

FREIE ISOMETRISCHE AKTIONEN  
AUF KOMPAKTEN LIE-GRUPPEN  
MIT POSITIV GEKRÜMMTEN ORBITRÄUMEN

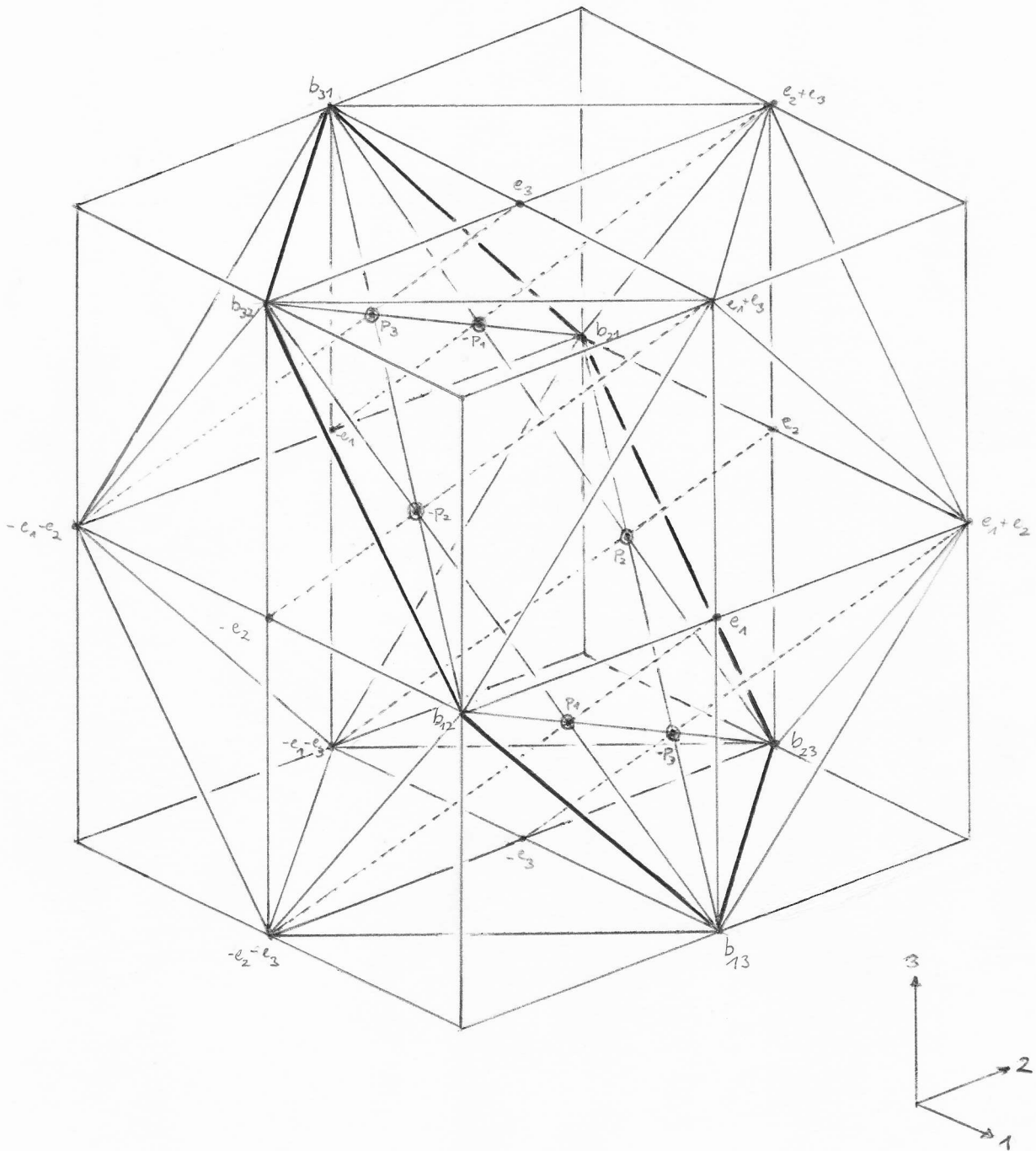
von

Jost-Hinrich Eschenburg

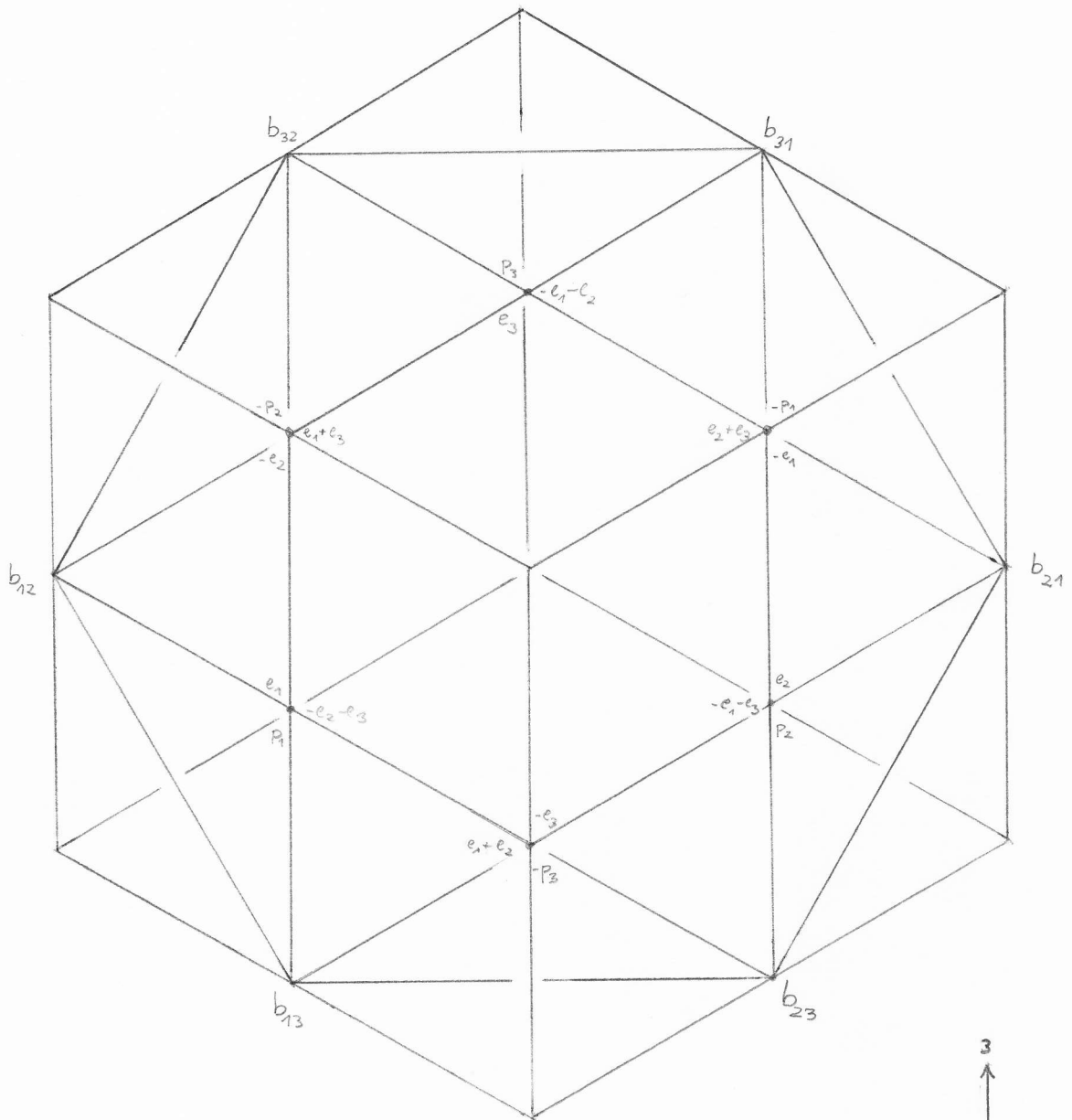
Habilitationsschrift

Eingereicht bei der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität  
Münster

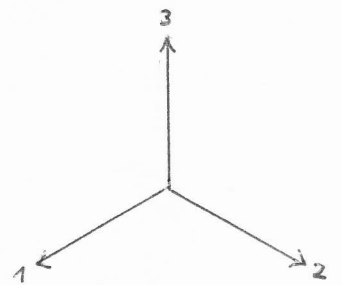
1983



$$G_2 \subset B_3$$



$$G_2 = B_3$$



Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1. Glatte Orbiträume von isometrischen Aktionen	
11. Riemannsche Submersionen	6
12. Glattheit von Orbiträumen	8
13. Reduktion auf fixpunktfreie Aktionen	10
14. Homogene Räume und Doppelquotienten	12
2. Liegruppen mit linksinvarianter Metrik	
21. Zusammenhang und Krümmung	16
22. Metrischer Tensor und Invarianzgruppe	18
23. Eine Schar von normal-homogenen Metriken auf einer kompakten Liegruppe	20
24. Beispiele solcher Metriken	22
25. Kompakte Liegruppen	24
3. Doppelquotienten kompakter Liegruppen	
31. Doppelquotienten	27
32. Krümmung	29
33. Maximale Tori und Rang-Bedingung	32
34. Torus-invariante Metriken	35
35. Überlagerungsgruppen	37
36. Nicht-einfache Gruppen	38
4. Beispiele von Doppelquotienten	
41. $G = SU(3)$ , $U \cong S^1$	42
42. $G = SU(3)$ , $U \cong S^1 \times S^1$	48

43.	$G = \text{Sp}(2), U \cong \text{Sp}(1)$	52
44.	$G = \text{Sp}(3), U \cong \text{Sp}(1)^3$	58
5.	Fixpunkt-Freiheit	
51.	Torus und Weylgruppe	65
52.	Die Bedingung in der Liealgebra	67
53.	$\dim(\bar{S}) = \text{rg}(G) - 1$	70
54.	$\dim(\bar{S}) = \text{rg}(G)$	72
55.	Eigenschaften zulässiger Endomorphismen	74
6.	Fixpunktfreie Torus-Aktionen von maximalem Rang auf $\text{SU}(n)$	
61.	$\text{SU}(n)$ und $\text{U}(n)$	79
62.	Notwendige Bedingungen für Zulässigkeit	80
63.	Graphen	87
64.	$\text{SU}(3)$	89
65.	Zulässige Graphen und Endomorphismen	91
66.	Die übrigen Graphen	94
7.	Fixpunktfreie Torus-Aktionen von maximalem Rang auf $\text{SO}(m), \text{Spin}(m), \text{Sp}(n)$	
71.	$\text{SO}(m), \text{Spin}(m), \text{Sp}(n)$ und $\text{U}(n)$	101
72.	$\omega_n$ - und $\omega'_n$ -Zulässigkeit	103
73.	Graphen	108
74.	Zulässige Graphen und Matrizen	111
75.	Die übrigen Graphen	112
8.	Produkte und Ausnahmegruppen	
81.	Produkte	120
82.	Die Gruppen vom Typ $G_2, F_4, E_8$	122
83.	Gruppen vom Typ $E_7$	124
84.	Gruppen vom Typ $E_6$	126

9. Maximale Untergruppen mit vorgegebenem maximalem Torus	
91. Zulässige Erweiterungen von Tori	131
92. Eindeutigkeit der Erweiterung	134
93. $\text{Rang}(G) = 2$	135
94. Beispiele mit Codimension 1	138
95. Beispiele mit $\dim(T') = 1$	142
10. Die Klassifikation	
101. Die Räume $G/U_{\max}$ mit positiver Krümmung	152
102. Die übrigen Doppelquotienten $G/U$ mit $\text{rg}(G) = \text{rg}(U)$	160
103. Die Räume $G/U$ mit $\text{rg}(G) = 2, \text{rg}(U) = 1$	166
Literatur	171
Stichwortverzeichnis	174
Symbolverzeichnis	176

## Einführung

Die kompakten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Räume mit positiver Schnittkrümmung sind für die Riemannsche Geometrie von besonderem Interesse. Zum einen ist es hier die Krümmung alleine, die die Mannigfaltigkeit zwingt, sich zu schließen und nicht-triviale Topologie zu erzeugen. Zum anderen stehen der Geometrie starke Hilfsmittel zur Verfügung, wie etwa der Vergleichssatz von Toponogov: Eine Reihe geometrischer Größen lassen sich abschätzen durch ihre Entsprechungen auf Sphären kleinerer Krümmung oder Euklidischen Räumen. Diese Information läßt sich zu Aussagen über die Topologie zusammensetzen, wie etwa im Sphärensatz von Berger und Klingenberg (cf.[8]) oder in der Abschätzung der Bettizahlen durch Gromov [15].

Neben der Entwicklung der allgemeinen Theorie ist natürlich das Studium von speziellen Beispielen solcher Räume von Belang. Hier erkennt man sofort einen einschneidenden Unterschied zwischen dem Fall, wo die Krümmung von Null wegbeschränkt ist, und dem, wo der Krümmungswert Null auftreten darf. Während für die letztere Gruppe von Räumen sehr viele Beispiele bekannt sind, so etwa alle normal-homogenen Räume, scheinen die Diffeomorphie-Typen von einfach zusammenhängenden kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit streng positiver Krümmung nur sehr sporadisch aufzutreten. Diese Mannigfaltigkeiten wollen wir kurz P-Räume nennen. Die bekanntesten Beispiele sind natürlich die Sphären  $S^n$ . Der erste P-Raum, der keine Sphäre ist, tritt in Dimension 4 auf und führt zur nächsten Klasse von Beispielen:

den Projektiven Räumen  $\mathbb{K}P^n$ , wobei  $\mathbb{K}$  eine der Divisionsalgebren  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  oder (im Fall  $n = 2$ )  $\mathbb{C}a$  sein kann. Diese Räume bilden zusammen mit den Sphären die Klasse der Symmetrischen Räume vom Rang 1. Dies waren alle bekannten Beispiele bis zum Jahre 1961, als Berger [4] die normal-homogenen P-Räume klassifizierte. Er fand zwei neue Typen in Dimension 7 und 13, die von Eliasson [11] und Heintze [16] näher untersucht worden sind. Die übrigen homogenen P-Räume wurden von Wallach [24] und Berard Bergery [3] klassifiziert. Sie fanden noch drei weitere Typen in den Dimensionen 6, 12 und 24, nämlich die Fahnenmannigfaltigkeiten von  $\mathbb{C}P^2$ ,  $\mathbb{H}P^2$ ,  $\mathbb{C}aP^2$ , sowie eine unendliche Serie in Dimension 7 [1].

Riemannsche homogene Räume sind Beispiele von Orbit-Räumen freier isometrischer Aktionen auf einer Liegruppe mit linksinvarianter Metrik (vgl. Kap.1). In dieser größeren Klasse Riemannscher Räume versuchte man nun, weitere P-Räume zu finden. Da der Übergang zu Orbiträumen sich Krümmungs-erhöhend auswirkt (O'Neill-Formel, s. § 11), hat man dafür gute Chancen. Zuerst erwähnen sollte man in diesem Zusammenhang die Arbeit von Geroch [13], die für Räume *r e c h t s* seitiger Nebenklassen einer Liegruppe mit linksinvarianter Metrik ein negatives Ergebnis erbrachte. Es war daher konsequent, isometrische Aktionen zu betrachten, die sich aus Rechts- u n d Linkstranslationen zusammensetzen. Den ersten Versuch dieser Art unternahmen Gromoll und Meyer [14]: Sie konstruieren auf diese Weise eine exotische 7-Sphäre mit einer Metrik, deren Krümmung nicht-negativ und auf einer offenen Teilmenge streng positiv ist (vgl. § 43). Dieselbe Methode wurde in [12] zur Konstruktion einer unendlichen Serie von P-Räumen verwandt, die keine homogene Riemannsche Metrik zulassen; diese Räume sind



7-dimensional (vgl. § 41).

In der jetzt vorliegenden Arbeit sollen solche Orbiträume systematischer unter dem Gesichtspunkt der Krümmung untersucht werden. Ausgangspunkt ist folgende Konstruktion: Es sei  $E$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit transitiver Isometriegruppe  $I(E)$ , also ein Riemannscher homogener Raum. Für bestimmte Untergruppen  $U$  von  $I(E)$  ist der Orbitraum  $E/U$  eine glatte Mannigfaltigkeit und die Projektion  $\pi: E \rightarrow E/U$  eine differenzierbare Submersion, die auf  $E/U$  eine Riemannsche Metrik induziert. Zunächst (Kap.1) wird diese Situation auf den Fall zurückgeführt, daß  $E$  eine Liegruppe  $G$  mit linksinvarianter Metrik und  $U$  eine fixpunktfrei und isometrisch operierende Gruppe von Links- und Rechts-translationen ist; der Orbitraum  $G/U$  heißt dann ein Doppelquotient von  $G$ .

Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall, daß  $G$  und damit auch  $U$  kompakt sind. Unter einer einschränkenden Bedingung an die linksinvariante Metrik auf  $G$  ("Bedingung T", siehe §33) zeigen wir zunächst, daß wie bei homogenen Räumen [24] die Ränge von  $G$  und  $U$  entweder gleich sind (gerade Dimensionen) oder sich um Eins unterscheiden (ungerade Dimensionen), falls  $G/U$  ein P-Raum ist. Im Fall gleicher Ränge bedeutet Bedingung T, daß ein maximaler Torus von  $G$  isometrisch durch Rechtstranslationen operiert ("Torus-invariante Metrik"). Wir gehen nur kurz auf die Probleme ein, die sich bei Doppelquotienten nicht-einfacher Gruppen  $G$  stellen (§ 36); das Hauptinteresse der Arbeit gilt den Doppelquotienten der e i n f a c h e n kompakten Gruppen.

In Kap. 5 - 8 analysieren wir die Bedingung, daß  $U$  f i x - p u n k t f r e i auf  $G$  operiert. Es zeigt sich, daß der maximale Torus  $S$  von  $U$  allein für die Fixpunkt-Freiheit verant-

wortlich ist. Daher klassifizieren wir zunächst alle freien Torusaktionen von maximalem Rang durch Rechts- und Linkstranslationen auf einfachen kompakten Gruppen (Kap. 6, 7, 8). Dies ist das Kernstück der Arbeit und kann auch als eigenständiges Resultat angesehen werden. Ist der maximale Torus  $S$  einmal bestimmt, so erhalten wir die zugehörigen Gruppen  $U$  durch Erweiterung (Kap. 9) und prüfen in jedem Einzelfall nach, ob  $G/U$  eine Metrik positiver Krümmung mit Bedingung  $T$  besitzt (Kap. 10). Die dazu nötigen Krümmungsformeln wurden in Kap. 2 und 3 bereitgestellt.

Eine Klassifizierung in ungeraden Dimensionen ist so nicht möglich (vgl. § 53); nur der Fall  $\text{rang}(G) = 2$  ist zugänglich (§ 103).

Die interessantesten Beispiele werden schon vorweg in Kap. 4 diskutiert, insbesondere die auf diese Weise neu gefundenen  $P$ -Räume. Es sind dies die teilweise schon in [12] behandelten 7-Mannigfaltigkeiten  $M_{ab}$  (siehe Satz 414) sowie der in § 42 diskutierte 6-dimensionale Raum  $M_6$ . Alle diese Räume sind Doppelquotienten von der Gruppe  $SU(3)$ .

Hauptresultate der Arbeit sind:

Theorem A:

Es sei  $G$  eine kompakte, einfache Liegruppe mit linksinvarianter Metrik und  $M$  ein Doppelquotient von  $G$  mit Bedingung  $T$ . Ist  $M$  ein  $P$ -Raum gerader Dimension, so ist  $M$  diffeomorph zu einem homogenen  $P$ -Raum oder zu  $M_6$ .

Theorem B:

Es sei  $G$  eine kompakte Liegruppe vom Rang 2 mit Torus-invarianter linksinvarianter Metrik und  $M$  ein Doppelquotient von  $G$ . Ist  $M$  ein  $P$ -Raum ungerader Dimension, so ist  $M$  diffeomorph zu einem homogenen  $P$ -Raum oder zu einem der Räume  $M_{ab}$  von Satz 414.

Die Voraussetzungen von Theorem A sind noch unbefriedigend; vor allem steht eine gründliche Untersuchung der nicht-einfachen Gruppen noch aus. Es handelt sich jedoch um eine echte Verallgemeinerung der Klassifizierung aller homogenen  $P$ -Räume gerader Dimension [4, 24], denn man sieht sofort, daß im homogenen Fall die Voraussetzungen von Theorem A automatisch erfüllt sind.

Danken möchte ich an dieser Stelle besonders Prof. W. Meyer und Prof. E. Heintze, die durch viele Anregungen, Ideen und ermutigende Gespräche zu dieser Arbeit beigetragen haben, sowie der Max Kade Foundation und der Universität von Kalifornien, die mir durch einen Gastaufenthalt in Berkeley viele Anregungen und die nötige Freiheit zur Forschung an diesem Thema verschafften.

## Kapitel 1

---

### Glatte Orbiträume von isometrischen Aktionen

---

#### 11. Riemannsche Submersionen

---

Es seien  $E$  und  $M$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten und  $\pi: E \rightarrow M$  eine surjektive differenzierbare Abbildung mit überall surjektivem Differential ("Submersion"). Eine solche Abbildung erzeugt eine Blätterung  $F$  von  $E$ : Das Blatt durch einen festen Punkt  $x \in E$  ist  $F_x := \pi^{-1}(\pi(x))$  ("Faser durch  $x$ "); dies ist eine Untermannigfaltigkeit von  $E$ . Den Teilraum  $V_x := T_x(F_x) = \ker d\pi_x$  des Tangentialraums  $T_x E$  bezeichnen wir als Vertikalraum in  $x$ , sein orthogonales Komplement  $H_x := T_x E \ominus V_x$  als Horizontalraum. Offensichtlich ist  $d\pi_x|_{H_x}$  ein linearer Isomorphismus von  $H_x$  auf  $T_{\pi(x)} M$ , also  $d\pi|_H: H \rightarrow \pi^* TM$  ein Isomorphismus von Vektorbündeln über  $E$ , wobei wir mit  $H$  das horizontale Unterbündel von  $TE$  mit Fasern  $H_x$  bezeichnen. Die Submersion  $\pi$  heißt nun Riemannsche Submersion, wenn  $d\pi|_H$  eine Isometrie ist. Standardbeispiele Riemannscher Submersionen sind die in § 12 beschriebenen orbitalen Submersionen.

Zu jedem Vektorfeld  $X$  auf  $M$  ist  $X \circ \pi$  ein Schnitt in  $\pi^* TM$  und daher  $(d\pi|_H)^{-1} \circ X \circ \pi =: \hat{X}$  ein horizontales Vektorfeld auf  $E$ , das unter  $d\pi$  auf  $X$  abgebildet wird, genannt der horizontale Lift von  $X$ . Ist  $c: I \rightarrow M$  eine reguläre Kurve, so heißt eine Kurve  $\hat{c}: I \rightarrow E$  mit  $c = \pi \circ \hat{c}$  und horizontalem Tangentialvektorfeld  $\hat{c}'$  ein horizontaler Lift von  $c$ . Solch eine Kurve

(11)

wird zu jedem Anfangspunkt  $\hat{c}(0) = x \in \pi^{-1}(c(0))$  durch Integration des horizontalen Lifts  $\hat{c}'$  von  $c'$  auf der immersierten Untermannigfaltigkeit  $\pi^{-1}(c(I))$  gewonnen. Ist  $c$  insbesondere eine Geodätische in  $M$ , so ist auch  $\hat{c}$  eine Geodätische in  $E$ . Anwendung von  $\pi$  verkürzt nämlich die Längen aller Kurven in  $E$  mit Ausnahme der horizontalen. Wäre also  $d(\hat{c}(t), \hat{c}(t+s)) < s$  für ein kleines  $s > 0$ , so wäre auch  $d(c(t), c(t+s)) < s$  und damit  $c|_{[t, t+s]}$  nicht Kürzeste.

Insbesondere gilt also, daß eine Geodätische in  $E$  mit horizontalem Anfangsvektor im ganzen Verlauf horizontal bleibt. Dies wenden wir im folgenden Satz an:

Satz 11: Sind  $\pi_i: E_i \rightarrow M_i$  Riemannsche Submersionen für  $i = 1, 2$  und  $f: E_1 \rightarrow E_2$  eine totalgeodätische, faserentreue, isometrische Immersion mit  $df(H_x) \subset H_{f(x)}$  für alle  $x \in E_1$ , so induziert  $f$  eine totalgeodätische injektive Immersion  $\bar{f}: M_1 \rightarrow M_2$  mit  $\bar{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$ .

Beweis:  $\bar{f}$  ist wohldefiniert durch  $\bar{f}(\pi_1(x)) := \pi_2(f(x))$ , denn ist  $\pi_1(x) = \pi_1(y)$ , so ist auch  $\pi_2(f(x)) = \pi_2(f(y))$  wegen der Faserentreue von  $f$ . Ist  $c: I \rightarrow M_1$  eine reguläre Kurve mit horizontalem Lift  $\hat{c}$ , so ist  $\bar{f} \circ c = \pi_2 \circ f \circ \hat{c}$ , also erhält  $\bar{f}$  die Längen von Kurven und ist somit eine isometrische Immersion. Ist  $c$  insbesondere eine Geodätische, so ist  $f \circ \hat{c}$  eine horizontale Geodätische in  $E_2$ , also  $\bar{f} \circ c$  Geodätische in  $M_2$ . Daher ist die Immersion  $f$  totalgeodätisch.

(11)

Ist  $\pi: E \rightarrow M$  wieder eine Riemannsche Submersion, so gilt für die Krümmungen die Formel von O'Neill [23]: Für einen Vektor  $Z \in TE$  bezeichne  $Z = Z_h + Z_v$  die Zerlegung in horizontalen und vertikalen Anteil. Sind nun  $X, Y$  Vektorfelder auf  $M$  und  $\hat{X}, \hat{Y}$  die horizontalen Lifts auf  $E$ , so gilt für die Krümmungstensoren  $R_E$  auf  $E$  und  $R_M$  auf  $M$  die folgende Beziehung:

$$(O'N) \quad \langle R_M(X, Y)Y, X \rangle \circ \pi = \langle R_E(\hat{X}, \hat{Y})\hat{Y}, \hat{X} \rangle + \frac{3}{4} \|[ \hat{X}, \hat{Y} ]_v\|^2$$

(Beweis siehe [8, 23]). Die Projektion  $\pi$  wirkt also auf horizontalen Ebenen (schwach) Krümmungs-erhöhend. Qualitativ kann man das so verstehen: Zwei Geodätische  $c_1, c_2$ , die vom selben Punkt in  $M$  starten, laufen nicht so schnell auseinander wie ihre horizontalen Lifts  $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ , da  $d(F_{\hat{c}_1}(t), F_{\hat{c}_2}(t)) \leq d(\hat{c}_1(t), \hat{c}_2(t))$ .

## 12. Glattheit von Orbiträumen

Wir betrachten nun eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $E$ , auf der eine Liegruppe  $U$  isometrisch und mit abgeschlossenen Orbits operiert. Dabei ist der Orbit durch  $x$  die Menge  $Ux = \{u(x); u \in U\}$  für jedes  $x \in E$ . Die Menge aller Orbits mit der induzierten Topologie heißt der Orbitraum  $E/U$ . Die Projektion  $\pi: E \rightarrow E/U$  induziert auf  $E/U$  einen Abstandsbegriff: Sind  $Ux$  und  $Uy$  zwei Orbits, so ist  $d(x, Uy) = d(x', Uy) = d(Ux, Uy)$  für alle  $x, x' \in Ux$ ; dies gilt wegen der Isometrie-Eigenschaft von  $U$ . Daher können wir für  $\bar{x}, \bar{y} \in E/U$  setzen:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := d(\pi^{-1}(\bar{x}), \pi^{-1}(\bar{y}))$$

Wir werden uns für den Fall interessieren, daß  $M := E/U$  eine

(12)

differenzierbare Mannigfaltigkeit und  $\pi: E \rightarrow M$  eine Submersion ist. Einen solchen Orbitraum wollen wir glatt nennen. In diesem Fall ist  $d$  die Abstandsfunktion einer Riemannschen Metrik auf  $M$ : Ist  $X \in T_m M$  und  $\hat{X} \in T_x E$  mit  $d\pi_x(\hat{X}) = X$  und  $\hat{X} \perp U_x$  ("horizontales Urbild von  $X$ "), so setzen wir

$$\|X\| := \|\hat{X}\|$$

Diese Definition ist von der Auswahl des horizontalen Urbildes  $\hat{X}$  unabhängig, da zwei solche Urbilder durch eine Isometrie in  $U$  aufeinander abgebildet werden und daher gleiche Länge haben. Damit wird  $\pi: E \rightarrow M$  zu einer Riemannschen Submersion.

Wir nehmen also an, daß  $U$  eine differenzierbar und isometrisch operierende Liegruppe mit abgeschlossenen Orbits ist (diese sind dann differenzierbare Untermannigfaltigkeiten von  $E$ ) und fragen, wann der Orbitraum  $E/U$  glatt ist. Um dies zu sehen, greifen wir einen Orbit  $Ux$  heraus. Die Gruppe  $U$  operiert auf seinem Normalenbündel  $N(Ux)$  fasertreu durch  $u(v) := du(v)$  für  $v \in N(Ux)$ . Die Standgruppe des Punktes  $x$  unter der  $U$ -Operation,  $U_x := \{u \in U; u(x) = x\}$ , operiert linear auf der Faser  $N_x(Ux)$ . Für den Orbitraum der Operation von  $U$  auf  $N(Ux)$  gilt:  $N(Ux)/U \cong N_x(Ux)/U_x$ , denn jeder Orbit in  $N(Ux)$  schneidet die Faser  $N_x(Ux)$ . Andererseits spiegelt  $N(Ux)$  die Orbit-Struktur in  $E$  nahe  $Ux$  wieder, denn  $\exp|_{N(Ux)}$  bildet eine  $\varepsilon$ -Umgebung des Nullschnittes,  $N^\varepsilon(Ux)$ , diffeomorph und äquivariant auf die  $\varepsilon$ -Tubenumgebung  $B_\varepsilon(Ux)$  ab ("Scheibensatz"). Ist  $E/U$  nahe  $\pi(x)$  glatt, so gilt:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(\pi(x)) &= \pi(B_\varepsilon(Ux)) = B_\varepsilon(Ux)/U = \exp(N^\varepsilon(Ux))/U \\ &\cong N^\varepsilon(Ux)/U \cong N_x^\varepsilon(Ux)/U_x \end{aligned}$$

(12)

Die Ableitung dieses Diffeomorphismus im Punkte  $\pi(x)$  ist also eine lineare Abbildung von  $T_{\pi(x)}(E/U)$  auf  $N_x(Ux)/U_x$  - aber der letztere Raum ist nur dann ein Vektorraum, wenn  $U_x$  trivial operiert. Demnach ist die Abbildung

$$U/U_x \times N_x(Ux) \rightarrow N(Ux) : (uU_x; v) \rightarrow du_x(v)$$

ein äquivarianter Diffeomorphismus. Nach dem Scheibensatz sind daher die Nachbar-Orbiten  $U_y$  für  $y \in S_\epsilon := \exp N_x^\epsilon(Ux)$  diffeomorph zu  $U_x$ .

Die Fixpunktmenge  $E_0 := \{y \in E ; U_x y = y\}$  der Untergruppe  $U_x$  ist eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit durch  $x$  mit  $T_x E_0 = \{v \in T_x E ; U_x v = v\} = N_x(Ux)$ . Also gilt  $S_\epsilon \subset E_0$  und damit  $U_y \subset U_x$  für alle  $y \in S_\epsilon$ . Da nach der obigen Überlegung die Orbiten nahe  $Ux$  alle äquivariant diffeomorph sind, muß  $U_y = U_x$  gelten.

Weil  $B_\epsilon(Ux) = U S_\epsilon$  und  $U_{uy} = u U_y u^{-1}$ , haben wir gezeigt: (Die Umkehrung ist eine einfache, wohlbekanntete Tatsache, vgl. [19])

Satz 12: Der Orbitraum  $E/U$  ist glatt genau dann, wenn alle Standgruppen zueinander konjugiert sind.

### 13. Reduktion auf fixpunktfreie Aktionen

Wir betrachten nun eine Riemannsche Mannigfaltigkeit  $E$ , auf der eine Gruppe von Isometrien  $U$  mit glattem Orbitraum  $M = E/U$  operiert. Wir wählen einen festen Bezugspunkt  $x \in E$ . Es sei  $U_x$  die Standgruppe von  $x$  und  $E_0$  ihre Fixpunkt-Mannigfaltigkeit.  $E_0$  ist totalgeodätisch in  $E$  - als Fixpunktmenge einer Gruppe



(13)

von Isometrien - und schneidet jeden Orbit  $Uy$  mit  $y \in E$ . Da nämlich nach dem vorstehenden Abschnitt  $U_y = u^{-1} U_x u$  für ein  $u \in U$  gilt, haben wir  $U_{uy} = u U_y u^{-1} = U_x$  und daher  $uy \in E_0$ . Wir betrachten die Untergruppe  $U_0$  von  $U$ , welche  $E_0$  invariant läßt; dies ist der Normalisator  $N_U(U_x)$  von  $U_x$  in  $U$ . Denn da  $E_0 = \{y \in E ; U_y = U_x\}$ , folgt aus  $u(y) \in E_0$  für ein  $y \in E_0$  schon  $U_x = U_{u(y)} = u U_y u^{-1} = u U_x u^{-1}$ , also  $u \in N_U(U_x)$ . Umgekehrt, wenn  $u \in N_U(U_x)$ , gilt  $U_{u(y)} = u U_x u^{-1} = U_x$  für alle  $y \in E_0$ , also  $u(y) \in E_0$  für alle  $y \in E_0$ .

Damit ist nicht nur  $U_0 = N_U(U_x)$  gezeigt, sondern auch  $Uy \cap E_0 = U_0y$  für alle  $y \in E_0$ . Daher ist die durch die Inklusion  $f: E_0 \rightarrow E$  induzierte Abbildung  $\bar{f}: E_0/U_0 \rightarrow E/U$  bijektiv, denn jeder Orbit schneidet  $E_0$ . Außerdem haben wir gesehen, daß die Gruppe  $U_0$  fixpunktfrei auf  $E_0$  operiert: Falls  $u(y) = y$  für ein  $y \in E_0$ , gilt schon  $u(z) = z$  für alle  $z \in E_0$  (weil nämlich  $u \in U_x$ ). Wir können nun zeigen:

Satz 13:  $\bar{f}: E_0/U_0 \rightarrow E/U$  ist eine Isometrie.

Beweis: Nach Satz 11 ist nur noch zu zeigen, daß die Inklusion  $f: E_0 \rightarrow E$  horizontale Vektoren in  $E_0$  auf ebensolche in  $E$  abbildet. Mit anderen Worten,  $H_Y^0 := T_Y E_0 \ominus T_Y(U_0y)$  muß senkrecht auf  $T_Y(Uy)$  stehen, für alle  $y \in E_0$ . Dies ist richtig, denn die Fixgruppe  $U_y$  operiert orthogonal auf  $T_Y E$  und läßt  $T_Y(Uy)$  invariant und  $T_Y E_0$  fix.  $T_Y(Uy)$  und  $H_Y^0$  sind also  $U_y$ -invariante Teilräume von  $T_Y E$  mit Durchschnitt 0 und stehen somit senkrecht aufeinander. Genauer sieht man, daß  $H_Y^0 = H_Y$  für

(13)

für alle  $y \in E_0$ , also haben  $E_0/U_0$  und  $E/U$  gleiche Dimension. Nach Satz 11 ist  $\bar{f} : E_0/U_0 \rightarrow E/U$  eine isometrische Immersion, und wegen der Dimensionsgleichheit und der Bijektivität also eine Isometrie.

Beim Studium glatter Orbiträume können wir uns also auf den Fall beschränken, daß  $U$  fixpunktfrei auf  $E$  operiert, eventuell mit einem Kern  $U'$ . Dann ist die Submersion  $\pi : E \rightarrow M = E/U$  ein Prinzipalfaserbündel mit Strukturgruppe  $\bar{U} := U/U'$ . Ist  $E$  einfach zusammenhängend und  $\bar{U}$  zusammenhängend, so ist auch  $M$  einfach zusammenhängend, denn eine Schleife in  $M$  können wir nach  $E$  liften und dort in einer Faser den End- mit dem Anfangspunkt verbinden. Die so entstandene Schleife in  $E$  läßt sich zusammenziehen, also auch die ursprüngliche in  $M$ .

Wir gewinnen also durch diesen Ansatz einfach zusammenhängende Räume, die wegen der O'Neill-Formel gute Kandidaten für positive Krümmung sind. Die Faserbündel-Struktur erleichtert zudem die Bestimmung des Cohomologie-Ringes (vgl. [12] und Kap.4)

#### 14. Homogene Räume und Doppelquotienten

Besonders interessant, weil gut zu rechnen, ist der Fall, wo auf  $E$  eine Liegruppe  $G$  von Isometrien transitiv operiert. Dann heißt  $E$  ein (Riemannscher) homogener Raum. Wir wählen wieder einen Bezugspunkt  $x \in E$  fest. Die Standgruppe von  $x$  unter der Aktion von  $G$  sei  $G_x$ . Die Abbildung  $\pi : G \rightarrow E$ ,  $\pi(g) := g(x)$  ist eine Submersion, die einen

Diffeomorphismus  $\bar{\pi}$  des Raums aller linksseitigen Nebenklassen  $G/G_x$  auf  $E$  induziert. Man konstruiert leicht linksinvariante Metriken auf  $G$ , die  $\pi$  zu einer Riemannschen Submersion und  $\bar{\pi}$  zu einer Isometrie machen. Dabei heißt eine Metrik auf  $G$  linksinvariant (abgekürzt l.i.), wenn alle Linkstranslationen Isometrien sind. Ist eine solche Metrik sogar biinvariant, d.h. sind auch alle Rechtstranslationen Isometrien, so heißt  $E$  ein normal-homogener Raum.

Ein homogener Unterraum ist eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von  $E$ , die von einer Untergruppe von  $G$  invariant gelassen wird, die darauf transitiv operiert.

Wir betrachten die Situation von § 13 nun für einen homogenen Raum  $E$  mit einer transitiven Gruppe  $G$  von Isometrien und einer Untergruppe  $U$  von  $G$ , die auf  $E$  mit glattem Orbitraum operiert. Wie in 13 sei  $E_0$  die Fixpunktmenge der Standgruppe  $U_x$  von  $x$ .

Lemma 141:  $E_0$  ist ein homogener Unterraum von  $E$ .

Beweis:  $E_0$  ist totalgeodätisch. Wir zeigen, daß  $N := N_G(U_x)$  auf  $E_0$  transitiv operiert. - Auf  $G$  operiert die Gruppe  $\hat{U} := U \times G_x$  durch  $(u; g_0)g := u g g_0^{-1}$  mit dem Orbitraum  $G/\hat{U} = E/U$ . Die Fixgruppe  $\hat{U}_e$  des Einselements  $e$  von  $G$  ist  $\Delta U_x := \{(u; u) ; u \in U_x\} \subset \hat{U}$ ; man beachte  $U \cap G_x = U_x$ . Die zugehörige Fixpunktmenge von  $\hat{U}_x$  ist  $C := C_G(U_x)$ , der Centralisator von  $U_x$  in  $G$ . Also schneidet  $C$  alle Orbits der  $\hat{U}$ -Aktion auf  $G$  (vgl. 13), und somit gilt  $G = U C G_x$ .

(14)

Ein Punkt  $g(x)$  in  $E$  liegt in  $E_0$  genau dann, wenn  $U_{g(x)} = U_x$ . Es sei  $g = u c g_0$  mit  $u \in U$ ,  $c \in C$ ,  $g_0 \in G_x$ . Dann ist  $U_{g(x)} = g G_x g^{-1} \cap U = u (c G_x c^{-1} \cap U) u^{-1}$ , also  $g(x) \in E_0$  genau dann, wenn  $c G_x c^{-1} \cap U = u^{-1} U_x u$ . Nun ist aber  $U_x \subset c G_x c^{-1} \cap U$ , also  $U_x = u^{-1} U_x u$  und somit  $u \in N$ . Setzen wir  $n := u c$ , so ist  $n \in N$  und  $g(x) = n(x)$ .

Andererseits ist natürlich  $n(y) \in E_0$  für alle  $y \in E_0$  und  $n \in N$ , da  $U_{n(y)} = U \cap n G_x n^{-1} = U_x$ .

Zusammen mit Satz 13 erhalten wir also:

Satz 142: Es sei  $E$  ein homogener Raum und  $U$  eine Gruppe von Isometrien mit glattem Orbitraum  $E/U$ . Dann gibt es einen homogenen Unterraum  $E_0$  von  $E$  und eine Untergruppe  $U_0$  von  $U$ , die fixpunktfrei auf  $E_0$  operiert, so daß die Inklusion von  $E_0$  in  $E$  eine Isometrie von  $E_0/U_0$  auf  $E/U$  induziert.

Daher dürfen wir jetzt annehmen, daß die Untergruppe  $U$  von  $G$  fixpunktfrei auf  $E = G/G_x$  operiert. Setzen wir  $\hat{U} := L(U) \cap R(G_x)$ , wobei  $L$  die Linkstranslation und  $R$  die Rechtstranslation

$$L(g)g' := g g' \quad , \quad R(g)g' := g' g$$

bezeichnen, so operiert  $\hat{U}$  fixpunktfrei und isometrisch auf  $G$ , und für den Orbitraum gilt  $G/\hat{U} = E/U$  bis auf Isometrie.

Ist allgemein  $G$  eine Liegruppe mit linksinvarianter Metrik und  $\bar{U}$  eine Untergruppe von  $L(G) \cap R(G)$ , die fixpunktfrei

und isometrisch auf  $G$  operiert, so nennen wir die Orbit-Mannigfaltigkeit  $G/\bar{U}$  einen Doppelquotienten von  $G$ . Damit können wir das vorige Resultat so umformulieren:

Satz 143: Ist  $E$  ein Riemannscher homogener Raum,  $G$  eine transitive Liegruppe von Isometrien auf  $E$  und  $U$  eine Untergruppe mit glattem Orbitraum  $M = E/U$ , so gibt es eine Untergruppe  $G'$  von  $G$  und einen Doppelquotienten von  $G'$ , der zu  $M$  isometrisch ist.

Dieser Satz gibt eine gewisse Rechtfertigung dafür, daß wir uns bei der Untersuchung von Doppelquotienten auf solche Metriken beschränken, die von l i n k s i n v a r i a n t e n Metriken auf der Gruppe induziert werden: Diese Struktur tritt bei der Untersuchung glatter Orbiträume von homogenen Räumen auf.

## Kapitel 2

### Liegruppen mit linksinvarianter Metrik

#### 21. Zusammenhang und Krümmung

Wir betrachten eine Liegruppe  $G$  mit zugehöriger Liealgebra  $\underline{G}$ ; die letztere werden wir je nach Bedarf entweder als Tangentialraum des Einselementes,  $T_e G$ , oder als Menge der linksinvarianten Vektorfelder auffassen. Es sei ein festes Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\underline{G}$  gegeben; dieses induziert eine linksinvariante Metrik auf  $G$ , die wir ebenso bezeichnen. Für eine lineare Abbildung  $A : \underline{G} \rightarrow \underline{G}$  bezeichne  $A^* : \underline{G} \rightarrow \underline{G}$  die adjungierte Abbildung bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$\nabla$  sei der Levi-Civita-Zusammenhang der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $G$ . Wir brauchen diesen nur auf linksinvarianten Feldern zu berechnen. Sind also  $X, Y, Z \in \underline{G}$  linksinvariante Vektorfelder, so sind ihre Skalarprodukte auf  $G$  konstant, also lautet die Levi-Civita-Gleichung in diesem Fall (vgl. [8], S. 2)

$$2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle + \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle$$

Daraus ergibt sich

$$(1) \quad \nabla_X Y = \frac{1}{2} [X, Y] + U(X, Y) \quad ,$$

$$(2) \quad U(X, Y) = -\frac{1}{2} (\text{ad}(X)^* Y + \text{ad}(Y)^* X) \quad ;$$

insbesondere ist  $\nabla_X Y$  wieder linksinvariant.

Zur Berechnung der Krümmung verwendet man die Symmetrie von  $U$  sowie

$$0 = X \langle \nabla_Y Z, W \rangle = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X W \rangle$$

für  $X, Y, Z, W \in \underline{G}$  und erhält:

$$(3) \quad \langle R(X, Y)Y, X \rangle = u(X, Y) + \frac{1}{2} \langle [X, Y], P(X, Y) \rangle + \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2$$

mit

$$(4) \quad \begin{aligned} u(X, Y) &:= \|U(X, Y)\|^2 - \langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle \\ &= \frac{1}{4} \|\text{ad}(X)^* Y + \text{ad}(Y)^* X\|^2 - \langle \text{ad}(X)^* X, \text{ad}(Y)^* Y \rangle \end{aligned}$$

$$(5) \quad P(X, Y) := \frac{1}{2} (\text{ad}(Y)^* X - \text{ad}(X)^* Y) - [X, Y]$$

(vgl. [8], S. 64 - dort fehlt irrtümlich der Faktor 1/4 im ersten Term von (4)).

Eine Untergruppe von  $G$ , deren Rechtstranslationen Isometrien auf  $G$  sind, wollen wir rechts-isometrisch nennen. Die größte rechtsisometrische Gruppe ist

$$K = \text{Ad}^{-1}(\text{Ad}(G) \cap O(\underline{G}))$$

wobei  $O(\underline{G})$  die orthogonale Gruppe auf  $\underline{G}$  mit dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet. Diese Gruppe  $K$  wollen wir die Invarianzgruppe der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nennen.

Ist also  $K$  die Invarianzgruppe und  $\underline{K}$  ihre Liealgebra, so ist  $\text{Ad}(K)$  orthogonal und daher  $\text{ad}(X)$  schiefsymmetrisch für alle  $X \in \underline{K}$ , d.h.  $\text{ad}(X)^* = -\text{ad}(X)$ . Daher gilt  $U(X, Y) = 0$  und  $P(X, Y) = 0$  für alle  $X, Y \in \underline{K}$ , also

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \frac{1}{2} [X, Y] \quad , \\ \langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2 \quad . \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $K$  totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von  $G$ .

Im Falle biinvarianter Metriken ( $K = G$ ) ergibt sich nicht-negative Krümmung, die sich über die O'Neill-Formel (§ 11) auf normal-homogene Räume überträgt.

(21)

Qualitativ können wir uns diesen Sachverhalt so klarmachen:  
Für die Abstandsfunktion einer biinvarianten Metrik auf  $G$  gilt

$$\begin{aligned} d(g^2, h^2) &= d(h^{-1}g, gh^{-1}) \leq d(h^{-1}g, e) + d(e, gh^{-1}) \\ &= 2 d(g, h) . \end{aligned}$$

Da Ein-Parameter-Untergruppen Geodätische sind, liegen  $e, g$  und  $g^2$  auf einer gemeinsamen Geodätischen, ebenso  $e, h$  und  $h^2$ . Daher folgt: Verdoppeln wir in einem gleichschenkligen Dreieck in  $G$  die Schenkel-Längen, so ist die neue Grundseite höchstens doppelt so lang. Dieser geometrische Sachverhalt ist äquivalent zu der Aussage, daß  $G$  nicht-negative Krümmung hat.

## 22. Metrischer Tensor und Invarianzgruppe

Wir wollen jetzt annehmen, daß auf  $\underline{G}$  ein  $\text{Ad}(G)$ -invariantes Skalarprodukt  $(, )$  existiert, das im Moment noch nicht positiv definit zu sein braucht; wir setzen also voraus, daß  $G$  reduktiv ist. Dann läßt sich jedes positiv definite Skalarprodukt  $\langle , \rangle$  auf  $\underline{G}$  durch eine symmetrische, umkehrbare lineare Abbildung  $\Theta : \underline{G} \rightarrow \underline{G}$  beschreiben, die wir metrischen Tensor nennen wollen:

$$\langle X, Y \rangle = (\Theta(X), Y)$$

für alle  $X, Y \in \underline{G}$ . Damit gilt

$$(1) \quad \text{ad}(X)^* = -\Theta^{-1} \circ \text{ad}(X) \circ \Theta .$$

Einen Teilraum  $V$  von  $\underline{G}$  wollen wir metrisch invariant nennen, wenn  $\Theta(V) = V$ . Ist  $K$  die Invarianzgruppe der Metrik  $\langle , \rangle$ , so ist jeder irreduzible  $\text{Ad}(K)$ -invariante Teilraum  $V$  von  $\underline{G}$  metrisch invariant, genauer ein Eigenraum von  $\Theta$  nach dem



(22)

Lemma von Schur, sofern es keinen äquivalenten  $K$ -Modul in  $\underline{G}$  gibt.

Ist  $N \subset \underline{G}$  eine metrisch invariante abelsche Teilalgebra, so ist  $[X, Y] = 0$  und  $\text{ad}(X)^* Y = 0$  nach (1) für alle  $X, Y \in N$ . Aus der Krümmungsformel 21(3) ergibt sich also, daß die Schnittkrümmung auf jedem 2-dimensionalen Unterraum von  $N$  verschwindet.

Das folgende Lemma gibt einen weiteren Spezialfall, in dem sich die Krümmung leicht berechnen läßt:

Lemma 22: Es sei  $V \subset \underline{G}$  ein Eigenraum von  $\Theta$  zum Eigenwert  $t$ , und  $V$  sei invariant unter der Invarianzgruppe  $K$ , also ein  $\text{Ad}(K)$ -Modul. Dann gilt für alle  $X \in \underline{K}$ ,  $Y \in V$ :

$$(2) \quad \langle R(X, Y)Y, X \rangle = \frac{1}{4} t^{-2} \|\Theta(X), Y\|^2 .$$

Beweis: Es genügt, den Fall  $t = 1$  zu behandeln. Dann ist  $\text{ad}(X)^* Y = -\Theta^{-1}([X, \Theta(Y)]) = -[X, Y]$  und  $\text{ad}(Y)^* X = -[Y, \Theta(X)]$ , da  $[\underline{K}, V] \subset V$ . Aus 21(2) und 21(5) ergibt sich in diesem Fall

$$(3) \quad U(X, Y) = \frac{1}{2} [X - \Theta(X), Y] ,$$

$$(4) \quad P(X, Y) = -\frac{1}{2} [X - \Theta(X), Y]$$

und aus 21(3) wegen  $\text{ad}(Y)^* Y = 0$ :

$$\begin{aligned} \langle R(X, Y)Y, X \rangle &= \frac{1}{4} \|[X - \Theta(X), Y]\|^2 - \frac{1}{2} \langle [X, Y], [X - \Theta(X), Y] \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|\Theta(X), Y\|^2 . \end{aligned}$$

23. Eine Schar von normal-homogenen Metriken

auf einer kompakten Liegruppe

Ist  $G$  eine kompakte Liegruppe, so gibt es stets eine (positiv definite) biinvariante Metrik  $(\cdot, \cdot)$  auf  $G$ , die man z.B. durch Mittelung über  $\text{Ad}(G)$  aus einem beliebigen Skalarprodukt auf  $\underline{G}$  erhält. Für eine Untergruppe  $K$  von  $G$  sei  $X = X_k + X_p$  die Zerlegung eines Vektors  $X \in \underline{G}$  mit  $X_k \in \underline{K}$ ,  $X_p \in \underline{P} := \underline{K}^\perp$ . Das Skalarprodukt

$$(1) \quad \langle X, Y \rangle := (X_k, Y_k) + t (X_p, Y_p) \quad , \quad t > 1 ,$$

für  $X, Y \in \underline{G}$  definiert eine Metrik auf  $G$  mit Invarianzgruppe  $K$ . Diese Metriken wurden schon verschiedentlich untersucht (vgl. [2, 24, 9] ; sie sind normal-homogen bezüglich der Gruppe  $G \times K$  (siehe § 36), haben also nicht-negative Schnittkrümmung.

Wir sind hier nur an dem Fall interessiert, daß  $(G; K)$  ein symmetrisches Paar ist, daß also  $[\underline{P}, \underline{P}] \subset \underline{K}$  gilt (vgl. [17]).

Zur Abkürzung setzen wir in diesem Abschnitt

$$XY := \text{ad}(X)Y = [X, Y] \quad , \quad X^*Y := \text{ad}(X)^* Y \quad .$$

Setzen wir noch  $s := 1/t$ , so erhalten wir

$$(2) \quad X^*Y = Y_k X_k + t Y_p X_p + s Y_k X_p + Y_p X_k$$

und also mit  $r := s(t-1) = 1-s \in (0, 1)$

$$U(X, Y) = \frac{r}{2} (Y_k X_p - Y_p X_k) \in \underline{P} \quad ,$$

$$\langle U(X, X), U(Y, Y) \rangle = r^2 \langle X_k X_p, Y_k Y_p \rangle = r^2 t (X_k X_p, Y_k Y_p) \quad .$$

Nun ist  $(X_k X_p, Y_k Y_p) = (X_k Y_k, X_p Y_p) + (X_k Y_p, Y_k X_p)$ , und wegen  $X_k Y_p + X_p Y_k = (XY)_p$  gilt (vgl. 21(4):

$$u(X, Y) = \frac{1}{4} r^2 \| (XY)_p \|^2 - r^2 t \langle X_k Y_k, X_p Y_p \rangle \quad .$$

Weiterhin ergibt sich aus (1):

$$(3) \quad P(X,Y) = -\frac{r}{2} (XY)_p + rt X_p Y_p .$$

Somit erhalten wir aus der Krümmungsformel 21(3)

$$(4) \quad \langle R(X,Y)Y,X \rangle = \frac{1}{4} s^2 \|(XY)_p\|^2 + t q(X,Y)$$

wobei  $q(X,Y) = -r^2 \langle X_k Y_k, X_p Y_p \rangle - r \langle X_p Y_p, (XY)_k \rangle + \frac{1-r}{4} \|(XY)_k\|^2$ .

Um zu sehen, daß  $q(X,Y)$  nicht-negativ ist, substituieren wir

$$X_p Y_p = (XY)_k - X_k Y_k , \text{ so daß wir erhalten}$$

$$(5) \quad q(X,Y) = r^2 \|X_k Y_k\|^2 - (r^2 + r) \langle X_k Y_k, (XY)_k \rangle + \frac{1}{4} (1 + 3r) \|(XY)_k\|^2 .$$

Nach der Schwarz'schen Ungleichung gilt für  $a := \|X_k Y_k\|$ ,  $b := \|(XY)_k\|$ , daß

$$q(X,Y) \geq \bar{q}(a,b) := r^2 a^2 - (r^2 + r)ab + \frac{1 + 3r}{4} b^2 ,$$

und  $\bar{q}$  ist eine positiv definite quadratische Form, da  $4 \det \bar{q} = r^3(1+r)$  positiv ist für  $0 < r < 1$ , d.h. für  $t > 1$ .

Die rechte Seite von (4) verschwindet also genau dann, wenn  $(XY)_p$ ,  $X_k Y_k$ ,  $(XY)_k$  gleichzeitig Null sind. Als Ergebnis erhalten wir somit:

Satz 231: Es sei  $(G,K)$  ein kompaktes, symmetrisches Paar.

Dann hat  $G$  mit der durch (1) definierten Metrik nicht-negative Schnittkrümmung  $K$ , und für orthonormale Vektoren  $X, Y \in \underline{G}$  gilt  $K(X,Y) = 0$  genau dann, wenn  $[X,Y] = [X_k, Y_k] = 0$ .

Uns interessiert besonders der Fall, wo  $(G,K)$  ein symmetrisches Paar vom Rang 1 ist. Dies bedeutet: Sind  $X, Y \in \underline{P}$  mit  $[X,Y] = 0$ , so sind  $X$  und  $Y$  linear abhängig. Ist daher  $E$  ein

(23)

2-dimensionalen Unterraum von  $\underline{G}$  mit Krümmung  $K(E) = 0$ , so gilt nach Satz 231 für beliebige  $X, Y \in E$ , daß  $[X_p, Y_p] = 0$  und somit  $X_p$  und  $Y_p$  linear abhängig sind. Die Projektion von  $E$  auf  $\underline{P}$  hat also höchstens eindimensionales Bild und daher nicht-trivialen Kern, d.h.  $E$  schneidet  $\underline{K}$ . Daraus erhalten wir mit Satz 231:

Korollar 232: Ist zusätzlich  $(G, K)$  vom Rang 1, so gilt für jede Ebene  $E$  in  $\underline{G}$ : Genau dann ist  $K(E) = 0$ , wenn  $E$  von Vektoren  $X, Y$  aufgespannt wird mit

$$Y \in \underline{K}, \quad X_k \perp Y, \quad [X_k, Y] = [X_p, Y] = 0.$$

#### 24. Beispiele solcher Metriken

241.  $G = SU(3)$ ,  $K = \{\hat{A}; A \in U(2)\}$  mit

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = \det A^{-1}$$

Dann besteht die Liealgebra  $K$  aus Matrizen der Gestalt

$$i \cdot \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}, \quad S \in M(2, \mathbb{C}), \quad S^* = -S, \quad \text{Spur } S = s,$$

wobei hier  $S^*$  die konjugiert-transponierte Matrix bezeichnet.

Außerdem gilt

$$\underline{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x^* & 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

(Dabei fassen wir Vektoren in  $\mathbb{K}^n$  stets als Spalten auf.) Der Raum  $G/K = \mathbb{C}P^2$  ist symmetrisch vom Rang 1. Wir haben

$$\left[ \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & x \\ -x^* & 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & y \\ -y^* & 0 \end{bmatrix}$$

mit  $y := Sx + sx$ ; dieser Kommutator verschwindet also genau

dann, wenn es ein  $A \in U(2)$  gibt mit

$$x = A e_2, \quad s = A \begin{bmatrix} 2s & 0 \\ 0 & -s \end{bmatrix} A^{-1},$$

denn der zweite Eigenwert ergibt sich aus  $\text{Spur } S = s$ . Wir setzen

$$Y_3 = i \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}, \quad Y_1 = i \begin{bmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten für die Metrik 23(1) auf  $G = SU(3)$  aus Kor. 232:

Lemma 241: Ist  $E$  ein 2-dimensionaler Unterraum von  $\underline{G}$  mit  $K(E) = 0$ , so gilt  $Y_3 \in E$  oder  $\text{Ad}(k)Y_1 \in E$  für ein  $k \in K$ .

Beweis: Ist  $E \subset \underline{K}$ , so enthält  $E$  das Zentrum von  $\underline{K}$ , das von  $Y_3$  erzeugt wird. Ist  $E \not\subset \underline{K}$ , so ist  $E = \text{Span} \{X, Y\}$  mit  $Y \in \underline{K}$  und  $X_p \neq 0$  und  $[Y, X_p] = 0$ . Die letztere Gleichung bedeutet nach den voranstehenden Bemerkungen, wenn wir  $s$  zu 1 normieren:  $Y = k Y_1 k^{-1}$  für ein  $k \in K$ .

242.  $G = Sp(2)$ ,  $K = Sp(1) \times Sp(1)$ .

In diesem Fall ist  $G/K = \mathbb{H}P^1 = S^4$ , also ein symmetrischer Raum vom Rang 1. Wir haben

$$\underline{K} = \left\{ \begin{bmatrix} u & \\ & v \end{bmatrix}; u, v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\},$$

$$\underline{P} = \left\{ \begin{bmatrix} & x \\ -\bar{x} & \end{bmatrix}; x \in \mathbb{H} \right\}$$

und es gilt:

$$\left[ \begin{bmatrix} u & \\ & v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & x \\ -\bar{x} & \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} & y \\ -\bar{y} & \end{bmatrix}$$

mit  $y = ux - xv$ . Der Kommutator verschwindet also genau dann, wenn  $u = xv x^{-1}$  (vorausgesetzt  $x \neq 0$ ). Für die Metrik 23(1)

(24)

gilt dann mit Korollar 232:

Lemma 242: Ist  $E \subset \underline{G}$  eine Ebene mit  $K(E) = 0$ , so enthält  $E$  entweder die Matrizen

$$X = \begin{bmatrix} u & \\ & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & \\ & v \end{bmatrix}$$

mit  $u, v \in \text{Im}(\mathbb{H})$  oder die Matrizen

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x \\ -\bar{x} & tv \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} xv x^{-1} & \\ & v \end{bmatrix}$$

mit  $x \in \mathbb{H}$ ,  $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

## 25. Kompakte Liegruppen

Wir erinnern jetzt an einige wohlbekanntere Tatsachen über eine kompakte Liegruppe  $G$ , von denen wir wiederholt Gebrauch machen werden (vgl. etwa [1, 17, 18]). Jede maximale zusammenhängende, abelsche Untergruppe  $T$  von  $G$  ist abgeschlossen, also ein Torus, genannt maximaler Torus von  $G$ . Jedes Element von  $G$  liegt in einem maximalen Torus, und je zwei maximale Tori sind zueinander konjugiert. Die Dimension des maximalen Torus heißt der Rang der Gruppe  $G$ . Ist  $G$  zusammenhängend, so ist das Zentrum von  $G$  der Durchschnitt aller maximalen Tori.

Jede reelle Darstellung eines Torus zerfällt in 2-dimensionale irreduzible Darstellungen; dies gilt insbesondere für die adjungierte Darstellung von  $T$  auf  $\underline{G}$ . Also zerfällt  $\underline{G}$  in die Liealgebra  $\underline{T}$  von  $T$  und eine Summe von 2-dimensionalen Darstellungsmoduln von  $T$ , genannt Wurzelräume. Das Differential der Darstellung von  $T$  auf einem Wurzelraum  $E$  sieht so aus:

Es gibt eine Linearform  $r : \underline{T} \rightarrow \mathbb{R}$  und linear unabhängige Vektoren  $X, Y \in E$ , so daß für alle  $D \in \underline{T}$  gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} [D, X] &= -r(D) Y \\ [D, Y] &= r(D) X \end{aligned}$$

Geht man zur komplexifizierten Liealgebra  $\underline{G}_{\mathbb{C}} := \underline{G} \otimes \mathbb{C}$  über und setzt  $Z := X + i Y$ ,  $\bar{Z} = X - i Y$ , so ist (1) zu

$$(1)_{\mathbb{C}} \quad \begin{aligned} [D, Z] &= i r(D) Z \\ [D, \bar{Z}] &= -i r(D) \bar{Z} \end{aligned}$$

äquivalent. Wir setzen  $E =: E(r)$ . Die dabei auftretenden Linearformen, d.h. diejenigen  $r \in \underline{T}^*$ , für die linear unabhängige  $X, Y$  existieren, so daß (1) gilt, heißen Wurzeln. Mit  $r$  ist auch  $-r$  Wurzel, und es gilt  $E(r) = E(-r)$ .

Wir wählen nun ein  $\text{Ad}(G)$ -invariantes Skalarprodukt  $(, )$  auf  $\underline{G}$  und identifizieren damit  $\underline{T}$  und  $\underline{T}^*$ . Dann gilt außerdem

$$(2) \quad X \perp Y, \quad (X, X) = (Y, Y),$$

$$(3) \quad [X, Y] = - (X, X) r,$$

$$(3)_{\mathbb{C}} \quad [Z, \bar{Z}] = 2i (X, X) r.$$

Gilt zusätzlich  $(X, X) = 1$ , so nennen wir  $\{X, Y\}$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $E(r)$ .

Sind  $r, s$  Wurzeln, so gilt

$$(4) \quad [E(r), E(s)] \subset E(r+s) + E(r-s)$$

wobei wir  $E(t) = 0$  zu setzen haben, falls  $t \in \underline{T}$  keine Wurzel ist. Die Menge  $R \subset \underline{T}$  aller Wurzeln von  $G$  heißt das Wurzelsystem von  $G$ . Wurzelsysteme lassen sich axiomatisch kennzeichnen und klassifizieren. Jedes Wurzelsystem zerfällt in zueinander orthogonale einfache Teil-Wurzelsysteme. Dies sind die bekannten Wurzelsysteme  $A_n, B_n, C_n, D_n$  der klassischen Gruppen  $SU(n+1)$ ,

(25)

$SO(2n+1)$ ,  $Sp(n)$ ,  $SO(2n)$  sowie die Ausnahmetypen  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ ,  $G_2$  (vgl. [5]). Entsprechend zerfällt die Liealgebra  $G$  in eine orthogonale direkte Summe

$$\underline{G} = \underline{Z} \oplus \sum_{i=1}^l \underline{G}_i$$

wobei  $\underline{Z}$  das Zentrum und  $\underline{G}_i$  einfache Algebren sind, und eine analoge Zerlegung gibt es für eine endliche Überlagerung  $\hat{G}$  von  $G$ .



### Kapitel 3

#### Doppelquotienten kompakter Liegruppen

##### 31. Doppelquotienten

Wir betrachten wieder eine Liegruppe  $G$  mit linksinvarianter Metrik;  $K$  sei die zugehörige Invarianzgruppe. Diese enthält insbesondere das Zentrum  $Z$  von  $G$ . Das Produkt  $G \times K$  operiert isometrisch auf  $G$  durch

$$(g;k)x := g \cdot x \cdot k^{-1} \quad ,$$

und der Kern dieser Operation ist die Diagonal-Einbettung des Zentrums  $\Delta Z := \{(z;z) ; z \in Z\}$ . Die Gruppe  $I'(G) := (G \times K)/\Delta Z$  ist also eine Untergruppe der Isometriegruppe  $I(G)$  von  $G$ . Es ist bekannt, daß  $I'(G)$  die Zusammenhangskomponente von  $I(G)$  ist, falls  $G$  zusammenhängend und einfach ist [22].

Nun sei  $\bar{U}$  eine Untergruppe von  $I'(G)$  und  $U$  ihr Urbild in  $G \times K$ . Die Projektionen von  $U$  auf den linken bzw. rechten Faktor ( $G$  bzw.  $K$ ) bezeichnen wir mit  $U_l$  bzw.  $U_r$ . Wir fordern, daß  $U$  fixpunktfrei auf  $G$  operiert: Ist  $u \in G$  und  $u(g) := u_l g u_r^{-1} = g$  für ein  $g \in G$ , sind also  $u_l$  und  $u_r$  in  $G$  zueinander konjugiert, so gilt  $u_l = u_r \in Z$ . Der Orbitraum  $M = G/U$  trägt in diesem Fall eine natürliche Riemannsche Struktur und die Projektion  $\pi: G \rightarrow M$  ist eine Riemannsche Submersion (vgl. Kap. 1). Einen solchen Orbitraum hatten wir Doppelquotient von  $G$  genannt.

Wir bestimmen zunächst die vertikale Distribution auf  $G$ ; diese ist unabhängig von der Wahl der linksinvarianten Metrik.

(31)

Die Faser durch einen festen Punkt  $g \in G$  ist  $F_g := \{ u_l g u_r^{-1} ; (u_l; u_r) \in U \}$ . Ist  $u(t) := \exp tX$  mit  $X = (X_l; X_r) \in \underline{U}$ , so ist  $u_l(t) g u_r(t)^{-1}$  eine Kurve in  $F_g$  und

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 u_l(t) g u_r(t)^{-1} = dR(g)X_l - dL(g)X_r =: v_g(X)$$

ein typischer vertikaler Vektor. Das so definierte Vektorfeld  $v(X)$  auf  $G$  ist das zu  $X$  gehörige Killing-Vektorfeld. Wir verschieben den Vertikalraum  $V_g = v_g(\underline{U})$  nach  $e$  durch Linkstranslation und erhalten

$$\underline{V}_g := dL(g)^{-1}V_g = \underline{v}_g(\underline{U})$$

mit

$$\underline{v}_g(X) := dL(g)^{-1}v_g(X) = \text{Ad}(g)^{-1}X_l - X_r.$$

Entsprechend setzen wir

$$\underline{H}_g := dL(g)^{-1}H_g = \underline{V}_g^\perp.$$

Die Schar  $\{\underline{V}_g ; g \in G\}$  ist eine Familie von Unterräumen von  $\underline{G}$ , die natürlich i.a. keine Liealgebren sind. Da die Linkstranslationen Isometrien sind, spielt der Übergang von  $V_g$  und  $H_g$  zu  $\underline{V}_g$  und  $\underline{H}_g$  keine Rolle.

Die Gruppe  $U$  dürfen wir in der linken Komponente um einen inneren Automorphismus abändern: Ist  $g \in G$  und  $u = (u_l; u_r) \in U$ , so setzen wir  $u^g := (gu_l g^{-1}; u_r)$ . Auch die Gruppe  $U^g$  operiert fixpunktfrei und isometrisch auf  $G$ , und die Linkstranslation  $L(g) : G \rightarrow G$  ist eine Isometrie mit  $u^g \circ L(g) = L(g) \circ u$  und induziert daher eine Isometrie der Orbiträume  $G/U$  und  $G/U^g$ . Eine entsprechende Abänderung in der rechten Komponente,  $u \rightarrow (u_l; gu_r g^{-1})$ , ergibt eine unter  $R(g)$  äquivalente Operation; der zugehörige Orbitraum ist also

diffeomorph zu  $G/U$  und sogar isometrisch, falls  $g \in K$ .

Eine ähnliche Situation ergibt sich beim Übergang von  $U$  zu  $U^{\circ} := \{ (u_r; u_l) ; (u_l; u_r) \in U \}$ . Die Operationen von  $U$  und  $U^{\circ}$  sind äquivariant unter dem Diffeomorphismus  $\tau : G \rightarrow G$ ,  $\tau(g) := g^{-1}$ , aber dieser ist nur dann eine Isometrie, wenn die Metrik auf  $G$  biinvariant ist. Im allgemeinen sind  $G/U$  und  $G/U^{\circ}$  also diffeomorph, aber nicht isometrisch.

Über die Isometriegruppe von  $G/U$  kann allgemein nicht viel gesagt werden. Ein Element  $f$  der Isometriegruppe  $I(G)$  induziert genau dann eine Isometrie von  $G/U$ , wenn  $f \bar{U} f^{-1} = \bar{U}$ . Die Isometriegruppe von  $G/U$  enthält also die Gruppe  $N_{I(G)}(\bar{U}) / \bar{U}$ , kann aber wesentlich größer sein, wie das Beispiel Nr.2 in Tabelle 101 zeigen wird.

### 32. Krümmung

Die Krümmung des Doppelquotienten  $M = G/U$  ergibt sich aus der O'Neill-Formel (§ 11): Es seien  $a, b \in \underline{G}$  linksinvariante orthonormale Vektorfelder senkrecht zu  $\underline{V}_g$  für einen festen Punkt  $g \in G$ , also  $a(g), b(g) \in H_g$ . Weiterhin seien  $A, B$  horizontale Vektorfelder auf  $G$  mit  $A(g) = a(g)$ ,  $B(g) = b(g)$ . Für die Krümmung von  $M$  gilt nun

$$(1) \quad K_M(d\pi_g(a), d\pi_g(b)) = K_G(a, b) + \frac{3}{4} \|[A, B]_{\underline{V}}(g)\|^2 .$$

Die Krümmung  $K_G(a, b)$  von  $G$  wurde in § 21 behandelt; hier interessiert uns der Krümmungs-erhöhende Zusatzterm

$$(2) \quad z(a, b; g) := \|[A, B]_{\underline{V}}(g)\|^2 .$$

Zur Berechnung folgen wir einer Idee in [14]. Für beliebiges

(32)

$C \in T_g G$  ist

$$\|C_v\|^2 = \max \{ \langle dL(g)v_g(X), C \rangle^2 \|v_g(X)\|^{-2} ; X \in \underline{U} \}$$

Für festes  $X \in \underline{U}$  definieren wir die Linearform  $w = w_X$  auf  $G$ , die zu dem Killingfeld  $v(X)$  dual ist (vgl. § 31):

$$w_X(C) = \langle v(X), C \rangle$$

Damit haben wir

$$(3) \quad z(a,b;g) = \max \{ w_X([A,B])^2(g) \|v_g(X)\|^{-2} ; X \in \underline{U} \}$$

Nun ist  $dw(A,B) = Aw(B) - Bw(A) - w([A,B]) = -w([A,B])$ , da  $w$  auf horizontalen Feldern verschwindet. Also haben wir

$$w([A,B]) = -dw(a,b) = -a w(b) + b w(a) + w([a,b])$$

an der Stelle  $g$ . Dabei ist

$$\begin{aligned} w(b)|_g &= \langle \text{Ad}(g)^{-1}X_1 - X_r, b \rangle \\ &= \langle X_1, \text{Ad}^*(g)b \rangle - \langle X_r, b \rangle \end{aligned}$$

wobei  $\text{Ad}^* : G \rightarrow \text{End}(\underline{g})$  die co-adjungierte Darstellung

$\text{Ad}^*(g) := \text{Ad}(g^{-1})^*$  bezeichnet. Diese hat als Differential

$d(\text{Ad}^*)_e = \text{ad}^*$  mit  $\text{ad}^*(X) := -\text{ad}(X)^*$  für  $X \in \underline{g}$ . Daher ist

$$\begin{aligned} a w(b)|_g &= a \langle X_1, \text{Ad}^*(g)b \rangle \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle X_1, \text{Ad}^*(g \exp(ta))b \rangle \\ &= \langle X_1, \text{Ad}^*(g) \text{ad}^*(a)b \rangle \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich

$$(4) \quad \begin{aligned} w_X([A,B])|_g &= \langle \text{Ad}(g)^{-1}X_1, \text{ad}(a)^*b - \text{ad}(b)^*a - [a,b] \rangle \\ &\quad - \langle X_r, [a,b] \rangle \end{aligned}$$

und mit 21(5):

$$(4)' \quad \begin{aligned} w_X([A,B])|_g &= - \langle \text{Ad}(g)^{-1}X_1, 2P(a,b) + [a,b] \rangle \\ &\quad - \langle X_r, [a,b] \rangle \end{aligned}$$

Aus (3) und (4) läßt sich der Zusatzterm  $z$  bestimmen.

(32)

Im homogenen Fall  $U = U_r$  entnehmen wir daraus  $z(a,b;g) = \|[a,b]_{\underline{u}}\|^2$ , wobei der Index  $u$  die Projektion auf  $\underline{U}$  bezeichnet. Dies folgt auch unmittelbar aus der O'Neill-Formel, weil im homogenen Fall die linksinvarianten Vektorfelder senkrecht zu  $\underline{U}$  überall horizontal sind.

Im Falle der Metriken 23(1) ergibt sich aus 23(3) und Satz 231, daß  $z(a,b;g) = 0$  falls  $K_G(a,b) = 0$ , denn in diesem Fall ist  $[a,b] = [a_k, b_k] = [a_p, b_p] = 0$  und damit auch  $P(a,b) = 0$ . Die Ebenen mit Krümmung Null in  $G/U$  sind also genau die Bilder der horizontalen Ebenen mit Krümmung Null in  $G$ .

Im allgemeinen Fall liefern die Krümmungsformeln hier und in § 21 drei nützliche hinreichende Kriterien für die Existenz von Nullkrümmung auf  $G/U$ :

- (N<sub>1</sub>) Es gibt eine metrisch invariante abelsche Teilalgebra  $N$  von  $\underline{G}$  mit  $\dim(N \cap \underline{H}_g) \geq 2$  für ein  $g \in G$ .
- (N<sub>2</sub>) Es gibt zwei metrisch invariante Teilräume  $W_1$  und  $W_2$  von  $\underline{G}$  mit  $[W_1, W_2] = 0$ , und für ein  $g \in G$  gibt es linear unabhängige Vektoren  $X \in W_1 \cap \underline{H}_g$ ,  $Y \in W_2 \cap \underline{H}_g$  und  $[Y, \theta(Y)] \in W_2$ .
- (N<sub>3</sub>) Es gibt eine rechts-isometrische Untergruppe  $K$  von  $G$  und einen  $\text{Ad}(K)$ -invarianten Eigenraum  $V$  des metrischen Tensors  $\theta$  mit  $V \perp \underline{U}_r$  und linear unabhängige Vektoren  $X \in \underline{K} \cap \underline{H}_g$  und  $Y \in V \cap \underline{H}_g$  für ein  $g \in G$ , so daß  $[\theta(X), Y] = 0$  gilt.

(32)

Satz 32: Falls  $G/U$  eine der Bedingungen  $(N_1)$ ,  $(N_2)$ ,  $(N_3)$  erfüllt, gibt es Nullkrümmung auf  $G/U$ .

Beweis: Ist  $E$  ein 2-dimensionaler Unterraum von  $N \cap \underline{H}_g$  im Fall  $(N_1)$  oder  $E = \text{Span} \{X, Y\}$  im Fall  $(N_2)$ ,  $(N_3)$ , so gilt  $K_M(d\pi_g(E)) = 0$ . Dies folgt für  $(N_1)$ ,  $(N_2)$  aus (3) und (4) und 21(3). Für  $(N_2)$  beachte man dabei, daß  $\text{ad}(X)^* X \perp \text{ad}(Y)^*$ , da mit  $[Y, \theta(Y)] \in W_2$  auch  $\text{ad}(Y)^* Y \in W_2$  und also  $[X, \text{ad}(Y)^* Y] = 0$ . - Für  $(N_3)$  benutzen wir 22(2) und ersehen aus 32(3) und 32(4)', daß der Zusatzterm  $z(X, Y; g)$  in der O'Neill-Formel verschwindet, da wegen 22(4) gilt:  
 $2 P(X, Y) + [X, Y] = [\theta(X), Y] = 0$  und außerdem  $[X, Y] \in V \perp \underline{U}_r$ .

### 33. Maximale Tori und Rang-Bedingung

Von jetzt an setzen wir voraus, daß  $G$  eine kompakte Liegruppe ist. Dies ist eine Einschränkung; wir behaupten nicht, daß ein Doppelquotient  $G/U$  einer nichtkompakten Gruppe  $G$  kein  $P$ -Raum sein könne. Die Situation ist hier anders als bei homogenen Räumen mit  $U = \underline{U}_r$ ; dort ist  $G$  Isometriengruppe von  $G/U$  und damit automatisch kompakt, wenn  $G/U$  kompakt ist.

$U$  ist als abgeschlossene Untergruppe von  $G^2 := G \times G$  ebenfalls kompakt. Wir wählen einen maximalen Torus  $S$  von  $U$  und erweitern ihn zu einem maximalen Torus  $T \times T'$  von  $G^2$ . Da  $T$  und  $T'$  beide maximale Tori in  $G$  sind, gibt es ein  $g \in G$  mit  $T = g T' g^{-1}$ . Dann hat  $U^g$  einen maximalen Torus  $S^g \subset T^2$ ,

und  $G/U^g$  ist isometrisch zu  $G/U$  (vgl. § 31). Also dürfen wir gleich  $S \subset T^2$  annehmen. Ist  $\bar{S} := S/(U \cap \Delta Z)$  der zugehörige maximale Torus von  $\bar{U}$ , so gilt

$$\dim \bar{S} = \dim S - \dim (U \cap \Delta Z) \leq \dim T ,$$

denn wegen der Fixpunktfreiheit gilt  $S \cap \Delta T \subset \Delta Z$ . Also ist

$$\text{rg } \bar{U} \leq \text{rg } G .$$

Eine Abschätzung der Ränge in der anderen Richtung im Fall positiver Krümmung liefert der untenstehende Satz unter der folgenden Bedingung (T) an die Invarianzgruppe  $K$  von  $(G, <, >)$ :

(T):  $U \cap K^2$  enthält einen maximalen Torus  $S$  von  $U$ .

Satz 331: Es sei  $G$  eine kompakte Liegruppe mit linksinvarianter Metrik und  $M = G/U$  ein Doppelquotient mit Bedingung (T). Dann gibt es eine kompakte Gruppe  $H$  mit linksinvarianter Metrik und eine totalgeodätische isometrische Immersion  $f : H \rightarrow M$ , so daß  $\text{rg } H = \text{rg } G - \text{rg } \bar{U}$ .

Beweis: Wie oben können wir annehmen, daß es einen maximalen Torus  $T'$  von  $K$  gibt mit  $S \subset T'^2$ . Wir erweitern  $T'$  zu einem maximalen Torus  $T$  von  $G$ . Es sei  $C = C_G(T')$ , der Centralisator von  $T'$  in  $G$ . Da  $T \subset C$ , ist  $\text{rg } C = \text{rg } G$ . Da die inneren Automorphismen  $\text{Ad}(t)$  mit  $\text{Ad}(t)g = tgt^{-1}$  für alle  $t \in T' \subset K$  Isometrien von  $G$  sind, ist  $C$  als Fixpunktmenge dieser Gruppe von Isometrien totalgeodätisch in  $G$ . Die Gruppe  $S \subset T'^2$  läßt  $C$  invariant, und  $C/S$  ist der homogene Raum  $H = C/S'$  mit  $S' = Se = \{s_1 s_r^{-1} ; s \in S\}$ . Dieser ist sogar selbst wieder eine kompakte Liegruppe, da

(33)

$S'$  im Zentrum von  $C$  liegt, und wegen der Fixpunktfreiheit ist  $\dim S' = \dim \bar{S} = \text{rg } \bar{U}$ , also  $\text{rg}(H) = \text{rg}(G) - \text{rg}(\bar{U})$ .

Die Inklusion  $f : C \rightarrow G$  induziert eine Abbildung  $\bar{f} : C/S \rightarrow G/U$ . Nach Satz 11 ist dies eine totalgeodätische Immersion, falls  $f$  die horizontalen Distributionen ineinander abbildet. Dazu ist zu zeigen:  $\underline{C} \perp \underline{V}_C$  für alle  $c \in C$ . Es gilt  $\underline{U} = \underline{S} \oplus \sum E^U(r)$ , wobei über alle Wurzeln  $r$  des Wurzelsystems von  $U$  zu summieren ist. Ist  $X \in \underline{S}$ , so ist  $\underline{v}_C(X) = X_1 - X_r \in \underline{S}'$ . Es sei also  $X \in E^U(r)$  für eine Wurzel  $r$  von  $U$  (vgl. § 25). Dann gibt es  $Y \in E^U(r)$ , so daß 25(1) erfüllt ist. Wir wählen ein Element  $D = (D_1; D_r) \in \underline{S}$  mit  $r(D) = 1$ . Dann gilt  $X_r = \text{ad}(D_r)Y_r$ , also  $X_r \in \text{Bild } \text{ad}(D_r)$ . Andererseits ist  $\underline{C} \subset \ker \text{ad}(D_r)$ , und da  $\text{ad}(D_r)$  schiefssymmetrisch ist (wegen  $D_r \in \underline{K}$ ), gilt  $X_r \perp \underline{C}$ . Weiterhin gilt für  $Z \in \underline{C}$  und  $c \in C$ :

$$\begin{aligned} \langle Z, \text{Ad}(c)X_1 \rangle &= \langle Z, \text{Ad}(c)[D_1, Y_1] \rangle = \langle Z, [D_1, \text{Ad}(c)Y_1] \rangle \\ &= \langle [Z, D_1], \text{Ad}(c)Y_1 \rangle = 0, \end{aligned}$$

da  $D_1 \in \underline{T}'$  mit  $\underline{C}$  vertauscht. Also gilt  $\underline{C} \perp \underline{v}_C(X)$ , und es folgt die Behauptung.

Bemerkung: Ein ähnlicher Beweis ist möglich, wenn die Bedingung (T) durch die Voraussetzung " $\underline{U}_r$  enthält einen regulären Vektor" ersetzt wird. (Ein Element  $X \in \underline{G}$  heißt regulär, wenn sein Centralisator  $C_G(X)$  ein maximaler Torus ist.) In diesem Fall würden wir  $C = C_G(S_r) = T$  setzen. Die Orthogonalitätsbedingung von Satz 11 ist erfüllt, weil die Wurzelräume von  $U$  senkrecht auf  $T^2$  stehen.



(33)

Wallach [24] hat gezeigt, daß die Gruppen  $SO(3)$  und  $S^3$  als einzige eine linksinvariante Metrik mit streng positiver Krümmung zulassen. Nur wenn die Zusammenhangskomponente von  $H$  eine der Gruppen  $\{e\}$ ,  $S^1$ ,  $SO(3)$  oder  $S^3$  ist, kann also  $G/U$  unter den Voraussetzungen von Satz 331 positive Krümmung haben. Da die Wurzelräume alle 2-dimensional sind, ergibt sich insbesondere:

Korollar 332: Ist  $M = G/U$  ein Doppelquotient mit positiver Krümmung und Bedingung (T), so gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(U) &= 0 && \text{falls } \dim M \text{ gerade,} \\ \operatorname{rg}(G) - \operatorname{rg}(U) &= 1 && \text{falls } \dim M \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

#### 34. Torus-invariante Metriken

Ist  $G$  eine kompakte Liegruppe mit linksinvarianter Metrik und Invarianzgruppe  $K$ , so heißt die Metrik Torus-invariant, falls  $\operatorname{rg}(K) = \operatorname{rg}(G)$ , d.h. falls es einen maximalen Torus  $T$  von  $G$  in  $K$  gibt.

Ist die Metrik von  $G$  Torus-invariant, und ist  $M = G/U$  ein Doppelquotient von  $G$  mit  $U \subset G \times K$ , so gibt es zu jedem maximalen Torus  $S$  von  $U$  ein Element  $(g;k) \in G \times K$ , so daß  $\operatorname{Ad}((g;k))S \subset T^2$ , und nach § 31 sind die Operationen von  $U$  und  $\operatorname{Ad}((g;k))U$  isometrisch äquivariant. Wir dürfen also  $U$  durch die Gruppe  $\operatorname{Ad}((g;k))U$  ersetzen, für die die Bedingung (T) erfüllt ist. Im Fall  $\operatorname{rg}(U) = \operatorname{rg}(G)$  gilt auch die Umkehrung:

(34)

Lemma 341: Ist  $G/U$  ein Doppelquotient mit Bedingung (T) und ist  $\text{rg}(U) = \text{rg}(G)$ , so ist die Metrik von  $G$  Torus-invariant.

Beweis: Es sei  $T'$  ein maximaler Torus der Invarianzgruppe  $K$  und  $S$  ein maximaler Torus von  $U$  mit  $S \subset K^2$  (Bedingung (T)). Wie früher können wir  $S \subset T'^2$  annehmen. Da  $S \cap \Delta T \subset \Delta Z$  und  $\dim \bar{S} = \text{rg}(G)$ , folgt  $\dim(T') \geq \text{rg}(G)$ , also ist  $T'$  maximaler Torus von  $G$ .

Bemerkung: Die gleiche Folgerung gilt auch für  $\text{rg}(G) = 2$ ,  $\text{rg}(U) = 1$ , falls  $\underline{S}$  einen Vektor  $X = (X_1; X_r)$  mit linear unabhängigen Komponenten  $X_1, X_r$  enthält (vgl. Theorem B.).

Ist eine Metrik auf  $G$  Torus-invariant, so stehen die Wurzelräume als irreduzible Darstellungsmoduln von  $T$  aufeinander senkrecht und sind Eigenräume des metrischen Tensors  $\theta$ . Daraus ergibt sich die folgende Aussage:

Satz 342:  $G$  sei eine kompakte Liegruppe mit maximalem Torus  $T$  und Wurzelsystem  $R$ . Weiterhin sei  $U$  eine kompakte Untergruppe von  $G^2$  mit maximalem Torus  $S \subset T^2$ ;  $U$  operiere fixpunktfrei auf  $G$ . Es gebe Wurzeln  $r, s \in R$ ,  $r \pm s \notin R$ , und Vektoren  $X \in E(r)$ ,  $Y \in E(s)$  ungleich Null, die bezüglich einer biinvarianten Metrik senkrecht auf  $\underline{V}_g$  stehen für ein  $g \in G$ . Dann induziert jede linksinvariante Metrik auf  $G$ , deren Invarianzgruppe sowohl  $U_r$  als auch  $T$  umfaßt, eine Metrik mit Nullkrümmungen auf  $G/U$ . Ist sogar  $g \in N_G(T)$ , so gilt dasselbe für  $U^0$ .

Beweis: Da  $X$  und  $Y$  Eigenvektoren von  $\Theta$  sind, ist  $N := \text{Span} \{X, Y\}$  metrisch invariante abelsche Teilalgebra (vgl. § 25) und außerdem senkrecht zu  $\underline{V}_g$  für jede  $T$ -invariante linksinvariante Metrik auf  $G$ . Damit hat  $G/U$  Nullkrümmung nach dem Kriterium  $(N_1)$ . - Ist  $\underline{V}_g^0$  der Vertikalraum der Aktion von  $U^0$ , so gilt  $\underline{V}_g^0 = \text{Ad}(g)\underline{V}_g$ . Falls  $\text{Ad}(g)$  den Torus invariant läßt, falls also  $g \in N_G(T)$ , trifft dieselbe Aussage auf  $\underline{V}_g^0$  zu, denn die mit  $\text{Ad}(g)^{-1}$  zurückgeholte Metrik ist wieder  $T$ -invariant.

### 35. Überlagerungsgruppen

Wir betrachten eine Liegruppe  $G$  mit Überlagerungsgruppe  $\hat{G}$ ; die Überlagerungsabbildung sei  $p : \hat{G} \rightarrow G$ . Sind  $Z$  und  $\hat{Z}$  die Zentren von  $G$  und  $\hat{G}$ , so gilt  $\hat{Z} = p^{-1}(Z)$ . Weiterhin sei  $p^2 : \hat{G}^2 \rightarrow G^2$  die Produkt-Überlagerung. Ist  $U$  eine Untergruppe von  $G^2$ , so setzen wir  $\hat{U} := (p^2)^{-1}(U)$ .

Satz 35: Falls  $U$  auf  $G$  fixpunktfrei operiert, so operiert  $\hat{U}$  auf  $\hat{G}$  fixpunktfrei.

Beweis: Es sei  $\hat{u} \in \hat{U}$ ,  $\hat{g} \in \hat{G}$  mit  $\hat{g} = \hat{u}(\hat{g}) = \hat{u}_1 \hat{g} \hat{u}_r^{-1}$ . Dann gilt für  $u := p^2(\hat{u})$  und  $g = p(\hat{g})$ , daß  $u_1 g u_r^{-1} = g$ , also  $u_1 = u_r \in Z$  wegen der Fixpunktfreiheit von  $U$  auf  $G$ . Es folgt  $\hat{u}_1, \hat{u}_r \in \hat{Z}$  und daher  $\hat{g} = \hat{g} \hat{u}_1 \hat{u}_r^{-1}$ , also  $\hat{u}_1 \hat{u}_r^{-1} = \hat{e}$ , also  $\hat{u}_1 = \hat{u}_r \in \hat{Z}$ , was zu zeigen war.

(35)

Die Umkehrung ist i.a. nicht richtig (vgl. das Beispiel in 812): Ein  $\hat{u} \in \hat{U}$  kann eine Faser  $p^{-1}(g)$  permutieren.

Da die Abbildung  $p : \hat{G} \rightarrow G$  eine Überlagerungsabbildung der Doppelquotienten  $\bar{p} : \hat{G}/\hat{U} \rightarrow G/U$  induziert, genügt es, zur Bestimmung aller einfach zusammenhängenden Doppelquotienten eine geeignete Überlagerung von  $G$  zu betrachten. Jede kompakte Gruppe besitzt eine endliche Überlagerung, die ein Produkt aus einem Torus und einfachen Gruppen ist.

### 36. Nicht-einfache Gruppen

Jetzt sei  $G$  eine kompakte Gruppe und  $M = G/U$  ein Doppelquotient mit Bedingung (T) und  $\text{rg}(\bar{U}) = \text{rg}(G)$ . Wir nehmen an, daß  $G = G_1 \times G_2$  ein echtes Produkt ist. Nach Lemma 341 enthält die Invarianzgruppe  $K$  von  $G$  einen maximalen Torus  $T$  von  $G$ . Wir können wieder annehmen, daß es einen maximalen Torus  $S$  von  $U$  gibt mit  $S \subset T^2$ .

Lemma 361: Falls es  $X \in \underline{G}_1$  und  $Y \in \underline{G}_2$  gibt mit  $X, Y \perp \underline{V}_e$ , so erfüllt  $G/U$  die Bedingung  $(N_2)$ .

Beweis: Es sei  $T_i = T \cap G_i$  für  $i = 1, 2$ . Die Räume  $W_i := \underline{G}_i \ominus \underline{T}_i$  sind  $\text{Ad}(T)$ -invariant, also metrisch invariant, und es gilt  $[W_1, W_2] = 0$ . Ist  $Y \in W_2$ , so gilt für alle  $D \in \underline{T}$ : wegen der Schiefsymmetrie von  $\text{ad}(D)$ :  $\langle \text{ad}(Y)^* Y, D \rangle = \langle Y, [D, Y] \rangle = 0$ . Also ist  $\text{ad}(Y)^* Y \in \underline{G}_2 \ominus \underline{T} = W_2$  und damit  $[\Theta(Y), Y] \in W_2$ . Damit ist die Bedingung  $(N_2)$  erfüllt,

denn wegen der Rang-Bedingung gilt  $\underline{v}_e(\underline{S}) = \underline{T}$ , also  $\underline{T} \subset \underline{V}_e$  und damit  $X \in \underline{G}_1 \ominus \underline{T} = W_1$  und  $Y \in \underline{G}_2 \ominus \underline{T} = W_2$ .

Ist  $G/U$  also ein P-Raum, so können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $\text{pr}_2(\underline{V}_e) = \underline{G}_2$ , wobei  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  die Projektionen auf die Faktoren von  $\underline{G}$  und auch  $G$  bezeichnen.

Für  $i = 1, 2$  setzen wir  $g_i := \text{pr}_i(g)$  für  $g \in G$  und

$$U_i = \{ (u_{1i}; u_{ri}) ; u = (u_1; u_r) \in U \} .$$

$U$  operiert durch  $U_2$  auf  $G_2$ , und  $\text{pr}_2(\underline{V}_e)$  ist der Tangentialraum an den Orbit  $U_2 e$ . Da  $\text{pr}_2(\underline{V}_e) = \underline{G}_2$ , ist diese Operation transitiv. Das bedeutet, daß jeder  $U$ -Orbit in  $G$  die Untergruppe  $G_1 = G_1 \times \{e\}$  schneidet. Es sei

$$U' = \{ u \in U ; u_{12} = u_{r2} \} .$$

Ein Element  $u \in U$  ist in  $U'$  genau dann, wenn  $u(g) \in G_1 \times \{e\}$  für ein (und damit für alle)  $g \in G_1 \times \{e\}$ . Daher induziert die Einbettung  $f : G_1 \rightarrow G$  einen Diffeomorphismus  $\bar{f} : G_1/U' \rightarrow G/U$ , der aber i.a. keine Isometrie ist. Da  $U'_1$  immer noch fixpunktfrei auf  $G_1$  operiert, ist  $G_1/U' = G_1/U'_1$  ein Doppelquotient von  $G_1$ , der zu  $G/U$  diffeomorph ist. Wir haben also gezeigt:

Satz 362: Ist der Doppelquotient  $G/U$  ein P-Raum gerader Dimension mit der Bedingung (T), und ist  $G = G_1 \times G_2$ , so ist  $G/U$  diffeomorph zu einem Doppelquotienten von  $G_1$  oder  $G_2$ .

(36)

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall, daß die Metrik auf  $G = G_1 \times G_2$  eine Produktmetrik ist. In diesem Fall operiert  $U$  durch  $U_i$  auch auf den Faktoren  $G_i$  isometrisch, und es gilt:

$$G/U = G_1 \times_U (U/U') ,$$

wobei  $U'$  auf  $G_1$  fixpunktfrei operiert. Räume dieses Typs sind vor allem im Fall  $U' = \{e\}$  untersucht worden (cf [7]). Hat die Metrik auf  $G_1$  und  $G_2 = U/U'$  nicht-negative Krümmung, so wird beim Übergang von  $G_1/U'$  zu dem diffeomorphen Raum  $G/U$  Nullkrümmung abgebaut, ohne daß anderswo neue Ebenen mit Nullkrümmung auftreten. Dazu einige Beispiele:

1.  $G$  sei eine kompakte Liegruppe mit biinvarianter Metrik und  $K$  eine abgeschlossene Untergruppe.  $K$  operiere auf  $G$  durch Rechtstranslation und auf sich selbst durch Linkstranslation. Der Raum  $G \times_K K$  ist isometrisch zu  $G$  mit einer normal-homogenen,  $G \times K$ -invarianten Metrik, bei der die Längen in  $K$  gegenüber der biinvarianten Metrik um den Faktor  $1/\sqrt{2}$  verkürzt sind. Es handelt sich also bis auf den Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  um die Metrik 23(1) mit  $t = 2$ . Jede andere Verkürzung in  $K$  kann durch Wahl einer anderen biinvarianten Metrik auf dem rechten Faktor von  $G \times K$  erreicht werden.

2. Es sei  $G, K$  wie in 1. und  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $K$ . Der Raum  $G \times_K (K/H)$  ist isometrisch zu dem homogenen Raum  $G/H$ , wobei die Metrik von der in 1. beschriebenen auf  $G$  induziert wird. Alle homogenen  $P$ -Räume sind entweder normal-homogen oder von diesem Typ [2, 24] und lassen sich daher als Doppelquotienten von (eventuell

nicht-einfachen) Gruppen mit biinvarianter Metrik schreiben.

3. Die Metriken in 1. erhält man auch, indem man  $G$  und  $U := G \times K$  mit einer geeigneten biinvarianten Metrik versieht und den zu  $G$  diffeomorphen Raum  $G \times_U U$  betrachtet, wobei  $U$  auf  $G$  durch  $L(G) \cdot R(K)^{-1}$  operiert. Nun sei  $U'$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $U$ , die fixpunktfrei auf  $G$  operiert. Dann ist  $G \times_U (U/U')$  isometrisch zu einem Doppelquotienten von  $G$  mit der in 1. beschriebenen linksinvarianten Metrik. Die in den folgenden Abschnitten 41, 42 besprochenen  $P$ -Räume sind von diesem Typ.

Wir notieren also die Beobachtung: Alle bekannten  $P$ -Räume lassen sich als Doppelquotienten kompakter Liegruppen mit biinvarianter Metrik darstellen.

Das Studium von Doppelquotienten nicht-einfacher Gruppen sollte an anderer Stelle ausführlich geschehen. Wir werden uns im wesentlichen auf den Fall einfacher Gruppen beschränken.

Kapitel 4

Beispiele von Doppelquotienten

41.  $G = SU(3)$  ,  $U \cong S^1$

Beispiele dieses Typs wurden schon in [12] untersucht. Da  $U$  als abelsch vorausgesetzt wird, können wir ohne Einschränkung  $U \subset T^2$  voraussetzen, wobei  $T$  der maximale Torus der Diagonalmatrizen von  $SU(3)$  ist. Dann gilt also

$$(1) \quad U = \{ (A_t; B_t) ; t \in \mathbb{R} \} \quad ,$$

wobei

$$(2) \quad \begin{aligned} A_t &= \exp 2\pi i t \begin{Bmatrix} a_1 & & \\ & a_2 & \\ & & a_3 \end{Bmatrix} \\ B_t &= \exp 2\pi i t \begin{Bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

mit  $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$  und  $\sum a_i = \sum b_i =: s$ . So definiert, liegt  $U$  nur dann in  $SU(3)^2$ , wenn  $s = 0$  ist, aber die Gruppenoperation ändert sich nicht, wenn wir  $(A_t; B_t)$  durch  $(zA_t; zB_t)$  mit  $z := e^{2\pi i s/3}$  ersetzen; das letztere Paar liegt in  $SU(3)^2$ . Die so entstandene neue Gruppe wird dann durch die Zahlen  $a_i' := 3a_i - s$ ,  $b_i' := 3b_i - s$  für  $i = 1, 2, 3$  definiert. Also könnten wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $s = 0$  annehmen, müßten dabei aber in Kauf nehmen, daß die Gruppe  $U$  nicht mehr effektiv operiert.



$U$  operiert fixpunktfrei auf  $G$  genau dann, wenn die Eigenwerte von  $A_t$  und  $B_t$  nur in dem Fall bis auf Permutation übereinstimmen, daß sie alle gleich sind. Daraus ergibt sich:

Satz 411:  $U$  operiert fixpunktfrei genau dann, wenn für alle Permutationen  $\sigma \in S_3$  und für alle positiven ganzen Zahlen  $n$  gilt:  $n$  teilt  $a_i - b_{\sigma(i)}$  für jedes  $i \in \{1, 2, 3\}$  nur dann, wenn alle  $a_i$  und  $b_j$  für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  in derselben Restklasse modulo  $n$  liegen.

Dieses Kriterium ist z.B. dann erfüllt, wenn  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ; dies ist der homogene Fall. Nicht-homogene Beispiele werden in [12] angegeben (siehe auch Lemma 421).

Wir wollen jetzt untersuchen, welche dieser Räume eine Metrik positiver Krümmung haben. Zur Vereinfachung der Bezeichnung identifizieren wir die Diagonalmatrizen der Liealgebra  $\underline{U(3)}$  mit  $\mathbb{R}^3$  mit Hilfe der Abbildung

$$i \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & x_2 & \\ & & x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^t .$$

Wählen wir auf  $\underline{U(3)}$  die Spurmetrik  $(X, Y) := \text{Re Spur } XY^*$ , so ist diese Identifizierung isometrisch.

Das folgende Lemma ist wohlbekannt:

Lemma 412: Sind  $X, Y \in \underline{G}$  und  $g \in G$  so, daß die Funktion  $g' \rightarrow (\text{Ad}(g')X, Y)$  stationär ist bei  $g' = g$ , dann ist  $[\text{Ad}(g)X, Y] = 0$ .

(41)

Beweis: Für beliebiges  $Z \in \underline{G}$  ist

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\text{Ad}(g \exp tZ)X, Y) = (\text{Ad}(g)[X, Y], Y) = \\ &= ([Z, X], \text{Ad}(g)^{-1}Y) = (Z, [X, \text{Ad}(g)^{-1}Y]) , \\ \text{also } [\text{Ad}(g)X, Y] &= \text{Ad}(g)[X, \text{Ad}(g)^{-1}Y] = 0 . \end{aligned}$$

Die Extrema der Funktion  $X \rightarrow (X, Y)$ , definiert auf einem  $\text{Ad}(G)$ -Orbit, werden also auf einer (und damit auf jeder) maximal abelschen Teilalgebra angenommen, die  $Y$  enthält.

Wir nehmen jetzt  $s = 0$  an (siehe Eingangsbemerkung) und setzen  $a := (a_1, a_2, a_3)^t$ ,  $b := (b_1, b_2, b_3)^t$ . Die durch (1) und (2) definierte Gruppe heie  $U = U_{ab} \subset \text{SU}(3)^2$ . Wir setzen voraus, daß  $(a; b)$  das Kriterium von Satz 411 erfüllt, daß  $U$  also fixpunktfrei operiert.

Wir versehen  $G = \text{SU}(3)$  zunächst mit der Metrik 23(1) mit

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} A & \\ & \alpha \end{bmatrix} ; A \in \text{U}(2) , \alpha = \det A^{-1} \right\}$$

(vgl. 241). Da  $K$  den maximalen Torus  $T$  der Diagonalmatrizen von  $\text{SU}(3)$  enthält, operiert  $U$  isometrisch, und auf  $G/U$  wird eine Riemannsche Metrik nicht-negativer Krümmung induziert.

Satz 413:  $M_{ab} := G/U_{ab}$  hat positive Krümmung, falls  $b_3 < a_1, a_2, a_3 < b_1, b_2$  oder  $b_1, b_2 < a_1, a_2, a_3 < b_3$ .

Beweis: Dazu müssen wir nach 241 nur nachweisen, daß  $Y_3$  und  $\text{Ad}(k)Y_1$  niemals senkrecht auf  $\underline{V}_g$  stehen, für beliebige  $g \in G$ ,  $k \in K$ . Dabei setzen wir  $Y_i = e - 3e_i$  für  $i = 1, 2, 3$ , wobei  $e := (1, 1, 1)^t = \sum e_i$ .

Nach dem vorstehenden Lemma 412 liegt für jeden Vektor  $X \in \underline{T}$  das Skalarprodukt  $\langle \text{Ad}(g)X, Y_i \rangle$  zwischen der kleinsten und der größten der drei Zahlen  $\langle X, Y_j \rangle$  für  $j = 1, 2, 3$ ; man beachte nämlich  $\langle X, Y \rangle = (X, Y)$  für alle  $X \in \underline{G}$ ,  $Y \in \underline{K}$ . Also gilt für alle  $g \in G$  und  $i = 1, 2, 3$

$$-3 \bar{a} \leq \langle \text{Ad}(G)a, Y_i \rangle \leq -3 \underline{a}$$

mit  $\bar{a} := \max \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\underline{a} := \min \{a_1, a_2, a_3\}$ . Andererseits erhalten wir für die Diagonalelemente der Matrix  $\text{Ad}(k)Y_1$  für beliebiges  $k \in K$  die Werte

$$-2 + 3t, \quad 1 - 3t, \quad 1$$

mit  $t \in [0, 1]$ . Daher ergibt sich

$$\langle b, \text{Ad}(k)Y_1 \rangle = -3((1-t)b_1 + tb_2) \in [-3b_2, -3b_1]$$

wobei wir ohne Einschränkung  $b_1 \leq b_2$  vorausgesetzt haben.

Also erhalten wir insgesamt

$$3(b_3 - \bar{a}) \leq \langle \text{Ad}(g)^{-1}a - b, Y_3 \rangle \leq 3(b_3 - \underline{a}),$$

$$3(b_1 - \bar{a}) \leq \langle \text{Ad}(g)^{-1}a - b, \text{Ad}(k)Y_1 \rangle \leq 3(b_2 - \underline{a}).$$

Ist  $b_3 < \underline{a}$  und  $\bar{a} < b_1 \leq b_2$ , so ist das erste Skalarprodukt negativ, das zweite positiv; im Fall  $b_1 \leq b_2 < \underline{a}$  und  $\bar{a} < b_3$  ist es umgekehrt. In beiden Fällen sind  $Y_3$  und  $\text{Ad}(k)Y_1$  niemals horizontal, was zu zeigen war.

Satz 414: Auf  $G$  gibt es genau dann eine Torus-invariante Metrik, so daß  $M_{ab} = G/U_{ab}$  positive Krümmung hat, wenn

$$(*) \quad b_i \notin [\underline{a}, \bar{a}] \quad \text{für } i = 1, 2, 3,$$

wobei  $\underline{a} := \min \{a_1, a_2, a_3\}$ ,  $\bar{a} = \max \{a_1, a_2, a_3\}$ .

(41)

Beweis: Da  $\sum b_i = \sum a_i = 0$ , können nicht alle  $b_i$  auf einer Seite des Intervalls  $[\underline{a}, \bar{a}]$  liegen. Daher ergibt sich aus (\*) - eventuell nach Ummummerierung der Komponenten - die Voraussetzung von 413, und daher existiert eine Metrik positiver Krümmung von der gesuchten Art.

Ist (\*) nicht erfüllt, so können wir z.B.  $b_3 \in [\underline{a}, \bar{a}]$  annehmen. Nach Lemma 412 existiert dann ein  $g \in G$  so daß  $(\text{Ad}(g)^{-1}a, Y_3) = -3b_3 = (b, Y_3)$ , also ist  $Y := \Theta^{-1}(Y_3)$  senkrecht zu  $\underline{v}_g(a; b)$  bezüglich der vorgegebenen Metrik mit metrischem Tensor  $\Theta$ . Da die Metrik als Torus-invariant vorausgesetzt war, ist der Wurzelraum  $E(e_1 - e_2)$ , der von den Matrizen  $F_{12}$  und  $iG_{12}$  (siehe S.147) aufgespannt wird, ein Eigenraum von  $\Theta$ , und es gibt darin einen Vektor  $0 \neq X \perp \underline{v}_g$ , weil  $\underline{v}_g$  eindimensional ist. Wegen  $0 = [X, Y_3] = [X, \Theta(Y)]$  und weil  $Y \in \underline{T}$  und  $E(e_1 - e_2)$  ein  $T$ -Modul ist, ist  $K(d\pi_g(X), d\pi_g(Y)) = 0$  nach dem Kriterium  $(N_3)$ , Satz 32.

Bemerkung: Ist  $b$  ein regulärer Vektor in  $SU(3)$ , so ist die Einschränkung "Torus-invariant" in Satz 414 überflüssig.

415. Die Cohomologie-Berechnung wurde in [12] nur für effektiv operierende Gruppen  $U_{ab}$ , welche in  $SU(3)^2$  liegen, durchgeführt. Wir skizzieren hier die Verallgemeinerung für beliebige  $U_{ab}$ . Wir dürfen uns zunächst auf den Fall  $s = 0$  beschränken. Operiert  $U_{ab}$  nicht effektiv, so haben alle Differenzen  $a_i - a_j$ ,  $a_i - b_j$  einen größten gemeinsamen Teiler  $n > 1$  (vgl. 411). Ersetzen wir  $(a; b)$  durch

$$a' = \frac{1}{n}(a - a_1 e) \quad , \quad b' = \frac{1}{n}(b - a_1 e)$$

mit  $e = (1,1,1)^t$  wie vorher, so sind  $a', b'$  ganzzahlig und  $U_{a',b'}$  operiert effektiv mit  $\bar{U}_{a',b'} = \bar{U}_{a,b}$ , allerdings ist  $U_{a',b'}$  nicht mehr Untergruppe von  $SU(3)^2$ .

Wir dürfen daher voraussetzen:  $a, b \in \mathbb{Z}^3$  mit  $\sum a_i = \sum b_i$ , und es gibt keinen gemeinsamen Teiler aller Differenzen  $a_i - a_j$ ,  $a_i - b_j$  für  $1 \leq i < j \leq 3$ .

Setzen wir

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} z & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} ; z \in S^1 \right\},$$

so induziert die Inklusion  $SU(3) \rightarrow U(3)$  einen Diffeomorphismus von  $SU(3)$  auf  $U(3)/H$ . Die Operationen von  $U_{ab}$  und von  $H$  (durch Rechtstranslationen) sind vertauschbar.

Setzen wir  $U'_{ab} := U_{ab} \cdot H$ , so ist  $U'_{ab}$  eine Untergruppe von  $U(3)^2$ , die fixpunktfrei operiert, und es gilt  $M_{ab} = U(3)/U'_{ab}$ .

In dieser Darstellung können wir die Cohomologie von  $M_{ab}$  leicht nach dem Vorbild von [12] berechnen. Es ergibt sich:

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7
$H^k(M)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_r$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
Erzeugende	1		$w$		$w^2$	$z$		$wz$

mit den Relationen

$$rw^2 = 0, \quad w^3 = 0, \quad zw^2 = 0, \quad z^2 = 0,$$

wobei

$$\begin{aligned} (+) \quad r &:= |(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) - (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1)| \\ &= \frac{1}{2} |(\|a\|^2 - \|b\|^2)|. \end{aligned}$$

In [12] wurde schon bemerkt, daß im homogenen Fall  $a = 0$ ,  $\sum b_i = 0$  die zugehörige Zahl  $r_h = -(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) =$

(41)

$b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2$  einer Reihe von Einschränkungen unterliegt. So ist  $r_h$  nicht in der Restklasse von 0 modulo 2, 2 modulo 3, 0 und 4 modulo 5, 2 und 4 modulo 7 usw. Wann immer eine Zahl  $r$  von der obigen Form (+) eine dieser Bedingungen verletzt, ist der zugehörige Raum  $M_{ab}$  zu keinem Riemannschen homogenen Raum homotop (vgl. [12]).

42.  $G = SU(3)$  ,  $U \cong S^1 \times S^1$

Wir betrachten folgende Untergruppe von  $U(3)^2$  :

$$U = \{ (A_{st}; B_{st}) ; s, t \in \mathbb{R} \}$$

mit

$$A_{st} = \exp 2\pi i \begin{pmatrix} -s & & \\ & s+t & \\ & & t \end{pmatrix} ,$$

$$B_{st} = \exp 2\pi i \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2t \end{pmatrix} .$$

Da  $\det A_{st} = e^{4\pi i t} = \det B_{st}$  , können wir beide Matrizen mit  $e^{-4\pi i t/3}$  multiplizieren, ohne die Operation zu verändern, und erhalten Matrizen in  $SU(3)$ . Die Operation ist fixpunktfrei, denn  $A_{st}$  und  $B_{st}$  sind nur dann konjugiert zueinander, wenn zwei Eigenwerte von  $A_{st}$  gleich 1 sind, wenn also  $s$  und  $t$  ganzzahlig sind. Aber dann ist schon  $A_{st} = B_{st} = I$  .

Die zugehörige Liealgebra  $\underline{U}$  wird aufgespannt durch

$$V = ((0, 1, 1)^t; (0, 0, 2)^t) , \quad W = ((-1, 1, 0)^t; 0)$$

wobei wir die Diagonalmatrizen in  $\underline{U(3)}$  wie in 41 mit  $\mathbb{R}^3$  identifiziert haben. Ersetzen wir  $V$  durch

$$V' = 3 \cdot V - 2 \cdot (e; e) = ((-2, 1, 1)^t; (-2, -2, 4)^t) ,$$

so erhalten wir die gleich operierende Gruppe  $U' \subset SU(3)^2$  .

Jede abgeschlossene Untergruppe von  $U$  mit Dimension 1 hat als infinitesimalen Erzeuger ein Element der Form

$$(a;b) := kV + lW$$

mit ganzen Zahlen  $k$  und  $l$  und  $k \geq 0$ . Die zugehörige Gruppe operiert immer noch fixpunktfrei; wir wollen sie  $U_{kl}$  nennen.

Wir versehen  $G = SU(3)$  wieder mit der Metrik von 241, die auch in Satz 413 benutzt wurde; die Gruppe  $U$  und alle Untergruppen operieren isometrisch bezüglich dieser Metrik.

Lemma 421:  $G/U_{kl}$  hat genau dann positive Krümmung, wenn  
-  $3k < l < 0$

Beweis: Es gilt  $a = (-2k-1, k+1, k)^t$ ,  $b = (-2k, -2k, 4k)^t$ .  
Nach Satz 413 hat  $G/U_{kl} = G/U_{ab}$  dann positive Krümmung, wenn  $-2k < a_i < 4k$  für  $i = 1, 2, 3$ , woraus sich die Behauptung ergibt.

Da die natürliche Projektion  $G/U_{kl} \rightarrow G/U$  eine Riemannsche Submersion ist, erhalten wir als Folgerung aus der O'Neill-Formel

Satz 422  $M_6 := SU(3)/U$  hat positive Krümmung.

Bemerkung: Keine Torus-invariante linksinvariante Metrik auf  $G$  induziert eine Metrik positiver Krümmung auf  $SU(3)/U^0$ . Dies folgt aus dem Beweis von Satz 414.

(42)

423. Der Cohomologiering von  $M_6$  :  
 Zur Berechnung der Cohomologie ist es wieder bequem, die Operation einer Erweiterung von  $U$  auf  $U(3)$  zu betrachten. Wir setzen also

$$U' = \{ (A_{stu}; B_{st}) ; s, t, u \in \mathbb{R} \}$$

mit

$$A_{stu} := \exp 2\pi i \begin{pmatrix} u-s & & \\ & s+t & \\ & & t \end{pmatrix} .$$

Wie in 415 erhalten wir  $U(3)/U' \cong SU(3)/U = M_6$ , und für die erweiterte Gruppe gilt  $U' = \bar{U}'$ , d.h. die Gruppe operiert effektiv.

Für jeden Torus  $A = \underline{A}/L$  mit Einheitsgitter  $L = \exp^{-1}(e)$  können wir die erste Homologiegruppe  $H_1(A) = H_1(A; \mathbb{Z})$  mit dem Gitter  $L$  und die erste Cohomologiegruppe  $H^1(A)$  mit seinem Dual  $L^*$  identifizieren. Mit  $S(H^1(A))$  bezeichnen wir die Algebra der symmetrischen Tensoren (Polynom-Algebra) über  $H^1(A)$ . Ist  $B$  ein zweiter Torus, so induziert jede lineare Abbildung  $f: H^1(A) \rightarrow H^1(B)$  einen Homomorphismus  $f: S(H^1(A)) \rightarrow S(H^1(B))$ . Ist insbesondere  $A$  der maximale Torus einer kompakten Liegruppe, so operiert die Weylgruppe  $W$  (vgl. § 51) auf  $H^1(A)$  und damit auf  $S(H^1(A))$ . Die Fixmenge dieser Operation heiÙe  $S^W(H^1(A))$ .

Es sei  $\rho: U' \rightarrow T^2$  die Inklusion, wobei  $T$  der maximale Torus von  $U(3)$  ist. Diese induziert eine Abbildung  $\rho^*: H^1(T^2) \rightarrow H^1(U')$ . Wir definieren die Abbildung  $\delta: H^1(T) \rightarrow H^1(T) \oplus H^1(T) = H^1(T^2)$ ,  $\delta(x) = (x; -x)$ . Dann erhalten wir mit der in [12] benutzten Spektralsequenz für den Cohomologiering von  $M_6$  :



$$H^*(M_6) = S(H^1(U')) / \rho^* \delta S^W(H^1(T)) ,$$

wobei  $W = S_3$  die Weylgruppe von  $U(3)$  ist.

Wählen wir  $\{V, W, (e_1; 0)\}$  als Basis von  $L_{U'} = H_1(U')$  und für  $H^1(U')$  die dazu duale Basis  $\{x, y, z\}$ , so ergibt sich für die nicht-verschwindenden Cohomologiegruppen:

k	0	2	4	6
$H^k(M_6)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}$
Basis	1	$x, y$	$x^2, y^2$	$x^2 y$

mit den Relationen

$$z = 0 , \quad y^2 + xy - x^2 = 0 , \quad x^2 y + xy^2 = 0 .$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit dem Cohomologiering der Fahnenmannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^2$ , nämlich  $V_6 = U(3)/T$  (ein homogener P-Raum), so ergibt sich nur ein Unterschied: Die zweite (quadratische) Relation ist durch

$$y^2 + xy + x^2 = 0$$

zu ersetzen. Die quadratischen Formen  $y^2 + xy + x^2$  und  $y^2 + xy - x^2$  sind schon über  $\mathbb{R}$  (erst recht über  $\mathbb{Z}$ ) inäquivalent: die erste ist positiv definit, die zweite indefinit. Daher kann es keinen Isomorphismus zwischen den  $\mathbb{R}$ -Algebren  $H(V_6; \mathbb{R})$  und  $H(M_6; \mathbb{R})$  geben. Da  $V_6$  der einzige 6-dimensionale homogene P-Raum ist, gilt

Satz 423:  $M_6$  ist zu keinem homogenen P-Raum homotop.

Bemerkung: Wir können  $U$  zu einer immer noch fixpunktfreien Gruppe  $\hat{U}$  erweitern mit  $SU(3)/\hat{U} \cong \mathbb{C}P^2$  (vgl. Tabelle 101, Nr.2). Daher ist  $M_6$  wie  $V_6$  ein  $S^2$ -Bündel über  $\mathbb{C}P^2$ .

(43)

43.  $G = Sp(2)$ ,  $U \cong Sp(1)$

Wir betrachten folgende Untergruppe von  $Sp(2)^2$  :

$$U = \{ (A_q; B_q) ; q \in Sp(1) \}$$

mit

$$A_q = \begin{pmatrix} q & \\ & q \end{pmatrix} , \quad B_q = \begin{pmatrix} q & \\ & 1 \end{pmatrix} .$$

Dieses Beispiel wurde von Gromoll und Meyer [14] untersucht. Die Matrizen  $A_q$  und  $B_q$  sind offensichtlich nicht konjugiert für  $q \neq 1$ , denn  $A_q = q \cdot I$  hat keine Fixvektoren,  $B_q$  dagegen hat  $\mathbb{H} e_2$  als Fixraum. Also operiert  $U$  fixpunktfrei. Aus der Berechnung der Cohomologie analog zu [12] ist leicht zu sehen, daß der Quotient  $G/U$  den Cohomologie-Typ einer  $S^7$  hat; in [14] wird gezeigt, daß es sich um eine exotische 7-Sphäre handelt.

Satz 431: Für jede linksinvariante Metrik auf  $G$ , bezüglich derer  $U$  isometrisch operiert, gilt: Die induzierte Metrik auf  $M = G/U$  besitzt Ebenen mit Nullkrümmung.

Beweis: Die Invarianz-Untergruppe  $K$  von  $G$  muß die Gruppe  $U_r = \{ B_q ; q \in S^3 \}$  enthalten. Die Darstellung  $Ad(U_r)$  auf  $\underline{G} - \underline{U}_r$  zerfällt in den Fixraum

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & v \end{pmatrix} ; v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\}$$

und den irreduziblen Darstellungsmodul

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} & x \\ -\bar{x} & \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{H} \right\} .$$

Also ist  $\underline{G} = \underline{U}_r + V_0 + V_1$  eine direkte Summe metrisch invarianter Teilräume. Insbesondere gilt für

$$X = \begin{pmatrix} a & \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix},$$

$X \in \underline{U}_r$ ,  $Y \in V_0$ , mit beliebigen  $a, b \in \text{Im}(\mathbb{H})$ , daß  $K_G(a, b) = 0$  (Kriterium  $(N_2)$ ). Für

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$g^{-1} \begin{pmatrix} v & \\ & v \end{pmatrix} g = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v-ivi & [v, i] \\ [v, i] & v-ivi \end{pmatrix}$$

also

$$\underline{V}_g = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k & j \\ j & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wählen wir  $a = i$  und  $b$  so, daß

$$\begin{pmatrix} 0 & \\ & b \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & \\ & i \end{pmatrix}$$

bezüglich der gegebenen Metrik, so sind  $X, Y \perp \underline{V}_g$  und daher  $K_M(d\pi_g(X), d\pi_g(Y)) = 0$  nach dem Kriterium  $(N_2)$  in Satz 32.

Als nächstes wollen wir die Gruppe  $U^0 = \{(B_q; A_q) ; q \in S^3\}$  betrachten. Hier gibt es viel mehr Metriken, bezüglich derer  $U_r^0$  invariant operiert, denn die irreduziblen Darstellungsmoduln von  $U_r^0$ , die aus Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} v & \\ & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \\ & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & v \\ v & \end{pmatrix}$$

mit  $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$  bestehen, gehören zu äquivalenten Darstellungen und müssen daher nicht metrisch invariant sein.

Wir beschränken uns daher zunächst auf Metriken, die auch unter dem maximalen Torus

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix} ; a, b \in S^1 \subset \mathbb{C} \right\}$$

von  $Sp(2)$  invariant sind, also auch unter der von  $U_r^0$  und  $T$

(43)

erzeugten Gruppe

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} p & \\ & q \end{pmatrix} ; p, q \in S^3 \right\} .$$

Daher sind

$$\underline{K}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} v & \\ & 0 \end{pmatrix} ; v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\} ,$$

$$\underline{K}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ & v \end{pmatrix} ; v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\} ,$$

$$\underline{P} = \left\{ \begin{pmatrix} & x \\ -\bar{x} & \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{H} \right\}$$

Eigenräume des metrischen Tensors. Es sei  $X = X_p + X_1 + X_2$  für  $X \in \underline{G}$  die zugehörige Zerlegung. Ist also  $\langle , \rangle$  eine  $K$ -invariante Metrik auf  $\underline{G} = \underline{Sp}(2)$ , so können wir annehmen

$$\langle X, Y \rangle = t_1 \langle X_1, Y_1 \rangle + t_2 \langle X_2, Y_2 \rangle + \langle X_p, Y_p \rangle ,$$

wobei  $t_1, t_2 > 0$  und  $\langle X, Y \rangle := \text{Re Spur}(XY^*)$ . Die Metrik ist von dem in [9] diskutierten Typ.

Nach dem Kriterium  $(N_3)$  in Satz 32 gibt es Nullkrümmung auf  $G/U$ , falls es  $X \in \underline{K}$ ,  $Y \in \underline{P}$ ,  $g \in G$  gibt mit  $[\Theta(X), Y] = 0$  und  $(\Theta(X), Z) = (Y, Z) = 0$  für alle  $Z \in \underline{V}_g$ , wobei  $\Theta$  der metrische Tensor ist. Nach 242 muß gelten:

$$\Theta(X) = \begin{pmatrix} qvq^{-1} & \\ & v \end{pmatrix} , \quad Y = \begin{pmatrix} & q \\ -\bar{q} & \end{pmatrix}$$

mit  $q \in \mathbb{H}$ ,  $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$ . Ist

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2) ,$$

und setzen wir  $\hat{u} = (\hat{u}_1; \hat{u}_r)$  mit

$$\hat{u}_1 := \begin{pmatrix} u & \\ & 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{u}_r := \begin{pmatrix} u & \\ & u \end{pmatrix}$$

für  $u \in \text{Im}(\mathbb{H}) = \underline{Sp}(1)$ , so ist

$$(1) \quad \underline{v}_g(\hat{u}) = \begin{pmatrix} \bar{a}ua - u & \bar{a}ub \\ \bar{b}ua & \bar{b}ub - u \end{pmatrix} .$$

Also ist

$$\begin{aligned} (\Theta(X), \underline{v}_g(\hat{u})) &= \langle qvq^{-1}, \bar{a}ua - u \rangle + \langle v, \bar{b}ub - u \rangle \\ &= \langle aqvq^{-1}\bar{a} - qvq^{-1} + bv\bar{b} - v, u \rangle \end{aligned}$$

wobei das Skalarprodukt auf der rechten Seite der Gleichung das innere Produkt in  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  bezeichnet. Entsprechend ist

$$(Y, \underline{v}_g(\hat{u})) = 2 \langle aq\bar{b}, u \rangle .$$

Die beiden Skalarprodukte verschwinden genau dann für alle  $u \in \text{Im}(\mathbb{H})$ , wenn

$$(2) \quad aqvq^{-1}\bar{a} - qvq^{-1} + bv\bar{b} - v = 0$$

$$(3) \quad \text{Im}(aq\bar{b}) = 0$$

Aus (3) ergibt sich, daß  $r := aq\bar{b}$  mit jeder Quaternion vertauscht, also gilt  $aqvq^{-1}\bar{a} = bv\bar{b}^{-1} |a|^2$ , und damit sind

(2) und (3) äquivalent zu

$$(2)' \quad bv\bar{b}^{-1} = qvq^{-1} + v$$

$$(3)' \quad a = s b\bar{q} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} .$$

Dabei haben wir noch  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  verwendet, was wegen  $g \in \text{Sp}(2)$  gilt. Geometrisch bedeutet die Gleichung (2)', daß der Vektor  $v$  von  $\text{Ad}(b)$  um  $60^\circ$  und von  $\text{Ad}(q)$  um  $120^\circ$  in derselben Ebene gedreht wird. Eine Lösung der Gleichungen (2)' und (3)' ist z.B.

$$v = j, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/6}, \quad q = 2 b^2, \quad a = \bar{b} .$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 432: Eine  $T$ -invariante linksinvariante Metrik auf  $G$ , bezüglich derer  $U^\circ$  isometrisch operiert, induziert auf  $G/U^\circ$  stets eine Metrik mit Nullkrümmungen.

(43)

Der maximale Torus  $S_r^{\circ} = \{zI ; z \in S^1\}$  von  $U_r^{\circ} = \{qI ; q \in S^3\}$  liegt noch in weiteren maximalen Tori von  $G = Sp(2)$ . Wir werden in § 95 (S.151) sehen, daß es genügt, außer  $T$  noch den Torus  $T'$  zu betrachten, dessen Liealgebra von den Matrizen

$$\begin{bmatrix} i & \\ & i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

erzeugt wird; alle übrigen derartigen Tori erzeugen nämlich zusammen mit  $U_r^{\circ}$  Gruppen, die Untergruppen enthalten, die zu den von  $U_r^{\circ}$  und  $T$  bzw.  $T'$  erzeugten Gruppen konjugiert sind.  $U_r^{\circ}$  und  $T'$  erzeugen aber die Gruppe  $K' = U_r^{\circ} T'$ ; diese ist zu  $U(2)$  konjugiert unter dem inneren Automorphismus  $Ad(g)$  mit

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -j & k \end{bmatrix},$$

der  $U_r^{\circ}$  auf  $SU(2)$  abbildet. Das  $Ad(K')$ -invariante Komplement von  $\underline{K}'$  sei  $V$ . Dies ist ein irreduzibler  $K'$ -Modul, da  $Sp(2)/U(2)$  ein irreduzibler Symmetrischer Raum ist.  $\underline{U}_r^{\circ}$  ist ein dazu inäquivalenter irreduzibler  $K'$ -Modul. Daher sind  $V$  und  $\underline{U}_r^{\circ}$  Eigenräume jeder  $Ad(K')$ -invarianten Metrik.

Satz 433: Jede Metrik auf  $G/U^{\circ}$ , die von einer  $T'$ -invarianten linksinvarianten Metrik auf  $G$  herkommt, hat Nullkrümmung.

Beweis: Wir können für den metrischen Tensor  $\Theta$  auf  $\underline{G}$  annehmen:  $\Theta|_V = I$ ,  $\Theta|_{\underline{U}_r^{\circ}} = t I$ . Es seien  $v, w \in \text{Im}(\mathbb{H})$  mit  $v \perp w$ . Wir setzen

$$X = \begin{bmatrix} -v & \\ & v \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} v & \\ & v \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} & w \\ w & \end{bmatrix}.$$

(43)

Die Matrix  $X \in V$  kommutiert mit  $Y_1 \in \underline{U}_r^O$  und  $Y_2 \in V$ , da  $wv = -vw$ . Sind daher  $X$  und  $Y := Y_1 + Y_2$  in  $\underline{H}_g$  für ein  $g \in G$ , so gilt die Eigenschaft  $(N_2)$  mit  $W_1 = \mathbb{R}X$  und  $W_2 = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$ . Ist

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2),$$

so gilt mit (1):

$$(X, \underline{v}_g(\hat{u})) = \langle -av\bar{a} + bv\bar{b}, u \rangle,$$

$$(Y, \underline{v}_g(\hat{u})) = \langle t(av\bar{a} + bv\bar{b} - 2v) + 2aw\bar{b}, u \rangle.$$

$X$  steht also senkrecht auf  $\underline{V}_g$ , wenn  $av\bar{a} = bv\bar{b}$ , also  $|a| = |b| = 1/\sqrt{2}$  und  $[a^{-1}b, v] = 0$ . Dann ist  $Y$  senkrecht zu  $\underline{V}_g$ , wenn

$$(4) \quad bvb^{-1} - 2v + bw'b^{-1} = 0$$

mit  $w' := t b^{-1}aw$ ; wegen  $[b^{-1}a, v] = 0$  ist  $w' \perp v$ .

Gleichung (4) ist äquivalent zu

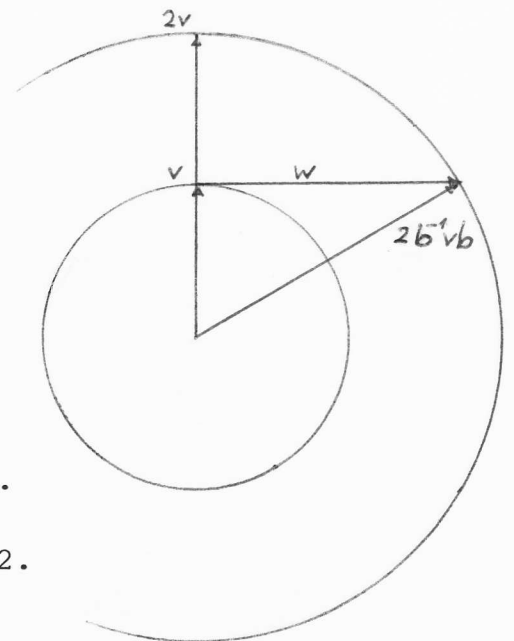
$$(4)' \quad w' = 2 b^{-1}vb - v.$$

Diese Gleichung ist lösbar für  $w' \perp v$ , falls  $Ad(b)^{-1}$  eine Drehung von  $v$  um  $60^\circ$  bewirkt. Eine Lösung ist z.B.:

$$v = j, \quad a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/6},$$

$$w' = tw = 2 b^{-1}vb - v = \frac{\sqrt{3}}{2} k.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 32.



Bemerkung: Man kann zeigen, daß es eine Metrik auf  $G$  gibt ( $U_r^O$ -invariant, aber nicht Torus-invariant), so daß die Teilmenge von  $G/U^O$ , auf der Nullkrümmungen auftreten, durch zwei Gleichungen beschrieben wird.

(44)

44.  $G = Sp(3)$  ,  $U \cong Sp(1)^3$

Wir betrachten die folgende Untergruppe von  $Sp(3)^2$  :

$$U = \{ (A_q; B_{rs}) ; q, r, s \in S^3 \}$$

mit

$$A_q = \begin{pmatrix} q & & \\ & q & \\ & & q \end{pmatrix} = q \cdot I \quad , \quad B_{rs} = \begin{pmatrix} r & & \\ & s & \\ & & 1 \end{pmatrix} .$$

$A_q$  hat keinen Fixvektor auf  $\mathbb{H}^3$  , im Gegensatz zu  $B_{rs}$  ; deshalb sind  $A_q$  und  $B_{rs}$  nicht zueinander konjugiert, und  $U$  operiert fixpunktfrei. Der Orbitraum  $M_{12} := Sp(3)/U$  ist eine 12-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der gleichen Cohomologie wie  $Sp(3)/Sp(1)^3$  , die Fahnenmannigfaltigkeit von  $\mathbb{H}P^2$  (ein homogener P-Raum); dies zeigen wir in 444. Vermutlich sind die beiden Räume aber nicht diffeomorph.

$\underline{G} = \underline{Sp}(3)$  zerfällt in fünf irreduzible Darstellungsmoduln  $V_{11}, V_{22}, V_{12}, V_{13}, V_{23}$  zu inäquivalenten Darstellungen von  $U_r$  sowie den Fixraum  $V_{33}$ . Also ist  $V_{33}$  metrisch invariant, und die Darstellungsräume sind Eigenräume jeder  $U_r$ -invarianten Metrik auf  $\underline{G}$ .

Satz 441: Für jede  $U_r$ -invariante linksinvariante Metrik auf  $G$  hat  $G/U$  Nullkrümmungen.

Beweis: Die Räume

$$V_{33} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & v \end{pmatrix} ; v \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\} ,$$

$$V_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} & & \\ -\bar{x} & x & \\ & & 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{H} \right\}$$



(44)

sind metrisch invariant, senkrecht zu  $\underline{U}_r$ , und sie kommutieren. Wir setzen

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i) = \bar{b}$$

und

$$X = \begin{pmatrix} & & 1 \\ -1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in V_{12}, \quad \Theta(Y) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & j \end{pmatrix} \in V_{33}$$

wobei  $\Theta$  der metrische Tensor ist. Zu zeigen ist  $X, Y \perp g^{-1}\underline{U}_1g$ . Dabei ist  $\underline{U}_1 = \{vI ; v \in \text{Im}(\mathbb{H})\}$ . Wir dürfen annehmen, daß die Metrik auf  $V_{12}$  mit der Spurmetrik

$$(U, V) = \text{Re Spur } UV^*$$

übereinstimmt. Für  $v = i$  ergibt sich  $(g^{-1}ig, X) = (iI, X) = 0$ , da  $g \in U(3)$  mit  $iI$  vertauscht. Für  $v \perp i$  ist  $(gvg^{-1}, X) = (vI, gXg^{-1}) = 0$ , da  $gXg^{-1} \in \underline{U}(3) \perp vI$ .

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \langle g^{-1}vg, Y \rangle &= (g^{-1}vg, \Theta(Y)) = \langle \bar{b}vb + \bar{a}va, j \rangle \\ &= \langle v, bj\bar{b} + aj\bar{a} \rangle = 0, \end{aligned}$$

da  $bj\bar{b} = -aj\bar{a}$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung: Für die Metrik 23(1) auf  $G$  mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} ; A \in \text{Sp}(2), q \in S^3 \right\}$$

läßt sich zeigen, daß die induzierte Metrik auf  $M_{12} = G/U$  strikt positive Krümmung auf einer offenen und dichten Teilmenge von  $M_{12}$  hat.

Wir betrachten als nächstes die Gruppe  $U^0 = \{(B_{rs}; A_q) ; q, r, s \in S^3\}$ . Aus ähnlichen Gründen wie in § 43 beschränken wir uns zunächst auf die Metriken, die unter  $U_r^0$  und dem maximalen Torus  $T$  der komplexen Diagonalmatrizen in  $\text{Sp}(3)$  und

(44)

damit unter der davon erzeugten Gruppe

$$K = Sp(1)^3 = \left\{ \begin{bmatrix} p & & \\ & q & \\ & & r \end{bmatrix} ; p, q, r \in S^3 = Sp(1) \right\}$$

invariant sind. Die Gruppe K operiert irreduzibel und inäquivalent auf  $V_{12}, V_{13}, V_{23}$ . Wir können wieder das Kriterium ( $N_3$ ) von Satz 32 auf  $X \in \underline{K}$ ,  $Y \in V_{23}$  anwenden. Dazu setzen wir

$$\Theta(X) = \begin{bmatrix} u & & \\ & v & \\ & & w \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & q & \\ & & -\bar{q} \end{bmatrix}$$

Es gilt  $Y \perp \underline{U}_r^0$  und  $X \perp \underline{U}_r^0$ , falls  $u + v + w = 0$ , und  $[\Theta(X), Y] = 0$  genau dann, wenn  $vq = qw$ . Ist

$$g = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so steht Y senkrecht auf  $Ad(g)^{-1} \underline{U}_1^0$ , und dasselbe gilt für X genau dann, wenn

$$a\bar{u}\bar{a} + b\bar{v}\bar{b} = cu\bar{c} + d\bar{v}\bar{d} = 0.$$

Dabei ist  $u = -(v + w) = -(v + q^{-1}vq)$ . Es ergibt sich also  $abcd \neq 0$  und

$$u = a^{-1}b\bar{v}b\bar{a}^{-1} = c^{-1}d\bar{v}\bar{d}c^{-1}.$$

Die letzte Gleichung ist wegen  $\bar{a}b = -\bar{c}d$  richtig, wenn  $|a| = |c|$ . Dann sind die Beträge von a, b, c, d alle gleich, und zu lösen ist nur noch

$$-a^{-1}b\bar{v}b^{-1}a = v + q^{-1}vq,$$

dies geschieht analog zu 43(2). Eine Lösung ist z.B.

$$q = a^{-1}b = e^{i\pi/6}, \quad v = j$$

und wir können  $a = c = 1/\sqrt{2}$ ,  $b = -d = q/\sqrt{2}$  setzen.

Wir haben damit bewiesen:

Satz 442: Jede T-invariante linksinvariante Metrik auf G, bezüglich derer  $U^O$  isometrisch operiert, induziert eine Metrik mit Nullkrümmungen auf  $G/U^O$ .

Wie in 43 gibt es noch weitere maximale Tori von G, die den maximalen Torus  $S_r^O = \{zI ; z \in S^1\}$  von  $U_r^O$  enthalten. Wieder genügt es, neben T einen weiteren Torus T' zu untersuchen, dessen Liealgebra  $\underline{T}'$  von den Matrizen

$$\begin{bmatrix} i & & \\ & i & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & i \end{bmatrix}$$

aufgespannt wird. Die von T' und  $U_r^O$  erzeugte Gruppe ist

$$K' = K_1 K_2$$

mit

$$K_1 = \left\{ \begin{bmatrix} q & & \\ & q & \\ & & r \end{bmatrix} ; q, r \in S^3 \right\},$$

$$K_2 = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; A \in SO(2) \right\}.$$

Die Gruppe K' ist konjugiert zu  $U(2) \times Sp(1)$ .

Ähnlich wie in 43 ist

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} -v & w & 0 \\ w & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; v, w \in \text{Im}(\mathbb{H}) \right\}$$

ein Eigenraum des metrischen Tensors  $\Theta$  jeder K'-invarianten Metrik; wir können also  $\Theta|_V = I$  voraussetzen. Für  $v, w \in \text{Im}(\mathbb{H})$ ,  $v \perp w$ , setzen wir

$$X = \begin{bmatrix} -v & & \\ & v & \\ & & 0 \end{bmatrix}, Y_1 = \begin{bmatrix} w & w & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \Theta(Y_2) = \begin{bmatrix} v & & \\ & v & \\ & & -2v \end{bmatrix}$$

und  $Y := Y_1 + Y_2$ . Dann gilt  $X, Y \perp U_r$  und  $[X, Y] = [\Theta(X), Y] = 0$ . Ist also  $X, Y \perp g^{-1}U_1^O g$  für ein  $g \in G$ , so erzeugen

(44)

die Projektionen von X und Y Nullkrümmung auf  $G/U^0$  (Kriterium  $(N_2)$  von Satz 32; vgl. 433). Es sei

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{pmatrix} \in Sp(3) .$$

Dann ist

$$Ad(g)^{-1} \begin{pmatrix} r & & \\ & s & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}ra + \bar{d}sd & \bar{a}rb + \bar{d}se & * \\ \bar{b}ra + \bar{a}sd & \bar{b}rb + \bar{e}se & * \\ * & * & \bar{c}rc + \bar{f}sf \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt mit X verschwindet für alle diese Matrizen, d.h. für beliebiges  $r, s \in \text{Im}(\mathbb{H})$ , falls

$$(1) \quad a\bar{a} = b\bar{b}, \quad d\bar{d} = e\bar{e} .$$

Setzen wir dies voraus, so verschwindet das Skalarprodukt mit Y, d.h. das biinvariante Skalarprodukt mit  $\theta(Y)$ , falls

$$(2) \quad c\bar{v}c - b\bar{v}b = b\bar{w}'\bar{b}, \quad f\bar{v}f - e\bar{v}e = e\bar{w}''\bar{e}$$

mit  $w' := b^{-1}aw$ ,  $w'' = e^{-1}dw$ ; wegen (1) ist  $w', w'' \perp v$ .

Eine Lösung von (1) und (2) erhalten wir z.B., wenn wir  $g \in U(3)$  wählen und  $w' = w''$  sowie  $|a| = |d|$  annehmen. Dann folgt  $\bar{a}d = \bar{b}e$ , und wegen der Orthogonalität der Zeilen von g muß dann  $\bar{c}f = -2\bar{b}e$  gelten, insbesondere  $|c|^2 = 2|b|^2 = 2|e|^2 = |f|^2$ . Damit erhalten wir aus (2)

$$(2)' \quad 2b^{-1}cvc^{-1}b - v = w', \quad 2e^{-1}fvf^{-1}e - v = w',$$

was nach dem Muster von 43 gelöst wird. Eine Lösung ist z.B.

$$v = j, \quad w = w' = \frac{\sqrt{3}}{2}k, \quad a = b = d = e = 1/2, \\ c = -f = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/6} .$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 443: Jede  $T'$ -invariante linksinvariante Metrik auf G, bezüglich derer  $U^0$  isometrisch operiert, induziert eine Metrik mit Nullkrümmungen auf  $G/U^0$ .

444. Für den Cohomologiering von  $M_{12} = G/U$  ergibt sich nach dem Vorbild von [12] (vgl. 423):

$$H(M_{12}) = S^{W(U)}(H^1(S))/\rho^* \delta S^{W(G)}(H^1(T)) \quad ,$$

wobei  $W$  die Weylgruppe der betreffenden Liegruppe und  $S$  den maximalen Torus von  $U$  bezeichnet. Als Basis von  $H_1(S) = L_U$  wählen wir  $\{(e;0), (0;e_1), (0;e_2)\}$ , wobei wir die Liealgebra des Torus  $T \subset U(3) \subset Sp(3)$  der komplexen Diagonalmatrizen wie in 41 mit  $\mathbb{R}^3$  identifiziert und  $e = \sum e_i$  gesetzt haben. Als Basis von  $H^1(S)$  wählen wir die dazu duale Basis  $\{u,v,w\}$  und setzen  $x = u^2$ ,  $y = v^2$ ,  $z = w^2$ . Damit ergibt sich für die nicht-verschwindende Cohomologie:

$k$	0	4	8	12
$H^k(M_{12})$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
Basis	1	$x, y$	$x^2, xy$	$x^2y$

mit den Relationen

$$z = 3x - y \quad , \quad 3x^2 + y^2 - 3xy = 0 \quad , \quad x^3 = 0 \quad .$$

Denselben Cohomologie-Modul hat auch der homogene P-Raum  $V_{12} := Sp(3)/Sp(1)^3$  (Fahnenmannigfaltigkeit des  $\mathbb{H}P^2$ ), und die Relationen-Algebra wird erzeugt durch

$$\tilde{z} = -\tilde{x} - \tilde{y} \quad , \quad \tilde{x}^2 + \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2 = 0 \quad , \quad \tilde{x}^3 = 0 \quad ,$$

wobei  $\tilde{x}, \tilde{y}$  die Erzeugenden von  $H^4(V_{12})$  bezeichnen. Die  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildung  $f : H^4(M_{12}) \rightarrow H^4(V_{12})$  mit

$$f(x) = \tilde{x} \quad , \quad f(y) = \tilde{x} - \tilde{y}$$

läßt sich also zu einem Ring-Isomorphismus  $f : H^*(M_{12}) \rightarrow H^*(V_{12})$  fortsetzen. Somit gilt:

Satz 444:  $M_{12}$  und  $V_{12}$  haben dieselbe Cohomologie und Homologie.

(44)

Problem: Sind  $V_{12}$  und  $M_{12}$  homotopieäquivalent, homöomorph oder sogar diffeomorph?

Bemerkung: Wir können  $U$  zu der immer noch fixpunktfrei operierenden Gruppe  $\hat{U} := U_1 \times Sp(2)$  erweitern, und der Quotient  $Sp(3)/\hat{U}$  ist diffeomorph zu  $\mathbb{H}P^2$  (Tabelle 101, Nr. 18). Also ist  $M_{12}$  wie  $V_{12}$  ein  $S^4$ -Bündel über  $\mathbb{H}P^2$ .

## Kapitel 5

### Fixpunkt-Freiheit

#### 51. Torus und Weylgruppe

In diesem und den folgenden drei Kapiteln betrachten wir ausschließlich den Gesichtspunkt der Fixpunkt-Freiheit; Metriken werden dabei keine Rolle spielen. Wir setzen daher voraus, daß  $G$  stets eine kompakte Liegruppe und  $U$  eine zusammenhängende Untergruppe von  $G^2 = G \times G$  ist, die auf  $G$  operiert vermöge

$$u(g) := u_l g u_r^{-1}$$

wenn  $u = (u_l; u_r) \in U$ ,  $g \in G$ . Der Kern dieser Operation ist  $U_0 = U \cap \Delta Z$ , wobei  $Z$  das Zentrum von  $G$  und  $\Delta : G \rightarrow G^2$  die Diagonal-Einbettung bezeichnen; wir setzen  $\bar{U} = U/U_0$ . Die Gruppe  $U$  (bzw  $\bar{U}$ ) operiert fixpunktfrei genau dann, wenn für alle  $u \in U$

$$(1) \quad u_l \sim u_r \quad \Rightarrow \quad u_l = u_r \in Z \quad ,$$

wobei  $\sim$  die Konjugiertheit in  $G$  bezeichnet.

$S$  sei ein maximaler Torus von  $U$ . Wenn  $U$  fixpunktfrei operiert, gilt dasselbe natürlich auch für  $S$ , aber auch umgekehrt: Wenn  $S$  fixpunktfrei operiert, so auch  $U$ . Ist nämlich  $u \in U$  mit  $u_l \sim u_r$ , so gibt es  $s \in S$  mit  $s_l \sim u_l$ ,  $s_r \sim u_r$ , also auch  $s_l \sim s_r$ . Weil  $S$  fixpunktfrei operiert, ist  $s_l = s_r \in Z$  und daher  $u_l = s_l = s_r = u_r \in Z$ , und also operiert  $U$  fixpunktfrei, nach (1).

(51)

Wir können daher von jetzt an annehmen, daß  $U = S$  selbst ein Torus ist. Jede Gruppe, die  $S$  als maximalen Torus enthält, wird fixpunktfrei operieren, wenn nur  $S$  fixpunktfrei operiert. Diese Erweiterungen werden wir in Kapitel 9 studieren.

Es gibt einen maximalen Torus  $T' \times T$  von  $G^2$ , der  $S$  enthält. Durch eine Konjugation im linken Faktor können wir erreichen, daß  $T' = T$  ist (Übergang zu  $(g;e)S(g;e)^{-1}$ , vgl. § 31). Wir können also  $s_l, s_r \in T$  annehmen für alle  $s \in S$ . Deshalb gibt es ein einfaches Kriterium, um zu entscheiden, ob  $s_l$  und  $s_r$  zueinander konjugiert sind:

Der Normalisator  $N = N_G(T)$  von  $T$  in  $G$  operiert auf  $T$  durch Konjugation, und der Kern dieser Operation ist  $T$ . Die Faktorgruppe  $W = W(G)$  ist eine endliche Gruppe von Automorphismen von  $T$ , genannt Weylgruppe von  $G$ . Die folgende Tatsache ist wohlbekannt ([1], S. 96):

Lemma 51: Ist  $x, y \in T$  und  $x \sim y$ , so gibt es ein Element  $W \in W$  mit  $x = W(y)$ .

Beweis:  $G$  operiert auf sich selbst durch innere Automorphismen. Die Standgruppe  $G_x$  eines Elements  $x \in G$  ist der Zentralisator  $C_x$  dieses Elements in  $G$ . Da nach Voraussetzung  $x, y \in T$ , ist  $T$  maximaler Torus sowohl in  $C_x$  wie auch in  $C_y$ . Nun liegen aber  $x$  und  $y$  im selben Orbit, d.h.  $x = gyg^{-1}$  für ein  $g \in G$ ; deshalb ist  $C_x = gC_yg^{-1}$ . Also ist auch  $T' := gTg^{-1}$  maximaler Torus von  $C_x$  und ist daher in  $C_x$  zu  $T$  konjugiert, d.h. es gibt  $h \in C_x$  mit



$$T = hT'h^{-1} = hgTg^{-1}h^{-1} .$$

Somit ist  $hg \in N$ , und damit repräsentiert  $hg$  ein Element  $W \in \mathcal{W}$ . Also erhalten wir

$$W(y) = hgyg^{-1}h^{-1} = hxh^{-1} = x ,$$

was zu zeigen war.

Wir können die Bedingung (1) jetzt so umformulieren:

$S$  ist fixpunktfrei genau dann, wenn für alle  $s \in S$  und alle  $W \in \mathcal{W}$  gilt:

$$(2) \quad W(s_l) = s_r \quad \Rightarrow \quad s_l = s_r \in Z .$$

## 52. Die Bedingung in der Liealgebra

Wir möchten jetzt die Bedingung 51(2) infinitesimal, d.h. in der Liealgebra ausdrücken.  $\underline{T}$  sei die Liealgebra von  $T$  und  $\exp: \underline{T} \rightarrow T$  die Exponentialabbildung des Torus. Es ist zweckmäßig, diese umzunormieren: Wir definieren

$$\text{ex} = \text{ex}_{\underline{T}} : \underline{T} \rightarrow T , \quad \text{ex}(X) = \exp(2\pi X) .$$

Die Abbildung  $\text{ex}$  ist (wie  $\exp$ ) ein Homomorphismus von abelschen Gruppen. Wir betrachten folgende Untergruppen von  $(\underline{T}, +)$ :

$$L = \text{ex}^{-1}(e) = \ker \text{ex} ,$$

$$L_0 = \text{ex}^{-1}(Z)$$

wobei  $Z \subset T$  wieder das Zentrum von  $G$  bezeichnet. Wegen Lemma 51 haben wir  $Z = \{t \in T ; \forall w \ t = wt\}$ , wobei  $\mathcal{W}$  wieder die Weylgruppe bezeichnet.  $L$  ist stets ein Gitter, d.h.  $L \cong \mathbb{Z}^n$  mit  $n = \dim(T) = \text{rg}(G)$ ; Wir nennen  $L$  das Einheitsgitter von  $T$  oder  $G$ . Die Untergruppe  $L_0$  ist nur dann ein Gitter, wenn  $Z$  diskret

(52)

ist; andernfalls ist  $\underline{Z} \subset L_0$ , aber  $L_0/\underline{Z}$  ist ein Gitter in  $\underline{T}/\underline{Z}$ . Da wir meistens den Fall  $\underline{Z} = 0$  betrachten werden, nennen wir  $L_0$  "by abuse of language" das Zentralgitter von  $G$ .

Die Weylgruppe  $W$  von  $G$  operiert wegen  $W(e) = e$  für alle  $W \in W$  linear auf  $\underline{T}$  durch  $Wx := dW_e(x)$ , und es gilt  $\text{ex}(Wx) = W(\text{ex}(x))$ . Bei dieser Operation bleibt  $\underline{Z}$  punktweise fest und  $L$  und  $L_0$  invariant. Nach der obigen Kennzeichnung von  $Z$  gilt in der Tat:

$$L_0 = \{x \in \underline{T} ; (W - I)x \in L \text{ für alle } W \in W\}$$

Jetzt können wir 51(2) folgendermaßen umformulieren:

$S$  operiert fixpunktfrei genau dann, wenn für alle  $x = (x_1; x_r) \in \underline{S}$  und für alle  $W \in W$  gilt:

$$(1) \quad Wx_1 - x_r \in L \quad \Rightarrow \quad x_1, x_r \in L_0, \quad x_1 - x_r \in L.$$

Im folgenden können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß  $\underline{S} \cap \underline{\Delta Z} = \underline{U}_0 = 0$ , indem wir nötigenfalls  $S$  durch einen zu  $S \cap \underline{\Delta Z}$  komplementären Untertorus  $S'$  von  $S$  ersetzen. Die effektiv operierenden Gruppen  $\bar{S} = S/S \cap \underline{\Delta Z}$  und  $\bar{S}' = S'/S' \cap \underline{\Delta Z}$  stimmen überein. Also ist ohne Einschränkung  $S$  eine endliche Überlagerung von  $\bar{S}$  und

$$\begin{aligned} L_{\bar{S}} &:= \text{ex}_S^{-1}(S \cap \underline{\Delta Z}) \\ &= \{(x_1; x_r) \in \underline{S} ; x_1, x_r \in L_0, x_1 - x_r \in L\} \end{aligned}$$

ein Gitter in  $\underline{S}$ .

Für  $W \in W$  definieren wir die lineare Abbildung

$$f_W : \underline{S} \rightarrow \underline{T}, \quad f_W(x) := Wx_1 - x_r.$$

Lemma 521:  $f_W(L_{\bar{S}})$  ist ein Teilgitter von  $L$ , auch wenn  $S$  nicht fixpunktfrei operiert.

Beweis: Ist  $x \in L_{\underline{S}}$ , so ist  $x_1 - x_r \in L$ . Da  $Wx_1 - x_1 = (W - I)x_1 \in L$  wegen  $x_1 \in L_0$ , ist auch  $Wx_1 - x_r \in L$ , was zu zeigen war.

Die Eigenschaft (1) läßt sich jetzt so beschreiben:

Für alle  $x \in \underline{S}$  und alle  $W \in \mathcal{W}$  gilt:

$$(2) \quad f_W(x) \in L \quad \Rightarrow \quad x \in L_{\underline{S}}$$

Dies impliziert insbesondere, daß  $f_W$  injektiv ist, denn der Kern dieser Abbildung müßte in der diskreten Menge  $L_{\underline{S}}$  liegen.

Ein Teilgitter  $L'$  von  $L$  soll vollständig heißen, wenn

$$(\text{Span}_{\mathbb{R}} L') \cap L = L' .$$

Wir haben damit gezeigt:

Satz 522:  $S$  operiert fixpunktfrei genau dann, wenn für alle  $W \in \mathcal{W}$  gilt:  $f_W$  ist injektiv und  $f_W(L_{\underline{S}})$  ist ein vollständiges Teilgitter von  $L$ .

Bemerkung: Nach § 35 wissen wir: Ist  $p : \hat{G} \rightarrow G$  eine Überlagerung und  $\hat{S} \subset \hat{G}^2$  ein Torus mit Liealgebra  $\hat{\underline{S}} = \underline{S}$ , so ist  $\hat{S}$  fixpunktfrei, wenn dasselbe für  $S$  gilt. Dies zeigt auch Beziehung (2): Das Einheitsgitter  $\hat{L}$  von  $\hat{G}$  ist ein Teilgitter von  $L$ . Aus  $Wx_1 - x_r \in \hat{L}$  folgt also  $x_1, x_r \in L_0$ , da  $S$  fixpunktfrei ist. Dann ist auch  $x_1 - x_r = Wx_1 - x_r - (W - I)x_1 \in \hat{L}$  und somit  $x \in \hat{L}_{\underline{S}}$ , d.h.  $\hat{S}$  ist fixpunktfrei.

(52)

Wir wollen noch den Spezialfall  $\dim \bar{S} = 1$  betrachten, also  $L_{\bar{S}} = \mathbb{Z}x$  mit  $x \in \underline{T}^2 - \underline{\Delta Z}$ . In diesem Fall ist  $S$  fixpunktfrei, falls  $\mathbb{Z}f_W(x)$  ein vollständiges Teilgitter in  $L$  ist für alle  $W \in \mathcal{W}$ . Einen solchen Vektor  $y \in L - \{0\}$  mit der Eigenschaft, daß  $\mathbb{Z}y$  ein vollständiges Teilgitter ist, wollen wir unteilbar nennen, denn kein Teiler  $ty$  mit  $0 < t < 1$  ist Element von  $L$ . Ist also  $x = (x_1; x_r) \in L_0^2$  mit  $x_1 - x_r \in L$ , so ist die Gruppe  $S \cong S^1$  mit  $\underline{S} = \text{ex}(\mathbb{R}x)$  genau dann fixpunktfrei, wenn  $f_W(x)$  für alle  $W \in \mathcal{W}$  unteilbar ist. Dieses Kriterium wurde in 41 schon angewendet.

53.  $\dim(\bar{S}) = \text{rg}(\bar{G}) - 1$

Lemma 531: Es sei  $L$  ein Teilgitter von  $\mathbb{Z}^n$  mit Basis  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ . Es sei  $X := (x_1, \dots, x_{n-1}) \in M(n, n-1; \mathbb{Z})$  und  $\hat{x} \in \mathbb{Z}^n$  der Vektor der  $(n-1)$ -reihigen Unterdeterminanten von  $X$ . Dann gilt:  $L$  ist vollständig genau dann, wenn  $\hat{x} \neq 0$  unteilbar ist.

Beweis: Es sei  $L' := (\text{Span}_{\mathbb{R}} L) \cap \mathbb{Z}^n$ . Das Gitter  $L'$  ist nach Definition vollständig, und  $L$  ist ein Teilgitter von endlichem Index in  $L'$ , d.h.  $[L' : L] = m < \infty$ . Ist  $y = \sum t_i x_i \in L'$ , mit  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , so ist  $my \in L$ , also  $mt_i =: k_i \in \mathbb{Z}$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Wir können (wenn nötig, durch Übergang zu einem Teiler von  $y$ ) annehmen, daß die Zahlen  $k_1, \dots, k_{n-1}, m$  teilerfremd sind. Nun ist  $\sum k_i x_i = my \equiv 0 \pmod{m}$ , d.h.  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$  ist linear abhängig modulo  $m$ , und die Unterdeterminanten müssen modulo  $m$  verschwinden,

(54)

54.  $\dim(\bar{S}) = \text{rg}(G)$

Von jetzt an sei  $S$  ein Untertorus von  $T^2$ , so daß für  $\bar{S} := S/(S \cap \Delta Z)$  gilt:  $\dim(\bar{S}) = \dim(T) = \text{rg}(G) =: n$ . Bei der Untersuchung fixpunktfrei operierender Tori können wir uns von vorn herein auf den Fall beschränken, daß  $S$  zu  $\Delta T$  transversal ist. Im fixpunktfreien Fall ist nämlich  $S \cap \Delta T \subset \Delta Z$ , und wir können  $S$  durch einen Untertorus  $S' \subset S$  ersetzen mit  $\bar{S}' = \bar{S}$  und  $\underline{S}' \cap \underline{\Delta Z} = 0$ . Setzen wir dies voraus, dann ist die lineare Abbildung

$$f_I : \underline{S} \rightarrow \underline{T}, \quad f_I(x) = x_1 - x_r$$

ein Isomorphismus. Jedes  $y \in \underline{T}$  läßt sich also in eindeutiger Weise schreiben als  $y = x_1 - x_r$  mit  $x \in \underline{S}$ . Die Zuordnung  $y \rightarrow x_1$  definiert eine lineare Abbildung

$$X := X_1 := (f_I^{-1})_1 : \underline{T} \rightarrow \underline{S}_1 \subset \underline{T},$$

und entsprechend liefert die Zuordnung  $y \rightarrow x_r$  den linearen Endomorphismus  $X_r = X - I$  von  $\underline{T}$ .

Nach Satz 522 operiert  $S$  auf  $G$  fixpunktfrei genau dann, wenn für alle  $W \in \mathcal{W}$  die linearen Abbildungen

$$f_W : \underline{S} \rightarrow \underline{T}, \quad f_W(x) = Wx_1 - x_r$$

das Gitter  $L_{\bar{S}}$  isomorph auf das Einheitsgitter  $L$  von  $T$  abbilden. Wir setzen

$$F_W := f_W f_I^{-1},$$

dann ist  $F_W = (W - I)X + I$  ein linearer Endomorphismus von  $\underline{T}$ , und nach 522 ist  $S$  nur dann fixpunktfrei, wenn  $F_W$  für alle  $W \in \mathcal{W}$  zur Automorphismengruppe des Gitters  $L$ ,  $\text{Aut}(L)$ , gehört, d.h.  $L$  bijektiv auf sich abbildet.

Daher ist folgende Definition sinnvoll: Ein linearer Endomorphismus  $X$  von  $\underline{T}$  soll zulässig (in  $G$ ) heißen, wenn gilt:

$$(1) \quad F_W(X) := (W - I)X + I \in \text{Aut}(L)$$

für alle  $W \in \mathcal{W}$ .

Wir setzen

$$\tilde{L} := \{(x_1; x_r) \in L_0^2; x_1 - x_r \in L\}.$$

Für einen Endomorphismus  $X$  von  $\underline{T}$  definieren wir die lineare Abbildung

$$\hat{X} : \underline{T} \rightarrow \underline{T}^2, \quad \hat{X}(y) := (Xy; Xy - y).$$

Ist  $X$  zulässig, so gilt

$$(2) \quad L = \hat{X}^{-1}(\tilde{L})$$

Andererseits ist für jeden Torus  $S \subset T^2$

$$(3) \quad L_{\underline{S}} = \tilde{L} \cap \underline{S}.$$

Satz 54: Ist  $S \subset T^2$  ein fixpunktfrei operierender  $n$ -dimensionaler Torus transversal zu  $\Delta Z$ , so gibt es einen zulässigen Endomorphismus  $X$  von  $\underline{T}$  mit

$$(4) \quad \underline{S} = \hat{X}(\underline{T}).$$

Ist umgekehrt  $X$  ein zulässiger Endomorphismus von  $\underline{T}$ , so daß durch (4) die Liealgebra einer abgeschlossenen Untergruppe  $S$  von  $T^2$  definiert wird, so ist  $S$  ein fixpunktfreier  $n$ -Torus transversal zu  $\Delta Z$ .

Beweis: Nur noch der zweite Teil ist zu zeigen.  $\underline{S}$  ist nach Definition transversal zu  $\Delta T$ , und es gilt  $f_{\underline{T}} = \hat{X}^{-1} : \underline{S} \rightarrow \underline{T}$ . Da  $f_{\underline{T}}$  bijektiv ist und  $f_{\underline{T}}(L_{\underline{S}}) = L$  nach (2) und (3), bildet  $f_{\underline{T}}$  das Gitter  $L_{\underline{S}}$  isomorph auf  $L$  ab, und wegen (4) gilt das-

(54)

selbe für  $f_W$  für alle  $W \in \mathcal{W}$ . Daher ist  $S$  fixpunktfrei nach Satz 522.

Bemerkung: Ist das Zentrum  $Z$  von  $G$  diskret, d.h.  $G$  halbeinfach, so ist die Zusatzvoraussetzung im zweiten Teil von Satz 54 überflüssig. Dann ist  $L$  nämlich ein Gitter von endlichem Index  $m$  in  $L_0$ . Ist also  $X : \underline{T} \rightarrow \underline{T}$  zulässig, so ist  $\hat{X}(L) \subset L_0^2$  und daher  $\hat{X}(mL) \subset L^2$ . Daher ist  $\text{ex}(\hat{X}(\underline{T}))$  abgeschlossen in  $T^2$ .

#### 55. Eigenschaften zulässiger Endomorphismen

Es sei  $G$  eine kompakte Liegruppe mit maximalem Torus  $T$ , Zentrum  $Z$ , Einheitsgitter  $L$ , Zentralgitter  $L_0$  und Weylgruppe  $\mathcal{W}$ . Für eine lineare Abbildung  $X : \underline{T} \rightarrow \underline{T}$  und  $W \in \mathcal{W}$  sei  $F_W(X) = (W - I)X + I$  wie in 54(1). Die Menge der zulässigen Abbildungen im Sinne von § 54 heiÙe  $ZA = ZA(G)$ . Diese Menge hat folgende Eigenschaften, wie man sofort verifiziert:

#### Satz 551

(a)  $0, I \in ZA$  mit  $F_W(0) = I$ ,  $F_W(I) = W$

(b) Ist  $X \in ZA$ , so ist  $X' = I - X \in ZA$  und

$$F_W(X') = W F_W^{-1}(X)$$

(c) Ist  $X \in ZA$  und  $A \in \text{Aut}(L) \cap \text{Aut}(L_0)$  mit  $A \mathcal{W} A^{-1} = \mathcal{W}$ , so ist  $X' = AXA^{-1} \in ZA$  und

$$F_W(X') = A F_A^{-1} F_{WA}(X) A^{-1}$$

(d) Ist  $X \in ZA$  und  $W' \in \mathcal{W}$ , so ist  $X' = W'X F_{W'}^{-1}(X)^{-1} \in ZA$

und es gilt:

$$F_W(X') = F_{WW'}(X) F_{W'}(X)^{-1}$$

(e) Ist  $X \in ZA$  und  $Y : \underline{T} \rightarrow \underline{Z}$  eine beliebige lineare Abbildung, so ist  $X' = X + Y \in ZA$  mit

$$F_W(X') = F_W(X)$$

Betrachten wir die den zulässigen Abbildungen  $X$  assoziierten Tori  $S$  mit  $\underline{S} = \hat{X}(\underline{T})$  gemäß Satz 54, so gehört zu  $X = 0$  der Torus  $S = \{e\} \times T$ , und zu  $X = I$  gehört  $S = T \times \{e\}$ . Jede Erweiterung  $U$  mit diesen Tori  $S$  als maximalem Torus liegt also ganz im rechten oder linken Faktor von  $G \times G$  und ist in unserem Zusammenhang uninteressant. Die Transformation in (b) entspricht der Vertauschung von linker und rechter Komponente in  $S$ . Der Übergang (c) entspricht der Anwendung eines Automorphismus von  $G$  und (d) der Anwendung eines inneren Automorphismus auf die linke Komponente von  $S$  (vgl. § 31). Die Transformation (e) schließlich bedeutet den Übergang zu einem anderen Torus  $S'$  mit  $\bar{S}' = \bar{S}$ .

Zwei zulässige Endomorphismen, die durch eine der Umformungen (b) - (e) auseinander hervorgehen, sollen äquivalent heißen. Die Aufgabe wird sein, alle Elemente von  $ZA(G)$  bis auf Äquivalenz zu bestimmen.

Ist  $\hat{G}$  eine  $k$ -fache Überlagerungsgruppe von  $G$  und  $X \in ZA(G)$ , so ist  $X \in ZA(\hat{G})$  (vgl. die Bemerkung nach Satz 522). Das Umgekehrte ist nur richtig, wenn  $F_W(X) \in \text{Aut}(\hat{L}) \cap \text{Aut}(L)$  für alle  $W \in \mathcal{W}$ , wobei  $\hat{L} \subset L$  das Einheitsgitter von  $\hat{G}$  ist. Es würde also an sich ausreichen, nur Gruppen der Form  $\hat{G} = T' \times \hat{G}'$  zu betrachten, wobei  $T'$  ein Torus und  $\hat{G}'$  einfach zusammenhän-



(55)

gend ist. Aber z.B. das Gitter der Spin-Gruppen ist nicht so einfach wie das der Orthogonalen Gruppen zu behandeln. Deshalb interessiert die Frage, in welchen Fällen  $ZA(\hat{G}) = ZA(G)$  ist. Das folgende Korollar liefert ein notwendiges Kriterium für die Zulässigkeit in  $\hat{G}$ , das man am Gitter  $L$  ablesen kann:

Korollar 552: Ist  $X \in ZA(\hat{G})$ , so gilt für alle  $W \in \mathcal{W}$ :

$$(a) \quad \det F_W(X) = \pm 1$$

$$(b) \quad F_W(kL) \subset L$$

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 551, da  $\hat{L}$  ein Teilgitter vom Index  $k$  in  $L$  ist, also  $kL$  in  $\hat{L}$  und damit in  $L$  liegt.

Wenn alle Endomorphismen  $X$  von  $\underline{T}$ , die (a) und (b) erfüllen schon in  $ZA(G)$  sind, gilt  $ZA(\hat{G}) = ZA(G)$ .

Wir betrachten nun eine Untergruppe  $G'$  von  $G$  mit maximalem Torus  $T' \subset T$ .  $G'$  heißt eine reguläre Unteralgebra von  $G$  und  $G'$  eine reguläre Untergruppe von  $G$ , wenn jeder Wurzelraum von  $G'$  auch Wurzelraum von  $G$  ist, mit andern Worten, wenn für die Wurzelsysteme  $R_G \subset \underline{T}$ ,  $R_{G'} \subset \underline{T}'$  von  $G$  und  $G'$  gilt:  $R_{G'} \subset R_G$ . Da die Weylgruppe einer kompakten Liegruppe durch die Spiegelungen an den Hyperflächen senkrecht zu den Wurzeln erzeugt wird, ist die Weylgruppe  $\mathcal{W}'$  von  $G'$  eine Untergruppe der Weylgruppe  $\mathcal{W}$  von  $G$ . Genauer: Ist  $\underline{T}'' = \underline{T} \ominus \underline{T}'$  das orthogonale Komplement bezüglich einer  $\mathcal{W}$ -invarianten Metrik, so gilt:

$$\mathcal{W}' = \{W \in \mathcal{W} ; W|_{\underline{T}''} = I\}$$

Mit  $j : \underline{T}' \rightarrow \underline{T}$  bezeichnen wir die Inklusion und mit  $p : \underline{T} \rightarrow \underline{T}'$  die orthogonale Projektion. Für  $W \in \mathcal{W}$  gilt:

(55)

$(W - I)p = p(W - I) = W - I$ . Mit  $L'$  bezeichnen wir das Einheitsgitter, mit  $L'_0$  das Zentralgitter von  $G'$ . Dann gilt

$$L' = L \cap \underline{T}' ; \quad p(L_0) \subset L'_0$$

Das erste ist klar. Das zweite sieht man so: Ist  $W \in \omega'$ , so ist  $(W - I)pL_0 = (W - I)L_0 = L \cap \underline{T}'' = L'$ , also  $pL_0 \subset L'_0$  (vgl. § 52). Daraus ergibt sich:

Korollar 553: Ist  $X \in ZA(G)$ , so ist  $\underline{T}''$  fix und  $\underline{T}'$  invariant unter  $F_W(X)$  für alle  $W \in \omega'$ , und es gilt  $X' := pXj \in ZA(G')$  mit

$$F_W(X') = F_W(X)|_{\underline{T}'}, \quad \text{für } W \in \omega'$$

und insbesondere gilt:

$$\det(F_W(X')) = \det F_W(X) .$$

Beweis: Da  $\text{Bild}((W - I)) \subset \underline{T}'$ ,  $\ker(W - I) \subset \underline{T}''$ , ist  $F_W(X) = I$  auf  $\underline{T}''$  und  $F_W(X)\underline{T}' \subset \underline{T}'$ . Insbesondere gilt  $F_W(X)L' = L'$ . Da  $F_W(X') = (W - I)X|_{\underline{T}'} + I = F_W(X)|_{\underline{T}'}$ , ist  $F_W(X') \in \text{Aut}(L)$ , was zu zeigen war.

Ist  $G$  eine abelsche Erweiterung von  $G'$ , d.h. ist  $G'$  Normalteiler von  $G$  und  $G/G'$  abelsch, so ist die Zuordnung  $ZA(G) \rightarrow ZA(G') : X \rightarrow X'$  wie in Kor. 553 sogar surjektiv:

Korollar 554: Ist  $G$  eine abelsche Erweiterung von  $G'$ , ferner  $X' \in ZA(G')$  und  $X \in \text{End}(\underline{T})$  mit  $X|_{\underline{T}'} = X'$  und  $X(L) \subset L_0$ , so ist  $X \in ZA(G)$ .

(55)

Beweis: In diesem Fall gilt  $\omega' = \omega$ . Für alle  $W \in \omega$  ist daher  $(W - I)XL \subset (W - I)L_O \subset L \cap \underline{T}' = L'$ , also  $F_W(X)L \subset L' + L = L$ . Außerdem ist  $F_W(X')L' = L'$ , also  $(W - I)XL \subset L' = F_W(X)L' \subset F_W(X)L$ . Damit ist  $L = F_W(X)L + (W - I)XL \subset F_W(X)L$  und also  $F_W(X)L = L$ . Insbesondere ist  $F_W(X)$  surjektiv, da  $\underline{T} = \text{Span}_{\mathbb{R}} L$ , und also auch injektiv, somit  $F_W(X) \in \text{Aut}(L)$ , was zu zeigen war.

Da im Falle abelscher Erweiterungen  $\underline{T}''$  im Zentrum  $\underline{Z}$  von  $\underline{G}$  liegt, ist mit  $X \in \text{ZA}(G)$  auch  $pX \in \text{ZA}(G)$  (Satz 551(e)) und bestimmt einen äquivalenten Torus  $\underline{T}''$ . Daher ist bis auf Äquivalenz jedes  $X \in \text{ZA}(G)$  eine Erweiterung von einem  $X' \in \text{ZA}(G')$ , und je zwei Erweiterungen sind äquivalent.

Kapitel 6

Fixpunktfreie Torus-Aktionen von maximalem Rang

auf SU(n)

61. SU(n) und U(n)

Wir betrachten zunächst die Gruppe aller unitären  $n \times n$ -Matrizen über  $\mathbb{C}$ ,

$$G = U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) ; A^* A = I\} ,$$

mit dem maximalen Torus  $T$  der unitären Diagonalmatrizen.

Wie schon früher (§ 41) identifizieren wir die zugehörige

Liealgebra  $\underline{T}$  der rein imaginären Diagonalmatrizen mit  $\mathbb{R}^n$ :

$$i \cdot \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \dots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^t .$$

Wählen wir auf  $\underline{G}$  die ( $\text{Ad}(G)$ -invariante) Spurmetrik

$$(X, Y) := \text{Re Spur } XY^* ,$$

so ist diese Identifizierung isometrisch. Das Einheitsgitter

$L$  von  $T$  wird dabei in  $\mathbb{Z}^n$  überführt. Lineare Endomorphismen

von  $\underline{T}$  werden also durch reelle  $n \times n$ -Matrizen dargestellt, und

diese sind ganzzahlig genau dann, wenn das Einheitsgitter  $L$

invariant bleibt. Zwei Elemente  $x, y \in \underline{T}$  sind konjugiert genau

dann, wenn ihre Komponenten bis auf Permutation übereinstimmen.

Die Weylgruppe  $W = W(U(n))$  ist also die Permutationsgruppe

$S_n$ . Das Zentrum von  $G$  ist  $Z = \{zI ; z \in S^1\}$  mit Liealgebra

$\underline{Z} = \mathbb{R}e$ , wobei  $e := \sum e_i$  wie früher. Das Zentral-"Gitter"

ist daher  $L_0 = \underline{Z} + L = \mathbb{R}e + \mathbb{Z}^n$ .

(61)

$U(n)$  ist abelsche Erweiterung der einfachen Gruppe  $G' = SU(n)$ , die aus allen unitären Matrizen mit Determinante 1 besteht. Als maximalen Torus von  $G'$  wählen wir  $T' = T \cap G'$  mit Liealgebra  $\underline{T}' = \underline{T} \ominus \mathbb{R}e = e^\perp$ . (Wenn wir die Dimension hervorheben wollen, werden wir  $T_n$  für  $T$  und  $T'_n$  für  $T'$  schreiben.)  $\underline{Z} = \mathbb{R}e$  ist der Fixraum von  $\mathcal{W}$  (vgl. 554). Die orthogonale Projektion  $p : \underline{T} \rightarrow \underline{T}'$  auf  $\underline{T}'$  ist definiert durch

$$p(x) := x' := x - \frac{\langle x, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e = x - \frac{1}{n} (\sum x_i) e .$$

(Für Paare  $(x; y) \in \underline{T}^2$  werden wir häufig  $(x; y)'$  statt  $(x'; y')$  schreiben.) Das Einheitsgitter von  $G'$  ist  $L' = L \cap \underline{T}'$  und das Zentralgitter  $L'_0 = pL_0 = pL$ , denn  $L'_0 \subset L_0 \cap \underline{T}' \subset pL_0$  (vgl. 553).

Nach 554 ist  $X \in ZA(G)$  genau dann, wenn  $X' := pX|_{\underline{T}} \in ZA(G')$ , d.h. die Bestimmung von  $ZA(G)$  und  $ZA(G')$  sind äquivalent. Der Vorteil von  $G$  gegenüber  $G'$  ist, daß  $\underline{T}$  eine Basis besitzt, die unter  $\mathcal{W}$  invariant ist, nämlich  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ; dies ist für  $G'$  nicht der Fall.

## 62. Notwendige Bedingungen für Zulässigkeit

Wir wollen zur Bestimmung von  $ZA(G)$  nur das notwendige Kriterium von Korollar 552 benutzen. Genauer: Wir werden alle rationalen (vgl. 552(b)!) Matrizen  $X \in M(n, \mathbb{Q})$  bestimmen mit

$$(1) \quad \det F_W(X) = \pm 1 \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W} .$$

Allgemein für eine  $n \times n$ -Matrix  $X$  setzen wir

$$a_W := a_W(X) := \frac{1}{2} (1 - \det F_W(X)) .$$

Dann ist (1) äquivalent zu

$$(1)' \quad a_W(X) \in \{0,1\} \quad \text{für alle } W \in \mathcal{W} \quad .$$

Betrachten wir zunächst den Fall  $n = 2$ . Dann brauchen wir (1)' nur für  $W = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}$  zu verifizieren, denn für  $W = I$  ist (1)' immer erfüllt:  $a_I(X) = 0$  für alle  $X$ . Ist  $X = ((x_{ij})) \in M(2, \mathbb{Q})$  gegeben und setzen wir

$$u_{ij} := x_{jj} - x_{ij} \quad ,$$

so gilt

$$F_W(X) = \begin{bmatrix} 1 - u_{21} & u_{12} \\ u_{21} & 1 - u_{12} \end{bmatrix}$$

(1)' ist also erfüllt, wenn  $u_{21} + u_{12} = 2 a_{12}$  mit  $a_{12} := a_W(X) \in \{0,1\}$ .

Ist jetzt  $n \geq 2$  beliebig, so können wir die Weyltransformation  $W_{ij}$  betrachten, die nur  $e_i$  und  $e_j$  miteinander vertauscht (Spiegelung an der Hyperebene  $(e_i - e_j)^\perp$  in  $\underline{T}$ ). Setzen wir analog zu  $a_{12}$

$$a_{ij} := a_{ij}(X) := a_{W_{ij}}(X) \quad , \quad i \neq j \quad ,$$

so gilt entsprechend

$$(2) \quad u_{ij} + u_{ji} = 2 a_{ij} \quad ,$$

und falls (1)' erfüllt ist, gilt  $a_{ij} \in \{0,1\}$ . Dies und alle weiteren ähnlichen Schlüsse sind Anwendungen von Kor. 553, in diesem Fall auf die zu  $U(2)$  isomorphe Untergruppe von  $G = U(n)$ , deren Elemente alle Koordinaten mit Ausnahme von  $i$  und  $j$  festlassen.

Für  $n = 3$  sind in  $\mathcal{W} = S_3$  außer den Transpositionen nur die zyklischen Vertauschungen  $(123)$  und  $(132)$  (Zyklenschreibweise der Permutationen). Wir setzen zunächst

(62)

$$W = (123) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix} .$$

Dann ist

$$W - I = S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Setzen wir

$$v := u_{12} + u_{23} + u_{31} ,$$

so ist

$$S^{-1} F_W(X) S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_{21} & 1-2a_{12} & v-2(a_{31}+a_{12}) \\ u_{31}-u_{21} & 2(a_{23}+a_{12})-v & 1-v+2a_{12} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$v^2 - pv + q = 0$$

mit

$$p = 2(a_{12} + a_{23} + a_{31}) + 1 ,$$

$$q = 4(a_{12}a_{31} + a_{23}a_{12} + a_{31}a_{23}) + 2 a_W .$$

Die Koeffizienten p und q sind also symmetrisch in  $a_{12}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$ . Außerdem ist mit  $X \in ZA(G)$  auch  $I - X \in ZA(G)$ , und die Werte von  $a_{ij}(I-X)$  sind komplementär zu denen von  $a_{ij}(X)$ , d.h. das erste ist 0 genau wenn das zweite 1 ist und umgekehrt (vgl. Satz 551(b)). Deshalb haben wir nur die Fälle zu untersuchen, daß drei oder zwei der  $a_{ij}$  verschwinden:

$\Sigma a_{ij}$	$a_W$	p	q	$p^2-4q$	$v = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{p^2+4q})$
0	0	1	0	1	1 / 0
0	1	1	2	-7	nicht reell
1	0	3	0	9	3 / 0
1	1	3	2	1	2 / 1

Dabei haben wir nur  $v \in \mathbb{R}$  und (1)' benutzt.

(62)

Die Auswertung der anderen zyklischen Vertauschung (132) liefert daselbe Ergebnis nach Vertauschen der Koordinaten 2 und 3, d.h. wenn wir  $v$  durch

$$v' := u_{13} + u_{32} + u_{21}$$

ersetzen (vgl. 551(c)). Andererseits sind  $v$  und  $v'$  durch die Gleichung  $v' = 2(a_{12} + a_{23} + a_{31}) - v$  verbunden. Die Lösungen  $v = 0$  im Falle  $\sum a_{ij} = 0$  und  $v = 3$  im Falle  $\sum a_{ij} = 1$  würden also  $v' = -1$  ergeben und sind daher nicht möglich. Die Werte für die Fälle  $\sum a_{ij} = 2$  und  $\sum a_{ij} = 3$  ergeben sich mit

$$u_{ij}(I-X) = 1 - u_{ij}(X)$$

und daher

$$v(I-X) = 3 - v(X) \quad , \quad v'(I-X) = 3 - v'(X) \quad .$$

Setzen wir für beliebige  $n \geq 3$

$$v_{ijk} = u_{ij} + u_{jk} + u_{ki}$$

mit paarweise verschiedenen  $i, j, k$ , so erhalten wir analog (vgl. 553) die folgende Tabelle:

(3)	$a_{ij} + a_{jk} + a_{ki}$	0	1	2	3
	$v_{ijk}$	0	0, 1, 2	1, 2, 3	3

Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$(4) \quad v_{ijk} = 2(a_{ij} + a_{jk} + a_{ki}) - v_{ikj}$$

$$(5) \quad v_{ijk} = v_{lij} + v_{ljk} + v_{lki} - 2(a_{li} + a_{lj} + a_{lk})$$

( $i, j, k, l$  paarweise verschieden. Die letzte Gleichung zeigt, daß alle  $v_{ijk}$  berechnet werden können z.B. aus

$$(6) \quad v_{ij} := v_{nij} = v_{ijn} \quad .$$



(62)

Im Fall  $n = 4$  behandeln wir zusätzlich die blockweisen Vertauschungen, z.B.  $W = (12)(34)$ . Dann ist

$$W - I = S \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ mit } S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Wir erhalten

$$S^{-1}F_W(X)S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} - u_{12} & 1 - 2a_{13} & w - 2(a_{41} + a_{23}) \\ u_{41} - u_{21} & u_{41} & 2(a_{12} + a_{34}) - w & 1 - 2a_{24} \end{bmatrix}$$

mit

$$w = u_{12} + u_{23} + u_{34} + u_{41} .$$

Aus der Berechnung der Determinante von  $S^{-1}F_W(X)S$  ergibt sich

$$w^2 + pw + q = 0$$

mit

$$p = 2(a_{12} + a_{23} + a_{34} + a_{41})$$

$$q = 4(a_{12} + a_{34})(a_{23} + a_{41}) + 4a_{13}a_{24} - 2(a_{13} + a_{24}) + 2a_W .$$

Daraus errechnet sich

$$\frac{1}{4} p^2 - q = ((a_{12} + a_{34}) - (a_{23} + a_{41}))^2 + z - 2a_W$$

mit

$$z = 2(a_{13} + a_{24}) - 4a_{13}a_{24} .$$

Dieser Ausdruck  $z$  kann nur die Werte 0 oder  $\pm 2$  annehmen, also kann  $z - 2a_W$  nur die Werte  $2, 0, -2$  annehmen, wenn (1)' gelten soll. Damit  $w$  rational ist, muß die ganze Zahl  $\frac{p^2}{4} - q$  eine Quadratzahl sein. Da der Abstand zweier Quadratzahlen niemals 2 ist, kann das nur richtig sein, wenn  $z - 2a_W = 0$  ist. Demnach ist

(62)

$$w = (a_{12} + a_{34} + a_{23} + a_{41}) \\ \pm (a_{12} + a_{34} - a_{23} - a_{41})$$

also

$$w = 2(a_{12} + a_{34}) \quad \text{oder} \quad w = 2(a_{23} + a_{41}) :$$

Für beliebiges  $n \geq 4$  und vier paarweise verschiedene Indizes  $i, j, k, l$  zwischen 1 und  $n$  setzen wir analog

$$w_{ijkl} := u_{ij} + u_{jk} + u_{kl} + u_{li} .$$

Dann ist

$$(7) \quad w_{ijkl} = v_{ijk} + v_{ikl} - 2a_{ik} = v_{jkl} + v_{ijl} - 2a_{jl}$$

und es gilt

$$(8) \quad w_{ijkl} = 2(a_{ij} + a_{kl}) \quad \text{oder} \quad w_{ijkl} = 2(a_{il} + a_{jk}) .$$

Für

$$w_{ilkj} = 2(a_{ij} + a_{jk} + a_{kl} + a_{li}) - w_{ijkl}$$

gilt die jeweils andere Alternative. Insbesondere erhalten wir mit der Definition (6) aus (7) und (8):

$$(9) \quad \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{jk}) \in \{ a_{ij} + a_{jn} + a_{kn}, a_{jk} + a_{in} + a_{jn} \} .$$

Wir haben bisher die sich aus (1)' ergebenden notwendigen Bedingungen für alle  $W \in \mathcal{W} = S_n$  mit  $\text{Rang}(W-I) \leq 2$  abgeleitet und dabei nur benutzt, daß  $X$  rational sein soll. Wir werden zeigen, daß diese Bedingungen zur Bestimmung von  $\text{ZA}(G')$  schon ausreichen.

Als Basis des Einheitsgitters  $L'$  von  $G' = \text{SU}(n)$  verwenden wir

$$b_i := e_i - e_n \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, n-1 .$$

Ist  $X \in \text{ZA}(G)$ , so gilt für die Komponenten  $(Xb_i)_j$  des Vektors  $Xb_i \in \underline{T} = \mathbb{R}^n$  :

(62)

$$\begin{aligned} (Xb_i)_n &= x_{ni} - x_{nn} \\ (Xb_i)_i - (Xb_i)_n &= x_{ii} - x_{in} - x_{ni} + x_{nn} \\ &= u_{in} + u_{ni} \\ &= 2 a_{in} \end{aligned}$$

nach Gleichung (2), und für  $j \neq i, n$

$$\begin{aligned} (Xb_i)_j - (Xb_i)_n &= x_{ji} - x_{jn} - x_{ni} + x_{nn} \\ &= -u_{ji} + u_{jn} + u_{ni} \\ &= v_{ij} - 2 a_{ij} \end{aligned}$$

nach (6) und (2). Also erhalten wir

$$(10) \quad Xb_i = 2a_{in}e_i + \sum_j' (v_{ij} - 2a_{ij})e_j + (x_{ni} - x_{nn})e$$

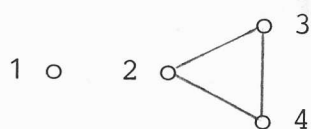
wobei die Summe  $\Sigma'$  über alle  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $j \neq i$ , zu nehmen ist. Da die  $v_{ij}$  und  $a_{ij}$  für zulässige  $X$  ganze Zahlen sind (vgl. (3)), ist automatisch  $pXb_i \in pL = L'_0$ , ohne daß wir dies vorausgesetzt haben. Wir können ohne Einschränkung  $x_{ni} = x_{nn}$  annehmen für  $i = 1, \dots, n-1$ , da dies nichts an  $pX$  ändert (vgl. 554); damit ist  $X|_{\underline{T}}$  ganzzahlig.

Als erste Folgerung aus (10) und (3) sehen wir, daß  $X' := pX|_{\underline{T}} = 0$  falls alle  $a_{ij} = 0$ , und  $X' = I$  falls alle  $a_{ij} = 1$ . Dies gilt insbesondere im Fall  $n = 2$ ; in  $SU(2)$  gibt es also keine echten Doppelquotienten.

63. Graphen

Aus 62(10) ersehen wir schon, daß die Menge  $ZA(G')$  endlich ist. Durch Fallunterscheidung für die Werte der  $a_{ij} \in \{0,1\}$  sowie der  $v_{ij} \in \{0,1,2,3\}$  können wir alle Kandidaten zulässiger Abbildungen ermitteln.

Um diese Fallunterscheidung übersichtlicher zu gestalten, führen wir eine Menge  $G_n$  von Graphen ein. Jeder Graph besteht aus  $n$  Punkten, die den Indizes  $1, \dots, n$  entsprechen, sowie gewissen Verbindungen zwischen diesen Punkten: Zwei verschiedene Punkte  $i$  und  $j$  werden genau dann miteinander verbunden, wenn  $a_{ij} = 1$  ist. Zum Beispiel bedeutet der Graph



$a_{23} = a_{34} = a_{42} = 1$ ,  $a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ . Die Menge  $G_n$  entspricht also bijektiv der Menge der möglichen Bewertungen der  $a_{ij}$  mit 0 oder 1. Ein Graph  $g \in G_n$  soll zulässig heißen, wenn es ein  $X \in ZA(G)$  gibt mit

$$a_{ij}(g) = a_{ij}(X) \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq n ,$$

Kurzschreibweise:  $g = g(X)$ .

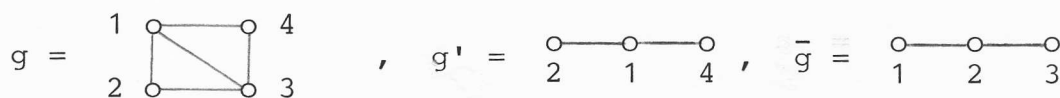
Es sei  $W_o := \{W_{ij} ; 1 \leq i < j \leq n\}$  die Menge der Spiegelungen in  $W = S_n$ .  $W_o$  ist eine Konjugiertenklasse von  $W$ , sogar von  $N_{\text{Aut}(L)}(W)$ . Daher operiert  $W$  auf  $G_n$ : Ist  $A \in W$  und  $g \in G_n$ , so ist  $g^A \in G_n$  definiert durch

$$a_W(g^A) := a_{AWA^{-1}}(g) .$$

(63)

Zwei solche Graphen in einem Orbit sollen äquivalent heißen. Offensichtlich sind Graphen genau dann äquivalent, wenn sie bis auf die Nummerierung übereinstimmen; eine Äquivalenzklasse ist also ein Graph ohne Nummerierung der Ecken. Das Komplement  $cg = c_n g$  eines Graphen  $g \in G_n$  ist der Graph in  $G_n$ , bei dem genau die in  $g$  unverbundenen Eckpunkte verbunden werden. Ist  $g = g(X)$  zulässig, so ist  $cg = g(I-X)$  nach 551(b), da  $\det W = -1$  für alle  $W \in W_0$ , und  $g(A^{-1}XA) = g^A$  für alle  $A \in W$  nach 551(c). Deshalb brauchen wir die zulässigen Graphen nur bis auf Äquivalenz und Komplement-Bildung zu bestimmen. Deshalb betrachten wir Graphen ohne Nummerierung mit bis zu  $\frac{1}{4} n(n-1)$  Verbindungen (die Hälfte aller möglichen Verbindungen).

Ein Teilgraph  $g'$  eines Graphen  $g \in G_n$  besteht aus  $m$  Punkten in  $\{1, \dots, n\}$  mit allen ihren Verbindungen in  $g$ ; sind diese Punkte  $i_1, \dots, i_m$  ( $m < n$ ), so schreiben wir  $g' = g \cap \{i_1, \dots, i_m\}$ . Beispiel:



$g'$  ist ein Teilgraph von  $g$ , aber nicht  $\bar{g}$ . Nach Umm Nummerierung ist  $g' \in G_m$ . Nach Kor. 553 ist jeder Teilgraph eines zulässigen Graphen zulässig. Umgekehrt heißt  $g$  eine Erweiterung von  $g'$ , wenn  $g'$  ein Teilgraph von  $g$  ist; wir schreiben dafür

$$g' \subset g .$$

Auf  $G_n$  gibt es eine Teilordnung  $\leq$ : Es sei  $g_1 \leq g_2$  genau dann, wenn alle Verbindungen von  $g_1$  auch in  $g_2$  vorkommen. Wir fassen  $G_{n-1}$  als Teilmenge von  $G_n$  auf mit der Inklusion

(63)

$$g' \rightarrow g = g' \circ_n$$

(d.h.  $a_{ij}(g) = a_{ij}(g')$  für  $i, j \leq n-1$  und  $a_{in}(g) = 0$ ).  
Ist  $g' \in G_{n-1}$ , so ist  $c_n c_{n-1} g' \in G_n$  die größte Erweiterung von  $g'$  in  $G_n$ : Sie enthält alle Verbindungen von  $g'$  und alle Verbindungen mit  $n$ . Deshalb gilt:

Lemma 63:  $g \in G_n$  ist Erweiterung von  $g' \in G_{n-1}$  genau dann, wenn gilt:

$$g' \leq g \leq c_n c_{n-1} g \quad .$$

Wir werden induktiv vorgehen und zulässige Erweiterungen von zulässigen Graphen bestimmen.

#### 64. SU(3)

Wir untersuchen zunächst den in mancher Hinsicht speziellen Fall  $n = 3$ . Die einzige zu betrachtende Klasse von Graphen ist  $\text{o} \text{---} \text{o} \quad \text{o}$ , repräsentiert durch

$$\begin{array}{ccc} \text{o} & \text{---} & \text{o} & & \text{o} \\ 1 & & 3 & & 2 \end{array}$$

also  $a_{13} = 1$ ,  $a_{12} = a_{23} = 0$ . Aus 62(3) ergibt sich  $v_{123} =: v_{12} \in \{0, 1, 2\}$ ,  $v_{21} = 2 - v_{12}$ . Damit erhalten wir aus 62(10) folgende Lösungen  $X_1, X_2, X_3$ :

k	$X_k b_1$	$X_k b_2$
1	$(2, 0, 0)^t$	$(2, 0, 0)^t$
2	$(2, 1, 0)^t$	$(1, 0, 0)^t$
3	$(2, 2, 0)^t$	$(0, 0, 0)^t$

(64)

Die zugehörigen Tori ergeben sich aus 54(4):

$$\underline{S}_k := \text{Span} \{ (X_k b_j; X_k b_j - b_j)' ; j = 1, 2 \} ,$$

also

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]' \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right]' \right\} , \\ \underline{S}_3 &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]' \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right]' \right\} \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der ersten und dritten Komponente in  $\underline{S}_3$  sehen wir, daß  $S_1$  und  $S_3$  äquivalent sind. Ferner ist

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{array} \right]' \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{array} \right]', \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{array} \right]' \right\} . \end{aligned}$$

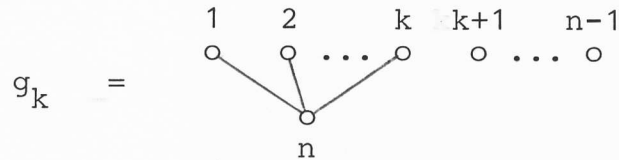
Vertauscht man auf der rechten Seite die 2. und 3. Zeile und vertauscht anschließend die rechte mit der linken Seite, so sieht man, daß auch  $S_2$  zu  $S_1$  äquivalent ist.  $S_1$  ist aber bis auf Äquivalenz der in 42 untersuchte Torus  $U$ ; insbesondere ist  $X_1$  (also auch  $X_2, X_3$ ) zulässig.

Wir haben also gezeigt:

Satz 64 Die einzigen 2-Tori in  $SU(3)^2$ , die fixpunktfrei auf  $SU(3)$  operieren, sind bis auf Äquivalenz  $\{e\} \times T_3^1$  und der in § 42 behandelte Torus  $U$ .

65. Zulässige Graphen und Endomorphismen

Für  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  betrachten wir den Graphen



mit  $a_{in}(g_k) = 1$  für  $1 \leq i \leq k$  und  $a_{ij}(g_k) = 0$  für alle übrigen Paare  $(i, j)$ .

Satz 65:  $g_k$  ist zulässig in  $G_n$  für  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Zu jedem  $g_k$  gibt es zwei zulässige Endomorphismen  $X_{k1}$  und  $X_{k2}$  mit

$$X_{k1}(b_a) = -2e_n \quad \text{für } 1 \leq a \leq k$$

$$X_{k1}(b_p) = 0 \quad \text{für } k+1 \leq p \leq n-1$$

$$X_{k2}(b_i) = e^k := e_1 + \dots + e_k \quad \text{für } 1 \leq i \leq n-1.$$

Setzen wir  $b_{ij} := e_i - e_j$ , so haben die zugehörigen Tori bis auf Äquivalenz die folgenden Liealgebren:

$$\underline{S}_{k1} = \text{Span} \{ (2e_n; e_1 + e_n)', (0; b_{a1}), (0; b_{pn}) ; \\ 2 \leq a \leq k, k+1 \leq p \leq n-1 \},$$

$$\underline{S}_{k2} = \text{Span} \{ (2e^k; 2e^k + b_{n1})', (0; b_{i1}) ; 2 \leq i \leq n-1 \}$$

für  $1 \leq k \leq [\frac{n}{2}]$ , wobei noch  $S_{11}$  und  $S_{12}$  äquivalent sind,

und  $X_{ki}$  ist äquivalent zu  $X_{n-k,i}$  für  $i = 1, 2$ . Ist  $n = 2m$

gerade, so ist insbesondere

$$\underline{S}_{-m1} = \text{Span} \{ (e_n; 0)', (0; b_{a1}), (0; b_{pn}) ; \\ 2 \leq a \leq k, k+1 \leq p \leq n-1 \},$$

$$\underline{S}_{-m2} = \text{Span} \{ (b_{1n} + b_{2,n-1} + \dots + b_{m-1,m}; 0), (0; b_{i1}) ; \\ 2 \leq i \leq n-1 \}.$$



(65)

Beweis: Da  $g_0 = g(0)$ , dürfen wir  $k \geq 1$  und wegen § 64 auch  $n \geq 4$  voraussetzen. Für den ganzen Beweis seien

$$h, i, j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad 1 \leq a, b, c \leq k < p, q, r \leq n-1.$$

Nach 62(3) gilt

$$v_{ab} \in \{1, 2, 3\}, \quad v_{ap}, v_{pa} \in \{0, 1, 2\}, \quad v_{pq} = 0,$$

und nach 62(9) wegen  $a_{ij} = 0$ :

$$\frac{1}{2} (v_{ij} + v_{jh}) \in \{a_{in} + a_{jn}, a_{jn} + a_{hn}\}.$$

Daraus ergibt sich

$$(a) \quad v_{ab} + v_{bc} = 4, \quad v_{ab} + v_{bp} \in \{4, 2\}$$

$$(b) \quad v_{ap} + v_{pb} = 2, \quad v_{pa} + v_{ab} \in \{4, 2\}$$

$$(c) \quad v_{pa} + v_{aq} = 2, \quad v_{ap} + v_{pq} \in \{2, 0\}$$

$$(d) \quad v_{pq} + v_{qr} = 0, \quad v_{pq} + v_{qa} \in \{2, 0\}$$

Aus (a) und (d) links lesen wir ab:

$$(e) \quad v_{ab} = 2, \quad v_{pq} = 0$$

Damit erhalten wir aus den rechten Gleichungen

$$(f) \quad v_{pa}, v_{ap} \in \{0, 2\}.$$

Ist  $k = n-1$ , so ist  $X'$  nach 62(10) durch (e) eindeutig bestimmt:

$$X'b_i = 2(e^{n-1})' = -2e_n'$$

Diese Abbildung ist zulässig: Ist  $W \in \mathcal{W}$ , so ist  $WX'b_i = -2e_r'$  für ein  $r \in \{1, \dots, n\}$ , also ist  $(W-I)X'b_i = -2b_r$  (falls  $r \neq n$ ) oder  $(W-I)X'b_i = 0$  (falls  $r = n$ ). Im zweiten Fall ist  $F_W(X') = I$ , und im ersten gilt ebenfalls  $F_W(X') \in \text{Aut}(L')$ , denn

$$(b_1 - 2b_k) \wedge \dots \wedge (-b_k) \wedge \dots \wedge (b_{n-1} - 2b_k) = -b_1 \wedge \dots \wedge b_{n-1}.$$

Wir können also jetzt  $k \leq n-2$  annehmen. Wir werden zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall:  $v_{\bar{a}\bar{p}} = 2$  für ein gewisses  $\bar{a}$  und  $\bar{p}$ .

Nach Gleichung (b) ist  $v_{\bar{p}b} = 0$  für alle  $b$ , nach (c) dann  $v_{bq} = 2$  für alle  $q$ , und wieder nach (b) oder 62(4) gilt dann auch  $v_{qb} = 0$ . Somit gilt mit (e) nach 62(10)

$$X'b_a = 2(e^{n-1})' = -2e_n', \quad X'b_p = 0.$$

Diese Abbildung ist zulässig nach einem ähnlichen Argument wie im Fall  $k = n-1$  oben. Nach 54(4) hat der zugehörige Torus die Liealgebra

$$\begin{aligned} S_{k1} &= \text{Span} \{ (2e_n; 2e_n + b_{an})', (0; b_{pn}) ; \text{alle } a, p \} \\ &= \text{Span} \{ (2e_n; e_n + e_1)', (0; b_{a1}), (0; b_{pn}) ; a \geq 2 \}. \end{aligned}$$

Durch Vertauschen der Komponenten 1 und  $n$  auf der linken Seite sieht man, daß  $S_{k1}$  und  $S_{n-k,1}$  äquivalent sind. Dies gilt ebenso für  $k = 1$ . Diese Äquivalenz-Umformung ist von dem im Begriff "Äquivalenz von Graphen" nicht berücksichtigten Typ von 551(d), ebenso wie die Umformungen in § 64.

2. Fall:  $v_{ap} = 0$  für alle  $a, p$ . Dann folgt  $v_{pa} = 2$ , und mit (e) erhalten wir aus 62(10)

$$X'b_i = 2(e^k)' = -2(e - e^k)'$$

Diese Abbildung ist zulässig: Ist  $We_r = e_{\sigma(r)}$  für eine Permutation  $\sigma \in S_n$ , so ist

$$u := (W-I)X'b_i = 2(\sum_a' b_{\sigma(a)} - \sum_a b_a)$$

wobei die erste Summe  $\sum'$  über alle  $a$  mit  $\sigma(a) \neq n$  zu nehmen ist. Setzen wir  $u = \sum_r u_r b_r$ , so gilt

(65)

$$(b_1+u) \wedge \dots \wedge (b_{n-1}+u) = (1 + \sum u_r) b_1 \wedge \dots \wedge b_{n-1} ,$$

und  $\sum u_r$  ist entweder 0 (falls  $\sigma(a) \neq n$  für alle  $a$ ) oder  $-2$ . Daher ist  $\det F_W(X') = \pm 1$  und damit  $F_W(X') \in \text{Aut}(L')$ . Der zugehörige Torus hat gemäß 54(4) die Liealgebra

$$\begin{aligned} S_{k2} &= \text{Span} \{ (2e^k; 2e^{k-b_{in}})' ; \text{ alle } i \} \\ &= \text{Span} \{ (2e^k; 2e^{k+b_{n1}})', (0; b_{i1}) ; i \geq 2 \} \\ &= \text{Span} \{ (2(e-e^k; 2(e-e^k)+b_{1n})', (0; b_{i1}) ; i \geq 2 \} \end{aligned}$$

Die letzten beiden Zeilen zeigen, daß  $S_{k2}$  und  $S_{n-k,2}$  äquivalent sind, wobei man links die Komponenten  $2, \dots, k$  blockweise mit den Komponenten  $k+1, \dots, n-1$  und rechts die Komponenten  $1, \dots, k$  blockweise mit den Komponenten  $k+1, \dots, n$  zu vertauschen hat.

Ist  $k = m = n/2$ , so ist

$$(2e^m)' = (2e^m - e)' = b_{1n} + b_{2,n-1} + \dots + b_{m-1,m}$$

und  $(2e^m)' + b_{n1} \in \text{Span} \{ b_{i1} ; 2 \leq i \leq n-1 \}$ . Außerdem ist

$$(e_1 + e_n)' = \frac{1}{m} (b_{12} + \dots + b_{1m} + b_{n,m+1} + \dots + b_{n,n-1})$$

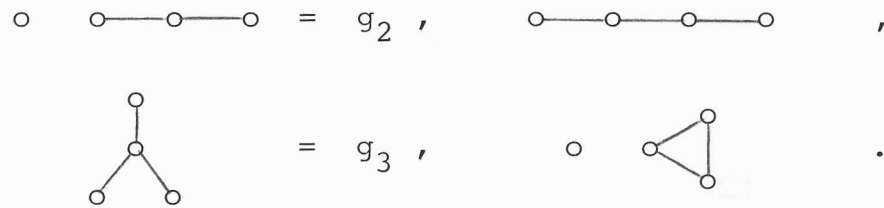
also  $(e_1 + e_n)' \in \text{Span} \{ b_{a1}, b_{pn} ; 2 \leq a \leq k < p \leq n \}$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 66. Die übrigen Graphen

Wir wollen zunächst den Fall  $n=4$  betrachten. Nach § 63 haben wir Graphen mit bis zu drei Verbindungen zu untersuchen. Diese sind:

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array} = g_1, \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \quad \circ \text{---} \circ \end{array},$$

(66)



Die Graphen  $g_k$  wurden im vorigen Paragraphen untersucht, und die letzten beiden Graphen sind komplementär.

Lemma:  $\begin{array}{cc} \circ - \circ & \circ - \circ \\ 1 \quad 2 & 3 \quad 4 \end{array}$  ist unzulässig .

Beweis: Aus 62(3) erhalten wir  $v_{12}, v_{23}, v_{31} \in \{0, 1, 2\}$  und aus 62(9)

- (a)  $v_{12} + v_{23} \in \{4, 0\}$  , (b)  $v_{23} + v_{31} = 2$  ,  
 (c)  $v_{31} + v_{12} \in \{4, 0\}$  .

Wegen (a) und (c) sind alle  $v_{ij} \neq 1$  . Ist  $v_{23} = 0$  , so ist  $v_{12} = 0$  nach (a) und  $v_{31} = 0$  nach (c), im Widerspruch zu (b). Ist  $v_{23} = 2$  , so ist  $v_{12} = 2$  nach (a) und  $v_{31} = 2$  nach (c), was auch im Widerspruch zu (b) steht. Also ist der Fall unmöglich.

Lemma:  $\begin{array}{cccc} \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$  ist unzulässig

Beweis: Aus 62(3) erhalten wir  $v_{12}, v_{31} \in \{0, 1, 2\}$  ,  $v_{23} \in \{1, 2, 3\}$  und aus 62(9):

- (a)  $v_{12} + v_{23} \in \{2, 4\}$  , (b)  $v_{23} + v_{31} \in \{2, 4\}$   
 (c)  $v_{31} + v_{12} \in \{0, 4\}$  .

Schließlich folgt aus 62(5) und 62(3)

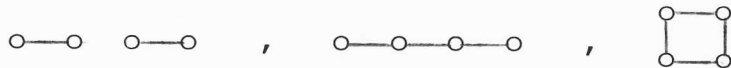
(66)

$$(d) \quad v_{12} + v_{23} + v_{31} \in \{3, 4, 5\} \quad .$$

Ist  $v_{12} = 0$ , so ist  $v_{31} = 0$  nach (c), also  $v_{23} = 2$  nach (b), im Widerspruch zu (d). Der Fall  $v_{12} = 1$  ist unmöglich wegen (c) und wegen  $v_{31} \in \{0, 1, 2\}$ . Ist  $v_{12} = 2$ , so ist mit (c) auch  $v_{31} = 2$  und  $v_{23} = 0$ , im Widerspruch zu  $v_{23} \in \{1, 2, 3\}$ . Daher ist der Graph unzulässig.

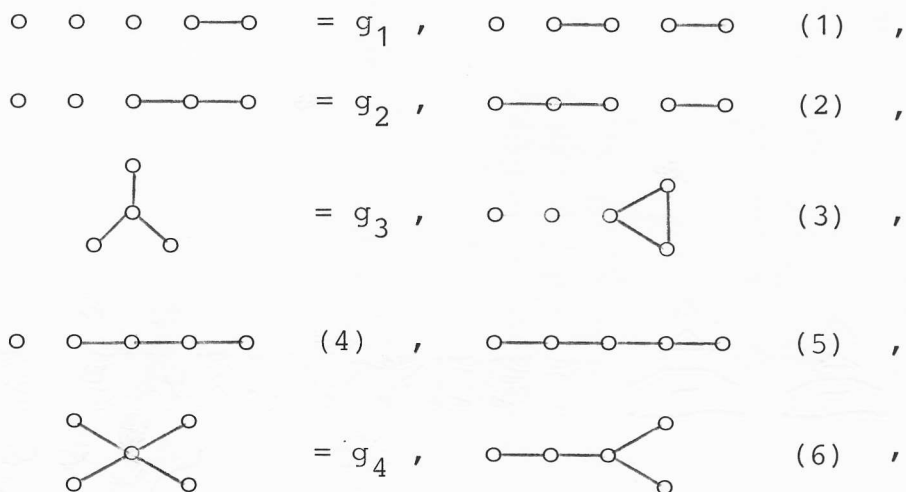
Wir haben damit gezeigt:

Satz 661: Nur die Graphen  $g_1, g_2, g_3, g_0$  und ihre Komplemente sind zulässig in  $G_4$ . Die Graphen

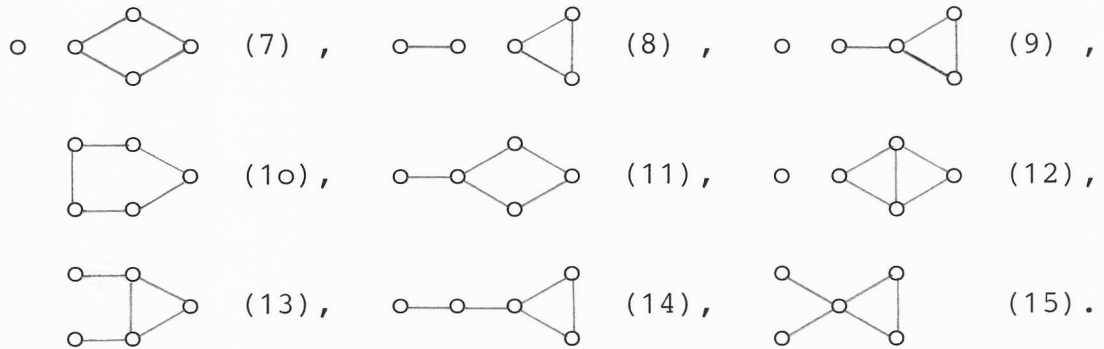


sind unzulässig.

Jetzt gehen wir über zum Fall  $n=5$ . Da  $\frac{1}{4} n(n-1) = 5$ , sind alle Graphen mit bis zu 5 Verbindungen zu betrachten. Diese sind, geordnet nach der Anzahl der Verbindungen, die folgenden:



(66)

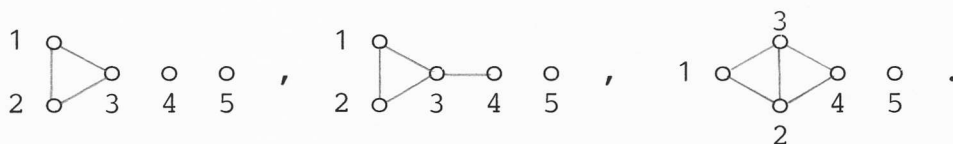


(Die Vollständigkeit der Liste sieht man durch Aufsummieren der Mächtigkeiten der Äquivalenzklassen. Ein Graph  $g \in G_n$  hat eine Äquivalenzklasse der Mächtigkeit  $n!/k$ , falls die Symmetriegruppe von  $g$  die Ordnung  $k$  hat.)

Alle diese Graphen enthalten unzulässige Teilgraphen mit vier Punkten gemäß Satz 661, mit Ausnahme von  $g_1, \dots, g_4$  sowie den Graphen (3), (9), (12), (15). Die beiden letztgenannten Graphen sind zueinander komplementär (ebenso wie (11) und (14)), wir brauchen also nur einen von beiden zu untersuchen.

Lemma: Die Graphen-Klassen (3), (9), (12) sind unzulässig.

Beweis: Wir repräsentieren diese Klassen folgendermaßen:

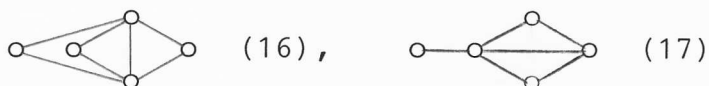


In allen Fällen ergibt sich aus 62(3):  $v_{ij} \in \{0,1,2\}$  für  $i, j \in \{1,2,3\}$ ,  $i \neq j$ , sowie  $v_{14} = v_{41} = 0$ . Aus 62(9) erhalten wir:  $v_{12} + v_{23} = v_{23} + v_{31} = v_{31} + v_{12} = 2$ , woraus sich  $v_{12} = v_{23} = v_{31} = 1$  ergibt. Außerdem gilt nach 62(9):  $v_{41} + v_{12} \in \{0,2\}$ , also  $v_{41} = 1$ , Widerspruch!

(66)

Wir haben damit bewiesen:

Satz 662: Nur die Graphenklassen  $g_1, \dots, g_4$  und ihre Komplemente sind zulässig in  $G_4$ . Insbesondere sind die Graphenklassen (3), (9), (12), (15) sowie die Komplemente von (3) und (9), nämlich



unzulässig.

Jetzt können wir uns dem allgemeinen Fall zuwenden:

Satz 663: Jeder zulässige Graph in  $G_n$  für  $n \geq 2$  ist zu einem der Graphen

$$g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, c_n g_0, \dots, c_n g_{n-1}$$

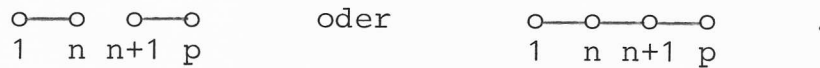
äquivalent.

Beweis: (durch Induktion über  $n$ ) Die Behauptung ist richtig für  $n \leq 5$ . Sie sei für ein  $n \geq 5$  bewiesen. Alle in  $G_{n+1}$  zulässigen Graphen sind also Erweiterungen von  $g_k$  oder  $c_n g_k$  mit  $0 \leq k \leq n$ . Außerdem dürfen die in Satz 661 und 662 angegebenen unzulässigen Graphen nicht als Teilgraphen auftreten.

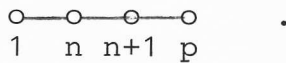
Es sei also  $g$  eine zulässige Erweiterung von  $g_k$ . Wir dürfen  $k \geq 1$  voraussetzen, denn jede Erweiterung des leeren Graphen  $g_0$  ist vom Äquivalenztyp  $g_r$  für ein  $r \in \{0, \dots, n\}$ . Wir wollen zeigen:  $g = g_k$  oder  $g \sim g_{k+1}$ .

(66)

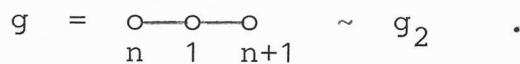
1. Fall:  $n+1$  sei mit keinem der Punkte  $1, \dots, k$  verbunden. Dann ist  $n$  auch mit keinem Punkt  $p \in \{k+1, \dots, n-1\}$  verbunden, denn andernfalls enthielte  $g$  einen der nach 661 unzulässigen Teilgraphen



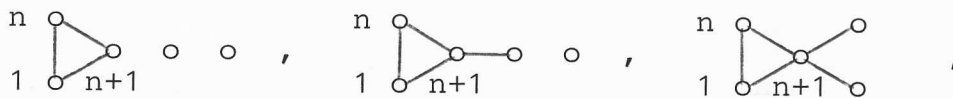
2. Fall:  $n+1$  sei mit einem der Punkte  $1, \dots, k$  verbunden, etwa mit dem Punkt  $1$ . Wir betrachten zunächst den Fall  $k=1$ . Ist  $n+1$  nicht mit  $n$  verbunden, so kann  $n$  auch nicht mit  $p \geq 2$  verbunden sein, denn sonst enthielte  $g$  den unzulässigen Teilgraphen



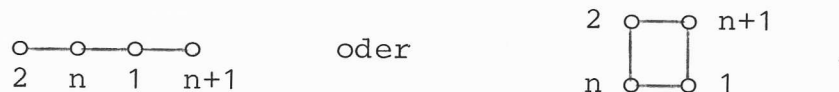
Also ist in diesem Falle



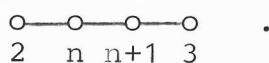
Wäre aber  $n+1$  auch mit  $n$  verbunden, so enthielte  $g$  einen der nach 662 unzulässigen Teilgraphen



dies ist also unmöglich. Wir gehen daher über zum Fall  $k \geq 2$ . Dann muß  $n+1$  auch mit  $n$  verbunden sein, denn sonst enthielte  $g$  einen der nach 661 unzulässigen Teilgraphen



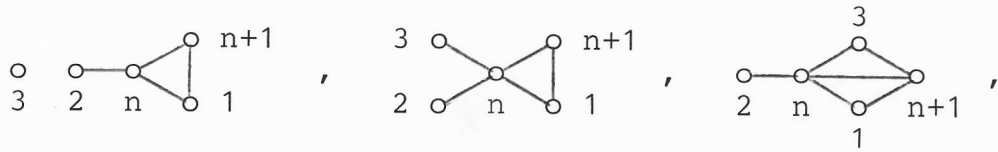
Nehmen wir zunächst an, daß  $n+1$  nicht mit 2 verbunden ist. Der Punkt 3 kann nur mit  $n$  und mit  $n+1$  verbunden sein, mit keinem weiteren Punkt. Ist 3 nur mit  $n+1$  verbunden, so ergibt sich der nach 661 unzulässige Teilgraph





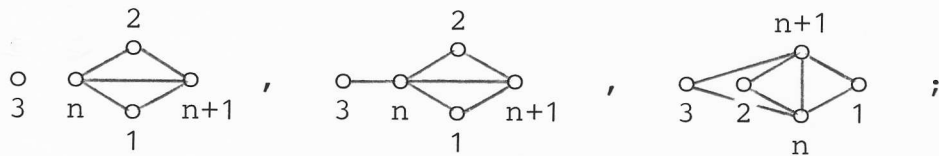
(66)

Übrig bleiben die Fälle



die alle nach 662 unzulässig sind.

Nehmen wir jetzt an, daß n+1 mit 2 verbunden ist. Dann enthält  $g$  einen von den Teilgraphen



diese sind nach 662 unzulässig.

Der 2. Fall ist also für  $k \geq 2$  gänzlich unmöglich.

Wir haben damit gezeigt: Jede zulässige Erweiterung von  $g_k \in G_n$  in  $G_{n+1}$  ist äquivalent zu  $g_r$  (mit  $r = k$  oder  $r = k+1$  falls  $k > 0$ ). Nun sei  $g \in G_{n+1}$  eine zulässige Erweiterung von  $c_n g_k$ . Nach Lemma 63 gilt also

$$c_n g_k \leq g \leq c_{n+1} c_n c_n g_k = c_{n+1} g_k .$$

Dann ist auch  $\bar{g} := c_{n+1} g$  zulässig, und es gilt:

$$g_k \leq \bar{g} \leq c_{n+1} c_n g_k ,$$

also ist  $\bar{g}$  eine zulässige Erweiterung von  $g_k$ , und damit haben wir  $\bar{g} \sim g_r$  und also  $g \sim c_{n+1} g_r$ . Damit ist der Satz bewiesen.

Das Ergebnis dieses Kapitels können wir also so zusammen fassen:

Satz 664: Die auf  $G' = SU(n)$  fixpunktfrei operierenden  $(n-1)$ -Tori in  $G' \times G'$  sind zu den in Satz 65 angegebenen äquivalent.

Kapitel 7

Fixpunktfreie Torus-Aktionen von maximalem Rang  
auf  $SO(m)$ ,  $Spin(m)$ ,  $Sp(n)$

71.  $SO(m)$ ,  $Spin(m)$ ,  $Sp(n)$  und  $U(n)$

Wir betrachten als nächstes die orthogonalen Gruppen

$$O(m) := \{ A \in M(m, \mathbb{R}) ; A^t A = I \} ,$$
$$SO(m) := \{ A \in O(m) ; \det A = 1 \} .$$

Für  $n := \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  können wir  $U(n)$  als Untergruppe von  $SO(2n) \subseteq SO(m)$  auffassen: Wir identifizieren  $\mathbb{C}^n = \{x + iy ; x, y \in \mathbb{R}^n\}$  mit  $\mathbb{R}^{2n} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x, y \in \mathbb{R}^n \}$  und eine komplexe  $n \times n$ -Matrix  $C = A + iB$ , wobei  $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ , mit der Matrix

$$\tilde{C} := \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \in M(2n, \mathbb{R}) .$$

$C$  ist unitär genau dann, wenn  $\tilde{C}$  orthogonal ist. Im folgenden werden wir  $C$  und  $\tilde{C}$  nicht mehr unterscheiden. Wir haben daher die Einbettungen

$$U(n) \subset SO(2n) \subset O(2n) \subset SO(2n+1) .$$

Der maximale Torus  $T = T_n$  von  $U(n)$  ist auch maximaler Torus in  $SO(2n)$  und  $SO(2n+1)$ . Wie in § 61 wird  $\underline{T}$  wieder mit  $\mathbb{R}^n$  identifiziert: Ist  $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  und

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \dots & \\ & & x_n \end{bmatrix} ,$$

so identifizieren wir  $x$  mit  $iD = \begin{bmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{bmatrix} \in \underline{T}$ . Das Einheits-

(71)

Gitter ist wieder  $L = \mathbb{Z}^n$ . Zwei Elemente in  $\underline{T}$  sind genau dann unter  $O(2n)$  konjugiert, wenn ihre Koeffizienten (Eigenwerte von  $D$ ) bis auf Reihenfolge und Vorzeichen übereinstimmen, und sie sind schon unter  $SO(2n)$  konjugiert, wenn die Anzahl der dabei auftretenden Vorzeichenwechsel gerade ist. Hieraus ergeben sich die Weylgruppen

$$W(SO(2n+1)) = S_n V_n =: W_n \quad ,$$

$$W(SO(2n)) = S_n V'_n =: W'_n \quad ,$$

wobei  $S_n$  die Permutationsgruppe,  $V_n$  die Gruppe der Diagonalmatrizen mit Koeffizienten  $\pm 1$  und  $V'_n$  die Untergruppe der Matrizen in  $V_n$  mit Determinante 1 bezeichnen. (Vgl. [5])

$SO(m)$  ist nicht einfach zusammenhängend, sondern besitzt eine zweiblättrige Überlagerung, die einfach zusammenhängend ist:  $Spin(m)$ . Deren Einheitsgitter  $\hat{L}$  wird durch die Vektoren  $e_i \pm e_j \in \underline{T} = \mathbb{R}^n$  aufgespannt. Wir werden die zulässigen Abbildungen von  $Spin(m)$  (vgl. § 54) nach dem notwendigen Kriterium von Korollar 552 bestimmen und zeigen, daß  $ZA(Spin(m)) = ZA(SO(m))$  gilt. Außerdem ist natürlich  $ZA(SO(2n+1))$  eine Teilmenge von  $ZA(SO(2n))$ , da die zugehörige Weylgruppe größer ist.

Die Gruppe der symplektischen unitären Matrizen läßt sich darstellen als

$$Sp(n) := \{ A \in M(n, \mathbb{H}) ; A^* A = I \} .$$

Dabei ist  $\mathbb{H}$  die Quaternionen-Divisionsalgebra, deren Basis wir wie üblich  $\{1, i, j, k\}$  nennen. Die so definierte Gruppe  $Sp(n)$  enthält in natürlicher Weise  $U(n) = Sp(n) \cap M(n, \mathbb{C})$  als Untergruppe, und der maximale Torus  $T$  von  $U(n)$  ist auch maximaler Torus von  $Sp(n)$ . Da  $jij^{-1} = -i$ , sind Elemente

von  $\mathbb{T}$  konjugiert unter  $Sp(n)$ , wenn ihre Koeffizienten bis auf Reihenfolge und Vorzeichen übereinstimmen. Die Weylgruppe ist also dieselbe wie bei  $SO(2n+1)$ :

$$W(Sp(n)) = S_n V_n = W_n$$

(vgl. [5]). Daher gilt  $ZA(Sp(n)) = ZA(SO(2n+1))$ .

Überlagerungen brauchen wir hier nicht zu betrachten, denn die Gruppe  $Sp(n)$  ist einfach zusammenhängend für alle  $n \geq 1$ .

## 72. $W_n$ - und $W'_n$ -Zulässigkeit

Es sei  $U$  eine Untergruppe von  $GL(n, \mathbb{Z}) = \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ , und für eine Matrix  $X \in M(n, \mathbb{Q})$  und  $W \in U$  definieren wir

$$F_W(X) := (W-I)X + I \in M(n, \mathbb{Q}) .$$

Die rationale  $n \times n$ -Matrix  $X$  heiÙe  $U$ -zulässig, wenn

$\det F_W(X) = \pm 1$ , also wenn

$$a_W(X) := \frac{1}{2} (1 - \det F_W(X)) \in \{0, 1\}$$

für alle  $W \in U$ . Die Menge der  $U$ -zulässigen Matrizen bezeichnen wir mit  $ZM(U)$ . Ist  $X \in ZA(G)$  für  $G \in \{Sp(n), SO(2n+1), Spin(2n+1)\}$ , so ist  $X \in ZM(W_n)$ ; ist dagegen  $X \in ZA(G')$  für  $G' \in \{SO(2n), Spin(2n)\}$ , so ist  $X \in ZM(W'_n)$ . In § 54 haben wir gezeigt, daß das Umgekehrte auch richtig ist, wenn  $F_W(X)$  stets ganzzahlig ist, also z.B. dann, wenn  $X$  ganzzahlig ist.

Im Fall  $n = 1$  ist  $W_1 = \{\pm I\}$ . Eine Zahl  $x \in \mathbb{Q} = M(1, \mathbb{Q})$  ist also genau dann  $W_1$ -zulässig, wenn

$$-2x + 1 = \pm 1 ,$$

also  $x \in \{0, 1\}$ . Für beliebige  $n \geq 1$  folgt analog mit

(72)

Korollar 553: Falls  $X = ((x_{ij})) \in ZM(W_n)$ , so ist

$$(1) \quad x_{ii} \in \{0,1\} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Im Fall  $n = 2$  hat man in  $W'_2$  die Matrizen

$$W = \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad W' = \begin{bmatrix} & -1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \quad W'' = -I$$

zu betrachten. Wir setzen

$$u_{ij} = x_{jj} - x_{ij}, \quad s_{ij} = x_{jj} + x_{ij}.$$

Dabei ist  $s_{ij}(X) = u_{ij}(A_i X A_i^{-1})$ , wobei  $A_i$  die Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zu  $e_i$  bezeichnet. Wir erhalten

$$F_W(X) = \begin{bmatrix} 1-u_{21} & u_{12} \\ u_{21} & 1-u_{12} \end{bmatrix}, \quad F_{W'}(X) = \begin{bmatrix} 1-s_{21} & -s_{12} \\ -s_{12} & 1-s_{12} \end{bmatrix}$$

und die Berechnung der Determinanten ergibt für  $X \in ZM(W'_2)$ :

$$u_{12} + u_{21} = 2a, \quad s_{12} + s_{21} = 2a'$$

mit  $a = a_W(X)$ ,  $a' = a_{W'}(X) \in \{0,1\}$ . Daraus folgt

- (a)  $x_{11} + x_{22} = a' + a$ ,
- (b)  $x_{12} + x_{21} = a' - a$

Ferner erhalten wir

$$F_{W''}(X) = -2X + I,$$

also mit (a) und  $a'' := a_{W''}(X)$

$$(c) \quad 2(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) = a' + a - a''.$$

Daraus ergibt sich

$$(d) \quad 2x_{12} = a' - a + q, \quad 2x_{21} = a' - a - q,$$

$$(e) \quad q^2 = (a' - a)^2 + 2(a + a' - a'') - 4x_{11}x_{22}.$$

Ist  $4x_{11}x_{22}$  eine ganze Zahl, so muß  $q^2$  eine Quadratzahl sein, damit  $X$  rational ist. Im Fall  $X \in ZM(W_2)$  gilt (1), und damit folgt aus (a) auch  $x_{11}x_{22} = a'a$ , und wegen  $a^2 = a$ ,  $a'^2 = a'$  gilt mit (e):

$$(f) \quad q^2 = 3(a' - a)^2 - 2a'' .$$

Ist also  $a' = a$  , so muß  $a'' = 0$  und  $q^2 = 0$  gelten;  
ist  $a' \neq a$  , so folgt  $a'' = 1$  und  $q^2 = 1$  , andernfalls  
wäre  $q^2$  keine Quadratzahl.

Analoges gilt für beliebige  $n \geq 2$  . Es sei  $W_{ij}$  die  
Vertauschung der Koordinaten  $i$  und  $j$ , d.h. die Spiegelung  
an der Hyperebene  $(e_i - e_j)^\perp$ , und  $W'_{ij}$  sei die Spiegelung  
an der Hyperebene  $(e_i + e_j)^\perp$ . Alle diese Matrizen liegen in  
 $W'_n$  . Für  $X \in ZM(W'_n)$  sei

$$a_{ij} := a_{ij}(X) := a_{W_{ij}}(X) , \quad a'_{ij} := a'_{ij}(X) := a_{W'_{ij}}(X) .$$

Dann erhalten wir:

$$(2) \quad s_{ij} + s_{ji} = 2a'_{ij} , \quad u_{ij} + u_{ji} = 2a_{ij} ,$$

$$(3) \quad x_{ii} + x_{jj} = a'_{ij} + a_{ij} ,$$

$$(4) \quad x_{ij} + x_{ji} = a'_{ij} + a_{ij} .$$

Setzen wir

$$c_{ij} := a'_{ij} + a_{ij} \in \{0,1,2\} ,$$

so ergibt sich im Fall  $n \geq 3$  für drei verschiedene Indizes  
 $i, j, k$  zwischen 1 und  $n$  aus (3):

$$(5) \quad 2x_{ii} = c_{ij} + c_{ik} - c_{jk} .$$

Insbesondere ist  $2x_{ii}$  ganzzahlig. Aus (d) und (e) folgt

$$(6) \quad 2x_{ij} = a'_{ij} - a_{ij} + q_{ij} , \quad 2x_{ji} = a'_{ij} - a_{ij} - q_{ij} ,$$

$$(7) \quad q_{ij}^2 = (a'_{ij} - a_{ij})^2 + 2(a_{ij} + a'_{ij} - a''_{ij}) - 4x_{ii}x_{jj}$$

mit  $a''_{ij} \in \{0,1\}$  . Da  $q_{ij}^2$  ganzzahlig ist für  $n \geq 3$  , muß  
 $q_{ij}^2$  eine Quadratzahl sein, damit  $X$  rational ist. Daher ist  
 $2X$  ganzzahlig.

(72)

Gilt auch  $x_{ii}x_{jj} = a'_{ij}a_{ij}$ , z.B. im Fall  $X \in ZM(W_n)$ , so erhalten wir folgende Tabelle:

(8)

$a_{ij}$	$a'_{ij}$	$x_{ii}$	$x_{jj}$	$x_{ij}$	$x_{ji}$	$s_{ij}$	$s_{ji}$	$u_{ij}$	$u_{ji}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	-1	1
0	1	1	0	0	1	0	2	0	0
0	1	0	1	1	0	2	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	-1
1	0	1	0	-1	0	-1	1	1	1
1	0	1	0	0	-1	0	0	0	2
1	0	0	1	-1	0	0	0	0	2
1	0	0	1	0	-1	1	-1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1	1	1

Insbesondere sehen wir, daß  $X$  ganzzahlig ist. Ist also  $X \in ZM(W_n)$ , so ist  $X \in ZA(G)$  für  $G \in \{Sp(n), SO(2n+1), Spin(2n+1)\}$ , und ähnliches gilt für  $W'_n$  und  $G' \in \{SO(2n), Spin(2n)\}$  unter der obigen Zusatzbedingung.

Für  $n = 2$  speziell ergeben sich außer 0 und I die folgenden Kandidaten für  $W_2$ -zulässige Matrizen:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sowie die Komplemente  $I - X_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Die Matrizen  $X_3$  und  $X_4$  entstehen aus  $X_1$  und  $X_2$  durch Vertauschen der Koordinaten.  $X_1$  ist zulässig, denn  $(W - I)e_2 =: u \in \{0, -2e_2, \pm e_1 - e_2\}$ , also ist  $\det F_W(X) = 1 + u_1 + u_2 \in \{1, -1\}$ .

Für den zugehörigen Torus gilt nach 54(4):

$$\underline{S}_1 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(72)

$$= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} .$$

Auch  $X_2$  ist zulässig, denn der zugehörige Torus mit

$$\begin{aligned} \underline{S}_2 &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ist äquivalent zu  $S_1$ : Man vertausche rechts und links sowie die beiden Koordinaten und ändere in einer Koordinate das Vorzeichen. Es ergibt sich also

Satz 72: Die Tori  $S_2$  und  $\{e\} \times T$  sind bis auf Äquivalenz die einzigen auf  $\text{Sp}(2)$  fixpunktfrei operierenden 2-Tori in  $\text{Sp}(2)^2$ .

Im Fall  $n = 3$  können wir die Isomorphie von  $SU(4)$  und  $\text{Spin}(6)$  ausnutzen: Die Zuordnung

$$(9) \quad e_i - e_4 \rightarrow e_j + e_k$$

mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  definiert eine lineare Isometrie

$$f : \underline{T}'_4 = \mathbb{R}^4 \ominus \mathbb{R}e \rightarrow \mathbb{R}^3 = \underline{T}_3$$

mit

$$(9)' \quad f(e_i - e_j) = e_j - e_i \quad \text{für } i, j \in \{1, 2, 3\} .$$

Also bildet  $f$  das Wurzelsystem  $A_3 = \pm \{e_k - e_1 ; 1 \leq k < 1 \leq 4\}$  von  $SU(4)$  isometrisch auf das Wurzelsystem  $D_3 = \pm \{e_i \pm e_j ; 1 \leq i < j \leq 3\}$  von  $\text{Spin}(6)$  ab. Ist daher  $X' \in \text{ZA}(SU(4))$ , so ist  $\bar{X} := fX'f^{-1} \in \text{ZA}(\text{Spin}(6))$ . Wenn wir die zulässigen Abbildungen von  $SU(4)$  bezüglich der Basis  $b_i = e_i - e_4$ ,  $i = 1, 2, 3$ , als Matrizen darstellen, so erhalten wir (vgl. 65,66)



(72)

$$X_1' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_3' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

wobei  $X_1'$  zum Graphen  $g_1$  und  $X_2', X_3'$  zum Graphen  $g_2$  gehören.

Die Abbildung  $\bar{X}_i$  hat in der Basis  $f_i = e_j + e_k$ ,  $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ , dieselbe Matrixdarstellung, also gilt in der

Standard-Basis-Darstellung:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{X}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{X}_2$  und  $\bar{X}_3$  sind ganzzahlig, also auch  $F_W(\bar{X}_2), F_W(\bar{X}_3)$  für beliebiges  $W \in \omega_3'$ , und  $We = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)^t$ , also ist

$(W - I) \left(\frac{1}{2} e\right)$  ganzzahlig und damit auch  $F_W(\bar{X}_1)$  ganzzahlig.

Daher sind alle  $\bar{X}_i$  auch in  $ZA(SO(6))$  und also  $ZA(SO(6)) = ZA(\text{Spin}(6))$ . (Vgl. 552.)

Zulässige Matrizen analog zu

$\bar{X}_2$  und  $\bar{X}_3$  werden wir in beliebigen Dimensionen wieder-

finden (cf. 74); der zu  $\bar{X}_1$  gehörige Torus hat nach 54(4)

die Liealgebra

$$\underline{S} = \text{Span} \{(e; e_1), (0; b_{13}), (0; b_{23})\}.$$

Da  $\bar{X}_1$  nicht ganzzahlig ist, kann  $\bar{X}_1$  nicht auch  $\omega_3$ -zulässig sein, siehe (8).  $\bar{X}_2$  und  $\bar{X}_3$  dagegen sind  $\omega_3$ -zulässig (siehe § 74).

### 73. Graphen

Um die Fallunterscheidung für die Werte von  $a_{ij}$  und  $a_{ij}'$  zu systematisieren, führen wir wieder eine Graphenmenge  $G_n'$  ein:

Jedes  $g \in G_n'$  entspricht einer Bewertung  $a_{ij}(g), a_{ij}'(g)$

mit 0 oder 1. Die Punkte von  $g$  sind wieder die Indizes

$1, \dots, n$ , und es gibt drei Sorten von Verbindungen:

$$\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ i \quad j \end{array} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, a'_{ij} = 0$$

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ i \quad j \end{array} \Leftrightarrow a_{ij} = 1, a'_{ij} = 0$$

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ | \quad | \\ i \quad j \end{array} \Leftrightarrow a_{ij} = 0, a'_{ij} = 1$$

$$\begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ || \quad || \\ i \quad j \end{array} \Leftrightarrow a_{ij} = 1, a'_{ij} = 1$$

Es sei  $W' = W'_n$ ,  $W = W_n$ , und  $W_0 \subset W'$  sei die Menge der Spiegelungen  $W_{ij}$  und  $W'_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$ , an den Hyperebenen senkrecht zu  $e_i + e_j$ ,  $e_i - e_j$ .  $W_0$  ist eine Konjugationsklasse bezüglich  $W$ , sogar bezüglich der größeren Gruppe  $\hat{W}$  aller Automorphismen des Wurzelsystems  $D_n = \pm \{e_i \pm e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$ .  $W$  und  $\hat{W}$  operieren also auf  $G'_n$ , wobei die Operation analog wie in 63 definiert ist. Zwei Graphen im selben Orbit heißen wieder äquivalent. Offensichtlich sind zwei Graphen äquivalent, die sich nur durch die Nummerierung der Punkte unterscheiden, aber die Äquivalenzklasse ist größer: Ist  $A_i \in W$  die Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zu  $e_i$ , so gilt  $A_i W_{ij} A_i^{-1} = W'_{ij}$  für alle  $j \neq i$ . Deshalb können wir alle von einem Punkt  $i$  ausgehenden Verbindungen simultan in ungestrichene und alle ungestrichenen in gestrichene umwandeln, ohne die Äquivalenzklasse zu wechseln:



Doppelverbindungen bleiben dabei ungedändert.

(73)

Ähnlich wie in 63 heißt ein Graph  $g \in G'_n$  zulässig bezüglich  $W$  oder  $W'$ , wenn es  $X \in ZM(W)$  bzw.  $ZM(W')$  gibt mit  $g = g(X)$ , d.h.

$$a_W(g) = a_W(X) \quad \text{für alle } W \in W_0 .$$

Ist der Graph  $g$  zulässig bezüglich  $W$ , so auch alle bezüglich  $W$  äquivalenten Graphen; ist  $g$   $W'$ -zulässig, so gilt dasselbe für alle unter  $\hat{W}$  äquivalenten Graphen, und die zugehörigen Matrizen sind jeweils äquivalent (vgl. 551). Zulässige Graphen brauchen also nur bis auf Äquivalenz bestimmt zu werden.

Das Komplement  $cg$  eines Graphen  $g \in G'_n$  soll genau die Verbindungen enthalten, die  $g$  nicht enthält. In  $G'_2$  sind z.B. die Graphen  $o-o$  und  $o+o$  zueinander komplementär, ebenso wie  $o+o$  und  $o o$ . Nach 551 ist  $g(I-X) = cg(X)$ , insbesondere ist mit  $g$  auch  $cg$  zulässig, und die zugehörigen Tori sind äquivalent. Daher brauchen wir nur Graphen mit bis zu  $\frac{1}{2} n(n-1)$  Verbindungen zu betrachten, wobei Doppelverbindungen doppelt zählen.

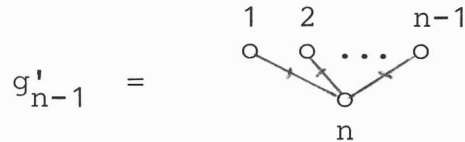
Der Begriff des Teilgraphen ist gegenüber § 63 etwas abzuändern. Ein Teilgraph  $g'$  von  $g \in G'_n$  (Notation:  $g' \subset g$ ) besteht aus  $m$  Punkten von  $g$ , mit  $m \leq n$ , und entweder allen oder nur allen ungestrichenen Verbindungen zwischen ihnen. Ein Teilgraph von  $o+o+o-o$  wäre also auch  $o-o o-o$ . Ist  $g$  zulässig bezüglich  $W$  oder  $W'$ , so auch jeder Teilgraph (Kor. 553).

Die in § 63 definierte Graphenmenge  $G_n$  ist in natürlicher Weise eine Teilmenge von  $G'_n$ , ebenso wie  $G'_{n-1}$ .

74. Zulässige Graphen und Matrizen

---

Wir betrachten in  $G'_n$  den Graphen



Satz 74: Der Graph  $g'_{n-1}$  ist in  $G_n$  zulässig bezüglich  $\omega_n$ .

Die zugehörigen Matrizen sind

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \dots 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

und die zugehörigen Tori haben die Liealgebra

$$\underline{S}_1 = \text{Span} \{ (0; b_1), \dots, (0; b_{n-1}), (e_n; 0) \},$$

$$\underline{S}_2 = \text{Span} \{ (0; e_1), \dots, (0; e_{n-1}), (e; 0) \}$$

mit  $b_i = e_i - e_n$ ,  $e = \sum e_i$  wie früher.

Beweis: Wir dürfen  $n \geq 3$  annehmen (vgl. Satz 72).

Wie früher setzen wir  $v_{ijk} := u_{ij} + u_{jk} + u_{ki}$ . Da  $g'_{n-1}$  keine ungestrichenen Verbindungen besitzt, sind alle  $v_{ijk}$  gleich Null nach 62(3). Da außerdem  $a_{ij} = a'_{ij} = 0$  für  $i, j \leq n-1$ , gilt nach 72(5), (6), (7):  $x_{ij} = 0$  für  $i, j \leq n-1$ , und nach 72(5) außerdem  $x_{nn} = 1$ . Wir haben dabei nur Konsequenzen der  $\omega'_n$ -Zulässigkeit benutzt. Insbesondere sind damit die Voraussetzungen für Tabelle 72(8) gegeben. Die Zahlen  $u_{ni}$  müssen alle gleich sein für  $i = 1, \dots, n-1$ , denn es gilt  $0 = v_{nij} = u_{ni} + u_{jn} = u_{ni} - u_{nj}$ , wobei die letzte Gleichung wegen  $a_{nj} = 0$  aus 62(2) folgt.

(74)

Nach Tabelle 72(8) gibt es jetzt zwei Möglichkeiten:

$x_{ni}$	$x_{in}$	$s_{ni}$	$u_{ni}$
1	0	1	-1
0	1	0	0

Da die  $u_{ni}$  alle gleich sind, tritt jede der beiden Möglichkeiten simultan für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  auf, und wir erhalten gerade die beiden Matrizen  $X_1$  und  $X_2$  der Behauptung. Diese sind zulässig: Setzen wir nämlich

$$u = (W-I)e_n = \pm e_r - e_n$$

für beliebiges  $W \in \mathcal{W}_n$  und geeignetes  $r \in \{1, \dots, n\}$ , so gilt

$$\det F_W(X_1) = 1 + \sum u_i = \pm 1,$$

und entsprechend ergibt sich mit

$$v = (W-I)e = \sum (\pm e_r - e_r)$$

daß

$$\det F_W(X_2) = 1 + v_n = \pm 1.$$

Damit sind beide Matrizen  $\mathcal{W}_n$ -zulässig und also erst recht  $\mathcal{W}'_n$ -zulässig, und wir haben gezeigt, daß es keine weiteren  $\mathcal{W}'_n$ -zulässigen Matrizen  $X$  gibt mit  $g(X) = g'_{n-1}$ . Die zugehörigen Tori ergeben sich aus 54(4).

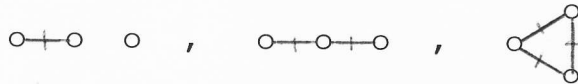
### 75. Die übrigen Graphen

$n=3$  In § 72 haben wir gezeigt, daß nur  $g'_2$  und sein Komplement  $\mathcal{W}'_3$ -zulässig sind. Bezüglich  $\mathcal{W}'_3$  gibt es weitere zulässige Graphen, nämlich die Bilder der in  $G_4$  zulässigen Graphen  $g_1$  und  $g_3$  (vgl. § 65, S.91) unter dem Isomorphis-

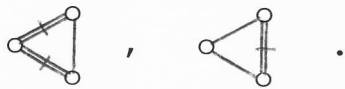
mus  $f: \underline{SU(4)} \rightarrow \underline{SO(6)}$ , der in 72(9) definiert wurde;  
diese sind

$$\bar{g}_1 = \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ 2 \quad 3 \end{array}, \quad \bar{g}_3 = 1 \begin{array}{c} \circ \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \text{---} \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} \in G'_3.$$

$\omega'_3$ -zulässig sind also die Graphen-Klassen



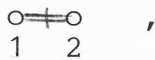
sowie die zugehörigen Komplemente



U n z u l ä s s i g sind die Graphen



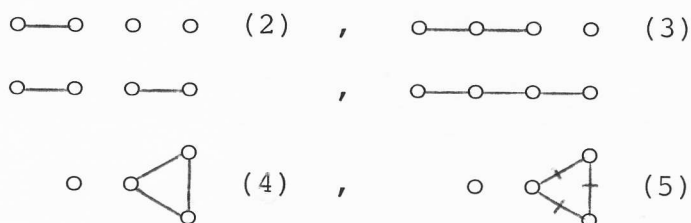
n = 4 Wir haben Graphen mit bis zu 6 Verbindungen zu untersuchen. Enthält ein solcher Graph eine Doppelverbindung, ohne Einschränkung etwa



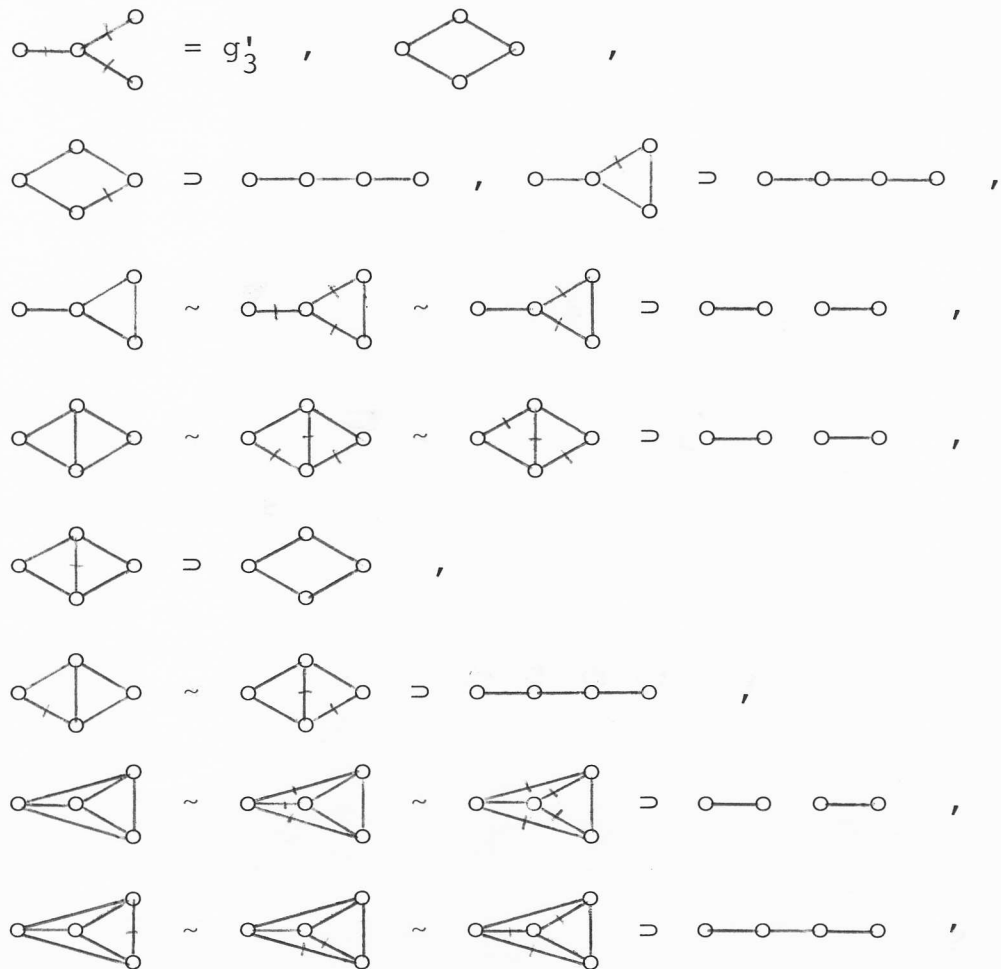
so müssen nach der obigen Untersuchung für  $n = 3$  die Punkte 3 und 4 beide mit 1 und 2 verbunden sein, sonst gibt es einen unzulässigen Teilgraphen mit 3 Punkten. Daher kommen nur die beiden zueinander komplementären Graphen-Klassen



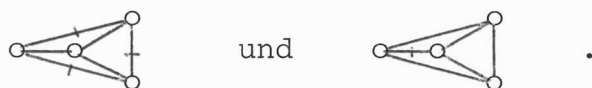
in Frage. Die Graphen ohne Doppelverbindung sind:



(75)



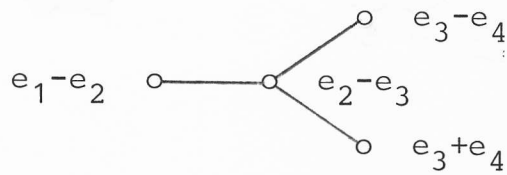
sowie die Komplemente der beiden letzten Graphen,



Alle diese Graphen mit Ausnahme von (1), ..., (5) und  $g_3^!$  sind entweder schon in  $G_4$  unzulässig oder enthalten unzulässige Teilgraphen in  $G_4$  (vgl. Satz 661). Der Graph  $g_3^!$  ist zulässig, und der Graph (5) entsteht aus  $g_3^!$  durch Anwenden des äußeren Automorphismus  $\beta$  des Wurzelsystems  $D_4$ , der definiert ist durch

$$\begin{aligned} \beta(e_2 - e_3) &= e_2 - e_3 & , & & \beta(e_1 - e_2) &= e_3 - e_4 & , \\ \beta(e_3 - e_4) &= e_3 + e_4 & , & & \beta(e_3 + e_4) &= e_1 - e_2 & , \end{aligned}$$

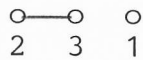
entsprechend einer Rechtsdrehung des Dynkin diagramms



von  $D_4$  (vgl. [5]). Wegen  $\beta(e_1-e_3) = e_2-e_4$  gilt nämlich:



unter  $\beta$ . Der Graph (5) ist damit  $\omega'_4$ -zulässig, aber er ist nicht  $\omega_4$ -zulässig, da er den  $\omega_3$ -unzulässigen Teilgraphen



enthält. Wir zeigen nun, daß die übrigen Graphen schon bezüglich  $\omega'_4$  unzulässig sind:

(2)  $\sim$   ist unzulässig:

Es ist nämlich  $c_{12} + c_{13} - c_{23} = 1$ ,  $c_{13} + c_{14} - c_{34} = 0$ . Wäre (2) zulässig, so wären beide Ausdrücke gleich  $2x_{11}$  nach Gleichung 72(5), Widerspruch!

(3)  $\sim$   ist unzulässig:

Diesmal ist  $c_{12} + c_{23} - c_{13} = 2$ ,  $c_{12} + c_{24} - c_{14} = 1$ ; nach 72(5) müßte beides gleich  $2x_{22}$  sein, Widerspruch!

Zur Untersuchung der übrigen Graphen führen wir noch die folgenden Größen ein:

$$v'_{ijk} := s_{ij} + u_{jk} + s_{ki}$$



(75)

Bezeichnen wir mit  $A_i \in W_n$  wieder die Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zu  $e_i$ , so gilt

$$v'_{ijk}(X) = v_{ijk}(A_i X A_i^{-1})$$

für jede Matrix  $X \in M(n, \mathbb{Q})$ . Daher dürfen wir 62(3) auch auf  $v'_{ijk}$  anwenden, wenn wir  $a_{ij}$  und  $a_{ki}$  durch  $a'_{ij}$  und  $a'_{ki}$  ersetzen.

(4) ~  ist unzulässig:

Hier ergibt sich konsistent aus 72(5):

$$(a) \quad x_{11} = x_{22} = x_{33} = -x_{44} = \frac{1}{2} .$$

Weil  $q_{ij}^2$  eine Quadratzahl sein muß, erhält man aus 72(7)

$$q_{ij}^2 = 2(1 - a''_{ij}) = 0 \quad , \quad q_{i4}^2 = -2a''_{i4} + 1 = 1$$

für  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , woraus mit 72(6) folgt:

$$(b) \quad x_{ij} = -\frac{1}{2} \quad , \quad x_{i4} = -x_{4i} = \pm \frac{1}{2} .$$

Insbesondere ist

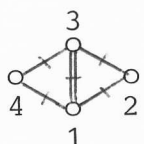
$$(c) \quad s_{41} - u_{41} = 2x_{41} = \pm 1 .$$

Andererseits gilt nach 62(3):

$$(d) \quad v'_{124} = v'_{342} = v'_{341} = 0$$

Da nach (a) und (b)  $s_{12} = s_{13} = s_{23} = 0$ , folgt aus (d)

mit 62(2):  $s_{41} = -u_{24} = u_{42} = -s_{34} = u_{41}$ , im Widerspruch zu (c).

(1) ~  ist unzulässig:

Hier erhalten wir nämlich aus 72(5)

$$x_{11} = x_{33} = 1 \quad , \quad x_{22} = x_{44} = 0 \quad ,$$

und wir dürfen daher die Tabelle 72(8) benutzen. Diese ergibt:

$$(a) \quad s_{13} = s_{31} = u_{13} = u_{31} = 1 \quad ,$$

$$(b) \quad s_{24} = s_{42} = u_{24} = u_{42} = 0 \quad :$$

Nach 62(3) gilt daher

$$(c) \quad 0 = v_{234} = u_{23} + u_{34} \quad , \quad 0 = v_{412} = u_{41} + u_{12}$$

$$(d) \quad 3 = v'_{231} = s_{23} + s_{12} + 1 \quad , \quad ,$$

$$3 = v'_{413} = s_{41} + s_{34} + 1 \quad .$$

Ferner ergibt sich aus Tabelle 72(8) eine der beiden folgenden Möglichkeiten:

$$(e) \quad s_{14} = s_{41} = 1 \quad , \quad -u_{14} = u_{41} = 1$$

oder

$$(e)' \quad s_{14} = 0 \quad , \quad s_{41} = 2 \quad , \quad u_{14} = u_{41} = 0 \quad .$$

Im Fall (e) ergibt sich aus (c), (d) wegen  $s_{12} + u_{12} = 2x_{22} = 0$  und  $s_{23} + u_{23} = 2x_{33} = 2$  :

$$1 = u_{41} = -u_{12} = s_{12} = 2 - s_{23} = u_{23} \quad .$$

Damit und wegen (a), (b) und (e) gilt

$$w_{1423} = u_{14} + u_{42} + u_{23} + u_{31} = 1 \quad ,$$

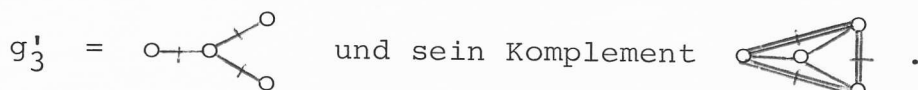
aber nach 62(8) muß  $w_{1423}$  gerade sein, Widerspruch!

Im Fall (e)' erhält man auf die gleiche Art:

$$0 = u_{41} = -u_{12} = s_{12} = 2 - s_{23} = u_{23} \quad ,$$

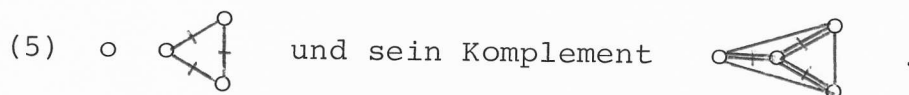
also wieder  $w_{1423} = 1$  , im Widerspruch zu 62(8).

Als Ergebnis notieren wir:  $w_4$ -zulässig ist nur der Graph



(75)

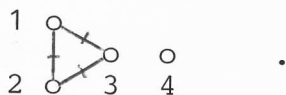
$\omega'_4$ -zulässig sind außerdem nur der zu  $g_3$  äquivalente Graph



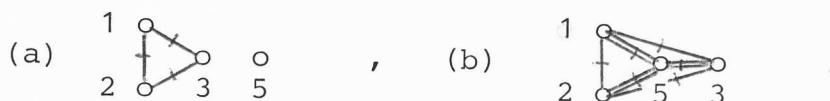
$n \geq 5$

Lemma 1: Es gibt keine  $\omega'_5$ -zulässige Erweiterung von (5) in  $G'_5$  .

Beweis: Nehmen wir an,  $g \in g'_5$  sei eine zulässige Erweiterung des Graphen



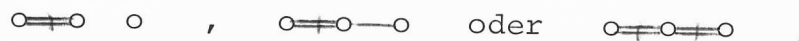
Der Teilgraph  $g' = g \cap \{1, 2, 3, 5\}$  ist zulässig in  $G'_4$  und hat nach der Untersuchung für  $n = 4$  eine der folgenden Gestalten (a) oder (b):



Im Fall (a) ist  $g'' = g \cap \{1, 3, 4, 5\}$  in einer der Klassen



und daher unzulässig (vgl.  $n = 4$ ). Im Fall (b) ist  $g \cap \{1, 4, 5\}$  vom Typ

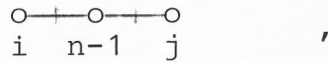


und diese Graphen sind unzulässig in  $G'_3$  (vgl.  $n = 3$ ).

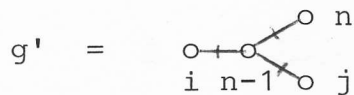
Lemma 2: Für  $n \geq 5$  ist  $g'_{n-1} \in G'_n$  die einzige  $\omega'_n$ -zulässige Erweiterung von  $g'_{n-2} \in G'_{n-1}$  .

(75)

Beweis: Ist  $g$  eine solche Erweiterung und  $i, j \leq n-2$ ,  $i \neq j$ , so ist der Teilgraph  $g' = g \cap \{i, j, n-1, n\}$  zulässig bezüglich  $W_4'$  und enthält selbst den Teilgraphen



also ist



(vgl.  $n = 4$ ) Daher ist  $n$  mit  $n-1$ , aber mit keinem der Punkte  $i \leq n-2$  verbunden, was zu zeigen war.

Die Komplemente behandeln wir mit einem Argument analog zu dem in Satz 663 gebrauchten. Wir erhalten daher als Ergebnis dieses Kapitels:

Satz 75: Es sei  $G$  eine der Gruppen  $SO(2n)$  oder  $Spin(2n)$  mit  $n \geq 4$  oder eine der Gruppen  $SO(2n+1)$ ,  $Spin(2n+1)$  oder  $Sp(n)$  für  $n \geq 2$ . Dann gilt: Alle auf  $G$  fixpunktfrei operierenden  $n$ -Tori in  $G \times G$  sind äquivalent zu  $\{e\} \times T$  oder den in Satz 74 angegebenen Tori  $S_1, S_2$ . Auf  $SO(6)$  und  $Spin(6)$  gibt es außerdem noch den in 72 definierten Torus  $S$ .

Bemerkung: Die Gruppen  $SO(4)$  und  $Spin(4)$  sind nicht einfach und werden daher hier nicht berücksichtigt, vgl. aber § 81!

## Kapitel 8

### Produkte und Ausnahmegruppen

#### 81. Produkte

Als Hilfsmittel für die Überlegungen zu den Ausnahmegruppen müssen wir auch kompakte Gruppen der Gestalt  $G = G_1 \times G_2$  betrachten. Es sei  $T = T_1 \times T_2$  ein maximaler Torus von  $G$  und  $W = W_1 \times W_2$  die dazugehörige Weylgruppe. Das Einheitsgitter sei  $L = L_1 \oplus L_2 \subset \underline{T}$ . Wir definieren die Einbettungen  $i_j : \underline{T}_j \rightarrow \underline{T}$  und die Projektionen  $p_j : \underline{T} \rightarrow \underline{T}_j$  für  $j = 1, 2$ . Für eine lineare Abbildung  $X : \underline{T} \rightarrow \underline{T}$  sei  $X_{jk} := p_j X i_k : \underline{T}_k \rightarrow \underline{T}_j$ . Ist  $X \in \text{ZA}(G)$ , so gilt  $X_{jj} \in \text{ZA}(G_j)$  nach Kor. 553. Diese Bedingung ist schon hinreichend für die Zulässigkeit von  $X$ , wenn  $X(L)$  im Zentralgitter liegt und eine der Abbildungen  $X_{12}$  oder  $X_{21}$  die Nullabbildung ist. Andernfalls gibt es zusätzliche Bedingungen.

Betrachten wir zunächst den Fall  $G_1 = G_2 = \text{Sp}(1)$ . Aus dem oben Gesagten ergibt sich

$$x_{11} = a_1 \in \{0, 1\}, \quad x_{22} = a_2 \in \{0, 1\}.$$

Die einzige neue Bedingung kommt von  $W = -I$ . Dafür gilt  $F_W(X) = -2X + I$ ; ist  $X$  zulässig, so muß  $2X$  also ganzzahlig sein. Die Berechnung der Determinante ergibt

$$\begin{aligned} 2 x_{12} x_{21} &= a_W + 2a_1 a_2 - (a_1 + a_2) \\ &= a_W - (a_1 - a_2)^2 \end{aligned}$$

mit  $a_W = a_W(X) \in \{0, 1\}$ . Daher kann  $2x_{12}x_{21}$  die Werte

-1, 0, +1 annehmen. Ist  $x_{12}x_{21} \neq 0$  (vgl. den einleitenden Abschnitt), so können  $x_{12}$  und  $x_{21}$  nur die Werte  $\pm 1$  und  $\pm \frac{1}{2}$  annehmen, da  $2x_{ij}$  ganzzahlig sein muß. Als zulässige Matrizen erhalten wir also bis auf Äquivalenz und Komplemente:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Die zugehörigen Tori sind

$$\begin{aligned} \underline{S}_1 &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}, \\ \underline{S}_2 &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

und die letzte Zeile zeigt, daß  $S_2$  zu  $S_1$  äquivalent ist (Vorzeichenwechsel in der zweiten Komponente rechts).  $X_1$  ist auch noch zulässig, wenn wir  $G_1$  oder  $G_2$  oder beide durch  $\text{Sp}(1)/\pm I \cong \text{SO}(3)$  ersetzen, aber nicht mehr für  $G/\pm I \cong \text{SO}(4)$ . Das zugehörige Einheitsgitter  $L'$  wird nämlich von  $e_1$  und  $\frac{1}{2}e$  erzeugt, wobei  $e = e_1 + e_2$ , und für  $W = -I$  ist  $F_W(X)(\frac{1}{2}e) = -X(e) + \frac{1}{2}e = -\frac{1}{2}e_1 \notin L'$ .

J e d e s Produkt  $G = G_1 \times G_2$  von kompakten, nicht-abelschen Liegruppen enthält  $\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(1)$  oder  $\text{SO}(3) \times \text{Sp}(1)$  oder  $\text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$  als Untergruppe. Es sei  $r \in \underline{T}_1$  und  $s \in \underline{T}_2$  eine Wurzel von  $G_1$  bzw.  $G_2$ , und  $\bar{r} := r/\|r\|$ ,  $\bar{s} = s/\|s\|$ . (Die Norm ist dabei bezüglich einer  $W$ -invarianten Metrik  $(\cdot, \cdot)$  auf  $\underline{T}$  zu verstehen.) Es seien  $W_r$  und  $W_s$  die Spiegelungen an den Hyperebenen senkrecht zu  $r$  und zu  $s$  in  $\underline{T}$ , und es sei  $W = W_r W_s$ . Setzen wir

(81)

$$(1) \quad d_{rs} := a_W + (a_{W_r} - a_{W_s})^2 \in \{-1, 0, 1\} \quad ,$$

so erhalten wir wie in dem vorher diskutierten Spezialfall

$$(2) \quad 2 (X(\bar{r}), \bar{s}) (X(\bar{s}), \bar{r}) = d_{rs} \quad .$$

Dies liefert eine Reihe von weiteren notwendigen Bedingungen für die Zulässigkeit eines Endomorphismus  $X$  von  $\underline{T}$  .

## 82. Die Gruppen vom Typ $G_2, F_4, E_8$

Die kompakte Gruppe mit Wurzelsystem  $G_2$  ist die Automorphismengruppe der Cayley-Algebra,  $G = \text{Aut}(\mathbb{C}a)$  . Sie ist einfach zusammenhängend und ohne Zentrum [17] und eine Erweiterung der Gruppe  $SU(3)$  mit gleichem Rang. Der in § 61 definierte maximale Torus  $T'$  von  $SU(3)$  ist also gleichzeitig maximaler Torus von  $G$ . Das Einheitsgitter  $L' \subset \underline{T}'$  von  $SU(3)$  und  $G$  ist gleichzeitig das Zentralgitter von  $G$ . Ist daher  $X \in \text{ZA}(G)$  , so ist  $X \in \text{ZA}(SU(3))$  und  $X(L') \subset L'$  . In § 64 haben wir gezeigt, daß nur  $X = 0$  und  $X = I$  diese Eigenschaft haben. Es gibt also keine echten Doppelquotienten  $G/U$  mit  $\text{rg}(U) = 2$  .

Jetzt sei  $G$  die kompakte Gruppe vom Rang 4 mit Wurzelsystem

$$F_4 = \pm \{e_i, e_i \pm e_j, \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$$

mit  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  ,  $i \neq j$  . Auch diese Gruppe ist einfach zusammenhängend ohne Zentrum [17] und enthält die Gruppe  $\text{Spin}(9)$  (vgl. z.B. [4]). Die nicht-trivialen zulässigen Matrizen von  $\text{Spin}(9)$  sind äquivalent zu  $X_1$  oder  $X_2$  , wie in Satz 74 angegeben,

$$X_1 = \begin{bmatrix} & & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

oder zu deren Komplementen. Wir zeigen, daß  $X_1$  und  $X_2$  in  $G$  unzulässig sind. Für alle  $W \in W(G)$  ist

$$\det F_W(X_1) = 1 + \sum u_i,$$

wobei  $u_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , die Komponenten des Vektors

$$u = (W - I)e_4$$

sind. Wählt man  $W = W_r$  mit  $r = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$ , so ist  $u = -2 \langle e_4, r \rangle r = r$ , und  $\sum u_i = -1$ , also  $\det F_W(X_1) = 0$ .  $X_1$  ist also nicht zulässig. Für  $X_2$  gilt

$$\det F_W(X_2) = 1 + v_4 \quad \text{mit} \quad v = (W - I)e_4.$$

Wählt man  $W = W_r$  wie oben, so ist  $v = -2 \langle e_4, r \rangle r = 2r$ , also  $v_4 = -1$  und damit  $\det F_W(X_2) = 0$ .

Somit sind  $O$  und  $I$  die einzigen in  $G$  zulässigen Abbildungen.

Schließlich sei  $G$  die kompakte Gruppe von Rang 8 mit Wurzelsystem

$$E_8 = D_8 \cup \left\{ \frac{1}{2} \sum s_i e_i ; s_i = \pm 1, \sum s_i \text{ gerade} \right\}.$$

Auch diese Gruppe ist einfach zusammenhängend und ohne Zentrum, und sie enthält die Gruppe  $\text{Spin}(16)$  vom selben Rang. (Vgl. [17]) Die zulässigen Matrizen von  $\text{Spin}(16)$  sind äquivalent zu  $X_1$  oder  $X_2$ , wie in Satz 74 angegeben.

Wählen wir  $W = W_r \in W(G)$  mit  $r = \frac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - \dots - e_8)$ , so gilt wie im Fall von  $F_4$  oben:  $\det F_W(X_1) = \det F_W(X_2) = 0$ . Diese Abbildungen sind also nicht zulässig in  $G$ .

Wir haben damit bewiesen:



(82)

Satz 82 Die Gruppen vom Typ  $G_2, F_4, E_8$  besitzen keine echten Doppelquotienten von maximalem Rang.

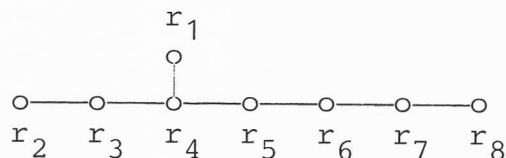
83. Gruppen vom Typ  $E_7$

Eine fundamentale Basis (cf. [17]) des Wurzelsystems  $E_8$  ist  $r_1, \dots, r_8$  mit

$$r_1 = \frac{1}{2}(-e_1 - e_2 - e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 - e_8) , \quad r_8 = e_7 + e_8 ,$$

$$r_i = e_{i-1} - e_i \quad \text{für } i = 2, 3, \dots, 7 ,$$

entsprechend dem Dynkin-Diagramm



Zu einer Fundamentalbasis des Teil-Wurzelsystems  $E_7$  gelangt man durch Streichung von  $r_8$ , und  $r_1, \dots, r_7$  sind alle senkrecht zu  $e$ . Also gilt

$$E_7 = E_8 \cap e^\perp \subset \underline{T}'_8$$

$$= \pm \{e_i - e_j ; 1 \leq i < j \leq 8\}$$

$$\cup \left\{ \frac{1}{2} \sum s_i e_i ; s_i = \pm 1 , \sum s_i = 0 \right\}$$

mit  $i = 1, \dots, 8$  (vgl. auch [6]).

Die einfach zusammenhängende kompakte Gruppe  $G$  mit Wurzelsystem  $E_7$  hat Zentrum  $Z \cong \mathbb{Z}_2$  und ist eine Erweiterung der Gruppe  $SU(8)$  von gleichem Rang 7 (cf. [17]). Da  $Z$  eine Untergruppe des Zentrums von  $SU(8)$  sein muß, ist  $Z = \pm I$ , und damit ist das Zentralgitter  $L_O = e^\perp \cap \left(\frac{1}{2} \mathbb{Z}\right)^8 \subset \underline{T}'_8$ . Die zulässigen Abbildungen in  $SU(8)$  sind bis auf Äquiva-

lenz die Abbildungen  $X'_{k1}$  und  $X'_{k2}$  von Satz 65 mit  $k = 1, 2, 3, 4$  (vgl. Satz 66). Dabei gilt für  $b_a = e_a - e_8$ ,  $1 \leq a \leq k$ :

$$X'_{k1}(b_a) = -2e_8' = 2e_8 + \frac{1}{4}e, \quad ,$$

aber dies liegt nicht in  $L_0$ . Daher kann  $X'_{k1}$  nicht zulässig bezüglich  $G$  sein.

Weiterhin ist für  $1 \leq i \leq 8$

$$X'_{k2}(b_i) = (2e^k)', = 2e^k - \frac{k}{4}e.$$

Dieser Vektor liegt in  $L_0$ , wenn  $k$  gerade ist, also  $k = 2$  oder  $k = 4$ . Allgemein ist wieder

$$(*) \quad \det F_W(X'_{k2}) = 1 + \sum_{a=1}^k u_a \quad \text{mit} \quad u = (W-I)(2e^k).$$

k=4 Es sei  $r = \frac{1}{2}(e_1 + \dots + e_4 - e_5 - \dots - e_8)$  und  $W = W_r$ . Dann ist  $u = -\langle 2e^k, r \rangle r = -4r$  und  $\sum_1^4 u_a = -8$ . Wegen (\*) ist  $X'_{k4}$  also unzulässig in  $G$ .

k=2 Wir setzen  $W = W_r W_s$  mit  $r$  wie vorher und  $s = e_1 - e_3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u &= (W-I)(2e^2) = (\langle 2e^2, s \rangle \langle s, r \rangle - \langle 2e^2, r \rangle)r - \langle 2e^2, s \rangle s \\ &= -2r - 2s, \end{aligned}$$

also  $u_1 + u_2 = -4$ , und wegen (\*) ist  $X'_{22}$  unzulässig in  $G$ .

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist somit

Satz 83 Es gibt keine echten Doppelquotienten von maximalem Rang in den kompakten Gruppen mit Wurzelsystem  $E_7$ .

(84)

84. Gruppen vom Typ  $E_6$

Zu einer Fundamentalbasis des Wurzelsystems  $E_6$  gelangt man, indem man von der in 83 angegebenen Fundamentalbasis von  $E_8$  die Wurzeln  $r_8$  und  $r_7$  wegläßt. Die übrigen Basis-Elemente  $r_1, \dots, r_6$  sind senkrecht zu  $e$  und zu  $e_7 + e_8$ . Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} E_6 &= E_8 \cap \{e, e_7+e_8\}^\perp = \underline{T}'_6 + \underline{T}'_2 \\ &= \pm \{e_i - e_j ; 1 \leq i < j \leq 6\} \cup \{\pm(e_7 - e_8)\} \\ &\quad \pm \left\{ \frac{1}{2} (\sum_{i=1}^6 s_i e_i + e_7 - e_8) ; s_i = \pm 1, \sum s_i = 0 \right\} \end{aligned}$$

Diese Darstellung von  $E_6$  ist für unsere Zwecke bequemer als die in [17] oder [5] angegebenen.

Die einfach zusammenhängende kompakte Gruppe  $G$  mit Wurzelsystem  $E_6$  hat Zentrum  $Z \cong \mathbb{Z}_3$  (cf. [17]) und ist eine Erweiterung von  $SU(6) \times SU(2)$  vom selben Rang 6. Der maximale Torus  $T$  dieser Gruppe hat die Liealgebra  $\underline{T} = \underline{T}'_6 \oplus \underline{T}'_2$  (orthogonale direkte Summe) mit  $\underline{T}'_2 = \mathbb{R}b_{78}$ . Für eine lineare Abbildung  $X : \underline{T} \rightarrow \underline{T}$  mit  $X \in ZA(SU(6) \times SU(2))$  gilt nach 81:

$$X = \begin{bmatrix} X' & p \\ q & a \end{bmatrix}$$

mit  $X' \in ZA(SU(6))$ ,  $a \in \{1, 0\}$  und  $p : \underline{T}'_2 \rightarrow \underline{T}'_6$ ,  $q : \underline{T}'_6 \rightarrow \underline{T}'_2$  lineare Abbildungen. Wir setzen für  $i = 1, \dots, 6$

$$p_i := \langle p(b_{78}), e_i \rangle, \quad q_i := \langle q(e_i), b_{78} \rangle,$$

wobei wir  $q$  von  $\underline{T}'_6$  auf  $\underline{T}_6$  trivial fortzusetzen haben durch die Vorschrift  $q(e^6) = 0$ . Wenden wir 81(2) auf  $r = b_{ij}$  mit  $1 \leq i < j \leq 6$  und  $s = b_{78}$  an, so ergibt sich

$$(1) \quad \frac{1}{2} (q_i - q_j) (p_i - p_j) = \bar{a}_{ij} - (a_{ij} - a)^2$$

mit  $\bar{a}_{ij} := a_W$ , wobei  $W = W_{ij}W_{78}$ .

Die Abbildung  $X' \in ZA(SU(6))$  ist bis auf Äquivalenz eine der in Satz 65 angegebenen Abbildungen  $X'_{k1}$ ,  $X'_{k2}$  mit  $k = 0, 1, 2, 3$ .

Wir definieren die Mengen

$$S := \{s \in \mathbb{R}^6 ; s_i = \pm \frac{1}{2}, \sum s_i = 0\} \subset \underline{T}'_6,$$

$$\hat{S} := \{s + \frac{1}{2} b_{78} ; s \in S\}.$$

Für  $s \in S$  setzen wir  $\hat{s} := s + \frac{1}{2} b_{78}$ . Die Spiegelung an der Hyperebene senkrecht zu  $\hat{s}$  sei  $W_{\hat{s}} =: W_s$ ; es gilt also

$$W_s(x) = x - \langle x, \hat{s} \rangle \hat{s}.$$

Da  $\hat{S} \subset E_6$ , ist  $W_s$  ein Element von  $W(G)$  für alle  $s \in S$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \det F_{W_s}(X) &= 1 - \langle X(\hat{s}), \hat{s} \rangle \\ &= 1 - (\langle X's, s \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{p} + \bar{q}, s \rangle + \frac{a}{2}) , \end{aligned}$$

wobei  $\bar{p} := \sum p_i e_i$ ,  $\bar{q} := \sum q_i e_i$ . Setzen wir  $a_s := a_{W_s}(X)$  und

$$f := \langle X's, s \rangle ,$$

so ergibt sich:

$$(2) \quad \langle \bar{p} + \bar{q}, s \rangle = 4a_s - a - 2f .$$

Die entsprechende Gleichung gilt natürlich, wenn wir  $s$  durch  $-s$  ersetzen, wobei  $f$  unverändert bleibt. Addieren wir diese neue Gleichung zu (2), so erhalten wir

$$(3) \quad 2f = 2(a_s + a_{-s}) - a$$

Diese Gleichung impliziert eine Einschränkung für die Werte von  $f$ :

(84)

$$(4) \quad \begin{array}{ll} 2f \in \{0, 2, 4\} & \text{falls } a = 0 \\ 2f \in \{-1, 1, 3\} & \text{falls } a = 1 \end{array}$$

Da  $s = \sum_{i=1}^5 s_i b_{i6}$ , gilt andererseits

$$f = f_k(s) := \langle X'_{k1} s, s \rangle = -2s_6 \sum_{a=1}^k s_a$$

für  $l = 1$  und  $l = 2$ . Daraus erhalten wir die folgende Wertetabelle:

	k	$\{2f_k(s) ; s \in S\}$
	0	{0}
(5)	1	{-1, 1}
	2	{-2, 0, 2}
	3	{-3, -1, 1, 3}

Der Vergleich mit (4) zeigt, daß die Fälle  $k = 2$  und  $k = 3$  unmöglich sind, da nach (4) die Werte  $-2$  und  $-3$  nicht vorkommen. Weiterhin sehen wir, daß  $a = 1$  für  $k = 1$  und  $a = 0$  für  $k = 0$  gelten muß.

Im Fall  $k = 0$  ergibt sich außerdem aus (3) und (5), daß alle  $a_s$  verschwinden. Also folgt aus (2), daß  $\bar{p} + \bar{q}$  senkrecht auf allen  $s \in S$  steht und daher  $\bar{p} = -\bar{q}$  gelten muß. Da im Fall  $k = 0$  auch alle  $a_{ij}$  für  $1 \leq i < j \leq 6$  verschwinden, erhalten wir aus (1)

$$-\frac{1}{2} (p_i - p_j)^2 = \bar{a}_{ij} \in \{0, 1\} ,$$

also  $p_i = p_j$ . Da aber  $\sum p_i = 0$ , folgt daraus  $\bar{p} = 0$ , also  $\bar{q} = 0$  und damit  $X = 0$ .

Es bleibt der Fall  $k = 1$  zu untersuchen; wir werden zeigen, daß dieser Fall unmöglich ist. Dazu betrachten wir zunächst das Teil-Wurzelsystem

$$D_5' := E_6 \cap (e_3 + e_4)^\perp .$$

Eine Orthonormalbasis des davon aufgespannten Raumes

$$\underline{T}'' := \underline{T} \cap (e_3 + e_4)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^8 ; x \perp e, e_7 + e_8, e_3 + e_4\}$$

ist  $f_1, \dots, f_5$  mit

$$2f_1 = b_{15} + b_{26} , \quad 2f_2 = b_{12} + b_{56} , \quad 2f_3 = b_{15} - b_{26} ,$$

$$2f_4 = b_{34} + b_{78} , \quad 2f_5 = b_{34} - b_{78} .$$

Die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}^5 = \underline{T}_5 \rightarrow \underline{T}''$  ,  $f(e_i) := f_i$  ,

ist ein Isomorphismus des Wurzelsystems  $D_5 \subset \underline{T}_5$  auf  $D_5'$

und läßt sich also zu einer Einbettung der Liealgebra SO(10)

in G fortsetzen, und das Bild ist eine reguläre Unteral-

gebra H von G mit maximal abelscher Teilalgebra T". Es ist

$$f_1 + f_2 = b_{16} , \quad f_1 - f_2 = b_{25} ,$$

$$f_1 + f_3 = b_{15} , \quad f_1 - f_3 = b_{26} ,$$

(6)

$$f_2 + f_3 = b_{12} , \quad f_2 - f_3 = b_{56} ,$$

$$f_4 + f_5 = b_{34} , \quad f_4 - f_5 = b_{78} ,$$

und es gilt  $f_i \pm f_j \in \hat{S}$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$  ,  $j \in \{4, 5\}$  .

Jetzt können wir den Fall k=1 untersuchen. Es seien  $i$  und  $p$  die Injektion (Einbettung) und die Projektion von T". Ist  $X \in ZA(G)$  , so gilt  $\bar{X} := f^{-1}pXif \in ZA(\text{Spin}(10))$  mit  $a_{f^{-1}Wf}(\bar{X}) = a_W(X)$  für alle  $W \in \mathcal{W}(H)$  (vgl. Kor.553). Insbesondere ist  $g(\bar{X})$  ein  $\mathcal{W}_5'$  - zulässiger Graph in  $G_5'$  , also nach Satz 74 und 75 einer der Typen

$$g_4' , \quad cg_4' , \quad g(O) , \quad g(I) .$$

Andererseits ist  $g(X') = g_1 \in G_6$  im Fall  $k = 1$  , d.h.

$a_{16} = 1$  und  $a_{ij} = 0$  für alle übrigen  $i, j \in \{1, \dots, 6\}$  ,

(84)

$\{i, j\} \neq \{1, 6\}$  . Nach (6) enthält  $g(\bar{X})$  den Teilgraphen



(denn  $f^{-1}W_{16}f = W'_{12}$  ,  $f^{-1}W_{25}f = W_{12}$ ), und  $cg(\bar{X})$  enthält die Teilgraphen



Dies ist für die oben angegebenen Typen nicht richtig: Wäre z.B.  $g(\bar{X})$  äquivalent zu  $g'_4$  oder  $cg'_4$  , so müßte ein Punkt mit allen übrigen einfach verbunden sein, was nicht der Fall ist. Demnach ist der Fall  $k = 1$  unmöglich.

Wir erhalten (recht mühevoll) das Ergebnis:

Satz 84 Es gibt keine echten Doppelquotienten von maximalem Rang für die kompakten Gruppen  $G$  mit Wurzelsystem vom Typ  $E_6$  .

Schlußbemerkung zu den Kapiteln 6,7,8:

Wir haben für einfache, kompakte Gruppen  $G$  alle Tori von maximaler Dimension in  $G \times G$  bestimmt, die auf  $G$  fixpunktfrei operieren. Versehen wir  $G$  mit einer linksinvarianten Metrik, so besteht nach einem Satz von Ochiai und Takahashi [22] die Zusammenhangskomponente der Isometriegruppe von  $G$  aus Links- und Rechts-Translationen. Daher haben wir für solche Metriken alle isometrischen freien Torus-Aktionen von maximalem Rang bestimmt.

Kapitel 9

Maximale Untergruppen

mit vorgegebenen maximalen Tori

91. Zulässige Erweiterungen von Tori

Es sei  $G$  eine kompakte Liegruppe mit maximalem Torus  $T$  und zugehörigem Wurzelsystem  $R$ . Mit Hilfe einer  $\text{Ad}(G)$ -invarianten Metrik  $(\ , \ )$  auf  $G$  können wir wieder  $R$  als Teilmenge von  $\underline{T}$  auffassen (vgl. 25).

Gegeben sei ein Untertorus  $T'$  von  $T$ . Eine zulässige Erweiterung von  $T'$  ist eine abgeschlossene Untergruppe  $H$  von  $G$ , die  $T'$  als maximalen Torus enthält. Ist  $T' = T$ , so ist  $H$  stets eine reguläre Untergruppe; andernfalls gibt es auch n i c h t - r e g u l ä r e Erweiterungen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Es sei  $H$  eine solche zulässige Erweiterung von  $T'$  und  $Q \subset \underline{T}'$  ihr Wurzelsystem. Nach § 25 gibt es für jede Wurzel  $q \in Q$  einen Vektor  $z_q \in \underline{H}_\mathbb{C} \subset \underline{G}_\mathbb{C}$  mit

$$(a) \quad [u, z_q] = i(q, u)z_q \quad ,$$

$$(b) \quad [u, \bar{z}_q] = -i(q, u)\bar{z}_q \quad ,$$

$$(c) \quad [z_q, \bar{z}_q] = 2iq \quad ,$$

für alle  $u \in \underline{T}'$ . Wegen  $i(q, q)(z_q, t) = ([q, z_q], t) = - (z_q, [q, t]) = 0$  für alle  $t \in \underline{T}$  ist  $z_q \perp \underline{T}$ , also  $z_q \in \Sigma_r E(r) \otimes \mathbb{C}$ . Wir wählen eine orientierte Orthonormalbasis  $\{x_r, y_r\}$  von  $E(r)$  für jede Wurzel  $r$  von  $G$  und setzen



(91)

$z_r := x_r + iy_r$  ,  $z_{-r} = \bar{z}_r = x_r - iy_r$  . So ist  $z_r$  bis auf einen komplexen Skalar vom Betrag 1 eindeutig bestimmt.

Dann ist also

$$z_q = \sum_{r \in R} a_{qr} z_r \quad , \quad a_{qr} \in \mathbb{C} \quad .$$

Setzen wir

$$R_q := \{r \in R ; a_{qr} \neq 0\} \quad ,$$

so ist

$$(d) \quad [u, z_q] = i \sum_{r \in R_q} (u, r) a_{qr} z_r \quad .$$

Die Teilmenge  $R_q$  von  $R$  nennen wir die Zerlegungsmenge von  $q$ ; sie ist unabhängig von der Wahl der  $z_r$ . Aus (a) und (d) folgt

$$(1) \quad r - q \perp \underline{T}' \quad \text{für alle } r \in R_q \quad ;$$

mit anderen Worten, jedes  $r \in R_q$  wird unter der orthogonalen Projektion  $p' : \underline{T} \rightarrow \underline{T}'$  auf  $q$  abgebildet. Außerdem ist

$$[z_q, \bar{z}_q] = \sum_{r \neq s \in R_q} a_{qr} \bar{a}_{qs} [z_r, \bar{z}_s] + 2i \sum_{r \in R_q} |a_{qr}|^2 r$$

Daraus folgt mit (c):

$$(2) \quad \sum_{r \in R_q} |a_{qr}|^2 r = q$$

$$(3) \quad \sum'_{r_0} a_{qr} \bar{a}_{qs} z_r, \bar{z}_s = 0 \quad \text{für alle } r_0 \in R \quad ,$$

wobei in der Summe  $\sum'_{r_0}$  über alle  $r, s \in R_q$  mit  $r - s = r_0$  zu summieren ist. (Vgl. auch [20], S. 208 f)

Jetzt sei umgekehrt  $q \in \underline{T}'$  gegeben. Es sei

$$\hat{R}_q := \{r \in R ; p'(r) = q\} \quad .$$

Falls es eine nicht-leere Teilmenge  $R_q$  von  $\hat{R}_q$  gibt und Zahlen  $a_{qr} \in \mathbb{C}$  für alle  $r \in R_q$ , so daß die Gleichungen (2) und (3) erfüllt sind, so folgen die Gleichungen (a), (b), (c) für  $z_q := \sum_{r \in R_q} a_{qr} z_r$ . Also erzeugt  $\underline{T}'$  zusammen

mit  $x_q := \operatorname{Re} z_q$ ,  $y_q = \operatorname{Im} z_q$  in  $\underline{G}$  eine zulässige Erweiterung  $H$  von  $\underline{T}'$  mit Wurzelsystem  $\{\pm q\}$ .

Ein Element  $q \in \underline{T}' - R$  kann nur dann Wurzel einer zulässigen Erweiterung (kurz Erweiterungswurzel genannt) sein, wenn  $q$  in der konvexen Hülle von  $\hat{R}_q$  liegt. Man beachte nämlich, daß  $(r, q) = (q, q)$  für alle  $r \in \hat{R}_q$  gilt und daher wegen (2)

$$\sum_{r \in R_q} |a_{qr}|^2 = 1.$$

Dies liefert schon eine starke Einschränkung. Eine hinreichende Bedingung ist, daß es eine Teilmenge  $R_q$  von  $\hat{R}_q$  gibt, deren konvexe Hülle den Vektor  $q$  im Inneren \*) enthält, mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$(4) \quad r - s \notin R \quad \text{für alle } r, s \in R_q.$$

Ist  $\hat{R}_q$  ein Simplex, so ist diese Bedingung mit  $R_q := \hat{R}_q$  auch notwendig. Denn falls  $r - s \in R$ , ist  $[z_r, \bar{z}_s] \neq 0$  (cf. [18]), und wenn  $R_q$  ein Simplex ist, gibt es für jedes  $r_0 \in R$  höchstens ein Paar  $r, s \in R_q$  mit  $r - s = r_0$ .

Es sei  $\hat{Q}$  die Menge der Erweiterungswurzeln von  $\underline{T}'$ . Insbesondere ist  $R \cap \underline{T}'$  natürlich eine Teilmenge von  $\hat{Q}$ . Diese letzteren Erweiterungswurzeln wollen wir einfach nennen, wenn also  $R_q = \{q\}$ , die übrigen heißen zusammengesetzt. Eine Teilmenge  $Q$  von  $\hat{Q}$  ist Wurzelsystem einer Erweiterungsgruppe genau dann, wenn  $Q$  selbst Wurzelsystem ist und für alle  $q \in Q$  ein zugehöriger Eigenvektor  $z_q$  mit (a), (b), (c) existiert, so daß gilt: Ist  $q, q', q+q' \in Q$ , so ist  $[z_q, z_{q'}] \in \mathbb{C}^* z_{q+q'}$ .

---

\*) Das Innere einer konvexen Menge ist das topologische Innere in dem von ihr aufgespannten affinen Teilraum.

(92)

## 92. Eindeutigkeit der Erweiterung

Die Wurzelsysteme  $Q$  von zulässigen Erweiterungen  $H$  eines Untertorus  $T'$  von  $T$  können nach § 91 bestimmt werden. Aber der zu einer Wurzel  $q \in Q$  gehörige Eigenvektor  $z_q$  ist nur dann (bis auf einen komplexen Skalar) eindeutig bestimmt, wenn  $R_q = \hat{R}_q$  ist, im allgemeinen nicht. Wir fragen daher, wie weit  $Q$  die Untergruppe  $H$  eindeutig bestimmt. Der folgende Satz gibt die Antwort für klassische Gruppen, was für unsere Zwecke genügt.

Satz 92 Es sei  $G$  eine der Gruppe  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(m)$  und  $T'$  ein Torus in  $G$ . Die Untergruppen  $H$ ,  $H'$  von  $G$  seien zwei zulässige Erweiterungen von  $T'$  in  $G$  mit demselben Wurzelsystem  $Q \subset \underline{T}'$ . Dann sind  $H$  und  $H'$  zueinander konjugiert in  $G$ .

Beweis: Da  $Q$  den Isomphietyp von  $\underline{H}$  bestimmt, gibt es einen Liealgebren-Isomorphismus  $\underline{f} : \underline{H} \rightarrow \underline{H}'$ , der  $\underline{T}'$  punktweise festläßt, wobei für die Wurzelräume  $E_H$  von  $\underline{H}$  und  $E_{H'}$  von  $\underline{H}'$  gilt:

$$\underline{f}(E_H(q)) = E_{H'}(q) \quad \text{für alle } q \in Q .$$

Da die Einheitsgitter von  $H$  und  $H'$  in  $\underline{T}'$  übereinstimmen, ist  $\underline{f}$  das Differential eines Liegruppen-Isomorphismus  $f : H \rightarrow H'$ . Sind  $j, j'$  die Inklusionen von  $H$  bzw.  $H'$  in  $G \subset GL(V)$  mit  $V = \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^m$ , so sind  $f_1 := j$  und  $f_2 := f \circ j'$  zwei treue Darstellungen von  $H$  auf  $V$ , die auf  $T'$  übereinstimmen. Da  $T'$  jede Konjugierten-Klasse von  $H$  schneidet, gilt

(92)

$$\text{Spur } f_1(h) = \text{Spur } f_2(h) \quad \text{für alle } h \in H,$$

wobei wir  $\text{Sp}(m)$  als Untergruppe von  $\text{SU}(n)$  mit  $n = 2m$  und  $\text{SO}(n)$  als Untergruppe von  $\text{SU}(n)$  auffassen. Die Charaktere der Darstellungen  $f_1$  und  $f_2$  sind also gleich, und damit sind  $f_1$  und  $f_2$  konjugiert, zunächst in  $\text{SU}(n)$ , aber damit auch in  $G$  (cf. [1]).

Der Satz 92 läßt sich sofort auf nicht-einfache Gruppen übertragen, deren Liealgebra nur Faktoren von Isomorphietyp  $\text{SO}(n)$ ,  $\text{SU}(n)$ ,  $\text{Sp}(n)$  enthält.

Ein etwas genaueres Argument von Mal'cev ([20], S.209) zeigt, daß die entsprechende Tatsache für alle kompakten Gruppen richtig ist, was wir aber hier nicht brauchen.

### 93. Rang (G) = 2

Jetzt sei  $G$  eine nicht-kommutative Gruppe vom Rang 2, d.h. der maximale Torus  $\mathbb{T}$  von  $G$  ist 2-dimensional. Wir suchen alle eindimensionalen Untertori  $\mathbb{T}'$ , die sich in eine Untergruppe  $H \cong \text{SU}(2)$  oder  $H \cong \text{SO}(3)$  einbetten lassen. In  $\mathbb{T}'$  muß es also eine Erweiterungswurzel  $q$  geben, und es ist  $\mathbb{T}' = \mathbb{R}q$ . Nach 91(1) und 91(2) muß  $q$  auf der Strecke zwischen zwei Wurzeln von  $G$  liegen, und die Gerade  $\mathbb{R}q$  muß diese Strecke senkrecht schneiden. Außerdem muß 91(3) erfüllt sein. In der folgenden Tabelle 93 gehen wir alle 2-dimensionalen Wurzelsysteme durch und bestimmen die möglichen Erweiterungswurzeln  $q$  bis auf Weyl-Transformationen.

Tabelle 93

(93)

- 136 -


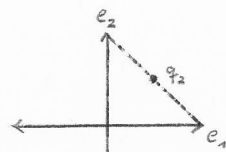
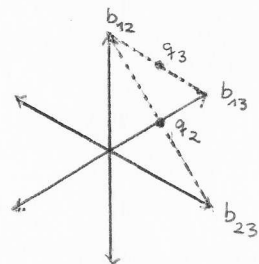
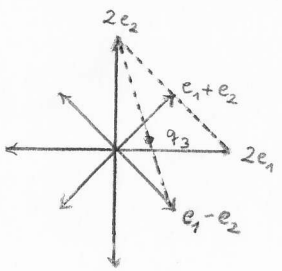
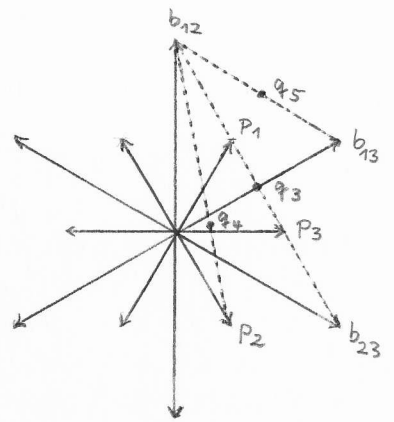
R	q	$\hat{R}_q$	$R_q$
$A_1$	$e_1$	$\{e_1\}$	$\{e_1\}$
			
$A_1 \times A_1$	$q_1 = e_1$ $q_2 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$	$\{e_1\}$ $\{e_1, e_2\}$	$\{e_1\}$ $\{e_1, e_2\}$
			
$A_2$	$q_1 = b_{12}$ $q_2 = \frac{1}{2} b_{13}$ $q_3 = \frac{1}{2}(b_{12} + b_{13})$	$\{b_{12}\}$ $\{b_{12}, b_{13}\}$ $\{b_{12}, b_{13}\}$	$\{b_{12}\}$ $\{b_{12}, b_{13}\}$ -
			
$C_2$	$q_1 = 2e_2$ $q_2 = e_1 + e_2$ $q_3 = \frac{3}{5}(e_1 - e_2) + \frac{2}{5}(2e_2)$ $= \frac{1}{5}(3, 1)^t$ $q_4 = e_1$	$\{2e_2\}$ $\{2e_1, 2e_2, e_1 + e_2\}$ $\{e_1 - e_2, 2e_2\}$ $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$	$\{2e_2\}$ $\{e_1 + e_2\}$ $\{2e_1, 2e_2\}$ $\{e_1 - e_2, 2e_2\}$ -
			

Tabelle 93 (Fortsetzung)

R	q	$\hat{R}_q$	$R_q$
$G_2$	$q_1 = b_{12}$	$\{b_{12}\}$	$\{b_{12}\}$
	$q_2 = p_1$	$\{p_1\}$	$\{p_1\}$
	$q_3 = \frac{1}{2} b_{13}$	$\{b_{12}, p_1, p_3, b_{23}\}$	$\{b_{12}, p_3\}$
			$\{b_{12}, b_{23}\}$
	$q_4 = \frac{1}{14} (9p_2 + 5b_{12})$ $= \frac{1}{14} (2, 1, -3)^t$	$\{p_2, b_{12}\}$	$\{p_2, b_{12}\}$
	$q_5 = \frac{1}{2} (b_{12} + b_{13})$	$\{b_{12}, b_{13}\}$	-



(93)

Für  $G_2$  haben wir dabei gesetzt:

$$p_i := \frac{1}{3}(b_{ij} + b_{ik})$$

mit  $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$ . Die Vektoren  $q$  in der Tabelle, für die kein  $R_q$  existiert, erfüllen zwar 91(1) und 91(2), aber nicht 91(3); sie sind also **keine** Erweiterungswurzeln.

#### 94. Beispiele mit Codimension 1

In diesem Abschnitt sei  $T$  ein maximaler Torus von  $G$  und  $T'$  ein Untertorus mit **C o d i m e n s i o n 1**. Wir suchen alle **m a x i m a l e n** Untergruppen  $H$  von  $G$ , die  $T'$  als maximalen Torus haben. Diese Aufgabe ist von Dynkin [10] gelöst worden; wir können aber für die uns interessierenden Beispiele schneller ans Ziel kommen.

Es sei  $v \in \underline{T}$  ein Normalenvektor der Hyperebene  $\underline{T}'$  in  $\underline{T}$ ; es ist also  $\underline{T}' = v^\perp$ . Wir bestimmen zunächst die orthogonale Projektion des Wurzelsystems  $R$  von  $G$  auf  $\underline{T}'$ ,  $p'(R)$ . Ist  $q \in p'(R) - R$ , so ist

$$R^q := R \cap \text{Span} \{v, q\} = \hat{R}_q \cup (\mathbb{R}v \cap R)$$

ein 2-dimensionales Unter-Wurzelsystem von  $R$ , und  $q$  ist Erweiterungswurzel ( $q \in \hat{Q}$ ) genau dann, wenn  $q$  eine der in Tabelle 93 bestimmten Erweiterungswurzeln bezüglich  $R^q$  ist. Wir sehen aus dieser Tabelle, daß die folgende Bedingung dafür notwendig und hinreichend ist, daß  $q$  Erweiterungswurzel ist: Es gibt  $r, s \in R$ , so daß  $q$  auf der Strecke  $[r, s]$  liegt ( $r, s$  nicht notwendig verschieden), so daß

$$r - s \in \mathbb{R}v - R \quad .$$

Ist  $\hat{Q}$  auf diese Weise bestimmt, so suchen wir darin alle Wurzelsysteme  $Q_i \subset \hat{Q}$  von maximalen zulässigen Erweiterungen  $H_i$  auf. Ist  $R_q$  eindeutig bestimmt für alle  $q \in Q_i$ , so ist  $H_i$  durch  $Q_i$  eindeutig bestimmt, sonst nur bis auf Konjugation (vgl. § 92). Ist  $Q = \hat{Q}$  selbst Wurzelsystem einer Untergruppe  $H$ , so ist  $H$  (einzige) größte zulässige Erweiterung von  $T'$ .

Wir erinnern an die Standard-Wurzelsysteme:

$$A_n = \pm \{e_i - e_j ; 1 \leq i < j \leq n+1\} ,$$

$$D_n = \pm \{e_i \pm e_j ; 1 \leq i < j \leq n\} ,$$

$$B_n = D_n \cup \pm \{e_i ; 1 \leq i \leq n\} ,$$

$$C_n = D_n \cup \pm \{2e_i ; 1 \leq i \leq n\} ,$$

$$G_2 = A_2 \cup \pm \{p_1, p_2, p_3\} ,$$

wobei wir wie in 93

$$p_i = \frac{1}{3}(b_{ij} + b_{ik})$$

mit  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  gesetzt haben. Außerdem setzen wir

$$q_{ij} := \frac{1}{2}(e_i + e_j - e_k - e_1)$$

für  $\{i, j, k, 1\} = \{1, 2, 3, 4\}$ , und wir schreiben abkürzend

$$\{q_{ij}\} := \{q_{ij} ; 1 \leq i < j \leq 4\} = \pm \{q_{12}, q_{13}, q_{14}\} .$$

Schließlich setzen wir noch

$$\bar{e} := e_1 + \dots + e_m - e_{m+1} - \dots - e_{2m} = b_{1, m+1} + \dots + b_{m, 2m}$$

in  $\mathbb{R}^{2m}$ . Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die folgende Tabelle:



Tabelle 94

(94)

Nr.	G	$\underline{T}$	R	v	$R \cap v^\perp$	n	$\hat{Q}$	Q	H	G/H
1	SU(n) , n=2m	$\mathbb{R}^n \ominus \mathbb{R}e$	$A_{n-1}$	$\bar{e}$	$A_{m-1} \times A_{m-1}$	4	$\pm\{b_{12}, b_{34},$ $q_{13}, q_{14}\}$		Sp(2)	$S^5_0$
2	" "	"	"	"	"	$\geq 6$	$A_{m-1} \times A_{m-1}$		SU(m) <sup>2</sup>	
3	SU(n)	"	"	$ne_n - e$	$A_{n-2}$	$\geq 4$	$A_{n-2}$		SU(n-1)	$S^{2n-1}$
4	Spin(2n)	$\mathbb{R}^n$	$D_n$	e	$A_{n-1}$	4	$A_3 \cup \{q_{ij}\}$		Spin(7)'	$S^7_0$
5	"	"	"	"	"	$\geq 5$	$A_{n-1}$		SU(n-1)	
6	"	"	"	$e_n$	$D_{n-1}$	$\geq 4$	$B_{n-1}$		Spin(2n-1)	$S^{2n-1}_0$
7	Spin(2n+1)	$\mathbb{R}^n$	$B_n$	e	$A_{n-1}$	2	$A_1$		SU(2)	
8	"	"	"	"	"	3	$G_2$		Aut( $\mathbb{C}a$ )	$S^7_0$
9	"	"	"	"	"	4	$A_3 \cup \{q_{ij}\}$		Spin(7)'	$S^{15}$
10	"	"	"	"	"	$\geq 5$	$A_{n-1}$		SU(n)	
11	"	"	"	$e_n$	$B_{n-1}$	$\geq 2$	$B_{n-1}$		$\sim$ Spin(2n-1)	
12	Sp(n)	$\mathbb{R}^n$	$C_n$	e	$A_{n-1}$	2	$A_1$		$\sim$ SU(2)	
13	"	"	"	"	"	3	$A_2$		SU(3)	
14	"	"	"	"	"	4	$A_3 \cup \{q_{ij}\}$	$A_3$	SU(4)	
15	"	"	"	"	"	"	"	$\{q_{ij}\}$	SU(2) <sup>3</sup>	
16	"	"	"	"	"	$\geq 5$	$A_{n-1}$		SU(n)	
17	"	"	"	$e_n$	$C_{n-1}$	$\geq 2$	$C_{n-1}$		Sp(n-1)	$S^{4n-1}$

Ist  $G/H$  diffeomorph zu einer Sphäre  $S^k$  wie in den Beispielen Nr. 1,3,4,6,8,9,17, so hat die normal-homogene Metrik strikt positive Krümmung.  $G/H = S^k_O$  (Beispiele 1,4,6,8) soll heißen, daß die normal-homogene Metrik sogar isometrisch zur Standard Metrik auf  $S^k$  ist, also konstante Krümmung hat.

Zu 1: Das Paar  $(SU(4), H)$  geht unter dem Isomorphismus  $f : SU(4) \rightarrow Spin(6)$  über in das Paar  $(Spin(6), Spin(5))$ ; Der Quotient ist die Standardsphäre der Dimension 5.

Zu 4:  $Spin(7)' \subset Spin(8)$  ist die folgende Untergruppe: Es sei  $SO(7) = \{ A \in SO(8) ; A(e_1) = e_1 \}$ . Das Urbild dieser Untergruppe in  $Spin(8)$  sei  $Spin(7)$  genannt. Dann ist  $Spin(7)' := \beta^{-1}(Spin(7))$ , wobei  $\beta$  der in § 75 definierte Automorphismus von  $Spin(8)$  ist (vgl. [4], S.221).

Zu 8: Hier ist  $H$  das Urbild der Untergruppe  $Aut(\mathbb{C}a)$  von  $SO(7)$  in  $Spin(7)$ ; vgl. [4], S.220 und auch die Zeichnung S. vi, vii.

Zu 9:  $Spin(7)' \subset Spin(8) \subset Spin(9)$  ist die Standgruppe der Isotropie-Darstellung von  $Spin(9)$  auf der Einheitssphäre im Tangentialraum von  $F_4/Spin(9) = \mathbb{C}aP^2$ , wobei  $F_4$  die Isometriegruppe von  $\mathbb{C}aP^2$  mit Wurzelsystem  $F_4$  ist (vgl. § 101 und [4], S.221f). Es gilt also  $G/H \cong S^{15}$ .

Zu 11: Es ist  $\hat{R}_{e_i} = \{e_i, e_i - e_n, e_i + e_n\}$ , also ist  $R_{e_i}$  nicht eindeutig bestimmt (vgl. in Tabelle 93 die Erweiterungswurzel  $q_2$  für  $R = C_2 \cong B_2$ ). Nach Satz 92 können wir  $H$  daher nur bis auf Konjugation bestimmen. Ähnliches gilt bei 12.

Zu 14/15: Hier ist (als einziges Beispiel dieser Art)  $\hat{Q}$  kein Wurzelsystem einer Untergruppe von  $Sp(4)$ , denn es gilt

(94)

$q_{12} + e_1 - e_2 \notin \hat{Q}$  , aber

$$[z_{q_{12}}, z_{e_1 - e_2}] \in \mathbb{C}^*[z_{e_1 + e_2}, z_{e_1 - e_2}] = \mathbb{C}^* z_{2e_1} ,$$

diese Lieklammer verschwindet also nicht. Das maximale Teilsystem  $Q' := \pm \{q_{13}, q_{14}, e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$  sowie die daraus durch Permutation der Indizes hervorgehenden Wurzelsysteme gehören zu Untergruppen von  $SU(4)$  (vgl. Nr. 1) und bleiben deshalb außer Betracht. Es bleiben die maximalen Teilsysteme  $Q_1 = A_3$  und  $Q_2 = \{q_{ij}\}$  , die zu den angegebenen Gruppen  $H$  gehören.

In den Fällen 2,3,5,7,10,13,16,17 ist leicht zu sehen, daß es keine zwei Wurzeln  $r, s \in R$  gibt mit  $r - s \in \mathbb{R}^* v$  . Deshalb ist 91(1) nur trivial mit  $q = r$  erfüllbar. Es gibt also keine zusammengesetzten Erweiterungswurzeln, d.h.

$$\hat{Q} = R \cap v^\perp .$$

Die nicht-regulären Untergruppen der Nummern 1,4,6,8,15 gehören zu  $S$ -Unteralgebren im Sinne von [10] und [3]: Sie sind in keiner echten regulären Unteralgebra von  $\underline{G}$  enthalten. Dies folgt, weil  $\cup\{R_q ; q \in Q\}$  in keinem echten Unter-Wurzelsystem enthalten ist.

#### 95. Beispiele mit $\dim(T') = 1$

In diesem Abschnitt sei  $T'$  ein 1-dimensionaler Untertorus von  $T$ , also  $\underline{T}' = \mathbb{R}u$  für ein  $u \in \underline{T}$  ,  $u \neq 0$  . In der folgenden Tabelle 95 werden die Erweiterungswurzeln  $q \in \underline{T}'$  sowie die zugehörigen Untergruppen  $H \cong SU(2)$  oder  $H \cong SO(3)$  bis auf Konjugation bestimmt.

Tabelle 95

Nr.	G	$\underline{T}$	n	u	q	$\hat{R}_q$	$R_q^{\min}$	H ~
1	SU(n)	$\mathbb{R}^n \ominus \mathbb{R}e$	$> 2k \geq 2$	$(e^k)'$	-	-	-	
2	"	"	2m	$\hat{e}$	$\frac{1}{m} \hat{e}$	$\{b_{2i-1, 2j}; 1 \leq i \leq j \leq m\}$	$\{b_{12}, b_{34}, \dots, b_{n-1, n}\}$	$\Delta^m \text{SU}(2)$
3	SO(2n)	$\mathbb{R}^n$	$\geq 4$	$e_1$	$e_1$	$\{e_1 \pm e_i; 2 \leq i \leq n\}$	$\{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$	SO(3)
4	"	"	2m	e	$\frac{1}{m} e$	$\{e_i + e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$	$\{e_{2i+1} + e_{2i}; i=1, \dots, m\}$	$\Delta^m \text{Sp}(1)$
5	"	"	2m+1	e	-	-	-	
6	SO(2n+1)	$\mathbb{R}^n$	$\geq 2$	$e_1$	$e_1$	$\{e_1, e_1 \pm e_i; 2 \leq i \leq n\}$	$\{e_1\}, \{e_1 + e_2, e_1 - e_2\}$	SO(3)
7	"	"	2m	e	$\frac{1}{m} e$	$\{e_i + e_j; 1 \leq i < j \leq n\}$	$\{e_{2i-1} + e_{2i}; i=1, \dots, m\}$	$\Delta^m \text{Sp}(1)$
8	"	"	2m+1	e	-	-	-	
9	Sp(n)	$\mathbb{R}^n$	$\geq 2$	$e_1$	$2e_1$	$\{2e_1\}$	$\{2e_1\}$	Sp(1)
10	"	"	$\geq 2$	e	$\frac{2}{n} e$	$\{2e_k, e_i + e_j; 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n\}$	$\{e_1 + e_2, \dots, e_{2m-1} + e_{2m}, 2e_{2m+1}, \dots, 2e_n\}$ , $0 \leq 2m \leq n$	$\Delta^m \text{Sp}(1)$

(95)

(95)

Dabei haben wir für eine Matrizen­gruppe  $H$  in  $GL(r, \mathbb{K})$  definiert:

$$\Delta^m_H = \left\{ \begin{pmatrix} A & & \\ & \dots & \\ & & A \end{pmatrix} \in GL(mr, \mathbb{K}) ; A \in H \right\} .$$

Weiterhin setzen wir

$$\hat{e} := \sum_{i=1}^m b_{2i-1, 2i} \in \mathbb{R}^{2m} .$$

Außerdem haben wir von den folgenden Einbettungen Gebrauch gemacht:

$$Sp(m) \subset SO(4m) \subset SO(4m+1) .$$

Dabei wurde  $\mathbb{H}^m$  mit  $\mathbb{R}^{4m}$  identifiziert mit der Abbildung

$$(q_1, \dots, q_m)^t \rightarrow (q_1^1, \dots, q_1^4, q_2^1, \dots, q_2^4, \dots, q_m^1, \dots, q_m^4)^t .$$

Da  $\hat{R}_q$  bei hoher Codimension sehr unübersichtlich wird, benutzen wir die Darstellungstheorie der  $SU(2)$  als Hilfsmittel:

Lemma 951: Ist  $f : SU(2) \rightarrow SU(n)$  eine Darstellung, so gilt für die Matrix  $f(b_{12}) \in SU(n)$ : Ist  $w$  ein Eigenwert, so ist  $-w$  ein Eigenwert derselben Vielfachheit.

Beweis: Das folgt sofort aus der entsprechenden Eigenschaft für irreduzible Darstellungen (vgl. z.B. [21], [25])

Lemma 952: Für ungerade  $n \geq 3$  ist  $e \in \mathbb{T}_n$  nicht im Bild einer Darstellung  $f : SU(2) \rightarrow SO(2n+1)$ .

Beweis: Nehmen wir an, daß  $e$  im Bild einer solchen Darstellung  $f$  liege, also  $e = f(x)$  für ein  $x \in SU(2)$ .

Wir gehen zur komplexifizierten Darstellung  $f_{\mathbb{C}}$  von SU(2) auf  $\mathbb{C}^{2n+1}$  über. Unter der größeren Gruppe  $SU(2n+1)$  ist  $e$  konjugiert zu  $\hat{e} = b_{12} + b_{34} + \dots + b_{2n-1,2n}$ ;  $f(x)$  hat also die Eigenwerte  $\pm i$  mit Vielfachheit  $n$  und den einfachen Eigenwert  $0$ . Aus der expliziten Kenntnis der Gewichte der irreduziblen Darstellungen von SU(2) (vgl. [25], 4.3.10) ergibt sich, daß  $f_{\mathbb{C}}$  konjugiert ist zu  $n \rho_2$ , der  $n$ -fachen direkten Summe der "natürlichen" Darstellung  $\rho_2$  von SU(2) auf  $\mathbb{C}^2$ , falls  $n \geq 2$ . (Im Fall  $n = 1$  käme außerdem noch die Darstellung  $\rho_3$  von SO(3) auf  $\mathbb{C}^3$  in Betracht.) Aus dieser Zerlegung von  $f_{\mathbb{C}}$  und der Tatsache, daß  $n$  ungerade ist, ergibt sich, daß  $f$  nicht selbst schon zu einer komplexen Darstellung (in  $U(n) \subset SO(2n+1)$ ) konjugiert sein kann; sonst müßte jeder irreduzible Summand von  $f_{\mathbb{C}}$  doppelt vorkommen ([1], S.27). Daher besitzt  $f$  einen (reell irreduziblen) Summanden  $g$ , dessen Komplexifizierung  $g_{\mathbb{C}}$  immer noch irreduzibel ist ([1], S. 66). Da  $g_{\mathbb{C}}$  ein Summand von  $f_{\mathbb{C}}$  ist, muß  $g_{\mathbb{C}} \sim \rho_2$  gelten. Aber das ist ein Widerspruch, denn  $\rho_2$  ist quaternional (nämlich konjugiert zur Darstellung von Sp(1) auf  $\mathbb{H}^1$ ) und daher nicht reell ([1], S.64).

Jetzt können wir die Tabelle 95 erläutern:

Zu 1: Es ist  $nu = ne^k - ke = (n-k)(e_1 + \dots + e_k) - k(e_{k+1} + \dots + e_n)$ . Da  $n-k \neq k$ , ist das Kriterium von Lemma 95 nicht erfüllt; es kann also keine Erweiterungswurzel in  $\mathbb{R}u$  geben.

(95)

Zu 2,3,4,6,10: In all diesen Fällen gilt  $p'(R) = \{q, 0\}$ , wobei  $p'$  die Projektion auf  $\mathbb{R}u$  bezeichnet. Also ist  $q$  einziger Kandidat für eine Erweiterungswurzel, und wir finden jeweils eine zugehörige Untergruppe  $H$ .

Zu 7: Es gilt  $p'(R) = \{\frac{2}{n}e, \frac{1}{n}e, 0\}$ , und für  $q' = \frac{1}{n}e$  gilt  $R_{q'} = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Dies ist ein Simplex, und es gilt  $e_i - e_j \in R$ , also ist 91(3) nicht erfüllt und  $q'$  keine Erweiterungswurzel.

Zu 9: Es ist  $p'(R) = \{2e_1, e_1, 0\}$ , und  $\hat{R}_{e_1} = \{e_1 \pm e_i ; 2 \leq i \leq n\}$ . Wäre  $e_1$  Erweiterungswurzel und  $e_1 + e_i \in R_{e_1}$ , so wäre auch  $e_1 - e_i \in R_{e_1}$ , da  $e_1$  im Inneren der konvexen Hülle von  $R_{e_1}$  läge. Aber dies ist ein Widerspruch zu 91(3), denn  $e_1 + e_i - e_1 - e_i = 2e_i$  ist eine Wurzel, und für kein anderes Paar  $r, s \in \hat{R}_{e_i}$  gilt  $r - s = 2e_i$ .

Zu 5,8: Dies folgt aus Lemma 952 für  $SO(2n+1)$  und erst recht für  $SO(2n)$ .

Zu erläutern bleibt jetzt noch die vorletzte Spalte von Tabelle 95. Dort sind bis auf Indexpermutation alle minimalen Zerlegungsmengen  $R_q^{\min}$  von  $q$ , die im Wurzelsystem  $R_K$  einer regulären Erweiterung  $K$  von  $H$  enthalten sind. Ist  $R_q$  die zur Untergruppe  $H$  gehörige Zerlegungsmenge von  $q$ , so liegt  $R_q$  natürlich in  $R_K$ ; es reicht also, die minimalen Zerlegungsmengen innerhalb  $R_q$  für beliebiges  $H$  zu bestimmen. In den Fällen 3 und 6 sind diese leicht zu ermitteln: Ist  $e_1 + e_i \in R_q$ , so auch  $e_1 - e_i$ , weil  $e_1$  im Inneren der konvexen Hülle von  $R_q$  liegt (s.o.). Im Fall 5 muß eins der  $e_1 \pm e_i$  in  $R_q$  liegen, falls keins der  $e_j$  in  $R_q$

liegt. Daraus folgt die Behauptung in diesen Fällen.  
 Die Fälle 2,4,7,10 haben gemeinsam, daß  $q = \hat{e}$  bzw.  $q = e$  nicht nur in  $\underline{G}$ , sondern zufällig auch in  $G$  liegt, also insbesondere eine invertierbare Matrix darstellt. Ist  $\{X, Y\}$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $E(q)$  in  $\underline{H}$ , so ist  $X$  konjugiert zu einem Vielfachen von  $q$  und außerdem senkrecht auf  $\underline{T}$  (bezüglich einer  $\text{Ad}(G)$ -invarianten Metrik). Insbesondere ist auch  $X$  invertierbar. Für  $r \in R$  sei  $p_r$  die Projektion auf  $E(r)$ . Dann gilt

$$R_q = \{r \in R ; p_r(X) \neq 0\} .$$

Im folgenden sei  $E_{ij} \in M(n, \mathbb{R})$  die Matrix mit

$$E_{ij} e_k = \delta_{jk} e_i .$$

Weiterhin sei

$$F_{ij} = E_{ji} - E_{ij} , \quad G_{ij} = E_{ji} + E_{ij} .$$

Lemma 953: Für  $G = \text{SU}(2m)$ ,  $v = \hat{e}$  (Fall 2) gilt:

$R_q$  enthält (bis auf Permutation der Indizes) die Menge  $\{b_{12}, b_{34}, \dots, b_{n-1, n}\}$  mit  $n := 2m$

Beweis: Da  $X \in \text{SU}(n) - \underline{T}$ , ist

$$X = \sum_{a < b} u_{ab} F_{ab} + i \sum_{a < b} v_{ab} G_{ab}$$

mit  $u_{ab}, v_{ab} \in \mathbb{R}$ . Andererseits ist

$$E(e_a - e_b) = \text{Span} \{F_{ab}, iG_{ab}\} .$$

Da  $X$  invertierbar ist, gibt es eine Permutation  $\sigma \in S_n$  mit  $x_{a, \sigma(a)} \neq 0$  für  $a = 1, \dots, n$ , denn die Determinante von  $X = ((x_{ab}))$  setzt sich aus solchen Produkten zusammen. Da



(95)

$x_{aa} = 0$  für  $a = 1, \dots, n$ , hat  $\sigma$  keinen Fixpunkt. Wir wählen Indizes  $a_1 = 1$ ,  $a_2 \neq a_1, \sigma(a_1)$ ,  $\dots$ ,  $a_m \notin \{a_1, \dots, a_{m-1}, \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_{m-1})\}$ . Dann ist  $\{a_1, \dots, a_m, \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m)\} = \{1, \dots, 2m\}$  und  $b_{a, \sigma(a)} \in R_q$  für  $a = 1, \dots, m$ , was zu zeigen war.

Lemma 954: Für  $G \in \{SO(4m), SO(4m+1)\}$  und  $v = e$  (Fälle 4 und 7) gilt:  $R_q$  enthält bis auf Permutation der Indizes die Menge  $\{e_1+e_2, e_3+e_4, \dots, e_{n-1}+e_n\}$  mit  $n := 2m$ .

Beweis: Eine Matrix  $X \in M(2n, \mathbb{R})$  können wir als  $n \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in  $M(2, \mathbb{R})$  auffassen. In dieser Darstellung ist  $(x_{p,q})_{a,b} = x_{pa, qb}$  mit  $p, q \in \{1, 2\}$ ,  $a, b \in \{1, \dots, n\}$ . Eine Basis von  $M(2, \mathbb{R})$  ist

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt für SO(2n) und SO(2n+1):

$$E(e_i - e_j) = \text{Span} \{I F_{ij}, J F_{ij}\},$$

$$E(e_i + e_j) = \text{Span} \{K F_{ij}, L F_{ij}\}.$$

Da  $X \in \text{Span} \cup \{E(r) ; r \in R_q\}$ , ist  $X = \sum_{i < j} (u_{ij} K + v_{ij} L)$  mit  $u_{ij}, v_{ij} \in \mathbb{R}$ . Die Behauptung folgt jetzt analog zu 953 aus der Tatsache, daß  $X$  invertierbar und  $n = 2m$  gerade ist.

Das entsprechende Resultat ist im Fall 10, d.h.  $G = Sp(n)$ ,  $v = e$ , vermutlich auch richtig. Es ist jedoch einfacher, diese Aussage gleich für  $R_K$  statt für  $R_q$  zu beweisen:

Lemma 955: Es sei  $G = \text{Sp}(n)$  und  $H$  eine zulässige Erweiterung von  $T'$  mit  $\underline{T}' = \mathbb{R}e$ . Ist  $K$  eine reguläre Untergruppe von  $G$ , die  $H$  enthält, und  $R_K \subset R$  das Wurzelsystem von  $K$ , so enthält  $R_K$  bis auf Index-Permutation eine der Mengen

$$S_m := \{e_1+e_2, \dots, e_{2m-1}+e_{2m}, 2e_{2m+1}, \dots, 2e_n\}$$

mit  $0 \leq m \leq n/2$ .

Beweis: Für die Wurzelräume von  $\text{Sp}(n)$  gilt:

$$E(2e_a) = \mathbb{C} E_{aa} \quad j, \quad E(e_a+e_b) = \mathbb{C} G_{ab} \quad j.$$

Ist  $\{X, Y\}$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $E(q)$  in  $\underline{H}$  mit  $q = \frac{2}{n} e$  (dies ist die einzige Erweiterungswurzel in  $\underline{T}'$ , wie oben gezeigt), so ist  $X \in \sum_{r \in \hat{R}_q} E(r)$ , also

$$X \quad j^{-1} = \sum_{a < b} u_{ab} G_a + \sum_a u_{aa} E_{aa}.$$

mit  $u_{ab} \in \mathbb{R}$  für  $a \leq b$ . Da  $X$  außerdem invertierbar ist, gibt es wie in 953 eine Permutation  $\sigma \in S_n$  mit  $u_{a, \sigma(a)} \neq 0$  für  $a = 1, \dots, n$ , denn  $X \quad j^{-1}$  ist eine komplexe Matrix. Hierbei haben wir  $u_{ba} := u_{ab}$  für  $a < b$  zu setzen. Wir nummerieren die Komponenten nun so um, daß die Fixpunkte von  $\sigma$  genau die Zahlen  $k+1, \dots, n$  sind mit  $0 \leq k \leq n$ . Ähnlich wie in 953 wählen wir  $a_1 = 1$ , falls  $k \neq 0$ , dann  $a_2 \neq a_1, \sigma(a_1)$ ,  $a_3 \neq a_1, a_2, \sigma(a_1), \sigma(a_2)$  usw. in  $\{1, \dots, k\}$  (für  $k = 0$  ist diese Menge leer). Ist  $k = 2m$  gerade, so ist  $\{a_1, \dots, a_m, \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m)\} = \{1, \dots, k\}$ , und  $R_q$  enthält (nach Ummummerierung) die Wurzelmenge  $S_m$ ; insbesondere gilt  $S_m \subset R_K$  für jede reguläre Erweiterung  $K$  von  $H$ .

(95)

Ist  $k = 2m+1$  ungerade, so enthält  $R_q$  und damit  $R_K$  nach Umnummerierung die Wurzelmenge

$$S'_m := \{e_1+e_2, \dots, e_{k-2}+e_{k-1}, 2e_{k+1}, \dots, 2e_n\} .$$

Außerdem gilt  $q = \frac{2}{n} e \in \text{Span } R_K$  und  $2e_k \equiv 2e \pmod{\text{Span } S'_m}$ , also gilt  $2e_k \in \text{Span } R_K$ . Daraus folgt schon  $2e_k \in R_K$ .

Das sieht man aus der Klassifikation der Teil-Wurzelsysteme von  $C_n$  in [10], S. 147, oder auch direkt, indem man zeigt:

Gilt  $p \cdot 2e_k = r_1 + \dots + r_m$  mit  $p \in \mathbb{N}$  und  $r_1, \dots, r_m \in C_n$ , so daß  $r_a \neq r_b$  für mindestens ein Paar  $a, b \in \{1, \dots, m\}$ , so gibt es  $c, d \in \{1, \dots, m\}$  mit  $r_c + r_d \in C_n \cup \{0\}$

Sind also die  $r_i$  in einem Teil-Wurzelsystem  $R_K$  von  $C_n$ , so auch  $r_c+r_d$ , und man kann  $p \cdot 2e_k$  durch  $m-1$  Wurzeln von  $R_K$  statt durch  $m$  darstellen. Durch Induktion (Suche nach dem "kleinsten Verbrecher") zeigt man schließlich, daß es eine Darstellung gibt mit  $m = p$  und  $r_1 = \dots = r_m \in R_K$ , also  $2e_k = r_1 \in R_K$ . Damit ist das Lemma 955 bewiesen.

Betrachten wir auf  $G$  eine Torus-invariante Metrik, so ist die Invarianzgruppe  $K$  regulär. Wenn wir die induzierten Metriken auf  $G/H$  für eine Untergruppe  $H$  von  $K$  untersuchen, so dürfen wir  $H$  durch eine in  $K$  konjugierte Untergruppe  $H'$  ersetzen. In den Fällen von Tabelle 95 haben wir gezeigt, daß  $R_K$  neben  $R_q$  auch  $R_q^{\min}$  enthält. Deshalb gibt es eine zulässige Erweiterung  $H'$  des maximalen Torus  $T'$  von  $H$  mit denselben Wurzeln  $\pm q$  wie  $H$  und Zerlegungsmenge  $R_q^{\min}$ . Nach Satz 92 sind also  $H$  und  $H'$  in  $K$  konjugiert. ( $\underline{K}$  enthält als reguläre Unter algebra der klassischen Algebra  $\underline{G}$  keine Ausnahmealgebren als direkte Summanden.)

Wir können also ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $R_q = R_q^{\min}$  annehmen. Sind  $R_q^1, \dots, R_q^k$  die verschiedenen minimalen Zerlegungsmengen von  $q$ , so brauchen wir uns nur mit den zugehörigen Gruppen  $H_1, \dots, H_k$  zu beschäftigen. Nach 92 gilt  $H_i = g_i H_1 g_i^{-1}$  für ein  $g_i \in G$ . Stattdessen können wir auch nur die Gruppe  $H_1$  betrachten, aber alle linksinvarianten Metriken auf  $G$ , die bezüglich  $i r - g e n d e i n e m$  der Tori  $g_i^{-1} T g_i$  invariant sind. Dies geschah in 433 und 443: In diesen Fällen war  $G = Sp(2)$  bzw.  $G = Sp(3)$  und  $\underline{T}' = \mathbb{R}e$ . Nach Tabelle 95, Nr.10, gibt es genau zwei minimale Zerlegungsmengen, nämlich mit  $m = 0$  und  $m = 1$ , die den in § 43 und § 44 untersuchten Tori entsprechen.

## Kapitel 10

### Die Klassifikation

#### 101. Die Räume $G/U_{\max}$ mit positiver Krümmung

Die Tori  $S$  von maximaler Dimension, die fixpunktfrei und isometrisch auf einer kompakten Liegruppe  $G$  operieren können, wurden in Kapitel 6,7,8 bestimmt. In Kapitel 9 wurden die beiden Komponenten der zugehörigen maximalen Untergruppen  $U_{\max}$  in  $G \times G$  bestimmt, die diese Tori  $S$  als maximalen Torus haben. Die Ergebnisse fassen wir in Tabelle 101 zusammen. Nachzutragen bleibt die Begründung in den Fällen 1 und 2; dort hat die Projektion von  $S$  auf einen Faktor schon maximalen Rang; also ist die entsprechende Projektion von  $U$  schon reguläre Untergruppe. Daraus und aus Tabelle 95 Nr. 1 folgt das angegebene Ergebnis.

In den Fällen 2,3,5,7,8,9,10,18 induziert die biinvariante Metrik auf  $G$  schon positive Krümmung auf  $G/U$  mit  $U = U_{\max}$ , weil dasselbe schon für den normal-homogenen Raum  $G/U'$  mit  $U' = U \cap U_r$  gilt (vgl. Tabelle 94). In allen diesen Fällen gilt außerdem, daß  $U'$  ein Normalteiler von  $U$  ist und daß  $G/U'$  diffeomorph zu einer ungerade-dimensionalen Sphäre ist. Also kann man die Aktion von  $U$  auf  $G$  auch als Aktion von  $U'' := U/U'$  auf der Sphäre  $G/U'$  beschreiben. In allen Fällen gilt  $U'' \cong S^1$  oder  $U'' \cong S^3$ . Wir werden sehen, daß  $G/U$  stets diffeomorph zu einem komplex- oder quaternional-projektiven Raum ist.

Tabelle 101

Nr.	G	n	<u>S</u>	<u>U</u> <sub>max</sub>	G/ <u>U</u> <sub>max</sub>	K > 0 ?
1	SU(n)	≥5	$\underline{S}_{k1}, 2 \leq k < \frac{n}{2}$	$\mathbb{R}(2e_n; e_1 + e_n)' + 0 \times (\underline{SU}(k) + \underline{SU}(n-k))$		nein
2	"	≥3	$\underline{S}_{k2}, 1 \leq k < \frac{n}{2}$	$\mathbb{R}(2e^k; 2e^k + b_{n1})' + 0 \times \underline{SU}(n-1)$	$\mathbb{C}P^{n-1}$	ja
3	"	$2m \geq 4$	$\underline{S}_{m2}$	$\Delta^m \underline{SU}(2) \times \underline{SU}(n-1)$	$\mathbb{H}P^{m-1}$	ja
4	"	"	$\underline{S}_{m1}$	$\mathbb{R}(e_n)' \times (\underline{SU}(m) + \underline{SU}(m))$		nein
5	Spin(2n)	4	$\mathbb{R}e_1 \times e^\perp$	$\underline{Spin}(3) \times \underline{Spin}(7)'$	$S^4$	ja
6	"	≥5	"	$\underline{Spin}(3) \times \underline{SU}(n)$		nein
7	"	$2m \geq 4$	$\mathbb{R}e \times e_n^\perp$	$\Delta^m \underline{Sp}(1) \times \underline{Spin}(2n-1)$	$\mathbb{H}P^{m-1}$	ja
8	"	$2m-1 \geq 3$	"	$\mathbb{R}e \times \underline{Spin}(2n-1)$	$\mathbb{C}P^{n-1}$	ja
9	Spin(2n+1)	3	$\mathbb{R}e_1 \times e^\perp$	$\underline{Spin}(3) \times \underline{Aut}(\mathbb{C}a)$	$S^4$	ja
10	"	4	"	$\underline{Spin}(3) \times \underline{Spin}(7)'$	$\mathbb{H}P^3$	ja
11	"	≥5	"	$\underline{Spin}(3) \times \underline{SU}(n)$		nein

Tabelle 101 (Fortsetzung)

Nr.	G	n	$\underline{S}$	$\underline{U}_{\max}$	$G/\underline{U}_{\max}$	K > 0 ?
12	Spin(2n+1)	$2m \geq 4$	$\mathbb{R}e \times e_n^\perp$	$\Delta^m \underline{Sp}(1) \times \underline{Spin}(2n-1)$		nein
13	"	$2m-1 \geq 3$	"	$\mathbb{R}e \times \underline{Spin}(2n-1)$		nein
14	Sp(n)	3	$\mathbb{R}e_1 \times e^\perp$	$\underline{Sp}(1) \times \underline{SU}(3)$		nein
15	"	4	"	$\underline{Sp}(1) \times \underline{SU}(4)$		nein
16	"	4	"	$\underline{Sp}(1) \times (\underline{SU}(2) + \underline{SU}(2) + \underline{SU}(2))$		nein
17	"	$\geq 5$	"	$\underline{Sp}(1) \times \underline{SU}(n)$		nein
18	"	$\geq 2$	$\mathbb{R}e \times e_n^\perp$	$\Delta^m \underline{Sp}(1) \times \underline{Sp}(n-1)$	$\mathbb{H}P^{n-1}$	ja

(101)

Zu 2: Hier ist  $U' = SU(n-1)$ , und  $G/U'$  ist diffeomorph zu  $S^{2n-1}$  durch die Zuordnung  $gU' \rightarrow g(e_n)$  für alle  $g \in G = SU(n)$ , wobei  $e_n$  hier der n-te Basisvektor in  $\mathbb{C}^n$  ist. Es gilt  $U = U''U'$  mit  $U'' = \{(A_z; B_z) : z \in S^1\}$ , wobei  $A_z$  die lineare Abbildung auf  $\mathbb{C}^n$  ist mit

$$A_z(e_a) = z^2 e_a, \quad A_z(e_p) = e_p,$$

für  $a = 1, \dots, k$ ,  $p = k+1, \dots, n$ , und

$$B_z = A_z \begin{pmatrix} \bar{z} & & & \\ & 1 & & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \\ & & & & z \end{pmatrix}.$$

Setzen wir  $z*A := A_z A B_z^{-1}$  für jede Matrix  $A \in SU(n)$ , so gilt  $z*A(e_n) = \bar{z} A_z A(e_n)$ . Die Abbildung  $\bar{z} A_z$  ist zu  $zI$  konjugiert durch den  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismus  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit

$$F(\sum x_i e_i) = \sum_{a=1}^k x_a e_a + \sum_{p=k+1}^n \bar{x}_p e_p.$$

$F$  ist also ein äquivarianter Diffeomorphismus von  $S^{2n-1}$  bezüglich der Operation von  $S^1$  durch  $zI$  einerseits und durch  $\bar{z} A_z$  andererseits. Daher ist  $G/U = S^{2n-1}/\tilde{S}^1$  mit  $\tilde{S}^1 = \{\bar{z} A_z ; z \in S^1\}$  diffeomorph zu  $\mathbb{C}P^{n-1}$ .

Versieht man  $G = SU(n)$  mit der biinvarianten Metrik  $(X, Y) = \operatorname{Re} \operatorname{Spur} XY^*$ , so wird auf  $S^{2n-1}$  die Metrik

$$(x, x) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i \bar{x}_i + x_n \bar{x}_n$$

für  $x \in T_{e_n} S^{2n-1}$  (also  $x_n \in i\mathbb{R}$ ) induziert. Die Abbildung  $F$  ist eine Isometrie bezüglich dieser Metrik; daher ist  $G/U$  sogar isometrisch zu  $\mathbb{C}P^n$ .



(101)

Zu 8: Wir haben  $G = SO(2n)$  und  $U = U'' \times U'$  mit  $U' = SO(2n-1)$ ,  $U'' = \Delta^n SO(2)$ . Die Gruppe  $U''$  operiert auf  $G/U' = S^{2n-1}$  wie die Skalarmultiplikation  $zI$  mit  $z \in S^1$ , daher gilt  $G/U \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ , und dieser Diffeomorphismus ist eine Isometrie, wenn wir auf  $G$  die biinvariante Spur-Metrik nehmen.

Zu 3,7,18: Wir benutzen die Einbettungen  $Sp(m) \subset SU(2m) \subset SO(4m)$ . Jede dieser Gruppen operiert isometrisch und transitiv auf der Einheitssphäre  $S^{4m-1}$  in  $\mathbb{H}^m$ , und die Standgruppe des Punktes  $e_n$  ist jedesmal die Gruppe  $U' = U_r$ . Andererseits ist  $U'' = U_l$  für alle diese Gruppen gleich, nämlich die Skalarmultiplikation von links mit Einheitsquaternionen. Daher ist  $G/U$  in allen Fällen diffeomorph zu  $\mathbb{H}P^{m-1}$ . Genauer gilt: Die Abbildung  $F: \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{H}^m$ ,  $F(x) = \bar{x}$ , gibt einen Diffeomorphismus von  $S^{4m-1}$ , der äquivariant ist bezüglich der Operation von  $S^3$  durch Links-Skalarmultiplikation einerseits und durch Rechts-Skalarmultiplikation andererseits. Also vertauscht  $F Sp(n) F^{-1}$  mit  $U''$ , und daher ist  $G/U = S^{4n-1}/U''$  sogar isometrisch zu  $\mathbb{H}P^{m-1}$  für jede Metrik auf  $S^{4m-1}$ , für die  $F$ ,  $Sp(n)$  und  $U''$  isometrisch operieren, insbesondere für die normalhomogenen bezüglich  $(G, U')$ .

Zu 5,9: In Nr. 5 wenden wir auf  $G = Spin(8)$  den Automorphismus  $\beta$  an (vgl. §§ 75, 94). Dabei geht  $Spin(7)'$  in  $Spin(7)$  über (s.S.141) und  $e_1$  in  $\frac{1}{2}(1,1,1,-1)^t$ . Wenden wir noch den Automorphismus an, der nur  $e_2$  in  $-e_2$  überführt, so erhalten wir bis auf Konjugation  $U' = U_r =$

$\text{Spin}(7)$  ,  $U'' = \Delta^2 \text{SU}(2) \subset \text{SU}(4) \subset \text{Spin}(8)$  . Da die Inklusion  $\text{SU}(4) \rightarrow \text{Spin}(8)$  einen Diffeomorphismus der homogenen Räume  $\text{SU}(4)/\text{SU}(3) \rightarrow \text{Spin}(8)/\text{Spin}(7) = S^7$  induziert, gilt wie im vorigen Abschnitt, daß  $G/U$  diffeomorph ist zu  $\mathbb{H}P^1 = S^4$  .

Zu Nr.9 bemerken wir, daß die Inklusion  $\text{Spin}(7) \rightarrow \text{Spin}(8)$  einen Diffeomorphismus der homogenen Räume

$$\text{Spin}(7)/\text{Aut}(\text{Ca}) \rightarrow \text{Spin}(8)/\text{Spin}(7)'$$

induziert. Diese wohlbekanntete Tatsache [4] ist leicht einzusehen: Es sei  $T' = \text{Spin}(7)' \cap T$  ,  $T'' = \text{Spin}(7) \cap T$  , und  $R' \subset T'$  ,  $R'' \subset T''$  seien die zu diesen maximalen Tori gehörigen Wurzelsysteme von  $\text{Spin}(7)'$  bzw.  $\text{Spin}(7)$ . Es ist  $T' = e_1^\perp$  ,  $T'' = e_1^\perp$  ,  $R' = A_3 \cup \pm \{q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$  ,  $R'' = \pm \{e_i \pm e_j ; 2 \leq i < j \leq 4\} \cup \pm \{e_2, e_3, e_4\}$  (vgl. § 94). Also ist  $R' \cap R'' = \pm \{e_2 - e_3, e_3 - e_4, e_4 - e_2\} = A_2$  . Außerdem sind die Vektoren

$$p_i = \frac{1}{3}(b_{ij} + b_{ik}) \quad , \quad \{i, j, k\} = \{2, 3, 4\}$$

in  $T' \cap T''$  Erweiterungswurzeln sowohl in  $\text{Spin}(7)'$  als auch in  $\text{Spin}(7)$  (vgl. Tabelle 94, Nr. 8) mit Zerlegungsmengen

$$R'_{p_i} = \{q_{1i}, e_i - e_1\} \quad \text{bzw.} \quad R''_{p_i} = \{e_i, -e_j - e_k\} .$$

Die Zerlegungsmengen von  $q_{1i} \in T'$  und  $e_i \in T''$  in  $\text{Spin}(8)$  sind aber

$$R_{q_{1i}} = \{e_1 + e_i, -e_j - e_k\} \quad , \quad R_{e_i} = \{e_i + e_1, e_i - e_1\} ,$$

deshalb hat  $p_i \in T' \cap T''$  in beiden Fällen dieselbe Zerlegungsmenge in  $\text{Spin}(8)$ , nämlich

$$R_{p_i} = \{e_i + e_1, e_i - e_1, -e_j - e_k\} .$$

(101)

Daher liegt die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{C}\alpha)$  mit dem Wurzelsystem  $(R' \cap R'') \cup \pm \{p_2, p_3, p_4\} \cong G_2$  im Durchschnitt von  $\text{Spin}(7)'$  und  $\text{Spin}(7)$ , und aus Dimensionsgründen ist sie nicht größer als dieser Durchschnitt. Dies zeigt die Behauptung.

Da die Gruppe  $U''$  in Nr.5 und Nr.9 dieselbe ist, nämlich  $U'' = \text{Spin}(3) \subset \text{Spin}(7) \subset \text{Spin}(8)$ , gilt wie in Nr.5:  $\text{Spin}(7)/U = S^7/U'' = \mathbb{H}P^1 = S^4$ .

Zu 10: Wie schon in § 94 erwähnt, operiert die Isometrie-  
gruppe (genauer: deren Zusammenhangskomponente)  $F_4$  des  
Symmetrischen Raumes  $\mathbb{C}aP^2$  transitiv mit Standgruppe  $\text{Spin}(9)$ .  
 $F_4$  hat das Wurzelsystem

$$F_4 = B_4 \cup \pm s, \quad s = \left\{ \frac{1}{2}(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \right\}.$$

Also können wir den Tangentialraum des ausgezeichneten Punktes von  $\mathbb{C}aP^2$  mit

$$V = \underline{F}_4 \ominus \underline{\text{Spin}(9)} = \sum_{s \in S} E(s) \cong \mathbb{R}^{16}$$

identifizieren. Insbesondere ist  $\frac{1}{2}e \in S$ . In  $E(\frac{1}{2}e) \subset V$  gibt es ein Element  $x \neq 0$ , dessen Centralisator gerade  $\text{Spin}(7)'$  ist [4]. Das sieht man folgendermaßen: Die schon mehrfach benutzte Abbildung  $\beta : \underline{T}_4 \rightarrow \underline{T}_4$ , der in § 75 eingeführte Automorphismus von  $D_4$ , überführt das Wurzelsystem  $R' = B_3'$  von  $\underline{\text{Spin}(7)}'$  auf  $B_3'' = B_4 \cap e_1^\perp$  und die Menge  $B_4' = D_4 \cup \pm \left\{ \frac{1}{2}e, q_{12}, q_{13}, q_{14} \right\} \subset F_4$  in  $B_4$ , wobei  $\frac{1}{2}e$  auf  $e_1$  abgebildet wird. (Insbesondere ist also  $B_4'$  ein Teil-Wurzelsystem von  $F_4$ .) Die Abbildung  $\beta$  läßt sich daher zu einem Isomorphismus der zu  $B_4'$  gehörigen Unteralgebra von  $\underline{F}_4$  auf die Unteralgebra  $\underline{\text{Spin}(9)}$  fortsetzen. Die Wurzel-

räume von Spin(9) sind

$$E(e_i) = \text{Span} \{F_{2i-1,9}, F_{2i,9}\}$$

(vgl. S. 147) für  $i = 1, 2, 3, 4$  sowie die in Lemma 954 angegebenen Wurzelräume von Spin(8). Offensichtlich ist Spin(7) = SO(7) =  $\{X \in \text{SO}(9) ; X(e_1) = X(e_9) = 0\}$  die Centralisator-Algebra der Matrix  $F_{19} \in E(e_1)$ . Deshalb ist Spin(7)' der Centralisator des Elementes  $x = \beta^{-1}(F_{19}) \in E(\frac{1}{2}e)$  (genauer zunächst nur dessen Zusammenhangskomponente). Daher ist Spin(7)' die Standgruppe von  $x$  für die Adjungierte Darstellung von Spin(9) auf  $V$ . Da die Gruppe Spin(9) transitiv auf allen Richtungen in  $V$  operiert, ist die Abbildung  $\text{Spin}(9)/\text{Spin}(7)' \rightarrow S^{15}$ ,  $g \text{Spin}(7)' \rightarrow \text{Ad}(g)x$  für  $g \in \text{Spin}(9)$  ein Diffeomorphismus. (Insbesondere zeigt dies, daß die Standgruppe von  $x$  tatsächlich zusammenhängend ist; sonst kann der Quotient nicht die Sphäre sein.)

Die Gruppe  $U'' = \text{Spin}(3) \subset \text{Spin}(9)$  operiert linear auf  $V$ . Um diese Darstellung zu kennen, brauchen wir nur ihre Gewichte, d.h. die Eigenwerte von  $\text{ad}(e_1)|_V$  auszurechnen. Ist  $\{X_s, Y_s\}$  eine orientierte Orthonormalbasis von  $E(s)$ , so ist

$$[e_1, X_s + iY_s] = \frac{i}{2} (X_s + iY_s) \quad ,$$

$$[e_1, X_s - iY_s] = -\frac{i}{2} (X_s - iY_s) \quad ,$$

also hat  $\text{ad}(e_1)$  auf  $V \times \mathbb{C}$  eine Matrixdarstellung der Form

$$\frac{i}{2} \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}$$

wobei  $I$  hier die Einheitsmatrix in  $M(4, \mathbb{R})$  bezeichnet.

(101)

Die Darstellung von  $\text{Spin}(3)$  auf  $V$  ist somit äquivalent zur Darstellung von  $\text{Sp}(1)$  auf  $\mathbb{H}^4$  durch Links-Skalarmultiplikation. Somit gilt  $G/U \cong S^{15}/U'' = \mathbb{H}P^3$ .

102. Die übrigen Doppelquotienten  $G/U$  mit  $\text{rg}(G) = \text{rg}(U)$

Wir haben noch zu zeigen, daß die bisher nicht erwähnten Räume  $G/U_{\max}$  von Tabelle 101 für jede Torus-invariante Metrik auf  $G$  Nullkrümmung aufweisen. Außerdem müssen wir für die in § 101 behandelten Paare  $(G, U_{\max})$  prüfen, ob es eine Untergruppe  $U$  von  $U_{\max}$  mit gleichem Rang gibt, so daß  $G/U$  noch immer eine Torus-invariante Metrik positiver Krümmung besitzt. Zunächst können wir in den Fällen 3,7, 10,18 den linken Faktor von  $U_{\max}$ , der isomorph zu  $S^3$  ist, durch eine Untergruppe vom Typ  $S^1$  ersetzen. Dann erhalten wir statt der quaternional-projektiven Räume die entsprechenden komplex-projektiven Räume als Quotienten. Dies wird im folgenden nicht weiter berücksichtigt.

Um zu zeigen, daß keine Torus-invariante Metrik auf  $G$  existiert, die auf  $G/U$  positive Krümmung induziert (eine solche Metrik wollen wir kurz P-Metrik nennen), müssen wir mit jeder Gruppe  $U$  auch die Gruppe  $U^0$  mit vertauschten Faktoren berücksichtigen. Dies wird aber unnötig, wenn wir die Nullkrümmung bereits in den Horizontalräumen von Punkten  $g \in N_G(T)$  nachweisen können und dann Satz 34 benutzen.

Wir dürfen  $G$  einem Torus-erhaltenden Automorphismus und  $U_1$  einen beliebigen Automorphismus von  $G$  unterwerfen, ohne die Allgemeinheit einzuschränken (s. § 31). Insbesondere dürfen wir innerhalb unserer Kategorie von Metriken die

Gruppen  $U_1$  und  $U_r$  beliebigen Weyl-Transformationen von  $G$  unterwerfen.

Zu 1,4: Die Wurzelräume  $E(e_1 - e_n)$  und  $E(e_2 - e_{n-1})$  stehen senkrecht auf  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$  für jede  $T$ -invariante Metrik, also gibt es nach 342 keine  $P$ -Metrik. (Man beachte hier wie auch in den folgenden Beispielen, daß  $\underline{S}_r$  nur in einem maximalen Torus liegt; dies ergibt sich daraus, daß  $U_r$  durch das Wurzelsystem  $Q$  eindeutig bestimmt wird, nicht nur bis auf Konjugation. Vgl. Tab. 94!)

Zu 2,3:  $\underline{n} = 3$  :  $U = S$  ist die einzige echte Untergruppe von  $U_{\max}$ , die  $S$  einhält. In § 42 wurde gezeigt, daß  $G/S$  eine  $P$ -Metrik besitzt. Dies ist das einzige Beispiel dieser Art, wie wir sehen werden.

$\underline{n} \geq 4$  :  $U_r$  sei eine echte Untergruppe von  $SU(n-1) = (U_{\max})_r$ . Ohne Einschränkung sei  $E(e_2 - e_3) \perp \underline{U}_r$ . Ebenso ist  $E(e_1 - e_n) \perp \underline{U}_r$  (sogar senkrecht zu  $\underline{SU}(n-1)$ ). Für  $\underline{U}_1$  dürfen wir nach § 95  $R_q = R_q^{\min}$  annehmen; daher sind beide Räume auch senkrecht zu  $\underline{U}_1$  nach Tabelle 95, Nr. 2. Es folgt wieder Nullkrümmung aus Satz 342.

Zu 5,6: Im Fall 5 ist die einzige maximale Untergruppe vom Rang 3 in  $Spin(7)$  die Gruppe  $Spin(6)$ , und es gilt  $Spin(6)' = SU(4) \subset Spin(8)$ . Ist  $U = Spin(3) \times SU(n)$  für beliebiges  $n \geq 4$ , so besitzt  $Spin(2n)/U$  keine  $P$ -Metrik nach 342, denn wir dürfen annehmen, daß  $E(e_1 + e_3)$ ,  $E(e_2 + e_4)$  zu  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$  senkrecht sind (vgl. Tab. 95, Nr. 3).

(102)

Zu 7,8: Es sei  $U_r$  eine echte Untergruppe von  $\text{Spin}(2n-1)$   $= (U_{\max})_r$  vom selben Rang mit einem Wurzelsystem  $Q'$ , das eine echte Teilmenge von  $B_{n-1}$  ist. Dann gibt es  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $e_1 \notin Q'$ , denn falls  $e_k + e_1 \notin Q'$  oder  $e_k - e_1 \notin Q'$ , ist auch  $e_k$  oder  $e_1$  nicht in  $Q'$ . Daher sind  $E(e_i - e_n)$ ,  $E(e_i + e_n)$  senkrecht zu  $\underline{U}_r$ . (Man beachte, daß  $e_k$  für jedes  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  in  $Q$  eine Erweiterungswurzel mit Zerlegungsmenge  $R_{e_k} = \{e_k - e_n, e_k + e_n\}$  ist.) Außerdem sind diese Räume senkrecht zu  $\underline{U}_1$ , eventuell nach Anwendung einer Weyltransformation im Fall  $i = n-1$  (vgl. Tab. 95, Nr.4). Daher besitzen  $G/U$  und  $G/U^O$  keine P-Metrik (Satz 342).

Zu 9,10,11: Für alle  $n \geq 3$  gilt:  $\text{Spin}(2n+1)/U$  mit  $U = \text{Spin}(3) \times \text{SU}(n)$  besitzt nach 342 keine P-Metrik, denn  $E(e_2)$  und  $E(e_3 + e_1)$  stehen senkrecht auf  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$  (vgl. Tab. 95, Nr.6).

Maximale Teil-Wurzelsysteme von  $G_2$  sind  $A_2$  sowie  $\pm \{b_{12}, p_3\}$  mit  $p_3 = \frac{1}{3}(b_{13} + b_{23})$ ; dies sind alle bis auf Weyl-Transformationen. Da  $R_{p_3} = \{e_1 + e_2, -e_3\}$ , gibt es aus demselben Grund wie oben auch im Fall des letzteren Teilsystems keine P-Metrik.

Es sei  $Q'$  ein echtes Teil-Wurzelsystem von dem Wurzelsystem  $B_3'$  von  $\text{Spin}(7)'$ . Weiter oben sahen wir schon, daß jedes echte Teilsystem von  $B_n$  ein  $e_i$  nicht enthält. In diesem Fall liegt daher eins der  $q_{1j}$ , o.E. etwa  $q_{13}$ , nicht in  $Q'$ . Nach Tabelle 95, Nr. 6, dürfen wir annehmen, daß  $\underline{U}_1 = \underline{\text{Spin}}(3)$  zu allen Wurzelräumen außer  $E(e_1)$  oder  $E(e_1 + e_2)$ ,  $E(e_1 - e_2)$  senkrecht ist. Also sind  $\underline{U}_1, \underline{U}_r$  zu

$E(e_1+e_3)$  und zu  $E(e_2+e_4)$  senkrecht (da  $R_{q_{13}} = \{e_1+e_3, -e_2-e_4\}$ ), und nach 342 gibt es keine P-Metrik.

Zu 12,13: Es sei  $G = SO(2n+1)$  mit  $n \geq 3$  und  $U = U_1 \times U_r$  mit  $U_r = SO(2n-1)$  und  $U_1 = \Delta^m Sp(1)$  falls  $n = 2m$ ,  $U_1 = \Delta^n SO(2)$  falls  $n$  ungerade. Da  $U_r$  durch sein Wurzelsystem  $Q$  nur bis auf Konjugation festgelegt ist (vgl. Tab. 94, Nr. 11), zeigen wir: Jede  $U_r$ -invariante linksinvariante Metrik auf  $G$  induziert Nullkrümmung auf  $G/U$ .

Es ist

$$\underline{G} = \left\{ \begin{pmatrix} A & y & x \\ -y^t & 0 & a \\ -x^t & -a & 0 \end{pmatrix} ; A \in \underline{U}_r, x, y \in \mathbb{R}^{2n-1}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir betrachten die  $U_r$ -invarianten Teilräume

$$V_1 = \{A(x) ; x \in \mathbb{R}^{2n-1}\}, \quad V_2 = \{B(y) ; y \in \mathbb{R}^{2n-1}\}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ -x^t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B(y) = \begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ -y^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$V_1$  und  $V_2$  sind äquivalente irreduzible Darstellungsmoduln, und jeder dazu äquivalente Darstellungsmodul  $V$  in  $\underline{G}$  liegt in  $V_1 + V_2$  und hat die Gestalt  $V = Ad(g)V_1$  mit

$$g = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Es gibt daher Eigenräume des metrischen Tensors von der Form  $Ad(g)V_1$ ,  $Ad(g)V_2$ , und wir dürfen ohne Einschränkung  $g = I$  annehmen. Also sind  $V_1$  und  $V_2$  o.E. Eigenräume, die insbesondere auf  $\underline{U}_r$  senkrecht stehen. Da  $U_1 \subset SO(4)^m$ , falls  $n = 2m$  gerade ist, und  $U_1 \subset SO(2)^n$ , falls  $n$  ungerade,



(102)

gilt für die Matrix-Koeffizienten  $C_{ij}$  eines Elementes  $C \in U_1$  stets  $C_{ij} = 0$  für  $|i-j| \geq 4$ . Das Skalarprodukt mit Elementen aus  $V_1$  oder  $V_2$  ist aber bis auf einen skalaren Faktor die Spur-Metrik. Deshalb steht  $\underline{U}_1$  senkrecht auf  $A(e_{2n-1})$  und  $B(e_{2n-2})$ , und  $G/U$  hat Nullkrümmung nach dem Kriterium  $(N_1)$  in § 32, denn  $[A(x), B(y)] = 0$  falls  $x \perp y$ .

Nun betrachten wir die Gruppe  $U^O$  statt  $U$  und setzen voraus, daß die Metrik auf  $\underline{G}$  auch invariant unter einem maximalen Torus ist. Nach Tabelle 95, Nr. 7 stehen dann  $E(e_1+e_n)$  und  $E(e_1-e_n)$  senkrecht auf  $\underline{U}_r^O$  und natürlich auch auf  $\underline{U}_1^O = \underline{SO}(2n-1)$ , und damit gibt es keine P-Metrik auf  $G/U^O$  nach 342.

Zu 14, 15, 16, 17: Es gibt keine P-Metrik, da  $E(e_2)$  und  $E(e_3)$  auf  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_r$  senkrecht stehen (Tab. 95, Nr.9 und Satz 342).

Zu 18:  $n \geq 4$ : Es sei  $U_r$  eine Untergruppe von maximalem Rang von  $Sp(n-1) = (\underline{U}_{\max})_r$ , dessen Wurzelsystem  $Q'$  echt in  $C_{n-1}$  enthalten ist. Wir können o.E. annehmen (nach Weyl-Transformation), daß  $e_1-e_{n-1} \notin Q'$ , außerdem gilt  $e_2-e_n \notin C_{n-1}$ . Nach Tabelle 95, Nr. 10 ist auch  $\underline{U}_1 = (\underline{U}_{\max})_1$  senkrecht zu  $E(e_1-e_{n-1})$  und  $E(e_2-e_n)$ , also gibt es nach 342 keine P-Metrik auf  $G/U$ .

$n = 3$ : Maximale Untergruppen vom Rang 2 von  $Sp(2)$  sind  $Sp(1)^2$  und  $U(2)$ . Die erstere Gruppe wurde in § 44 behandelt und besitzt keine P-Metrik. Im Fall der zweiten Gruppe schließen wir so: Ist  $q$  die Wurzel von  $U_1 = \Delta^3 Sp(1)$

mit  $R_q = \{2e_1, 2e_2, 2e_3\}$  (vgl. Tab. 95, Nr.10), so ist der Schnitt von  $\underline{U}_r$  mit  $E(2e_1) + E(2e_2) + E(2e_3)$  eine Ebene mit surjektiver Projektion auf alle  $E(2e_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , und zu jedem  $X_3 \in E(2e_3)$  gibt es ein  $X_1 \in E(2e_1)$  und  $X_2 \in E(2e_2)$  mit  $X_1 - X_3$ ,  $X_2 - X_3 \perp \underline{U}_r$ . Die Ebenen  $W_1 := \mathbb{R}X_1 + \mathbb{R}X_3$  sowie  $W_2 := \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}X_3$  sind metrisch invariante abelsche Teilalgebren, und die Vektoren  $X_1 - X_3 \in W_1$ ,  $X_2 - X_3 \in W_2$  sind linear unabhängig und senkrecht auf  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$ . Daher hat  $G/U$  ebenso wie  $G/U^0$  Nullkrümmung nach dem Kriterium  $(N_2)$  von § 32. - Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß  $R_q = \{e_1+e_2, 2e_3\}$  (Tab. 95, Nr.10). Dann sind  $E(2e_1)$  und  $E(2e_2)$  senkrecht zu  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$ , und es gibt keine P-Metrik nach 342.

n=2 : In diesem Fall ist  $S_r$  die einzige echte Untergruppe von  $U_r = Sp(1)$ , die  $S_r$  enthält. Es sei wieder  $q$  die Wurzel von  $U_1 = \Delta^2 Sp(1)$ ; dann ist  $R_q = \{e_1+e_2\}$  oder  $R_q = \{2e_1, 2e_2\}$  nach Tab. 95, Nr.10. Im ersten Fall ist  $E(2e_1), E(2e_2) \perp \underline{U}_1, \underline{U}_r$ , und es gibt keine P-Metrik nach 342. Den zweiten Fall brauchen wir nur für  $U^0$  zu untersuchen, da wir  $U_1$  einer beliebigen Konjugation unterwerfen dürfen (§ 31). Dann ist die Metrik auf  $\underline{G}$  invariant unter  $U_r^0 = \Delta^2 Sp(1)$  und  $T$ , also unter  $K := Sp(1) \times Sp(1)$ . Daher ist

$$\underline{P} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ -\bar{x} & 0 \end{bmatrix}; x \in \mathbb{H} \right\} \subset \underline{G}$$

Eigenraum des metrischen Tensors  $\theta$ , wie schon in 432 gezeigt wurde. Setzen wir

$$x = \theta^{-1} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \in \underline{K}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix} \in \underline{P},$$

(102)

so stehen  $X$  und  $Y$  senkrecht auf  $\underline{U}_1^0$  und  $\underline{U}_r^0$  und es ist  $[\theta X, Y] = 0$ , also hat  $G/U^0$  Nullkrümmung nach dem Kriterium  $(N_3)$  in § 32.

Damit haben wir den Beweis des Theorems A der Einführung vollständig durchgeführt.

103. Die Räume  $G/U$  mit  $\text{rg}(G) = 2$ ,  $\text{rg}(U) = 1$

In diesem Abschnitt ist  $G$  eine kompakte Liegruppe vom Rang 2, wobei wir sofort annehmen können, daß  $G$  nicht abelsch ist.  $U$  sei wieder eine kompakte Untergruppe von  $G^2$ , so daß  $\bar{U} = U/(U \cap \Delta Z)$  vom Rang 1 ist. Auf  $G$  sei eine linksinvariante Metrik gegeben, deren Invarianzgruppe  $U_r$  sowie einen maximalen Torus  $T$  von  $G$  enthält; diese Invarianzgruppe heiße wieder  $K$ . Wie früher können wir annehmen, daß ein maximaler Torus  $S$  von  $U$  in  $T^2$  liegt, indem wir nötigenfalls zu einer zu  $U$  konjugierten Gruppe in  $G \times K$  übergehen.

Es sei  $R \subset T$  das Wurzelsystem von  $G$ , also  $R \in \{A_1, A_1 \times A_1, A_2, C_2, G_2\}$ . Der Fall  $R = A_1$ , also  $G = \text{Sp}(1) \times S^1$  (bis auf endliche Überlagerungen; vgl. § 35) liefert in unserem Zusammenhang keine interessanten Beispiele. Ist  $\bar{U} \cong S^1$ , so ist  $G/U$  genau dann einfach zusammenhängend, wenn die Einbettung der Faser durch das Einselement  $e \in G$  einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen von  $\bar{U}$  und  $G$  induziert, also auch die Abbildung

$$f : \bar{U} \cong Ue \subset \text{Sp}(1) \times S^1 \xrightarrow{\text{pr}_2} S^1$$

einen Isomorphismus von  $\pi_1(S^1)$  liefert. Da aber  $U$  auf dem zweiten Faktor  $S^1$  von  $G$  durch Linkstranslation operiert, ist  $f$  ein Gruppenhomomorphismus und daher ein Isomorphismus.

(Eine entsprechende Aussage gilt allgemein für abelsche Faktoren von  $G$ .) Jetzt ist leicht zu sehen, daß  $G/U$  diffeomorph zu  $Sp(1) = S^3$  ist.

Ist  $R = A_2$ , so ist zunächst der Fall  $U = S \cong S^1$  zu diskutieren. Dies ist in § 41 geschehen: es gibt unendlich viele neue  $P$ -Räume von diesem Typ (Satz 414). Ist  $R \in \{A_1 \times A_1, C_2, G_2\}$ , so kann dieser Fall nicht auftreten, denn es gibt Wurzeln  $r, s \in R$  mit  $r+s, r-s \notin R$ . Ist also  $U = S \subset T^2$ , so sind  $E(r)$  und  $E(s)$  senkrecht zu  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_r$ , und es gibt Nullkrümmung nach 342.

Wir können also von jetzt an annehmen, daß  $S$  eine Erweiterungswurzel  $q$  von  $U$  enthält. Dann sind auch die Projektionen  $q_1, q_r \in \underline{T}$  von  $q$  auf  $\underline{S}_1$  und  $\underline{S}_r$  Erweiterungswurzeln, und es gilt  $\underline{S} = \mathbb{R}(q_1; q_r)$ . Wir brauchen also nur die Erweiterungswurzeln der 2-dimensionalen Wurzelsysteme in § 93 durchzugehen und nachzusehen, welche Paare von Erweiterungswurzeln einen fixpunktfreien 1-Torus  $S$  in  $T^2$  erzeugen. In § 52 haben wir gezeigt, daß für ein Erzeugendes  $x = (x_1, x_r)$  des Gitters  $L_{\underline{S}} = \text{ex}_S^{-1}(S \cap \Delta Z) \cong \mathbb{Z}$  die Vektoren  $f_W(x) = Wx_1 - x_r$  im Einheitsgitter  $L$  von  $G$  für alle  $W \in \mathcal{W}(G)$  unteilbar sind, wenn  $S$  fixpunktfrei operiert, und diese Bedingung ist auch hinreichend. Wir suchen also die kleinste Zahl  $t > 0$ , für die  $t(q_1 - q_r) \in L$ , und prüfen dann das Kriterium für  $x := tq$  nach. Dies geschieht in der folgenden Tabelle 103:

Tabelle 1o3

R	$q_1$	$q_2$	$x/q$	$\{Wx_1 - x_r ; W \in W\}$	fixpunktfrei?
$A_1 \times A_1$	$e_1$	$\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$	2	$\{e_1 - e_2, -3e_1 - e_2\}$	ja
$A_2$	$b_{13}$	$\frac{1}{2} b_{13}$	2	$\exists -x_1 - x_r = -3b_{13}$	nein
$C_2$	$2e_1$	$e_1 + e_2$	1	$\{e_1 - e_2, -3e_1 - e_2, -e_1 + e_2, -e_1 - 3e_2\}$	ja
"	$2e_1$	$\frac{1}{5}(3e_1 + e_2)$	5	$\exists 10 e_2 - (3e_1 + e_2) = 3(-1, 3)^t$	nein
"	$e_1 + e_2$	$\frac{1}{5}(3e_1 + e_2)$	$\frac{5}{2}$	$\exists \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_1 - x_r = (-4, 2)^t$	nein
$G_2$	$b_{12}$	$\frac{1}{3}(b_{12} + b_{13})$	3	$\exists 3 b_{12} - (b_{12} + b_{13}) = 2(-1, -1, 2)^t$	nein
"	$b_{12}$	$\frac{1}{2} b_{12}$	2	$\exists -2b_{12} - b_{12} = -3b_{12}$	nein
"	$b_{12}$	$\frac{1}{14}(2, 1, -3)^t$	14	$\exists -x_1 - x_r = 3(4, -5, 1)^t$	nein
"	$\frac{1}{2} b_{12}$	$\frac{1}{3}(b_{12} + b_{13})$	6	$\{(-1, -1, 2)^t, (-1, 2, -1)^t, (-4, 5, -1)^t, (-7, 5, 2)^t, (-7, 2, 5)^t, (-4, -1, 5)^t\}$	ja
"	$\frac{1}{2} b_{12}$	$\frac{1}{14}(2, 1, -3)^t$	14	$\exists 7b_{23} - (2, 1, -3)^t = 2(-1, 3, -2)^t$	nein
"	$\frac{1}{3}(b_{12} + b_{13})$	$\frac{1}{14}(2, 1, -3)^t$	42	$\exists 14(-1, 2, -1)^t - 3(2, 1, -3)^t = 5(-4, 5, -1)^t$	nein

(103)

Fixpunktfreie Gruppen ergeben sich nur in drei Fällen:

1.  $G = Sp(1) \times Sp(1)$  ,  $q = (e_1; \frac{1}{2}(e_1+e_2))$

Dann ist  $U = \{(p, 1; p, p) ; p \in Sp(1)\} \subset Sp(1)^4$  . Der Vertikalraum eines Punktes  $(a, b) \in G$  ist

$$\underline{V}_{(a,b)} = \{(a^{-1}va - v, -v) ; v \in \text{Im}(\mathbb{H})\} .$$

Wählen wir z.B. auf  $G = S^3 \times S^3$  die von  $\mathbb{R}^8$  induzierte Metrik (eine biinvariante Produkt-Metrik), so hat  $G/U$  positive Krümmung. Denn die Ebenen mit Nullkrümmung in  $\underline{G}$  werden aufgespannt von Vektoren der Gestalt  $(x, 0)$  und  $(0, y)$  mit  $x, y \in \text{Im}(\mathbb{H})$  . Aber  $(0, y)$  ist nur dann zu  $(a^{-1}va - v, -v)$  senkrecht für alle  $v \in \text{Im}(\mathbb{H})$  , wenn  $y = 0$  .

Da  $U \cong Sp(1)$  auf dem rechten Faktor von  $G$  einfach transitiv operiert, ist  $G/U$  diffeomorph zu  $Sp(1) = S^3$  .

2.  $G = Sp(2)$  ,  $q = (2e_1; e_1+e_2)$

Dann ist  $U = \{(\begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{vmatrix}) ; p \in Sp(1)\}$  . Dies ist das in § 43 behandelte Beispiel von Gromoll und Meyer [14]; wir haben gezeigt, daß jede Torus-invariante linksinvariante Metrik auf  $G$  Nullkrümmung auf  $G/U$  und  $G/U^0$  induziert, sofern  $U$  bzw.  $U^0$  isometrisch operieren. Ist die Metrik auf  $G$  rechtsinvariant unter  $K = Sp(1)^2 \subset Sp(2)$  , so ist die in 1. diskutierte 3-Sphäre totalgeodätisch in  $G/U$  .

3.  $G = \text{Aut}(\mathbb{C}a)$  ,  $q = (\frac{1}{2}b_{12}; \frac{1}{3}(b_{12}+b_{13}))$

Nach Tabelle 93 ist

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_r \subset \underline{T} + E(b_{12}) + E(p_1) + E(p_3) + E(b_{23})$$

mit  $p_i = \frac{1}{3}(b_{ij}+b_{ik})$  , wobei  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$  .

(103)

Also sind z.B.  $E(b_{31})$  und  $E(p_2)$  senkrecht zu  $\underline{U}_r$  und  $\underline{U}_1$ ,  
und damit induziert jede Torus-invariante linksinvariante  
Metrik auf  $G$  Nullkrümmung auf  $G/U$  und  $G/U^0$  (Satz 342).

Damit haben wir auch das in der Einführung aufgestellte  
Theorem B bewiesen.

Literatur

1. Adams, J.F.: Lectures on Lie Groups. - Benjamin 1969
2. Aloff, S., Wallach, N.L.: An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures. - Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 93 - 97
3. Berard Bergery, L.: Les Variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impair à courbure strictement positive. - J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 47 - 68
4. Berger, M.: Les Variétés Riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. - Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 15 (1961), 179 - 246
5. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5 et 6. - Hermann, Paris 1968
6. Cartan, E.: Les groupes réels finis et continus. - Ann. Ecol. Norm. 31 (1914), 263 - 355
7. Cheeger, J.: Some examples of manifolds of nonnegative curvature. - J. Diff. Geom. 8 (1973), 223 - 268
8. Cheeger, J., Ebin, D.G.: Comparison Theorems in Riemannian Geometry. - North Holland 1975
9. D'Atri, J.E., Ziller, W.: Natural reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups. - Memoirs Amer. Math. Soc. 18, No. 215 (1979)



10. Dynkin, E.B.: Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. - *Translations Amer. Math. Soc.* (2) 6 (1957), 111 - 244
11. Eliasson, H.I.: Die Krümmung des Raumes  $Sp(2)/SU(2)$  von Berger. - *Math. Ann.* 164 (1966), 317 - 323
12. Eschenburg, J.-H.: New examples of manifolds with strictly positive curvature. - *Invent. math.* 66 (1982), 469 - 480
13. Geroch, R.: Group-quotients with positive sectional curvatures. - *Proc. Amer. Math. Soc.* 66 (1977), 321 - 326
14. Gromoll, D., Meyer, W.: An exotic sphere with nonnegative sectional curvature. - *Ann. of Math.* 100 (1974), 401 - 406
15. Gromov, M.: Curvature, diameter and Betti numbers. - *Comm. Math. Helv.* 56 (1981), 179 - 195
16. Heintze, E.: The curvature of  $SU(5)/(Sp(2) \times S^1)$ . - *Invent. math.* 13 (1971), 205 - 212
17. Helgason, S.: *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* - Academic Press 1962
18. Humphreys, J.E.: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* - Springer 1972
19. Jähnich, K.: *Differenzierbare G-Mannigfaltigkeiten.* - Springer L.N. 59 (1968)
20. Mal'cev, A.I.: On semisimple subgroups of Lie groups. -

Translations Amer. Math. Soc. (1) 33 (1950) - neu erschienen in Translations Amer. Math. Soc. , Ser. 1, Vol.9 "Lie groups", 172 - 213

21. Messiah, A.: Quantum Mechanics, vol. II. - North Holland 1965
22. Ochiai, T., Takahashi, T.: The group of isometries of a left invariant Riemannian metric on a Lie group. - Math. Ann. 223 (1976), 91 - 96
23. O'Neill, B.: The fundamental equations of a submersion.- Michigan Math. J. 23 (1966), 459 - 469
24. Wallach, N.L.: Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. - Ann. of Math. 96 (1972), 277 - 295
25. Wallach, N.L.: Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces.- Dekker 1973

Stichwortverzeichnis

Abelsche Erweiterung	77
Äquivalenz von Graphen	88, 109
von zulässigen Abbildungen	75
Bedingung (T)	33
Biinvariante Metrik	13
Doppelquotient	3, 15
Einheitsgitter	67
Erweiterung von Graphen	88
Erweiterungswurzel (einfach / zusammengesetzt)	133
Faser	6
Fixpunktfrei	11, 27
Glatte Orbitraum	9
Graphen	87, 108
Homogener Raum	12
Homogener Unterraum	13
Horizontaler Lift von Vektorfeldern	6
von Kurven	6
Horizontalraum	6
Inneres einer konvexen Menge	133
Invarianzgruppe	17
Komplement	88, 110
Linksinvariante Metrik	13
Linkstranslation	14
Maximaler Torus	24
Metrischer Tensor	18
Metrisch invariant	18

Normal homogen	13
O'Neill-Formel	8
Orbit, Orbitraum	8
Orientierte Orthonormalbasis eines Wurzelraums	25
P-Metrik	160
P-Raum	1
Rang	24
Rechtsisometrisch	17
Rechtstranslation	14
Reguläre Unteralgebra / Untergruppe	76
Regulärer Vektor	34
Riemannsche Submersion	6
Standgruppe	9
Symmetrisches Paar	20
Teilgraph	88, 110
Torus-invariante Metrik	35
Unteilbarer Vektor	70
Vertikalraum	6
Vollständiges Teilgitter	69
Weylgruppe	66, 79, 102, 103
Wurzel, Wurzelraum, Wurzelsystem	24, 25
Zentralgitter	68
Zentrum	67
Zerlegungsmenge	132
Zulässige Abbildung / Endomorphismus	73, 74
Zulässige Matrix	103
Zulässige Erweiterung	131
Zulässiger Graph	87, 110

Symbolverzeichnis

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Zahlbereichs-Symbole
$\mathbb{H}$	Quaternionen
$\text{Im}(\mathbb{H})$	Quaternionen mit Realteil 0
$i, j, k$	kanonische Basis von $\text{Im}(\mathbb{H})$
$\mathbb{C}a$	Cayley-Oktaven
$\{e_i ; 1 \leq i \leq n\}$	kanonische Basis von $\mathbb{Z}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$
$\text{Span } M$	Lineare Hülle der Teilmenge $M$ eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums
$M(n, \mathbb{K})$	$n \times n$ - Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$
$I$	Einheitsmatrix
$V \ominus W$	Orthogonales Komplement von $W$ in $V$
$\underline{G}$	Liealgebra zur Liegruppe $G$
$R(g), L(g)$	Rechts- und Linkstranslation mit $g \in G$
$\text{Ad}(g)$	Konjugation mit $g$ auf $G$ und $\underline{G}$
$\text{ad}$	Differential von $\text{Ad}$ ; $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$
$N_G(H)$	Normalisator von $H$ in $G$
$C_G(H)$	Centralisator von $H$ in $G$
$e \in G$	Einselement der Gruppe $G$
$(x; y)$	Paar, Element der Produktmenge
$(x, y)$	$\text{Ad}(G)$ -invariantes Skalarprodukt auf $\underline{G}$ , biinvariante Metrik auf $G$
$\langle x, y \rangle$	beliebiges Skalarprodukt auf $\underline{G}$ , linksinvariante Metrik auf $G$ ; auf $\mathbb{R}^n$ : kanonische Metrik
$S^1, S^3$	Einheitssphäre in $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{H}$

$U(n)$	79	$A_n$	139
$SU(n)$	80	$B_n$	139
$O(n)$	101	$C_n$	139
$SO(n)$	101	$D_n$	109, 139
$Spin(n)$	102	$G_2$	139
$Sp(n)$	102	$F_4$	122
$Aut(\mathbb{C}a)$	122	$E_6$	126
$\Delta$	27	$E_7$	124
$\Delta^m$	144	$E_8$	123, 124
$ex( )$	67	$e$	79
$\bar{U}$	27	$e^k$	91
$\bar{S}$	32	$p_i$	139
$U^0$	29	$q_{ij}$	139
$\theta$	18	$b_i$	85
$ZA(G)$	73	$b_{ij}$	91
$ZM(W)$	103		
$E_{ij}, F_{ij}, G_{ij}$	147		