfach ist der Spezialfall, in dem die Ableitung von f wieder als Funktion von f selbst ausgedrückt werden kann.¹⁵

$$f' = h \circ f \quad (48)$$

für eine holomorphe Funktion $h : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(G) \subset \tilde{G}$. Dies ist bei den bekannten transzendenten Funktionen (\exp , \tan , \sin usw.) erfüllt.¹⁶

$$\exp' = \exp, \quad (49)$$

$$\tan' = 1 + \tan^2 \quad (50)$$

$$\sin' = \sqrt{1 - \sin^2} \quad (51)$$

In diesem Fall wird (47) zu

$$g' = \frac{1}{f' \circ g} = \frac{1}{h \circ f \circ g} = \frac{1}{h}$$

Also ist g eine Stammfunktion von $1/h$. Wenn das Definitionsgebiet \tilde{G} *einfach zusammenhängend* ist,¹⁷ d.h. wenn jeder geschlossene Weg γ in \tilde{G} homotop zu einem konstanten Weg γ_o ist, dann ist $\int_{\gamma} \frac{1}{h} = \int_{\gamma_o} \frac{1}{h} = 0$ und nach dem Satz von Morera 4.3 oder 8.4 besitzt jede holomorphe Funktion auf \tilde{G} eine Stammfunktion. Wir wählen unsere lokale Umkehrfunktion $g : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ also als Stammfunktion von $1/h$, wobei die freie Konstante noch zu bestimmen sein wird.

¹⁴Gleichung (47) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für g ; für sie gilt der Existenz- und Eindeutigkeitssatz wie im Reellen, mit dem gleichen Beweis. Wir werden dies aber nicht benutzen.

¹⁵So eine Gleichung (48) nennt man eine *autonome Differentialgleichung* für f .

¹⁶ $\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cos - \cos' \sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \tan^2$

¹⁷Beispiele sind konvexe oder allgemeiner sternförmige Gebiete \tilde{G} , in denen es einen Punkt $w_o \in \tilde{G}$ gibt mit $[w, w_o] \subset \tilde{G}$ für alle $w \in \tilde{G}$. *Konvex* bedeutet sternförmig für jedes $w_o \in \tilde{G}$.

Aber erfüllt diese Funktion g nun auch, was sie soll, nämlich $f \circ g = \text{id}$? Das tut sie überraschenderweise leider nicht so ohne Weiteres!¹⁸ Stattdessen erfüllt sie die andere Gleichung $g \circ f = \text{id}$, die wir bisher noch nicht betrachtet hatten! Dazu müssen wir allerdings den Definitionsbereich G von f einschränken, d.h. zu einem Teilgebiet $G_1 \subset G$ übergehen mit der Eigenschaft, dass $f(G_1) \subset \tilde{G}$. Auf G_1 gilt dann

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' = \frac{1}{h \circ f} \cdot h \circ f = 1.$$

Wenn wir zusätzlich fordern

$$g(f(z_o)) = z_o \tag{52}$$

für ein festes $z_o \in G_1$, dann erhalten wir tatsächlich auf G_1 die zweite Gleichung

$$g \circ f = \text{id} \tag{53}$$

Wenden wir auf beiden Seiten von (53) die Funktion f an, so erhalten wir $f \circ g \circ f = f$ oder $(f \circ g)(f(z)) = f(z)$ für jedes $z \in G_1$, also folgt

$$f \circ g = \text{id}. \tag{54}$$

auf $f(G_1) \subset \tilde{G}$. Nach dem *Identitätssatz*, den wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, gilt (54) dann sogar auf ganz \tilde{G} .

Satz 9.1. *Es sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f' = h \circ f$ für eine holomorphe Funktion $h : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ohne Nullstellen, wobei $f(G) \subset \tilde{G}$. Dann gilt: Eine Funktion $g : \tilde{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ist lokale Umkehrfunktion von f , d.h. $f \circ g = \text{id}_{\tilde{G}}$, genau dann, wenn g Stammfunktion von $1/h$ ist mit $g(f(z_o)) = z_o$ für ein $z_o \in G$.*

Beweis. Wenn g eine lokale Umkehrfunktion ist, so gilt $(f \circ g)' = 1$ und somit $g' = 1/(f' \circ g) = 1/h$. Außerdem ist $f(g(w_o)) = w_o$ für jedes feste $w_o \in G$. Mit $z_o := g(w_o)$ folgt $g(f(z_o)) = g(w_o) = z_o$. Ist umgekehrt g eine Stammfunktion von $1/h$ mit $g(f(z_o)) = z_o$, dann ist $(g \circ f)' = 1$ und damit $g \circ f = \text{id}$ auf jedem Teilgebiet $G_1 \subset G$ mit $f(G_1) \subset \tilde{G}$. Damit ist $f \circ g = \text{id}$ auf $f(G_1)$, und nach dem Identitätssatz folgt $f \circ g = \text{id}$ auf ganz \tilde{G} .¹⁹ \square

Bemerkung: Da jede lokale Umkehrfunktion eine Stammfunktion von $1/h$ und somit bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, ist sie durch (52) eindeutig festgelegt. Weil f aber vielleicht nicht auf ganz G

¹⁸ $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g' = (h \circ f \circ g)/h$; wir können diese Gleichung als Differentialgleichung für die Funktion $f \circ g$ ansehen, die $f \circ g = \text{id}$ als eine Lösung hat; dazu muss der Anfangswert richtig gewählt sein: $f(g(w_o)) = w_o$ an einer Stelle $w_o \in \tilde{G}$.

¹⁹Wenn wir G_1 so wählen können, dass $f(G_1) = \tilde{G}$, ist der letzte Schritt überflüssig. Das ist zum Beispiel bei $f = \exp$ und $g = \ln$ der Fall, siehe unten.

injektiv ist, ist die Wahl nicht eindeutig: Wenn $f(z_o) = f(z_1) = w_o$, dann sind durch $g(w_o) = z_o$ und $\tilde{g}(w_o) = z_1$ zwei verschiedene lokale Umkehrfunktionen gegeben, die sich um die Konstante $z_1 - z_o$ unterscheiden. Man spricht von verschiedenen *Zweigen* der Umkehrfunktion.

Logarithmus: Im Fall $f = \exp$ ist $h(w) = w$. Wir können also eine lokale Umkehrfunktion \ln (*Logarithmus naturalis*) von \exp als Stammfunktion von $\frac{1}{w}$ definieren, und zwar auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet \tilde{G} , das die Null 0 nicht enthält, zum Beispiel auf der links geschlitzten Ebene $\tilde{G} = \mathbb{C}_L = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}$, wobei nach (52) $\ln 1 = \ln e^0 = 0$ gelten muss, wenn wir $z_o = 0$ wählen. Das zugehörige Gebiet G_1 wäre $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \in (-\pi, \pi)\}$ mit $\exp(G_1) = \tilde{G}$. Wir könnten auch $z_o = 2\pi ik$ für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ wählen und würden andere Zweige des Logarithmus mit $\log 1 = 2\pi ik$ bekommen; der mit Wert 0 in 1 wird *Hauptzweig* genannt. Zwei Zweige des Logarithmus unterscheiden sich also um ganze Vielfache von $2\pi i$. Das kann man auch etwas besser verstehen, wenn man die Umkehrfunktion direkt ausrechnet: Aus der Darstellung von w in "Polarkoordinaten" $w = |w|e^{i\phi}$ kann man nämlich Real- und Imaginärteil des Logarithmus ablesen:

$$e^{\ln w} = w = |w|e^{i\phi} = e^{\ln|w|}e^{i\phi} = e^{\ln|w|+i\phi},$$

also

$$\operatorname{Re} \ln w = \ln |w|, \quad \operatorname{Im} \ln w = \phi. \quad (55)$$

Der Realteil von $\ln w$ ist also eindeutig bestimmt als (reeller) Logarithmus von $|w|$, aber der Imaginärteil ist der Winkel, auch "Argument" genannt, und der ist nur bis auf ganze Vielfache von 2π bestimmt.

Die Wahl von \mathbb{C}_L als Definitionsgebiet ist natürlich willkürlich; wir können ebenso gut $\mathbb{C} \setminus S$ betrachten, wobei $S = \{rz_o; r > 0\}$ ein beliebiger von 0 ausgehender Strahl ("*Schnitt von 0 nach ∞* ") ist.

Arcustangens: Im Fall $f = \tan$ ist $h(w) = 1 + w^2$, und wir definieren die Umkehrfunktion \arctan als Stammfunktion von $\frac{1}{1+w^2}$ auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet, das $\pm i$ (die Nullstellen von $1 + w^2$) nicht enthält, zum Beispiel $\tilde{G} = \mathbb{C}_{LR} = \mathbb{C} \setminus \{iy; y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$. In diesem Fall muss zusätzlich $\arctan(0) = 0$ (Hauptzweig) oder $\arctan(0) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Nebenzweige) gefordert werden. Zwei verschiedene Zweige des Arcustangens unterscheiden sich also um ganze Vielfache von π .

Wurzel: Die *Potenz* $f(z) = z^n$ können wir nicht so behandeln, weil $f'(z) = nz^{n-1} = nf(z)^{(n-1)/n}$ bereits die n -te Wurzel enthält, die wir ja erst konstruieren wollen. Aber hier hilft uns der Logarithmus: Für

jede reelle oder komplexe Zahl α und jedes $z \in \mathbb{C}_L$ setzen wir

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}. \quad (56)$$

Speziell für $\alpha = 1/k$ ist

$$g(w) = \sqrt[k]{w} = w^{1/k} = e^{(\ln w)/k} \quad (57)$$

(*k*-te Wurzel) eine auf \mathbb{C}_L definierte lokale Umkehrfunktion zur Potenz $f(z) = z^k$, denn

$$f(g(w)) = (e^{(\ln w)/k})^k = e^{\ln w} = w.$$

Auch jeder andere Zweig des Logarithmus führt zu einer *k*-ten Wurzel. Ersetzt man \ln durch $\ln + 2\pi mi$, so erhält man

$$\tilde{g}(w) = e^{(\ln w + 2\pi mi)/k} = e^{2\pi im/k} w^{1/k},$$

was zu *k* verschiedenen Wurzeln führt ($m = 0, \dots, k - 1$).

Wenn man nur an einer Umkehrfunktion in einer kleinen Umgebung interessiert ist, kann man den Umkehrsatz der reellen mehrdimensionalen Analysis verwenden:

Satz 9.2. Umkehrsatz: *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $z_o \in G$ mit $f'(z_o) \neq 0$, dann gibt es Umgebungen G_o von z_o und \tilde{G} von $f(z_o)$ derart, dass $f|_{G_o} : G_o \rightarrow \tilde{G}$ biholomorph ist.*

Beweis. Die Funktion f ist C^1 (sogar beliebig oft differenzierbar) und hat in z_o invertierbare Ableitung $Df_{z_o} = M_{f'(z_o)}$ (Multiplikation mit $f'(z_o)$). Nach dem Umkehrsatz ist dann f nahe z_o (d.h. in einer Umgebung G_o von z_o) ein Diffeomorphismus, und die Umkehrfunktion $g : \tilde{G} \rightarrow G_o$ hat Ableitung $Dg_w = (Df_z)^{-1} = M_{1/f'(z)}$, wobei $z = g(w)$. Also ist auch Dg_w die Multiplikation mit einer komplexen Zahl, nämlich $1/f'(z)$, und daher ist g holomorph. □

10. "ES GIBT NUR EINE FUNKTION"

Satz 10.1. *Jede holomorphe Funktion ist nahe einer Nullstelle bis auf Biholomorphie eine Potenz. Genauer: Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_o) = 0$, dann gibt es eine Umgebung $G_o \subset G$ von z_o und eine biholomorphe Abbildung $b : B_\epsilon(0) \rightarrow G_o$ mit $f \circ b = p_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei p_n die *n*-te Potenz bezeichnet: $p_n(w) = w^n$.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $z_o = 0$. Die Reihenentwicklung (42) von $f(z)$ beginnt mit einer niedrigsten Potenz, d.h. einem Term $a_n z^n$

mit $n \geq 1$, wobei $a_n \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < n$. Wir können also aus (42):

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n+1}z + a_{n+2}z^2 + \dots) = z^n h(z)$$

mit $h(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+j}z^j$, wobei $h(0) = a_n \neq 0$. Wir wählen $\epsilon < |a_n|$ und finden dazu $\delta > 0$ mit $h(B_\delta(0)) \subset B_\epsilon(a_n)$. Da $0 \notin B_\delta(a_n)$, können wir einen Schnitt S von 0 nach ∞ wählen, der $B_\delta(a_n)$ nicht trifft. Auf $\mathbb{C} \setminus S$ ist dann ein Zweig des Logarithmus und damit eine holomorphe n -te Wurzel definiert. Wir setzen $\tilde{h}(z) = \sqrt[n]{h(z)}$ und erhalten

$$f(z) = (z\tilde{h}(z))^n = a(z)^n \quad (58)$$

mit $a(z) := z\tilde{h}(z)$. Diese Funktion hat Ableitung $a'(z) = \tilde{h}(z) + z\tilde{h}'(z)$, also $a'(0) = \tilde{h}(0) = \sqrt[n]{a_n} \neq 0$. Nach dem Umkehrsatz 9.2 ist $a(z)$ nahe 0 umkehrbar; die Umkehrfunktion nennen wir $b(w)$, also $z = b(w)$, $w = a(z)$. Nach (58) ist $f = p_n \circ a$ und damit $f \circ b = p_n$. \square

Mit diesem Satz wissen wir lokal alles über holomorphe Funktionen;²⁰ sie sind genauso gut bekannt wie die Potenz. Das hat eine Reihe von starken Konsequenzen.

Satz 10.2. Isoliertheit der Nullstellen: *Die Nullstellen einer nicht-konstanten holomorphen Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ sind isoliert, d.h. zu jedem $z_o \in G$ mit $f(z_o) = 0$ gibt es einen Kreis $B_\epsilon(z_o)$, der keine weitere Nullstelle außer z_o enthält.*

Beweis. Nahe z_o sieht f wie eine Potenz aus, $f = p_n \circ b$ für eine Biholomorphie b , aber $p_n(w) = w^n$ hat nur eine einzige Nullstelle. \square

Der folgende Identitätssatz hat vielfältigste Anwendungen; eine haben wir schon im Beweis von Satz 9.1 gesehen, aber es gibt viele weitere. Zum Beispiel folgt, dass jede Formel, die in \mathbb{R} gilt, auch in \mathbb{C} richtig bleibt, wenn sie dort Sinn macht. Man probiere es aus mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus (Übung)!

Satz 10.3. Identitätssatz *Wenn zwei holomorphe Funktionen $f, \tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer nicht diskreten Menge $N \subset G$ übereinstimmen, dann sind sie gleich, $f = \tilde{f}$.*

Wir müssen zunächst die Definition von “(nicht) diskret” nachtragen. Eine Teilmenge $D \subset G$ heißt *diskret*, wenn alle Elemente isoliert sind: um jedes $z \in D$ gibt es einen Kreis $B_\epsilon(z)$, der keine weiteren Elemente von D enthält, $D \cap B_\epsilon(z) = \{z\}$. Entsprechend ist eine Teilmenge

²⁰Die Voraussetzung, dass z_o eine Nullstelle sein soll, ist keine ernsthafte Einschränkung; man geht sonst zu $f_o = f - f(z_o)$ über.

$N \subset G$ nicht diskret, wenn diese Eigenschaft für wenigstens ein $z_o \in N$ nicht gilt, d.h. jeder Kreis $B_\epsilon(z_o)$ enthält außer z_o noch weitere Punkte von N . Einen solchen Punkt z_o nennt man auch einen *Häufungspunkt* von N .

Beweis. Die holomorphe Funktion $h = \tilde{f} - f$ hat Nullstellen auf N . Wenn h die Nullfunktion ist, dann ist $\tilde{f} = f$. Andernfalls ist h nicht konstant (sie hat ja Nullstellen und ist nicht die Konstante Null), und damit sind die Nullstellen isoliert, sie bilden also eine diskrete Menge. Widerspruch! \square

Satz 10.4. *Eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist offen, d.h. die Bilder offener Mengen unter f sind offen.*

Beweis. Es sei $z_o \in G$. Dort hat die Funktion $f_o := f - f(z_o)$ eine Nullstelle, also ist $f_o = p_n \circ b$ nahe z_o . Da die Potenz p_n offen ist (s.u.) und b ein Diffeomorphismus, ist f_o offen, also auch f .

Es bleibt noch die Offenheit von p_n zu zeigen. Es genügt es zu zeigen, dass $p_n(B_\epsilon(w_o))$ offen ist für beliebige $w_o \in \mathbb{C}$ und genügend kleine $\epsilon > 0$. Wenn $w_o \neq 0$, ist $p_n'(w_o) \neq 0$ und die Eigenschaft folgt aus dem Umkehrsatz 9.2. Wenn $w_o = 0$, sehen wir explizit $p_n(B_\epsilon(0)) = B_{\epsilon^n}(0)$. \square

Satz 10.5. Gebietstreue: *Ist $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einem Gebiet G , so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. Da G offen, ist $f(G)$ offen nach dem vorigen Satz. Aber $f(G)$ ist auch zusammenhängend: Zwei Punkte $w_o = f(z_o)$ und $w_1 = f(z_1)$ können durch einen Weg in $f(G)$ verbunden werden, weil z_o, z_1 in G verbunden werden können: $\gamma : z_o \rightsquigarrow z_1 \Rightarrow f \circ \gamma : w_o \rightsquigarrow w_1$. \square

Satz 10.6. Maximumprinzip: *Ist $f = u + iv : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so besitzt keine der reellen Funktionen $u, v, |f|$ ein Maximum.*

Beweis. Würde nämlich eine dieser drei Funktionen bei $z_o \in G$ ein Maximum annehmen, dann wäre $f(z_o)$ ein Randpunkt von $f(G)$, denn es gäbe ja beliebig nahe zu $f(z_o)$ Punkte w , deren Real- oder Imaginärteil oder Betrag größer sind als die entsprechende Größe bei $f(z_o)$. Aber $f(G)$ ist eine offene Menge und enthält daher keine Randpunkte, Widerspruch! \square

Bemerkung: Diese Version des Maximumprinzips ist stärker als die auf S. 16 gegebene, denn sie sagt: Wenn eine dieser reellen Funktionen ein Maximum besitzt, dann ist nicht nur sie konstant, sondern auch bereits die gegebene holomorphe Funktion f .

11. HOLOMORPHE FUNKTIONEN AUF KREISRINGEN

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass eine holomorphe Funktion f auf Kreisscheiben in eine Potenzreihe (Taylorreihe) entwickelbar sind und sich daher im Wesentlichen wie eine Potenz (die niedrigste nicht-verschwindende Potenz der Potenzreihe) verhalten. Oft kommt es aber vor, dass f an einer Stelle z_0 eine Definitionslücke hat und damit nur auf der *gelochten* Kreisscheibe $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ definiert ist. Etwas allgemeiner wollen wir holomorphe Funktionen in *Kreisringen* $B_R(z_0) \setminus K_r(z_0)$ mit $r < R$ betrachten.

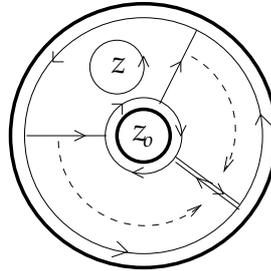
Satz 11.1. Laurent-Entwicklung *Ist $f : G = B_R(z_0) \setminus K_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für alle $z \in G$:*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n a_k (z - z_0)^k \quad (59)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw \quad (60)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ und beliebige $\rho \in (r, R)$. Die Reihe (59) ist in jedem kompakten Kreisring $\{z; r + \epsilon \leq |z - z_0| \leq R - \epsilon\} \subset G$ absolut und gleichmäßig konvergent.



Beweis.

Wir benutzen die Cauchysche Integralformel zunächst für einen kleinen Ball $B_\epsilon(z) \subset G$ und deformieren $\partial B_\epsilon(z)$ zunächst in ein Kreisbogen-viereck mit einem äußeren und einem inneren Kreisbogen und zwei radialen Strecken, wie in der Figur gezeigt. Dann schieben wir die radialen Strecken immer weiter voneinander fort um den Kreis herum, bis sie sich auf der Rückseite wieder treffen. Am Treffpunkt wird die radiale Strecke vor und zurück durchlaufen; die Integrale darüber heben sich also auf. Übrig bleiben die Integrale über die Kreise mit Radien $R' = r - \epsilon$ und $r' = r + \epsilon$, wobei der innere Kreis in der falschen Richtung durchlaufen wird. Somit erhalten wir

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial B_\epsilon(z)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\partial B_{R'}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\partial B_{r'}(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Wie beim Beweis der Potenzreihenentwicklung werden die Integranden nun in eine geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ für geeignete q entwickelt:

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{(w-z_0) - (z-z_0)} = \begin{cases} \frac{f(w)}{w-z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} & (1) \\ -\frac{f(w)}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}} & (2) \end{cases}$$

Dabei müssen wir den äußeren und den inneren Kreis unterschiedlich behandeln, um $|q| < 1$ zu gewährleisten: Im Fall $w \in \partial B_{R'}(z_0)$ ist $|z-z_0| < |w-z_0|$; daher setzen wir $q = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ und wählen die Darstellung (1); im anderen Fall $w \in \partial B_{r'}(z_0)$ ist dagegen $|z-z_0| > |w-z_0|$, denn z liegt außerhalb von $K_{r'}(z_0)$, also werden wir $q = \frac{w-z_0}{z-z_0}$ und die Darstellung (2) wählen. Wir erhalten damit

$$\frac{f(w)}{w-z} = \begin{cases} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k & \text{falls } w \in \partial B_{R'}(z_0) \\ -\frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^j & \text{falls } w \in \partial B_{r'}(z_0) \end{cases}$$

Vertauschen von Summe und Integral (gleichmäßige Konvergenz der geometrischen Reihe) ergibt mit $B = B_{R'}(z_0)$ und $b = B_{r'}(z_0)$:

$$2\pi i f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \int_{\partial B} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{k+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} (z-z_0)^{-(j+1)} \int_{\partial b} \frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{-j}}$$

Mit dem Cauchyschen Integralsatz kann man noch die Integrale über ∂B und ∂b durch Integrale über $\partial B_\rho(z_0)$ ersetzen und die beiden Summen zu einer über ganz \mathbb{Z} zusammenfassen, mit der Substitution $k = -(j+1)$ in der zweiten Summe, dann erhalten wir die Behauptung. \square

Die Reihe (59) heißt *Laurententwicklung* der Funktion f im Kreisring $G = B_R(z_0) \setminus K_r(z_0)$. Die Teilsumme über die negativen k (von $-\infty$ bis -1) heißt *Hauptteil*, die übrige Summe (für k von 0 bis ∞) der *Nebenteil* der Laurentreihe.

Satz 11.2. Eindeutigkeit der Laurent-Entwicklung: Wenn $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ auf $G = B_R(z_0) \setminus K_r(z_0)$, dann wird a_k durch (60) gegeben und damit eindeutig bestimmt.

Beweis. Wenn wir für $f(w)$ die Laurentreihe $\sum a_k(z-z_0)^k$ einsetzen, dann gilt zerfällt $\int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$ in eine unendliche Summe von Integralen mit Integranden $a_k(w-z_0)^{k-(n+1)}$. Alle diese Teilintegrale sind Null, weil die Funktion $w \mapsto (w-z_0)^{k-(n+1)}$ eine Stammfunktion besitzt, es sei denn, $k-(n+1) = -1$, d.h. $k = n$. Nur dieses eine Teilintegral bleibt übrig und ergibt den Wert $2\pi i \cdot a_n$, womit die Behauptung folgt, nämlich Gleichung (60). \square

Der letzte Satz erst macht es möglich, von *der* Laurententwicklung zu sprechen und diese auch (auf andere Weise) zu berechnen. Für die Berechnung in der Praxis betrachten wir das Beispiel

$$f(z) = \frac{4}{z^2 - 2z - 3}, \quad |z| \in (1, 3)$$

auf dem Kreisring $G = B_3(0) \setminus K_1(0)$. Die Gleichung $z^2 - 2z - 3 = 0$ hat die Lösungen $z_1 = -1$, $z_2 = 3$, also ist $z^2 - 2z - 3 = (z + 1)(z - 3)$. Jetzt verwenden wir einen Trick, der *Partialbruchentwicklung* heißt. Das ist die Umkehrung des Verfahrens, eine Summe von Brüchen auf den Hauptnenner zu bringen und so in ein Produkt. Hier möchte man umgekehrt ein Produkt in ein Summe umwandeln, indem man den Ansatz macht:

$$\frac{4}{(z + 1)(z - 3)} = \frac{a}{z + 1} + \frac{b}{z - 3} = \frac{(a + b)z + (b - 3a)}{(z + 1)(z - 3)}$$

woraus sich $a + b = 0$ und $b - 3a = 4$ ergibt, also $a = -b$ und $4b = 4$ und damit $b = 1$, $a = -1$. Wir erhalten also

$$f(z) = \frac{1}{z - 3} - \frac{1}{z + 1}.$$

Auf die beiden Summanden wenden wir jetzt getrennt die geometrische Reihenentwicklung an, wobei wir $1 < |z|$, d.h. $1/|z| < 1$, sowie $|z| < 3$, also $|z|/3 < 1$ zu beachten haben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - 3} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - z/3} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (z/3)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} \\ \frac{1}{z + 1} &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + 1/z} = \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} (-1/z)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (1/z)^{(j+1)} \end{aligned}$$

Setzen wir in der zweiten Summe $k = (j + 1)$, so ergibt sich

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} (1/3)^{k+1} z^k$$

12. ISOLIERTE SINGULARITÄTEN

Wir kommen auf unser ursprüngliches Problem zurück: Definitionslücken einer Funktion, auch *isolierte Singularitäten* genannt. Man betrachtet also holomorphe Funktionen f auf dem Kreisring $B_R(z_o) \setminus \{z_o\}$. Dort hat f eine Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_o)^k. \quad (61)$$

Die isolierte Singularität z_o heißt

- *hebbar* $\iff a_k = 0$ für alle $k < 0$,
- *Pol der Ordnung n* $\iff a_k = 0$ für alle $k < -n$, $a_{-n} \neq 0$
- *wesentlich* $\iff a_{k_j} \neq 0$ für eine Folge $k_j \rightarrow \infty$.

Wenn die Singularität hebbar ist, dann wird die Laurentreihe (61) zu einer Potenzreihe und ist damit holomorph nach z_o fortsetzbar mit $f(z_o) = a_o$. Wenn z_o ein Pol der Ordnung n ist, dann hat $g(z) = (z - z_o)^n f(z)$ in z_o eine hebbare Singularität mit $g(z_o) = a_{-n}$. Beide Fälle zusammen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Laurentreihe irgendwo anfängt: $a_k = 0$ für alle $k < k_o$. "Wesentliche Singularität" beschreibt den komplementären Fall: Zu jedem k_o gibt es $k < k_o$ mit $a_k \neq 0$, die Laurentreihe enthält also unendlich viele negative Potenzen.

Satz 12.1. Riemannscher Hebbarkeitssatz:

Ist $f : B_R(z_o) \setminus \{z_o\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist z_o eine hebbare Singularität.

Beweis. Wenn $|f| \leq 1M$, dann gilt mit der Standardabschätzung (32) für alle Radien $\rho \in (0, R)$:

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial B_\rho(z_o)} \frac{f(w)}{(w - z_o)^{k+1}} dw \right| \leq M\rho^{-k}$$

und für $k < 0$ geht diese Schranke gegen Null für $\rho \rightarrow 0$. Also gilt $a_k = 0$ für alle $k < 0$ und damit ist die Singularität hebbar. \square

Satz 12.2. Satz von Casorati und Weierstraß:

Ist $f : B_R(z_o) \setminus \{z_o\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und z_o wesentliche Singularität und $\rho \in (0, R)$, so ist $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\})$ dicht in \mathbb{C} , d.h. $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\})$ schneidet jede offene Kreisscheibe $B_\delta(w_o) \subset \mathbb{C}$.

Beweis. Beweis durch Kontraposition: $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\})$ sei nicht dicht. Dann gibt es ein $\rho \in (0, R)$ und einen Kreis $B_\delta(w_o) \subset \mathbb{C}$, der die Bildmenge $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\})$ nicht schneidet. Somit ist

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_o}$$

holomorph auf $B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\}$, und

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_o|} \leq \frac{1}{\delta}$$

Also ist g auf $B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\}$ beschränkt und deshalb nach dem vorigen Satz (Hebbarkeitssatz) auch auf z_o holomorph fortsetzbar. Die Singularität z_o von $f(z) = w_o + 1/g(z)$ ist hebbar, falls $g(z_o) \neq 0$, und ein Pol der Ordnung n , falls g in z_o eine Nullstelle der Ordnung n besitzt, d.h.

sich darstellen lässt als $g(z) = (z - z_o)^n \tilde{g}(z)$ mit $\tilde{g}(z_o) \neq 0$. In keinem Fall ist z_o wesentliche Singularität. \square

Satz 12.3. Kennzeichnung von Polen:

Ist $f : B_R(z_o) \setminus \{z_o\}$ holomorph, so ist die Singularität z_o ein Pol genau dann, wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_o$.

Beweis. Ist z_o ein Pol der Ordnung n , so lässt sich $g(z) := (z - z_o)^n f(z)$ holomorph auf z_o fortsetzen mit $g(z_o) \neq 0$. Damit ist $|g| \geq \delta > 0$ auf $B_\rho(z_o)$, und

$$|f(z)| = \frac{|g(z)|}{|z - z_o|^n} \geq \frac{\delta}{|z - z_o|^n} \xrightarrow{z \rightarrow z_o} \infty.$$

Wenn umgekehrt $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_o$, so ist z_o sicher nicht hebbbar, aber auch nicht wesentlich: Da $|f(z)| > C$ für alle $z \in B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\}$ für genügend kleines ρ , ist $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\}) \cap B_C(0) = \emptyset$, also ist $f(B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\})$ nicht dicht in \mathbb{C} und somit z_o keine wesentliche Singularität. \square

Bemerkung: Im Satz 12.2 gilt ebenfalls die Umkehrung: Wenn die Werte von $B_\rho(z_o) \setminus \{z_o\}$ dicht sind, kann kein Pol vorliegen (dann liegen die Werte nahe bei ∞) und keine hebbare Singularität (dann liegen die Werte nahe bei $f(z_o)$), also liegt eine wesentliche Singularität vor. Man braucht viel weniger, um eine wesentliche Singularität festzustellen; es reichen zwei Folgen $z_k \rightarrow z_o$ und $\tilde{z}_k \rightarrow z_o$ mit $\lim f(z_k) \neq \lim f(\tilde{z}_k)$ (Übung)

13. UMLAUFSZAHL

Der Cauchysche Integralsatz sagt, dass oft das Integral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen Weg γ gleich Null ist. Oft, aber nicht immer, wie wir am Beispiel $f(z) = 1/z$ und $\gamma = \partial B_r(0)$ gesehen haben. Das ist aber auch die einzige Potenz, die aus der Reihe tanzt; alle übrigen (positiven und negativen) Potenzen besitzen eine Stammfunktion und haben daher Integral Null über geschlossene Wege. Aber mit der Potenz z^{-1} (oder, verschoben, mit $(z - z_o)^{-1}$) müssen wir uns näher beschäftigen. Was ist $\int_\gamma z^{-1} dz$ für beliebige geschlossene Wege γ in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$? Die Frage kann leichter beantwortet werden, wenn wir zunächst auf die Voraussetzung "geschlossen" verzichten:

Hilfssatz 13.1. *Für jeden Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ gilt*

$$\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} = e^{\int_\gamma z^{-1} dz} \tag{62}$$

Beweis. Für $\delta(s) := \int_{\gamma|_{[a,s]}} z^{-1} dz = \int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$ gilt $\delta' = \frac{\gamma'}{\gamma}$. Damit ist $\gamma = \gamma(a) \cdot e^\delta$, denn

$$(\gamma e^{-\delta})' = (\gamma' - \gamma \delta') e^{-\delta} = 0$$

also ist

$$\gamma e^{-\delta} = \text{const} = \gamma(a), \tag{63}$$

da $\delta(a) = 0$. Somit ist

$$\frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} = e^{-\delta(b)} = e^{\int_\gamma z^{-1} dz}. \quad \square$$

Satz 13.1. *Für jeden geschlossenen Weg γ in \mathbb{C}^* gilt*

$$\int_\gamma z^{-1} dz = 2\pi i n \quad \text{für ein } n \in \mathbb{Z}. \tag{64}$$

Beweis. Da $\gamma(b)/\gamma(a) = 1$, folgt die Behauptung aus (62): Für $\delta = \int_\gamma z^{-1} dz$ ist $e^\delta = 1$, also $\delta \in 2\pi i \mathbb{Z}$. \square

Die Zahl n heißt die *Umlaufszahl* des Wegs γ um 0. Ihre geometrische Bedeutung wird klar, wenn wir den Weg γ zu einer Parametrisierung $\tilde{\gamma}$ der Einheitskreislinie deformieren:

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Die Wege $\tilde{\gamma}$ und γ sind offensichtlich homotop,²¹ also sind die Integrale über γ und über $\tilde{\gamma}$ gleich. Andererseits ist $\tilde{\gamma}(t)$ ein Einheitsvektor, also $\tilde{\gamma}(t) = e^{i\alpha(t)}$ für einen Winkel $\alpha(t) \in \mathbb{R}$. Vergleich mit (63) für den Weg $\tilde{\gamma}$ zeigt:

$$e^{i(\alpha(s) - \alpha(a))} = e^{\delta(s)}$$

mit $\delta(s) = \int_{\gamma|_{[a,s]}} z^{-1} dz$. Deshalb ist $\delta(s)/i = \alpha(s) - \alpha(a)$ der zwischen a und s stetig durchlaufene Winkel,²² und die Umlaufszahl zählt demnach, wieviel Mal der volle Winkel $2\pi = 360^\circ$ erreicht wird, wie oft also der Weg die Null umrundet. Allgemeiner definieren wir für jeden geschlossenen Weg γ und jedes $z_o \in \mathbb{C}$ außerhalb von $\text{Bild}(\gamma)$ die *Umlaufszahl von γ um z_o* durch

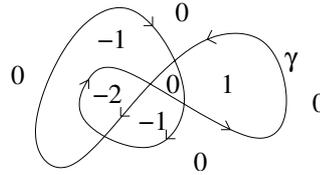
$$n(\gamma, z_o) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_o}. \tag{65}$$

²¹Die Homotopie ist $\phi(s, t) = (1 - s + \frac{s}{|\gamma|})\gamma$

²²Eigentlich können wir nur $\delta(s)/i - (\alpha(s) - \alpha(a)) = k \cdot 2\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ schließen, aber wenn $\alpha(s)$ stetig von s abhängt, muss $k = 0$ gelten, denn für $s = a$ ist $k(a) = 0$, und $k(s)$ ist ganzzahlig und stetig von s abhängig, also konstant gleich Null.

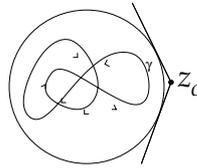
Auf dieser geometrischen Interpretation beruht ein Kalkül zur einfachen Berechnung von Umlaufszahlen, der auf drei Prinzipien gegründet ist:

- (1) Auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$ ist die Funktion $z_o \mapsto n(\gamma, z_o)$ konstant.
- (2) Wenn $\text{Bild}(\gamma) \subset B_R(0)$, dann ist $n(\gamma, z_o) = 0$ für $|z_o| > R$.
- (3) Wenn z_o das Bild von γ von rechts nach links überschreitet (bezüglich der Richtung von γ'), vergrößert sich $n(\gamma, z)$ um Eins.

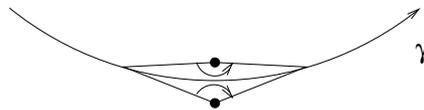


Zu (1): Die Umlaufszahl $n(\gamma, z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_o}$ hängt stetig von z_o ab und ist ganzzahlig, deshalb kann sie ihren Wert nicht ändern, wenn z_o stetig verschoben wird, solange das Bild von γ nicht getroffen wird (wenn $z_o \in \text{Bild}(\gamma)$, dann ist $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_o}$ nicht definiert, weil der Weg eine Polstelle des Integranden trifft).

Zu (2): Von jedem Punkt z_o außerhalb von $B_R(0)$ aus gesehen liegt $B_R(0)$ in einem Winkelintervall mit Länge $< \pi$, also kann die von z_o aus gesehene Winkeländerung von $\gamma(a)$ bis $\gamma(t)$ niemals den Wert 2π erreichen.



Zu (3): Wenn z_o die Kurve γ von rechts nach links überschreitet, ändert sich das Argument von $\gamma(t) - z_o$ nur sehr wenig für diejenigen $\gamma(t)$, die von z_o weit entfernt sind, aber auf dem Abschnitt von γ , das nahe bei z_o liegt, wird eine Winkeländerung von beinahe $-\pi$ vor dem Übergang durch eine von beinahe $+\pi$ nach dem Übergang ersetzt, siehe Figur.



Der insgesamt durchlaufene Winkel erhöht sich also um 2π und die Umlaufszahl um Eins.²³

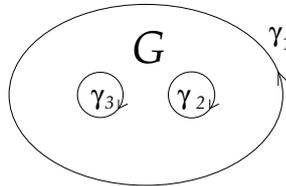
²³Es macht nichts aus, dass wir hier Worte wie "beinahe" benutzen, denn der Gesamtwinkel kann sich ja nur um ganze Vielfache von 2π verändern; wir müssen

Erst jetzt eigentlich sind wir formal in der Lage, den *Rand* eines Gebietes $G \subset \mathbb{C}$ mit kompaktem Abschluss $G \cup \partial G$ als *Weg* zu beschreiben: Ein geschlossener Weg γ heißt *Randweg* von G , wenn $\text{Bild}(\gamma) \subset \partial G$ und

$$n(\gamma, z_o) = \begin{cases} 1 & \text{für alle } z_o \in G \\ 0 & \text{für alle } z_o \in \mathbb{C} \setminus (G \cup \partial G) \end{cases} \quad (66)$$

Wir bestätigen damit unsere frühere Festlegung, nach der ∂G so durchlaufen wird, dass G immer links liegt: Die Umlaufszahl $n(\gamma, z_o)$ erhöht sich von Null auf Eins, wenn z_o den Rand ∂G von rechts nach links überquert und so vom Außenbereich nach G gelangt.

Allerdings kann ∂G aus mehreren Teilen (“Zusammenhangskomponenten”) bestehen:



Dann setzt sich ∂G aus mehreren geschlossenen Wegen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zusammen, die nur gemeinsam die Bedingung (66) erfüllen können; man fasst sie deshalb zu einem neuen Objekt zusammen, genannt *Randzykel*. Ein *Zykel* ist eine endliche Menge Γ von geschlossenen Wegen; man schreibt diese Menge aber nicht wie sonst als $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, sondern man missbraucht das $+$ -Zeichen dafür und schreibt $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$. Das kann zu Verwechslungen Anlass geben; dieses $+$ -Zeichen hat nichts mit der Addition von komplexen Zahlen zu tun! Man geht allerdings noch einen Schritt weiter und stellt dann doch einen Zusammenhang zur gewöhnlichen Addition her, indem man das *Integral* über einen Zykel $\Gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ definiert als Summe der Einzelintegrale:

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \dots + \int_{\gamma_n} f. \quad (67)$$

14. DER RESIDUENSATZ

Ist z_o eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : B_R(z_o) \setminus \{z_o\} \rightarrow \mathbb{C}$, dann entscheidet der Koeffizient a_{-1} der Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_o)^k \quad (68)$$

nur so genau rechnen, dass wir die Änderung um 2π von einer möglichen anderen Änderung von $k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ unterscheiden können.

über den Wert von $\int_{\gamma} f$ für alle geschlossenen Wege γ in $B_R(z_o) \setminus \{z_o\}$: Da ja alle Summanden von (68) außer $a_{-1}(z-z_o)^{-1}$ eine Stammfunktion in $\mathbb{C} \setminus \{z_o\}$ besitzen, ist das Integral für alle diese Summanden Null; von $\int_{\gamma} f$ bleibt nur der Summand $\int_{\gamma} a_{-1}(z-z_o)^{-1} dz$ übrig, und der wird durch die Umlaufszahl (65) berechnet:

$$\int_{\gamma} f = a_{-1} \cdot 2\pi i n(\gamma, z_o) \quad (69)$$

Wegen dieser Tatsache nennt man den Koeffizienten a_{-1} das *Residuum von f in z_o* ,

$$\text{Res}_{z_o} f := a_{-1} \quad \text{für} \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_o)^k. \quad (70)$$

Das Residuum ist eben das, was beim Integrieren über geschlossene Wege von der Funktion übrig bleibt. Gleichung (69) ist die einfachste Form des *Residuensatzes*, der allgemein das Integral holomorpher Funktionen über geschlossene Wege im gesamten Definitionsgebiet berechnet. Wie alle Sätze der Funktionentheorie gibt es verschiedene, mehr oder weniger allgemeine Versionen davon. Eine einfache, aber schon recht brauchbare Version ist die folgende:

Satz 14.1. Residuensatz

Es sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $z_1, \dots, z_N \in G$ und $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_N . Dann gilt für jeden geschlossenen Weg γ in $G \setminus \{z_1, \dots, z_N\}$:

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{i=1}^N n(\gamma, z_i) \cdot \text{Res}_{z_i} f. \quad (71)$$

Beweis. Für jedes $i = 1, \dots, N$ sei h_i der Hauptteil der Laurententwicklung von f im Punkt z_i , d.h. im Kreisring $B_{\epsilon}(z_i) \setminus \{z_i\}$. Jedes h_i ist eine Potenzreihe in Potenzen von $w := 1/(z - z_i)$, die für beliebig kleine positive $|z - z_i|$, also für beliebig große $|w|$ konvergiert; damit ist h_i auf $\mathbb{C} \setminus \{z_i\}$ holomorph. Also ist $f - \sum_{i=1}^N h_i$ auf ganz G holomorph, denn in jedem z_i bleibt nur der Nebenteil der Laurententwicklung übrig, und das ist eine Potenzreihe in $z - z_i$, die natürlich in z_i holomorph ist. Da G einfach zusammenhängend ist, besitzt $\tilde{f} := f - \sum_i h_i$ eine Stammfunktion, und damit gilt für jeden geschlossenen Wege γ in G :

$$0 = \int_{\gamma} \tilde{f} = \int_{\gamma} f - \sum_i \int_{\gamma} h_i.$$

Somit

$$\int_{\gamma} f = \sum_i \int_{\gamma} h_i = \sum_i \operatorname{Res}_{z_i} f \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_i} = \sum_i \operatorname{Res}_{z_i} f \cdot 2\pi i n(\gamma, z_i). \quad \square$$

Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir wissen, wie man Residuen berechnet. Wir stellen einige Situationen vor:

- (1) Besonders einfach ist die Residuenbestimmung bei Polen erster Ordnung: $f(z) = a_{-1}(z - z_o)^{-1} + \sum_{k \geq 0} a_k(z - z_o)^k$. Dann ist $g(z) = (z - z_o)f(z)$ holomorph und

$$a_{-1} = g(z_o). \quad (72)$$

Beispiel: $f(z) = \frac{4}{(z+1)(z-3)}$. Die Singularitäten sind -1 und 3 , beides Pole erster Ordnung (denn bei $z_o = -1$ ist der andere Faktor $\frac{4}{z-3}$ holomorph, und ebenso $\frac{4}{z+1}$ bei $z_1 = 3$). Die Funktion

$$g_o(z) = (z + 1)f(z) = \frac{4}{z - 3}$$

hat bei $z_o = -1$ den Wert $\frac{4}{-1-3} = -1$, und die Funktion

$$g_1(z) = (z - 3)f(z) = \frac{4}{z + 1}$$

hat bei $z_1 = 3$ den Wert $\frac{4}{3+1} = 1$. Also ist $\operatorname{Res}_{-1} f = -1$ und $\operatorname{Res}_3 f = 1$.

- (2) Ein Spezialfall davon ist $f = p/q$, wobei q in z_o eine einfache Nullstelle hat. Dann ist (mit $q(z_o) = 0$)

$$\operatorname{Res}_{z_o} f = p(z_o) \lim_{z \rightarrow z_o} \frac{z - z_o}{q(z) - q(z_o)} = \frac{p(z_o)}{q'(z_o)}. \quad (73)$$

Im obigen Beispiel ist $f = p/q$ mit $p = 4$ und $q = (z + 1)(z - 3)$, also $q' = (z - 3) + (z + 1) = 2z - 2$. Die Werte von q' in z_o, z_1 sind $q'(-1) = -4$ und $q'(3) = 4$. Die Residuen sind somit $4/(-4) = -1$ und $4/4 = 1$, wie wir bereits gesehen haben.

- (3) Hat man dagegen einen Pol n -ter Ordnung vorliegen,

$$f(z) = a_{-n}(z - z_o)^{-n} + \dots + a_{-1}(z - z_o)^{-1} + \dots,$$

dann muss man mit $(z - z_o)^n$ multiplizieren und erhält die bei z_o holomorphe Funktion

$$g(z) = (z - z_o)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z - z_o)^{n-1} + \dots$$

Von dieser Potenzreihe muss man den Koeffizienten vor der Potenz $(z - z_o)^{n-1}$ ermitteln, also den $(n - 1)$ -ten Term der Taylorentwicklung von g ; dieser ist nach (45)

$$\operatorname{Res}_{z_o} f = \frac{g^{(n-1)}(z_o)}{(n-1)!} \quad (74)$$

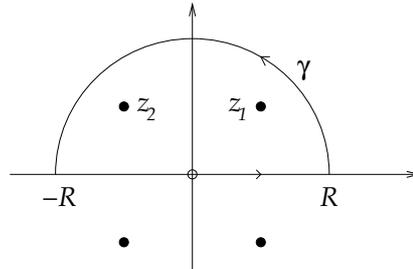
- (4) Bei wesentlichen Singularitäten bleibt einem nichts anderes als das Residuum a_{-1} aus der Laurententwicklung zu entnehmen. Zum Beispiel hat $\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots$ in der Singularität $z_o = 0$ das Residuum 1.

15. REELLE INTEGRALE

Der Residuensatz lässt sich anwenden, um Integrale gewisser reeller Funktionen über $(-\infty, \infty)$ oder $(0, \infty)$ zu berechnen (*uneigentliche Integrale*). Wir wollen dies zunächst an einem Beispiel sehen: Man zeige, dass der folgende Limes existiert und berechne seinen Wert:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4 + 1}$$

Die Idee ist, dass wir den Integranden $\frac{1}{x^4+1}$ ins Komplexe fortsetzen und das Intervall $[-R, R]$ durch einen Weg γ durch die obere Halbebene zu einem geschlossenen Weg $\hat{\gamma} = [-R, R] * \gamma$ ergänzen. Das Integral über $\hat{\gamma}$ kann mit dem Residuensatz berechnet werden. Wenn wir dann noch zeigen können, dass das Integral über den zusätzlichen Weg γ klein wird für $R \rightarrow \infty$, dann haben wir unsere Aufgabe gelöst.



Im Beispiel wählen wir für γ den oberen Halbkreis

$$\gamma(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi] \quad (75)$$

Für $z = \gamma(t)$ gilt $|z^4 + 1| \geq |z|^4 - 1 = R^4 - 1$ und deshalb $|f(z)| \leq \frac{1}{R^4 - 1}$ falls $R > 1$. Mit der Standardabschätzung (32) erhalten wir deshalb

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \pi R \frac{1}{R^4 - 1} = \frac{\pi}{R^3 - 1/R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (76)$$

Andererseits sind die Singularitäten von f die Nullstellen des Nenners

$$z^4 - 1 = (z^2 + i)(z^2 - i) = (z + \sqrt{i})(z - \sqrt{i})(z + \sqrt{-i})(z - \sqrt{-i}),$$

die bei $\pm\sqrt{i}$ und $\pm\sqrt{-i}$ liegen.²⁴ Weil die Nullstellen einfach sind, sind alle Singularitäten Pole erster Ordnung. Da $i = e^{\pi i/2}$ und $-i = e^{3\pi i/2}$, sind die Quadratwurzeln $\pm\sqrt{i} = \pm e^{\pi i/4}$ und $\pm\sqrt{-i} = \pm e^{3\pi i/4}$. Davon liegen in der oberen Halbebene die Punkte $z_1 = e^{\pi i/4}$ und $z_2 = e^{3\pi i/4} = -\bar{z}_1$ (bei 45° zu beiden Seiten der y -Achse); für diese ist die Umlaufzahl von $\hat{\gamma}$ gleich Eins (der Weg lässt sich auf einen kleinen Kreis um die Singularitäten deformieren), für die anderen beiden ist die Umlaufzahl Null. Wir müssen also nur die Residuen in diesen Punkten $z_1 = \sqrt{i} = e^{\pi i/4}$ und $-\bar{z}_1 = e^{3\pi i/4}$ berechnen. Dies kann zum Beispiel mit (73) geschehen: Da $f = 1/q$ ist $\text{Res}_{z_0} f = 1/q'(z_0)$, wenn z_0 einfache Nullstelle von q ist. In unserem Fall ist $q(z) = z^4 + 1$ und damit $q'(z) = 4z^3$. Also gilt

$$\text{Res}_{z_1} f + \text{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4z_1^3} - \frac{1}{4\bar{z}_1^3} = \frac{1}{4}(\bar{z}_1^3 - z_1^3) = -\frac{i}{2} \text{Im } z_1^3 = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$$

denn da $z_1 = e^{\pi i/4}$, ist $z_1^3 = e^{3\pi i/4}$ und $\text{Im } z_1^3 = 1/\sqrt{2}$. Wir erhalten daher

$$\int_{\hat{\gamma}} f = 2\pi i (\text{Res}_{z_1} f + \text{Res}_{-\bar{z}_1} f) = -2\pi i \cdot \frac{i}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

unabhängig von R (für $R > 1$). Mit (76) folgt also²⁵

$$\int_{-R}^R f = \int_{\hat{\gamma}} f - \int_{\gamma} f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Mit derselben Methode erhält man allgemein:

Satz 15.1. *Es sei $f = p/q$ eine rationale Funktion, d.h. Quotient zweier Polynome p und q , und der Grad des Nenners q möge um mindestens 2 größer sein als der des Zählers p (man sagt: f hat in ∞ eine Nullstelle der Ordnung ≥ 2 , oder $\text{ord}_\infty f \geq 2$), und q habe keine reellen*

Nullstellen. Dann existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} f \tag{77}$$

²⁴Hier ist es egal, welchen Zweig der Quadratwurzel wir jeweils wählen, weil ja ohnehin beide Vorzeichen vorkommen.

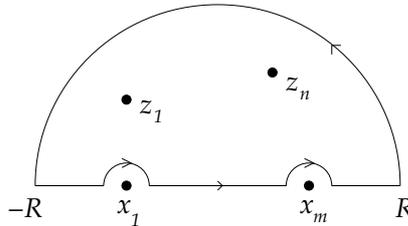
²⁵Aus Symmetriegründen gilt dann $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, vgl. (2)

wobei z_1, \dots, z_n die Polstellen von f in der oberen Halbebene \mathbb{H} sind; dabei ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$.

Beweis. Wir benutzen den gleichen Halbkreis wie im Beispiel, $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, und ergänzen damit das Intervall $[-R, R]$ zu einem geschlossenen Weg $\hat{\gamma}$. Dabei soll R so groß sein, dass alle Polstellen in der oberen Halbebene in $B_R(0) \cap \mathbb{H}$ liegen; da es nur endlich viele solcher Stellen gibt z_1, \dots, z_n gibt (ihre Anzahl n ist höchstens der Grad von q), wählen wir einfach $R > \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$. Wegen der Gradbedingung ist $|p(z)/q(z)| \leq C/|z|^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_o$ falls R_o genügend groß.²⁶ Nach Standardabschätzung (32) folgt $|\int_{\gamma} f| \leq \pi R \cdot C/R^2 = \pi C/R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$. Da $\hat{\gamma}$ alle z_j einmal umläuft und mögliche weitere Singularitäten in der unteren Halbebene gar nicht umläuft, folgt nach dem Residuensatz

$$2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j} f = \int_{\hat{\gamma}} f = \int_{-R}^R f + \int_{\gamma} f \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f. \quad \square$$

Zusatz: Wenn f auf der reellen Achse doch Pole besitzt, und zwar einfache Pole, dann existiert das Integral nicht mehr im üblichen Sinne, wohl aber im Sinne von *Hauptwerten*: Ist $x_i \in \mathbb{R}$ ein einfacher Pol, dann betrachtet man das Integral über $\mathbb{R} \setminus (x_i - r, x_i + r)$ im Limes $r \rightarrow 0$; dieser Wert ist endlich und kann mit dem Residuensatz berechnet werden: Dazu ändert man den Weg $\hat{\gamma}$ so ab, dass jeder reelle Pol durch einen kleinen Halbkreis $\gamma_i(t) = x_i + re^{i(\pi-t)}$, $t \in [0, \pi]$ umgangen wird:



Immer noch ist $\int_{\hat{\gamma}} f$ die Summe der Residuen in der oberen Halbebene, aber die Beiträge der $\int_{\gamma_i} f$ verschwinden nicht für $r \rightarrow 0$: Weil x_i einfacher Pol, ist $f(z) = a_{-1}(z - x_i)^{-1} + a_0 + \dots$, und das Integral $\int_{\gamma_i} f$ zerfällt in eine entsprechende Summe. Aber alle Terme außer dem ersten sind beschränkt nahe x_i , und die Länge von γ_i geht gegen Null

²⁶Wenn p den Grad $n - k$ und q den Grad n hat, dann ist $p(z) = z^{n-k}(a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \dots)$ und $q(z) = z^n(b_0 + b_1/z + b_2/z^2 + \dots)$, also $p(z)/q(z) = g(z)/z^k$ mit $g(z) = \frac{a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \dots}{b_0 + b_1/z + b_2/z^2 + \dots} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} a_0/b_0$. Für $|z| > R_o$ (genügend groß) gilt also $|g(z)| \leq C$ und $|p(z)/q(z)| \leq C/|z|^k$.

für $r \rightarrow 0$, also liefert im Grenzwert $r \rightarrow 0$ nur das Integral über den ersten Summanden eine Beitrag, und zwar

$$\int_{\gamma_i} f = a_{-1} \int_0^\pi \frac{-ie^{i(\pi-t)}}{e^{i(\pi-t)}} = -\pi i a_{-1} = -\pi i \operatorname{Res}_{x_i} f$$

Das gesuchte Integral über $\mathbb{R} \setminus \bigcup_i (x_i - r, x_i + r)$ ist also das Integral über $\hat{\gamma}$ vermindert um das Integral über γ und über die γ_i ; das erstere verschwindet für $R \rightarrow \infty$, das letztere hat den Wert $-\pi i \operatorname{Res}_{x_i} f$. der abgezogen werden muss. Zu der rechten Seite in (77) tritt also noch der Term

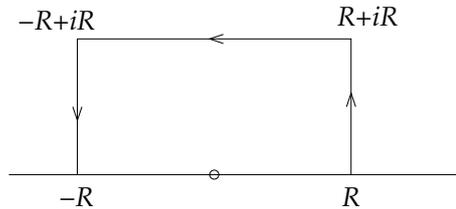
$$\pi i \sum_{x_i \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}_{x_i} f. \tag{78}$$

Der gleiche Zusatz trifft auch für den folgenden Satz zu:

Satz 15.2. *Ist f eine rationale Funktion mit $\operatorname{ord}_\infty f \geq 1$ mit Polen z_1, \dots, z_n in der oberen Halbebene und ohne Pol auf der reellen Achse. Dann gilt*

$$\int_{-\infty}^\infty f(t)e^{it} dt = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}_{z_j} (f(z)e^{iz}) \tag{79}$$

Bemerkung: Wenn f eine “reelle Funktion” ist, d.h. auf \mathbb{R} nur reelle Werte annimmt, dann können wir (79) in Real- und Imaginärteil zerlegen und so die Integrale über $f(x) \cos x$ und $f(x) \sin x$ berechnen.



Beweis. Nach Voraussetzung ist $|f(z)| < C/|z|$, wenn $|z|$ hinreichend groß ist. Wie im vorigen Satz ergänzen wir das Intervall $[-R, R]$ zu einem geschlossenen Weg $\hat{\gamma}$, aber diesmal ist es vorteilhafter, für $\hat{\gamma}$ den Rand des Rechtecks

$$\mathbf{R} = [-R, R] \times [0, R] = \{x + iy; |x| \leq R, 0 \leq y \leq R\}$$

zu wählen. Für $g(z) := f(z)e^{iz}$ ist dann

$$\int_{\partial \mathbf{R}} g = \int_{-R}^R g + \int_R^{R+iR} g + \int_{R+iR}^{-R+iR} g + \int_{-R+iR}^{-R} g$$

wobei jeweils längs der verbindenden Strecken integriert wird. Insbesondere gilt

$$\left| \int_R^{R+iR} g \right| \leq \int_0^R |g(R+it)| dt \leq \frac{C}{R} \int_0^R e^{-t} dt = \frac{C}{R} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

denn für $z = R+it$ ist $|z| \geq R$ und $|e^{iz}| = |e^{iR-t}| = |e^{iR}e^{-t}| = e^{-t}$, also $|g(z)| \leq \frac{C}{R} e^{-t}$. Wir haben hier also nicht die Standardabschätzung angewandt, sondern eine obere Schranke des Integranden integriert. Auf ähnliche Weise folgt, dass das Integral über die andere senkrecht Kante für $R \rightarrow \infty$ gegen 0 geht. Ein Integral fehlt noch:

$$\left| \int_{R+iR}^{-R+iR} g \right| \leq \int_{-R}^R |g(t+iR)| dt \leq 2R \cdot \frac{C}{R} e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

denn für $z = t+iR$ ist $|z| \geq R$ und damit $|f(z)| \leq C/R$, während $|e^{iz}| = |e^{i(t+iR)}| = e^{-R}$. Somit folgt $\int_{\partial R} g \rightarrow \int_{-R}^R g$ für $R \rightarrow \infty$, und andererseits

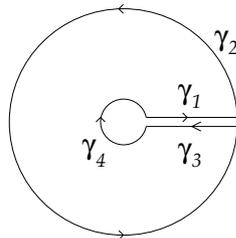
$$\int_{\partial R} g = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} g.$$

wenn R nur genügend groß ist (so groß, dass R alle Singularitäten z_j enthält). \square

Satz 15.3. *Es sei f eine rationale Funktion mit $\text{ord}_{\infty} f \geq 2$, ohne Pol auf $(0, \infty)$ und mit höchstens einfachen Pol in 0. Die Singularitäten $\neq 0$ von f seien z_1, \dots, z_n . Dann gilt für jedes $\alpha \in (0, 1)$:*

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} (z^{\alpha} f(z)) \quad (80)$$

mit $z^{\alpha} := e^{\alpha \log z}$, wobei \log der auf der rechts geschlitzten Ebene $\mathbb{C}_R = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ definierte Zweig des Logarithmus mit $\text{Im} \log \in (0, 2\pi)$ ist.



Beweis.

Wir berechnen das Integral über $g(z) = z^{\alpha} f(z)$ entlang des in der Figur gezeigten Weges $\hat{\gamma}$ in \mathbb{C}_R . Er besteht aus einem großen Kreis mit Radius R , einem gegenläufig kleinen Kreis mit Radius r und den zwei gegenläufigen Verbindungsstrecken parallel zur reellen Achse, knapp oberhalb, Imaginärteil ϵ , und knapp unterhalb, Imaginärteil $-\epsilon$. Wir

interessieren uns für den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$. Wenn R genügend groß und r, ϵ genügend klein, dann umläuft $\hat{\gamma}$ sämtliche Singularitäten in \mathbb{C}^* mit Umlaufszahl Eins, weil die positiven reelle Achse ja frei davon ist. Damit erhalten wir

$$\int_{\hat{\gamma}} g = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}_{z_j} g.$$

Andererseits setzt sich der Weg $\hat{\gamma}$ aus den vier Teilen $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ zusammen. Wegen $\text{ord}_{\infty} f \geq 2$ gilt wie vorher mit der Standardabschätzung (32), dass $\int_{\gamma_2} g \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$. In der Nähe von 0 ist $f(z) \leq C/|z|$, weil dort höchstens ein einfacher Pol sein darf; also ist $|g(z)| \leq C|z|^{\alpha-1}$ und mit der Standardabschätzung folgt

$$\left| \int_{\gamma_4} g \right| \leq 2\pi r \cdot Cr^{\alpha-1} = 2\pi Cr^{\alpha} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Es bleiben die Integrale über die Strecken γ_1 und γ_3 . Knapp oberhalb und knapp unterhalb der positiven reellen Achse ist der Wert von z^{α} verschieden: Oberhalb geht das Argument, der Imaginärteil des Logarithmus gegen Null, wenn wir uns der Achse nähern, unterhalb aber gegen 2π . Da $\log z = \ln|z| + i \arg(z)$, gilt für z knapp unterhalb der Achse:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha(\ln|z| + 2\pi i)} = e^{2\pi i \alpha} |z|^{\alpha},$$

während für z knapp oberhalb der positiven reellen Achse der Faktor $e^{2\pi i \alpha}$ fehlt. Damit ist im Limes $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\int_{\gamma_1} g + \int_{\gamma_3} g = (1 - e^{2\pi i \alpha}) \int_r^R x^{\alpha} dx,$$

womit die Behauptung folgt. □

Satz 15.4. *Es sei q eine rationale Funktion in zwei Variablen. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi} q(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{|z|<1} \text{Res}_z g \tag{81}$$

wobei

$$g(z) = \frac{1}{iz} q\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right).$$

Beweis. $\int_{|z|=1} g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) i e^{it} dt$
 $= \int_0^{2\pi} q\left(\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})\right) dt = \int_0^{2\pi} q(\cos t, \sin t) dt$ □

16. LOGARITHMISCHE ABLEITUNG UND SATZ VON ROUCHÉ

Die *logarithmische Ableitung* einer Funktion $f : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$ ist die Funktion f'/f auf $G = \hat{G} \setminus \{f = 0\}$, wobei $\{f = 0\} = \{z \in G; f(z) = 0\}$ die *Nullstellenmenge* von f bezeichnet. Die logarithmische Ableitung ist wirklich die Ableitung des Logarithmus von f , wenn dieser existiert: Wir nennen eine Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ einen *Logarithmus von f* , wenn $e^g = f$ (und damit $g = \log f$, falls ein Zweig des Logarithmus auf $f(G)$ existiert). Es gilt nämlich:

Satz 16.1. *Die Funktion g ist ein Logarithmus von f genau dann, wenn g eine Stammfunktion von f'/f ist mit $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ für ein $z_0 \in G$.*

Beweis. Wenn $f = e^g$, dann ist $f' = g'e^g = g'f$, also $g' = f'/f$. Wenn umgekehrt $g' = f'/f$, dann ist $(fe^{-g})' = (f' - fg')e^{-g} = 0$, also $fe^{-g} = \text{const} = f(z_0)e^{-g(z_0)} = 1$ und somit $f = e^g$. \square

Bemerkung: Die logarithmische Ableitung f'/f gibt es immer, aber sie muss keine Stammfunktion g besitzen, und selbst wenn, braucht sich diese nicht als $g = \log \circ f$ schreiben: Es kann sein, dass auf $f(G)$ gar kein Zweig des Logarithmus existiert, aber wir dennoch g mit $e^g = f$ finden können. Ein einfaches Beispiel ist $f(z) = e^{1/z}$ auf \mathbb{C}^* mit $g(z) = 1/z$; auf $f(G) = \mathbb{C}^*$ gibt es aber keinen Zweig des Logarithmus. Es ist sozusagen möglich, dass die Funktionen f und $\log \circ f$ existieren, aber nicht die Funktion \log .

Die logarithmische Ableitung ist in vieler Hinsicht genauso gut wie der (oft fehlende) Logarithmus; darin liegt ihre Bedeutung. Zum Beispiel verhält sie sich gegenüber Produktbildung wie der Logarithmus: Ist $f = gh$, so ist

$$\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} + \frac{h'}{h} \quad (82)$$

denn $f'/f = (g'h + gh')/(gh) = g'/g + h'/h$.

Eine holomorphe Funktion $f : G \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ mit isolierten Singularitäten z_1, z_2, \dots (endlich oder unendlich viele) nennen wir *meromorph* auf G , wenn alle Singularitäten Pole sind.

Satz 16.2. *Ist f auf G meromorph, so auch f'/f . Die Pole von f'/f sind einfach und liegen in den Null- und Polstellen von f mit*

$$\text{Res}_{z_0}(f'/f) = \begin{cases} n & \text{falls } z_0 \text{ Nullstelle der Ordnung } n \\ -n & \text{falls } z_0 \text{ Polstelle der Ordnung } n \end{cases} \quad (83)$$

Beweis. Die Laurent- oder Taylorentwicklung von f bei z_0 ist von der Form $f(z) = (z - z_0)^m \tilde{f}(z)$, wobei \tilde{f} eine in $B_\epsilon(z_0)$ holomorphe Funktion

mit $f(z_o) \neq 0$ ist. Wenn z_o eine Polstelle der Ordnung n ist, so ist $m = -n < 0$ und wenn z_o eine Nullstelle der Ordnung n ist, so ist $m = n > 0$. Die logarithmische Ableitung von $g(z) = (z - z_o)^m$ ist

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m(z - z_o)^{m-1}}{(z - z_o)^m} = \frac{m}{z - z_o} \quad (84)$$

Nach (82) ist $f'/f = g'/g + h'/h$, aber h'/h ist holomorph in $B_\epsilon(z_o)$, trägt also nichts zum Hauptteil der Laurententwicklung bei. Somit ist z_o ein Pol erster Ordnung von f'/f mit Residuum m . \square

Satz 16.3. Null- und Polstellen zählendes Integral: *Es sei f eine auf G meromorphe Funktion und $A \subset G$ ein Teilgebiet mit glattem Rand ∂A , der ganz in G enthalten ist und keine Null- oder Polstellen trifft, und $A \cup \partial A$ sei kompakt. Dann gilt*

$$\int_{\partial A} f'/f = 2\pi i (N_A(f) - P_A(f)) \quad (85)$$

wobei $N_A(f)$ die Anzahl der Nullstellen und $P_A(f)$ die Anzahl der Polstellen von f in A bezeichnet, beidesmal mit Vielfachheit gezählt.

Beweis. Das ist eine unmittelbare Konsequenz des Residuensatzes

$$\int_{\partial A} f'/f = 2\pi i \sum_{z_o \in A} \text{Res}_{z_o}(f'/f)$$

zusammen mit (83); die Menge der Null- und Polstellen in A ist diskret und daher endlich, weil $A \cup \partial A$ kompakt ist.²⁷ \square

Satz 16.4. Satz von Rouché: *Es seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $A \subset G$ mit glattem Rand $\partial A \subset G$, der keine Nullstelle von g trifft, und $A \cup \partial A$ sei kompakt. Falls $|f - g| < |g|$ auf ∂A , dann haben f und g die gleiche Anzahl von Nullstellen in A (mit Vielfachheiten gezählt).*

Beweis. Für $0 \leq s \leq 1$ setzen wir $f_s = g + s(f - g)$. Dies ist eine Schar holomorpher Funktionen auf G mit $f_0 = g$ und $f_1 = f$, und auf ∂A gilt $|f_s| \geq |g| - s|f - g| > 0$ für alle $s \in [0, 1]$. Also hat auch f_s keine Nullstellen auf ∂A , und wir erhalten aus dem vorigen Satz: (Polstellen gibt es ja keine):

$$N_A(f_s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} (f'_s/f_s).$$

²⁷Eine diskrete abgeschlossene Teilmenge D einer kompakten Menge ist endlich: Sonst gäbe es eine unendliche Folge in D , die wegen der Kompaktheit eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes wieder in D ist, im Widerspruch zur Diskretheit.

Die rechte Seite dieser Gleichung hängt stetig von $s \in [0, 1]$ ab, die linke Seite aber ist ganzzahlig und könnte sich nur in Sprüngen ändern. Also ist sie konstant und wir erhalten $N_A(f_1) = N_A(f_0)$ und damit die Behauptung. \square

Der Satz von Rouché wird oft so angewandt, dass eine komplizierte Funktion f durch eine einfachere g ersetzt wird, deren Nullstellenzahl leicht zu bestimmen ist. Eine der Anwendungen ist ein anderer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra:

Satz 16.5. “Fundamentalsatz der Algebra”: *Jedes Polynom vom Grad n besitzt genau n Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt).*

Beweis. Das Polynom sei $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ mit $a_0 \neq 0$. Wir setzen $A = B_R(0)$ für genügend großes R und ziehen zum Vergleich die Funktion $g(z) = a_0 z^n$ heran, die eine n -fache Nullstelle in 0 besitzt. Auf ∂A ist $|f - g| = R^{n-1} |a_1 + a_2/z + \dots + a_n/z^{n-1}| \leq R^{n-1} |a_1| + |a_2|/R + \dots + |a_n|/R^{n-1} \leq 2|a_1| R^{n-1}$ falls R genügend groß ist. Andererseits ist

$$|g| = |a_0| R^n > 2|a_1| R^{n-1} \geq |g - f|$$

auf ∂A , falls R genügend groß ist, und somit ist die Anzahl der Nullstellen von f auf A gleich der von g , also n . \square

17. DER ALLGEMEINE CAUCHYSCHES INTEGRALSATZ

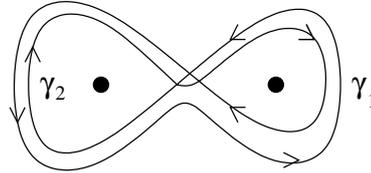
Gegeben sei ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Wir wollen die geschlossenen Wege γ in G kennzeichnen, für die

$$\int_{\gamma} f = 0 \tag{86}$$

für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ gilt. Wege mit dieser Eigenschaft werden *nullhomolog* genannt. Wir kennen bereits einige Beispiele solcher Wege:

1. Wenn γ *nullhomotop* ist, d.h. durch eine Homotopie geschlossener Wege auf einen Punktweg zusammenziehen lässt, dann ist (86) richtig nach der früheren Version 6.3 des Cauchyschen Integralsatzes. Kurz gesagt: *nullhomotop* \Rightarrow *nullhomolog*. Die Umkehrung gilt nicht, wie wir gleich sehen werden. Wenn G einfach zusammenhängend ist, dann ist jeder geschlossene Weg in G *nullhomolog*.
2. Wenn γ eine Bahn in der Weise durchläuft, dass jeder Abschnitt der Bahn gleich oft hin und zurück durchlaufen wird, dann ist γ offensichtlich auch *nullhomolog*, denn das Gesamtintegral ist Summe der Teilintegrale, deren jedes mit beiden Vorzeichen gleich oft vorkommt. Solche Wege brauchen keineswegs *nullhomotop* zu sein. Als Beispiel

betrachte man $G = \mathbb{C} \setminus \{+1, -1\}$, und γ durchlaufe eine Acht $\gamma_1 * \gamma_2$ in der Form $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_1^{-1} * \gamma_2^{-1}$.



Dass dieser Weg keineswegs nullhomotop (zusammenziehbar) ist, kann man mit einem Strick testen, den man entsprechend der Zeichnung um zwei Stuhlbeine wickelt und dann zusammenzuziehen versucht.

3. Jeder Weg, der zu einem Weg vom Typ 2 homotop ist, ist nach dem Cauchyschen Integralsatz 6.3 ebenfalls nullhomolog.

Satz 17.1. Allgemeiner Cauchyscher Integralsatz: *Ein Weg γ in G ist nullhomolog, erfüllt also*

$$\int_{\gamma} f = 0 \tag{86}$$

für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann, wenn γ keinen Punkt des Komplementes von G umläuft:

$$\forall z_o \in \mathbb{C} \setminus G \quad n(\gamma, z_o) = 0. \tag{87}$$

Beweis. Die Richtung “ \Rightarrow ” ist klar, denn $n(\gamma, z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f$ für die auf G holomorphe Funktion $f(z) = 1/(z - z_o)$.

Die interessante Richtung “ \Leftarrow ” könnte man sich so ähnlich wie den Beweis des Residuensatzes vorstellen: Von den Laurententwicklungen von f bleibt beim Integrieren nur der Term der Ordnung -1 stehen; dieser kann durch die Umlaufszahl ausgedrückt werden. Das Argument trifft zu, wenn $G = \hat{G} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ und \hat{G} einfach zusammenhängend ist; dann folgt der Satz direkt aus dem Residuensatz 14.1. Aber im Allgemeinen wissen wir nicht, wie G und sein Komplement aussehen.

Der Beweis wird bei [Jänich] und bei [Fischer-Lieb] sehr unterschiedlich geführt. Jänich zeigt durch direkte Konstruktion einer Homotopie, dass jeder nullhomologe Weg vom Typ 3 ist (vgl. S. 69 - 72). Fischer und Lieb dagegen führen die Behauptung auf eine verallgemeinerte *Cauchysche Integralformel* zurück, deren Beweis wir gleich skizzieren wollen. Sie lautet für eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ und $z \in G$:

$$2\pi i n(\gamma, z)g(z) = \int_{\gamma} \frac{g(w)}{w - z} dw. \tag{88}$$

Setzen wir $g(w) = f(w)(w - z)$, so erhalten wir $g(z) = 0$ und damit

$$0 = 2\pi i n(\gamma, z)g(z) = \int_{\gamma} f(w)dw. \quad \square$$

Satz 17.2. Verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

Für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jeden geschlossenen Weg γ in G mit $n(\gamma, z_o) = 0$ für alle $z_o \in \mathbb{C} \setminus G$ gilt für jedes $z \in G$:

$$2\pi i n(\gamma, z)f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (89)$$

Beweis. Setzt man für $n(\gamma, z)$ auf der linken Seite von (89) den Integralausdruck $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$ ein, dann ist die Behauptung (89) äquivalent zu

$$h(z) := \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw \stackrel{!}{=} 0 \quad (90)$$

für alle $z \in G$. Man beachte, dass der Integrand $w \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ im Punkt $w = z$ stetig, also holomorph fortsetzbar ist, nämlich durch $f'(w)$; somit ist h auf ganz G definiert. Für alle $z \in G$ mit $n(\gamma, z) = 0$ ist das Integral über den zweiten Summanden gleich Null, also

$$h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (91)$$

Diese Formel macht auch außerhalb von G noch Sinn, und weil die offene Menge

$$U = \{z \in \mathbb{C}; n(\gamma, z) = 0\}$$

nach Voraussetzung das Komplement von G enthält, ist durch (90) auf G und (91) auf $U \supset \mathbb{C} \setminus G$ eine holomorphe Funktion h auf ganz \mathbb{C} erklärt, denn auf $G \cap U$ stimmen die beiden Formeln überein. Damit haben wir eine ganze Funktion $h(z)$ definiert. Diese geht für $z \rightarrow \infty$ gegen Null, denn nach (91) ist $|h(z)| \leq C/|z|$ mit der Standardabschätzung (32). In der Tat ist die Formel (91) zuständig, wenn $|z|$ genügend groß ist, denn das Komplement eines Balles, der γ enthält, liegt in U . Nach Satz 8.2 (Liouville) folgt damit $h = 0$. \square

18. GEBROCHEN-LINEARE TRANSFORMATIONEN

Die einfachste Klasse von Funktionen (nach den linearen) sind die *gebrochen linearen Funktionen* oder *Möbius-Transformationen*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (92)$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Wir dürfen $ad \neq bc$ voraussetzen, denn andernfalls ist f konstant.²⁸ Wenn a, b, c, d reell sind, kennen wir diese Funktionen schon aus der Schule; ihr Graph ist eine in beide Achsenrichtungen verschobene Hyperbel vom Typ $y = \pm 1/x$. Diese Funktionen sind invertierbar: die Umkehrfunktion von f ist

$$g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a} \tag{93}$$

wie man sofort nachrechnet:

$$f(g(z)) = \frac{a \frac{dz-b}{-cz+a} + b}{c \frac{dz-b}{-cz+a} + d} = \frac{a(dz - b) + b(-cz + a)}{c(dz - b) + d(-cz + a)} = \frac{(ad - bc)z}{-cb + da} = z.$$

Den vier Zahlen a, b, c, d kann man die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zuordnen; die Funktion $f(z)$ aus (92) werden wir dann mit f_A bezeichnen. Für die Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt offensichtlich $f_I = \text{id}$. Da $\det A = ad - bc$, sagt unsere Voraussetzung $ad \neq bc$, dass A invertierbar ist. Man beachte auch $f_{\lambda A} = f_A$ für jedes $\lambda \neq 0$.

Satz 18.1. *Für je zwei invertierbare Matrizen A, B gilt*

$$f_A \circ f_B = f_{AB} \tag{94}$$

Beweis. Das kann man einfach nachrechnen, aber damit haben wir nicht die innere Verbindung der 2×2 -Matrizen mit den gebrochen linearen Funktionen verstanden. Diese wird durch die Quotientenabbildung gegeben, die auf $\mathbb{C}_*^2 = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definiert ist und Werte in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ hat:

$$\Phi : \mathbb{C}_*^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \Phi(z, w) = \frac{z}{w}. \tag{95}$$

Für $w \rightarrow 0$ geht $|z/w| \rightarrow \infty$; deshalb werden wir $z/0$ den Wert ∞ geben. Nur $0/0$ ist nicht definiert, aber das Paar $(0, 0)$ liegt ja nicht in \mathbb{C}_*^2 . Nun gilt

$$f_A \circ \Phi = \Phi \circ A \tag{96}$$

wobei A als Abbildung auf \mathbb{C}_*^2 angesehen wird. Denn

$$f_A(\Phi(z, w)) = f_A(z/w) = \frac{az/w + b}{cz/w + d} = \frac{az + bw}{cz + dw},$$

²⁸Es sei $ad = bc$. Alle vier Konstanten können nicht gleichzeitig Null sein. Wenn $a \neq 0$, dann ist $d = bc/a$ und $c \neq 0$ (da $c = 0 \Rightarrow d = 0$) und damit $f(z) = (az + b)/(cz + cb/a) = a/c$. Wenn $b \neq 0$, dann ist $c = ad/b$ und $d \neq 0$ (da $d = 0 \Rightarrow c = 0$) und damit $f(z) = (az + b)/(adz/b + d) = d/b$. In beiden Fällen ist f konstant. Die Voraussetzungen $c \neq 0$ und $d \neq 0$ führen zum selben Ergebnis für $1/f$.

$$\Phi(A(z, w)) = \Phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) = \Phi(az + bw, cz + dw) = \frac{az + bw}{cz + dw}.$$

Damit folgt (96) und daraus die Behauptung:

$$f_A \circ f_B \circ \Phi = f_A \circ \Phi \circ B = \Phi \circ A \circ B = \Phi \circ AB = f_{AB} \circ \Phi.$$

Die Abbildung Φ verwandelt sozusagen die Matrix A in die Funktion f_A . \square

Jetzt wundern wir uns auch nicht mehr über die inverse Funktion g gemäß (93), denn die Umkehrmatrix von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\lambda \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ mit $\lambda = \frac{1}{ad-bc}$. Die Abbildung $A \mapsto f_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus von der Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2 -Matrizen auf die Gruppe der Möbiustransformationen.

Wenn $c \neq 0$, dann hat die gebrochen lineare Funktion

$$f(z) = (az + b)/(cz + d)$$

eine einfache Polstelle bei $z = -d/c$, nimmt dort also den Wert ∞ an. Umgekehrt kann man aber auch für die Variable z den Wert ∞ einsetzen:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + b/z}{c + d/z} \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \frac{a}{c}.$$

wir setzen daher $f(\infty) = a/c$. Somit können wir f als eine umkehrbare Abbildung auf $\hat{\mathbb{C}}$ ansehen mit der Eigenschaft, dass $f(z)$ und $f(1/z)$ beide meromorph auf \mathbb{C} sind, und die Umkehrabbildung hat die gleichen Eigenschaften. Eine solche Abbildung wollen wir einen *Automorphismus* von $\hat{\mathbb{C}}$ nennen.

Satz 18.2. *Die Automorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$ sind genau die Möbiustransformationen.*

Beweis. Die Abbildung $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ sei ein Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$. Wegen der Injektivität gibt es ein Urbild von ∞ . Wir dürfen $f(\infty) \neq \infty$ annehmen; andernfalls gehen wir zu $1/f$ über, der Verkettung von f mit der Inversion $z \mapsto 1/z$, die auch ein Automorphismus ist. Es sei also $f(z_o) = \infty$, d.h. f habe die Polstelle $z_o \in \mathbb{C}$. Wegen der Injektivität ist diese einfach, denn sonst hätte der Automorphismus $1/f$ bei z_o eine mehrfache Nullstelle und somit wäre $1/f = p_m \circ b$ nach z_o , wobei b eine biholomorphe Abbildung und p_m die Potenzfunktion $z \mapsto z^m$ sind; wenn $m > 1$, ist p_m nicht injektiv. Also ist z_o einfache Polstelle. Wir betrachten die Funktion $f - a/(z - z_o)$ mit $a = \text{Res}_{z_o} f$. Diese ist ganz und beschränkt, also nach Liouville konstant: $f - a/(z - z_o) = c$ und somit ist $f = c + a/(z - z_o)$ eine Möbiustransformation. \square

19. OBERE HALBEBENE UND EINHEITSKREIS

Wir betrachten in diesem Abschnitt zwei wichtige Gebiete und ihre Automorphismen (biholomorphen Abbildungen): die obere Halbebene \mathbb{H} und den Einheitskreis \mathbb{E} :

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\} \tag{97}$$

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}. \tag{98}$$

Die beiden Gebiete sind zueinander biholomorph äquivalent unter der Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i} \tag{99}$$

genannt *Cayley-Transformation*. Da nämlich

$$f(0) = -1, \quad f(1) = \frac{1 - i}{1 + i} = -i, \quad f(\infty) = 1, \quad f(i) = 0,$$

wird die reelle Achse auf den Rand des Einheitskreises und die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abgebildet, also $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$. Das sieht man auch direkt: $\frac{|z-i|}{|z+i|} < 1 \iff |z-i| < |z+i| \iff z$ ist näher bei i als bei $-i \iff z \in \mathbb{H}$.

Die zugehörige Matrix dieser Möbiustransformation ist $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ mit der Umkehrmatrix $\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (bis auf skalare Vielfache); Die Umkehrabbildung von f ist also $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$,

$$g(z) = i \cdot \frac{1 + z}{1 - z}. \tag{100}$$

Es genügt demnach, nur von einem der beiden Gebiete die Automorphismengruppe (die Gruppe aller biholomorphen Selbstabbildungen) zu bestimmen: Wenn h ein Automorphismus von \mathbb{H} ist, dann ist $f \circ h \circ g$ ein Automorphismus von \mathbb{E} und umgekehrt.

Auf den ersten Blick scheint es einfacher, die Automorphismen von \mathbb{H} zu bestimmen: Eine Möbiustransformation $f = f_A$ lässt genau dann \mathbb{H} invariant, wenn $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ invariant bleibt, d.h. A kann reell gewählt werden, und wenn zusätzlich die Orientierung von \mathbb{R} erhalten bleibt, d.h. f_A streng monoton wachsend ist: die letzere Bedingung stellt sicher, dass \mathbb{H} , das Gebiet links von \mathbb{R} , auch wirklich wieder in sich überführt wird (und nicht etwa in $-\mathbb{H}$). Wir können also $f(z) = (az + b)/(cz + d)$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wählen, und zusätzlich muss für die Ableitung auf \mathbb{R} positiv sein,

$$f'(x) = \frac{a(cx + d) - (ax + b)c}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0$$

also $ad - bc > 0$. Da es auf einen reellen Faktor nicht ankommt, dürfen wir $ad - bc = 1$ annehmen. Wir haben damit gesehen:

Hilfssatz 19.1. *Eine Möbiustransformation f_A ist genau dann ein Automorphismus von \mathbb{H} , d.h. $f_A(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ und $f_{A^{-1}}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, wenn A eine reelle 2×2 -Matrix mit $\det A = 1$ ist.²⁹*

On der Tat gibt es keine weiteren Automorphismen, aber wir können dies noch nicht zeigen. Es gibt ja so viele Funktionen, die keine Möbiustransformationen sind - könnten nicht einige davon Automorphismen von \mathbb{H} sein?

Das dies nicht der Fall ist sehen wir viel einfacher an dem zweiten Gebiet, dem Einheitskreis \mathbb{E} . Zunächst einmal finden wir auch hier viele Möbiustransformationen, die bereits Automorphismen von \mathbb{E} sind. Die einfachsten sind natürlich die linearen Funktionen $z \mapsto e^{i\phi}z$; geometrisch ist dies die Drehung um den Winkel ϕ mit Drehzentrum 0. Es gibt jedoch eine weitere, nicht so offensichtliche Schar von Möbiustransformationen, die Automorphismen von \mathbb{E} sind:

Hilfssatz 19.2. *Für jedes $w \in \mathbb{E}$ ist die Funktion*

$$f_w(z) = \frac{z + w}{\bar{w}z + 1} \quad (101)$$

ein Automorphismus von \mathbb{E} mit $f(0) = w$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $f_w(\partial\mathbb{E}) \subset \partial\mathbb{E}$, d.h. $|f_w(z)| = 1$ für $|z| = 1$. Wir berechnen dazu Zähler und Nenner von $|f_w(z)|^2$:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)/\bar{z} + \bar{w} \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= 1 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w \\ |\bar{w}z + 1|^2 &= (\bar{w}z + 1)(w\bar{z} + 1) \\ &= |\bar{w}|^2|z|^2 + \bar{w}z + w\bar{z} + 1 \\ &= |w|^2 + 1 + \bar{w}z + w\bar{z} \end{aligned}$$

Zähler und Nenner sind also gleich, d.h. der Quotient $|f_w(z)|^2$ ist Eins, und damit bildet f_w den Rand von \mathbb{E} in sich ab. Da offensichtlich $f_w(0) = w \in \mathbb{E}$, gilt $f_w(\mathbb{E}) \subset \mathbb{E}$. Die Umkehrabbildung von f_w ist f_{-w} , denn die zugehörigen Matrizen sind bis auf skalare Vielfache invers (gemäß unserer alten Regel: a, d vertauschen, bei b, c das Vorzeichen ändern):

$$\begin{pmatrix} 1 & w \\ \bar{w} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -w \\ -\bar{w} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - w\bar{w} & 0 \\ 0 & -\bar{w}w + 1 \end{pmatrix}$$

²⁹Diese Matrizen bilden die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$, die *spezielle lineare Gruppe*. "Speziell" bezieht sich auf die Bedingung $\det A = 1$.

Da auch f_{-w} den Einheitskreis \mathbb{E} auf sich selbst abbildet, ist f_w ein Automorphismus von \mathbb{E} . \square

In der Tat gibt es keine anderen Automorphismen als die Kombinationen dieser beiden: $f(z) = e^{i\phi} f_w(z)$ für beliebige $w \in \mathbb{E}$ und $\phi \in \mathbb{R}$, und diesmal ist das recht einfach zu sehen; es folgt aus dem berühmten *Schwarz-Lemma*³⁰, das auch sonst gute Dienste leistet und eine Konsequenz des Maximumprinzips ist:

Satz 19.1. Lemma von Schwarz: *Ist $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$, so gilt*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{E}^*, \tag{102}$$

$$|f'(0)| \leq 1, \tag{103}$$

wobei $\mathbb{E}^* := \mathbb{E} \setminus \{0\}$. Gleichheit gilt in (103) oder an einer Stelle $z \in \mathbb{E}^*$ in (102) genau dann, wenn $f(z) = e^{i\phi} z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis. Da $f(0) = 0$, ist $f(z) = zg(z)$ für eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt $g(z) = f(z)/z$ für $z \in \mathbb{E}^*$ und $g(0) = f'(0)$. Wenn $|z| \geq 1 - \epsilon$, dann ist

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

Die stetige Funktion $|g(z)|$ nimmt auf dem kompakten Kreis $K = K_{1-\epsilon}(0)$ ein Maximum an, das nach dem Maximumprinzip auf dem Rand liegen muss, damit

$$\max_{z \in K} |g(z)| \leq \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Wenn $|g(z_o)| = 1$ für ein $z_o \in \mathbb{E}$, wird da ein Maximum angenommen und nach dem Maximumprinzip ist die Funktion dann konstant: $g(z) = c$ mit $|c| = |g(z_o)| = 1$, also $c = e^{i\phi}$ für ein $\phi \in \mathbb{R}$, und $f(z) = zg(z) = e^{i\phi} z$. \square

Satz 19.2. *Die Automorphismen von \mathbb{E} sind genau von der Form*

$$f(z) = f_w(e^{i\phi} z) \tag{104}$$

für ein $\phi \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathbb{E}$.

Beweis. Es sei f ein Automorphismus von \mathbb{E} . Wir dürfen $f(0) = 0$ annehmen, denn wenn $f(0) = w$, dann gehen wir zu dem Automorphismus $\tilde{f} = f_{-w} \circ f$ über; dieser erfüllt $\tilde{f}(0) = 0$. Wir können also auf \tilde{f}

³⁰H.A. Schwarz (1843 - 1921), Berlin

das Schwarz-Lemma anwenden, und ebenso auf seine Umkehrfunktion $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$. Für jedes $z \in \mathbb{E}^*$ gilt demnach

$$|z| = |\tilde{g}(f(z))| \leq |\tilde{f}(z)| \leq |z|,$$

also ist jede dieser Ungleichungen eine Gleichheit und insbesondere ist $|\tilde{f}(z)| = |z|$. Nach der Gleichheitsdiskussion des Schwarz-Lemmas folgt also $\tilde{f}(z) = e^{i\phi}z$ für alle $z \in \mathbb{E}$ und damit $f(z) = f_w(\tilde{f}(z)) = f_w(e^{i\phi}z)$. \square

Nun können wir auch die Automorphismen von \mathbb{H} endgültig bestimmen, indem wir die Automorphismen von \mathbb{E} mit der Cayley-Transformation übertragen. Ein einfacheres, aber nicht ganz vollständiges Argument zählt einfach die Parameter: Die Automorphismen von \mathbb{E} hängen von 3 reellen Parametern ab: ϕ sowie Real- und Imaginärteil von $w \in \mathbb{E}$. Deshalb ist auch die Automorphismengruppe von \mathbb{H} eine zusammenhängende dreiparametrische Gruppe. Aber auch die Untergruppe der reellen orientierten Möbiustransformationen³¹ hat drei reelle Parameter (eigentlich vier: a, b, c, d , aber es besteht ja die Gleichung $ad - bc = 1$). Deshalb ist diese Untergruppe schon die volle Automorphismengruppe von \mathbb{H} .

Satz 19.3. *Die Automorphismen von \mathbb{H} sind genau die Möbiustransformationen f_A mit $A \in SL(2, \mathbb{R})$.*

Bemerkung: \mathbb{E} und \mathbb{H} haben eine große historische Bedeutung: sie sind Modelle der *nichteuklidischen Geometrie* (auch *hyperbolische Geometrie* genannt), in der alle Axiome der euklidischen ebenen Geometrie außer dem Parallelenaxiom gelten. Die "Geraden" in dieser Geometrie sind die Kreisbögen in \mathbb{E} bzw. in \mathbb{H} , die den jeweiligen Rand senkrecht schneiden (*Orthokreise*); diese werden von den Automorphismen wieder in Orthokreise abgebildet. Die Automorphismengruppe hat geometrisch die Bedeutung der Gruppe der orientierten Isometrien oder Bewegungen der nichteuklidischen Ebene; ebenso wie die Bewegungsgruppe der euklidischen Ebene (Drehungen und Translationen) und die der Kugelfläche (Drehungen im \mathbb{R}^3) ist sie dreiparametrisch.

20. DER RIEMANNSCHE ABBILDUNGSSATZ

Satz 20.1. *Jedes echt in \mathbb{C} enthaltene³² einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ ist biholomorph äquivalent zum Einheitskreis \mathbb{E} .*

³¹Dies ist nicht genau die Gruppe $SL(2, \mathbb{R})$, weil ja $f_A = f_{-A}$; man beachte $\det(-A) = \det(A)$. Die Gruppe der reellen orientierten Möbiustransformationen ist ganz genau isomorph zu $PSL(2, \mathbb{R}) := SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$.

³² \mathbb{C} selbst ist nicht biholomorph zu \mathbb{E} , denn nach Liouville gibt es keine ganze Funktion mit Werten in \mathbb{E} .

Beweis:

Schritt 1. Wir zeigen als erstes, dass G biholomorph zu einem *Teilgebiet* von \mathbb{E} ist. Mit Hilfe einer holomorphen Wurzel verkleinern wir G soweit, dass eine Kreisscheibe im Komplement liegt, und mit Hilfe der Inversion können wir dann G in \mathbb{E} abbilden.

Zunächst zur Konstruktion der Quadratwurzel: Es gibt mindestens einen Punkt in $\mathbb{C} \setminus G$; nach Translation können wir annehmen, dass dies der Punkt 0 ist, also $0 \in \mathbb{C} \setminus G$. Damit ist die Funktion $1/z$ auf G definiert, und da G einfach zusammenhängend ist, besitzt jede holomorphe Funktion, so auch $1/z$, auf G eine Stammfunktion. Damit existiert auf G ein Zweig des Logarithmus, d.h. eine holomorphe Funktion $\log : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $e^{\log z} = z$ für alle $z \in G$, und also auch eine Quadratwurzel $q(z) = e^{\log(z)/2}$. Diese ist injektiv, da $q(z)^2 = z$; aus $q(z_1) = q(z_2)$ folgt also

$$z_1 = q(z_1)^2 = q(z_2)^2 = z_2.$$

Aber auch aus $q(z_1) = -q(z_2)$ folgt $z_1 = z_2$ (das Quadrieren sieht das Vorzeichen nicht). Ist also $w \in q(G)$, so ist $-w \notin q(G)$. Da $q(G)$ offen ist und somit eine Kreisscheibe $K_\epsilon(w_o)$ enthält, folgt $K_\epsilon(-w_o) \cap G = \emptyset$, also $G \subset \mathbb{C} \setminus K_\epsilon(-w_o)$. Die Möbiustransformation $g(z) = \epsilon/(z + w_o)$ bildet $\mathbb{C} \setminus K_\epsilon(-w_o)$ ganz nach \mathbb{E} ab, denn für z mit $|z + w| > \epsilon$ folgt $|g(z)| < \epsilon/\epsilon = 1$. Also ist $g(q(G)) \subset \mathbb{E}$, und $g \circ q$ ist injektiv.³³ Indem wir G durch $g(q(G))$ ersetzen, dürfen wir von jetzt an annehmen, dass $G \subset \mathbb{E}$. Wir dürfen auch $0 \in \mathbb{E}$ annehmen; wenn nicht, machen wir G durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ halb so groß und verschieben $\frac{1}{2}G$ innerhalb \mathbb{E} , bis wir den Nullpunkt treffen.

Schritt 2. Wir nehmen jetzt an: $G \subset \mathbb{E}$ und $0 \in G$. Wir betrachten die folgende Funktionenmenge:

$$F = \{f : G \rightarrow \mathbb{E}; f \text{ injektiv, } f(0) = 0\}$$

Unser Ziel ist, ein surjektives $f^* \in F$ zu finden. Wir wissen immerhin, dass F nicht leer ist, denn die Inklusion $z \mapsto z : G \rightarrow \mathbb{E}$ liegt in F . Wir beweisen nun ein Kriterium für die Surjektivität:

Hilfssatz 20.1. *Ist $f \in F$ und $|f'(0)|$ ist maximal, d.h. $|f'(0)| \geq |\tilde{f}'(0)|$ für alle $\tilde{f} \in F$, dann ist f surjektiv.*

Beweis des Hilfssatzes: Wir schließen durch Kontraposition: Wenn f nicht surjektiv ist, dann kann man $|f'(0)|$ noch vergrößern, was wir

³³Eine injektive holomorphe Funktion h auf G ist bereits eine biholomorphe Abbildung von G nach $f(G)$, denn die Ableitung kann keine Nullstellen haben: Wäre $f'(z_o) = 0$, so wäre $f - f(z_o)$ bis auf eine biholomorphe Abbildung eine k -te Potenz mit $k \geq 2$, also nicht injektiv.

durch Anwenden von Möbiustransformationen und der Quadratwurzel zeigen werden. Wir nehmen also an, dass f nicht surjektiv ist; es gibt also $a \in \mathbb{E} \setminus f(G)$. Mit Hilfe der in (101) definierten Möbiustransformation und ihrer Umkehrung $g_a = f_a^{-1} = f_{-a}$, die \mathbb{E} invariant lassen, verschieben wir a in den Nullpunkt. Für die Funktion

$$f_1 = g_a \circ f : G \rightarrow \mathbb{E}$$

gilt also $0 \notin f_1(G)$. Da f_1 injektiv ("schlicht") ist, ist das Gebiet $f_1(G)$ wieder einfach zusammenhängend, also existiert (wie vorher) eine holomorphe Quadratwurzel q auf $f_1(G)$. Wir setzen $b = q(-a)$ und betrachten die Funktion

$$f_2 = g_b \circ q \circ g_a \circ f : G \rightarrow \mathbb{E}$$

Zusätzlich gilt $f_2(0) = 0$, also $f_2 \in \mathbf{F}$, denn

$$0 \xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g_a} -a \xrightarrow{q} b \xrightarrow{g_b} 0.$$

Die zusätzliche Funktion $h = g_b \circ q \circ g_a$ bildet 0 auf 0 ab. Sie ist invertierbar mit Umkehrung $h^{-1} = f_a \circ p_2 \circ g_o$ (wobei $p_2(z) = z^2$), und damit bildet h^{-1} den Einheitskreis \mathbb{E} in sich ab und erfüllt $h^{-1}(0) = 0$. Nach dem Schwarzlemma ist $|(h^{-1})'(0)| < 1$, also ist $|h'(0) = 1/|(h^{-1})'(0)| > 1$, also folgt

$$|f_2'(0)| = |(h \circ f)'(0)| |f'(0)| > |f'(0)|. \quad \square$$

3. Schritt: Wir wollen nun eine Funktion $f \in \mathbf{F}$ mit maximaler Ableitung $|f'(0)|$ finden. Dazu nehmen wir uns eine Folge $f_k \in \mathbf{F}$ mit

$$|f_k'(0)| \rightarrow s = \sup\{|f'(0)|; f \in \mathbf{F}\}$$

und zeigen, dass eine Teilfolge davon gegen ein $f \in \mathbf{F}$ mit $|f'(0)| = s$ konvergiert. Diese muss nach Schritt 2 auch surjektiv, also eine Biholomorphie von G nach \mathbb{E} sein.

Znächst zeigen wir, dass die Menge $\{|f'(0)|; f \in \mathbf{F}\}$ beschränkt ist: Ist $K_r = K_r(0) \subset G$, dann gilt nach Cauchyscher Integralformel (43) und Standardabschätzung wegen $|f(w)| < 1$:

$$|f'(0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial K_r} \frac{f(w)}{w^2} dw \right| \leq r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}$$

Damit ist das Supremum aller dieser Werte eine Zahl $s \leq 1/r$. Dasselbe Argument zeigt aber viel mehr, nämlich dass die Ableitungen aller $f \in \mathbf{F}$ überall lokal gleichmäßig beschränkt sind: Für jedes $z_o \in G$ gibt es $r > 0$ mit $K_{2r}(z_o) \subset G$, und für jedes $z \in K_r(z_o)$ gilt $K_r(z) \subset K_{2r}(z_o) \subset G$ und damit

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial K_r(z)} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \leq r \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r}$$

für alle $z \in K_r(z_o)$ und $f \in \mathbf{F}$. Nach dem Schrankensatz aus Analysis 2 ist jedes $f \in \mathbf{F}$ auf $K_r(z_o)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1/r$. In der Situation gilt der folgende Satz der reellen Analysis, den wir weiter unten beweisen wollen (ein Spezialfall des Satzes von Arzela und Ascoli)³⁴

Hilfssatz 20.2. *Ist $K \subset \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe³⁵ und $f_k : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge Lipschitz-stetiger Funktionen, alle mit der gleichen Lipschitzkonstante L , dann konvergiert eine Teilfolge f_{k_j} gleichmäßig auf K gegen eine Funktion f .*

In unserer Situation ist f_k sogar holomorph und damit auch $f = \lim f_{k_j}$: Nach dem Satz von Morera brauchen wir zum Nachweis der Holomorphie nur zu prüfen, ob $\int_{\partial\Delta} f = 0$ für kleine Dreiecke $\Delta \subset K$ (dann gibt es lokal eine Stammfunktion), und dies ist richtig wegen der gleichmäßigen Konvergenz, weil $\int_{\partial\Delta} f = \lim \int_{\partial\Delta} f_{k_j} = 0$ wegen der Holomorphie der f_{k_j} . Außerdem konvergieren die Ableitungen, daher ist insbesondere $|f'(0)| = s$.

Zu zeigen bleibt noch, dass f auch injektiv ist. Da $|f'(0)| \neq 0$, kann f nicht konstant sein. Nehmen wir an, es gäbe $z_1 \neq z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2) = w$. Dann hat $\tilde{f} = f - w$ zwei verschiedene Nullstellen z_1, z_2 , die in zwei disjunkten Kreisscheiben $K_r(z_1), K_r(z_2)$ mit $r < |z_1 - z_2|/2$ liegen, und auf den Rändern dieser Kreisscheiben habe \tilde{f} keine Nullstellen. Da $f_{k_j} - f$ für genügend große j dort beliebig klein wird, kleiner als $|f|$, hat nach dem Satz von Rouché auch die Funktion $\tilde{f}_{k_j} = f_{k_j} - w$ in beiden Kreisscheiben eine Nullstelle, im Widerspruch zur Injektivität von f_{k_j} . Damit haben wir $f \in \mathbf{F}$ mit maximalem Wert $|f'(0)|$ gefunden; nach Schritt 2 muss f surjektiv sein und damit die gewünschte Biholomorphie von G auf \mathbb{E} .

Beweis von Hilfssatz 20.2: Wir wählen eine abzählbare dichte Teilmenge $\{z_j; j \in \mathbb{N}\}$ von K , zum Beispiel $K \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$. Die Funktionenfolge ist beschränkt, $|f_k(z)| \leq C$ für alle $z \in K$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Deshalb besitzt (f_k) eine Teilfolge (f_{k_j}) , die an der Stelle z_1 konvergiert, $f_{k_j}(z_1) \rightarrow f(z_1)$. Wir benennen diese Teilfolge um und setzen $f_{k_j} =: f_{1j}$. Davon gibt es eine weitere Teilfolge f_{1j_i} mit $f_{1j_i}(z_2) \rightarrow f(z_2)$. Diese wird ebenfalls umbenannt: $f_{1j_i} =: f_{2i}$. Indem wir so fortfahren, iterierte Teilfolgen zu bilden, finden wir eine Familie von Teilfolgen f_{nj} mit

³⁴In der Funktionentheorie ist diese Tatsache als *Satz von Montel* bekannt, der besagt: *Ist $f_k : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, dann besitzt f_k eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.*

³⁵Wir könnten ohne Weiteres $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ durch \mathbb{R}^n ersetzen

$f_{nj}(z_i) \rightarrow f(z_i)$ für $i = 1, \dots, n$. Davon bilden wir die *Diagonalfolge* f_{nn} mit der Eigenschaft

$$f_{nn}(z_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z_i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$.

Diese neue Folge (f_{nn}) ist immer noch eine Teilfolge der ursprünglichen Folge (f_k). Um die Notation zu vereinfachen, vergessen wir die ursprüngliche Folge ganz und benennen f_{nn} in f_n um. Wir wissen bereits, dass f_n an allen Stelle z_j konvergiert. Wir wollen aber die Konvergenz für beliebige $z \in K$ nachweisen. Da die z_j eine dichte Teilmenge bilden, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl J derart, dass z_1, \dots, z_J " ϵ/L -dicht" liegen, d.h. zu jedem $z \in K$ gibt es $j \in \{1, \dots, J\}$ mit

$$|z - z_j| < \epsilon/L.$$

Ferner sei N so groß, dass für alle $n, m \geq N$

$$|f_n(z_j) - f_m(z_j)| \leq \epsilon$$

für alle $j \in \{1, \dots, J\}$. Damit ist

$$\begin{aligned} |f_n(z) - f_m(z)| & \leq |f_n(z) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_m(z_j)| + |f_m(z_j) - f_m(z)| \\ & \leq L|z - z_j| + \epsilon + L|z_j - z| \\ & \leq 3\epsilon \end{aligned}$$

Somit ist (f_n) eine Cauchyfolge bezüglich gleichmäßiger Konvergenz und damit eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, die somit gegen eine (immer noch L -Lipschitz-stetige) Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. \square

INDEX

- Ableitung, 1
- Algebra, 3
- Arcustangens, 22
- Argument, 22, 41
- Automorphismus, 48, 49

- Bahn, 7
- biholomorph, 19, 49, 52
- Bogenlänge, 13

- Casorati-Weierstraß, 29
- Cauchy-Riemann-Gleichungen, 4
- Cauchysche Integralformel, 14, 15, 45, 46
- Cauchyscher Integralsatz, 11, 13, 44, 45

- Deformation, 14
- Diagonalfolge, 56
- dicht, 29
- Differentialgleichung, 20
- diskret, 24, 43
- Drehstreckung, 3
- Dreieck, 19

- einfach zusammenhängend, 20
- Einheitskreis, 49, 52

- Fundamentalsatz der Algebra, 18

- ganze Funktion, 18
- Gebiet, 6
- Gebietstreue, 25
- gebrochen linear, 46
- gelochte Kreisscheibe, 26
- geschlossener Weg, 8, 14
- gleichmäßig, 10

- Häufungspunkt, 25
- Hauptteil, 27, 34
- Hauptwert, 38
- Hauptzweig, 22
- hebbar, 29
- Hebbarkeitssatz, 29
- holomorph, 1
- homotop, 14
- Homotopie, 14, 44

- Identitätssatz, 21, 24

- Imaginärteil, 2
- Integral, 5, 6, 33, 36
- isoliert, 24

- komplex differenzierbar, 1
- komplexe Zahlen, 2
- Konvergenz, 10
- Konvergenzradius, 10, 18
- konvex, 20
- Kreisring, 26
- Kreisscheibe, 1, 10
- Kurve, 6
- Kurvenintegral, 5

- Länge, 13
- Laurententwicklung, 27, 28
- Logarithmische Ableitung, 42
- Logarithmus, 22, 40, 42

- Maximumprinzip, 16, 25, 51
- meromorph, 42
- Mittelwerteigenschaft, 16
- Möbiustransformation, 46

- Nebenteil, 27
- nicht diskret, 25
- nullhomolog, 44
- nullhomotop, 44
- Nullstellenmenge, 42

- obere Halbebene, 38, 49
- offene Abbildung, 25

- Parametrisierung, 6
- Partialbruchentwicklung, 28
- Pol, 29, 30, 42
- Polarkoordinaten, 22
- Potenz, 22, 23
- Potenzreihe, 9

- Rand, 33
- Randzykel, 33
- Realteil, 2
- Rechteck, 11
- reelle Funktion, 39
- Residuensatz, 33, 34
- Residuum $\text{Res}_{z_0} f$, 34
- Riemann, B., 29

Riemannscher Abbildungssatz, 52

Satz von Arzela-Ascoli, 55

Satz von Liouville, 18

Satz von Montel, 55

Satz von Morera, 8, 9, 19

Satz von Rouché, 43

schlicht, 54

Schnitt, 22

Schwarz-Lemma, 51

Singularität, 28

Spur, 7

Stammfunktion, 5, 18, 20

Standardabschätzung, 13

sternförmig, 20

Strecke, 9

strikt Maximum, 16

stückweise C^1 , 6

Taylorreihe, 18, 36

umgekehrt durchlaufen, 7

umkehrbar, 19

Umkehrsatz, 23

Umlaufzahl, 30, 31, 34

Unteralgebra, 3

Verkettung, 8

Weg, 6, 33

wesentlich, 29

Winkel, 3

winkeltreu, 4

Wurzel, 22, 23

zusammenhängend, 6, 52

Zweig, 22

Zykel, 33

INHALTSVERZEICHNIS

1. Motivation	1
2. Die komplexen Zahlen	2
3. Komplexe Differenzierbarkeit	3
4. Stammfunktionen und Kurvenintegrale	5
5. Potenzreihen	9
6. Der Cauchysche Integralsatz	11
7. Cauchysche Integralformel	14
8. Potenzreihenentwicklung	16
9. Lokale Umkehrfunktionen	19
10. "Es gibt nur eine Funktion"	23
11. Holomorphe Funktionen auf Kreisringen	26
12. Isolierte Singularitäten	28
13. Umlaufszahl	30
14. Der Residuensatz	33
15. Reelle Integrale	36
16. Logarithmische Ableitung und Satz von Rouché	42
17. Der allgemeine Cauchysche Integralsatz	44
18. Gebrochen-lineare Transformationen	46
19. Obere Halbebene und Einheitskreis	49
20. Der Riemannsche Abbildungssatz	52
Index	57

E-mail address: eschenburg@math.uni-augsburg.de