Math. Semesterberichte 47 (2000) S. 193 - 220

Die Gleichung 5. Grades: Ist Mathematik erzählbar?

J.-H. Eschenburg und L. Hefendehl-Hebeker

"But you might be prepared to bend [the truth] a little if it helps people to understand what you are doing."

(Ian Stewart)

Einführung

Die vorliegende Arbeit verfolgt ein doppeltes Ziel: Anhand eines historisch bedeutsamen und auch heute noch attraktiven Stoffes möchten wir typische Probleme bei der Vermittlung mathematischer Ideen diskutieren und versuchen, Lösungswege aufzuzeigen.

Diese Probleme werden an vielen Stellen offenkundig, angefangen von dem weit verbreiteten mathematischen Analphabetismus und Desinteresse über die Schwierigkeiten des mathematischen Unterrichts in Schule und Hochschule bis hin zu mathematischen Vorträgen, die manchmal selbst in fachinternen Kreisen ihr Publikum nur unvollkommen erreichen. "Woher kommt es", so fragte Hans Magnus Enzensberger auf dem ICM 1998 [En], "daß die Mathematik in unserer Zivilisation so etwas wie ein blinder Fleck geblieben ist, ein exterritoriales Gebiet, in dem sich nur wenige Eingeweihte verschanzt haben?" Wir meinen, dass es vor allem drei Gründe sind, die die Mitteilung von Mathematik über einen engen Kreis von Spezialisten hinaus erschweren:

1. Die Inhalte: Nicht alle mathematischen Inhalte eignen sich zur Mitteilung an ein breites Publikum. Bereits die Fragestellungen setzen oft eine lange Entwicklung voraus, die in kurzer Zeit kaum nachvollzogen werden kann.

2. Die Art der Wissensbildung in der Mathematik: Nicht Empirie, sondern einzig der Begründungszusammenhang ist das Erkenntnismittel unserer Wissenschaft; ihr Ziel ist daher nicht nur Beschreibung von Sachverhalten, sondern Verstehen, und dieses erfordert von den Hörerinnen und Hörern eigene geistige Aktivität. Verstehen ist eben nicht einfach das Ergebnis einer Mitteilung, sondern bedarf der Anregung eines konstruktiven Nachvollzugs. Dieser Prozess ist umso schwerer in Gang zu setzen, je geringer die Gemeinsamkeiten an mathematischer Erfahrung und Wissen zwischen Lehrenden und Lernenden sind.

3. Die mathematische Fachsprache: Sie arbeitet mit exakt definierten und in ihrem Gebrauch genau festgelegten Begriffen und Operationen, die meist in einem langen und mühsamen Entwicklungsprozess gewonnen wurden, in dem sich die Inhalte und die zugehörigen Darstellungsweisen miteinander herausgebildet haben. Da aber z.B. in einem Vortrag wegen der Kürze der Zeit gewöhnlich nur ein kleiner Teil der inhaltlichen Entwicklung aufgezeigt werden kann, ist die voll ausgebildete Fachsprache zur Vermittlung dieser Inhalte weitgehend ungeeignet. Begriffserklärungen werden sofort wieder vergessen, wenn keine Vorstellungen damit verbunden werden können. Nötig sind daher vorläufige, möglichst

griffige Formulierungen, die wesentliche Inhalte treffend ausdrücken, wobei gewisse Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden müssen. Diese Sprache muss eigens erst entwickelt werden; die Fachsprache bietet dafür nur wenig Hilfen (vgl. auch [RG]).

Das von uns gewählte Beispiel der Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades mit Hilfe des Ikosaeders nach Felix Klein scheint uns aus mehreren Gründen besonders gut für unsere Absicht geeignet zu sein, diese Schwierigkeiten aufzudecken und Auswege zu suchen. Das Lösen von Gleichungen gehört seit jeher zu den Grundaufgaben der Mathematik und ist daher als Problem gut vermittelbar; auch die zur Lösung herangezogenen Hilfsmittel (Symmetrie, Ikosaeder, Flächen mit zwei Geradenscharen) sind für sich betrachtet anschaulich und leicht zu verstehen, ihre Verbindung mit der Gleichung 5. Grades aber äußerst überraschend. An einem eng umgrenzten Inhalt kann beispielhaft das Zusammenwirken von mathematischen Ideen aus verschiedenen Gebieten (Algebra, Geometrie, Funktionentheorie) deutlich gemacht werden. Die angesprochenen Probleme des Verstehens und der Fachsprache versuchen wir durch die gewählte Dialogform deutlich machen. Der Dialogpartner verfügt nur über einfache Schulkenntnisse; er hat die Funktion, Verständnisprobleme zu benennen und den Zusammenhang der Erläuterungen mit der ursprünglichen Frage immer wieder einzuklagen. Unser Bestreben ist, nie mehr zu beantworten, als gefragt wurde, und dafür eine möglichst einfache Sprache zu benutzen, die an die Rechenerfahrung und die Raumanschauung des Zuhörers anknüpft. Die jeweiligen Absichten unserer Gesprächsführung diskutieren wir in Kommentaren außerhalb des eigentlichen Dialogs; mathematische Ergänzungen escheinen meist in Anmerkungen.

Eine didaktische Absicht lag schon dem Klein'schen Buch von 1884 [K] zugrunde (vgl. z.B. die Vorrede). Es wurde 1993 von P. Slodowy neu herausgegeben und aus heutiger Sicht kommentiert; dieses Projekt geht zurück auf den in [Sl] ausgearbeiteten Habilitationsvortrag, der vor einem breiten Publikum gehalten wurde und sich daher bereits mit den genannten Problemen auseinandersetzen musste. Wir haben das in [Sl] geschilderte Klein'sche Verfahren noch etwas vereinfacht und stellen es in drei Stufen dar: In der ersten Stufe ("erste Nacht") beschreiben wir, dass jede Gleichung 5. Grades mit Hilfe der Grundrechenarten sowie der Umkehrung einer bestimmten rationalen Funktion (der *Ikosaederüberlagerung* q) gelöst werden kann und deuten an, dass Symmetrieüberlegungen zu diesem Ergebnis geführt haben. In der 2. Stufe werden die Hilfsmittel vorgestellt (zweite und dritte Nacht) und der Lösungsprozess durchgeführt, zunächst modellhaft am Beispiel der Gleichungen zweiten und dritten Grades (vierte Nacht) und dann wirklich (fünfte Nacht). Die 3. Stufe wird nur noch angedeutet (letzte Nacht); hier wären aus den dargestellten Ideen präzise Lösungformeln abzuleiten. Alle Stufen bieten jede für sich eine Antwort auf die Frage: "Wie löst man die allgemeine Gleichung 5. Grades?" In jeder Stufe verfeinern sich die Ideen, und der Präzisionsgrad, die benötigte Zeit und die Anforderungen an die Aufmerksamkeit des Hörers wachsen. Verstehen geschieht unserer Auffassung nach in Zirkeln; jede Runde bietet die Voraussetzungen zu einem höheren Grad an Intensität und Präzision in der darauffolgenden Runde.

Ungewöhnlich für eine wissenschaftliche Arbeit ist neben der Dialogform auch der märchenhafte Rahmen. Damit soll einerseits die erzählerische, ja dramatische Komponente der Mathematik unterstrichen werden, andererseits verfolgen wir damit eine weitere didaktische Absicht. Als Lehrende sind wir viel zu häufig in der Situation, den vollen Überblick zu haben, während unsere Zuhörerinnen und Zuhörer hart darum ringen müssen, uns zu verstehen. Das ist sozusagen nicht gut für den Charakter. In der Erzählung wird uns deshalb ein Dämpfer versetzt: Unser Zuhörer ist kein harmloser Schüler oder Student, sondern der mächtige absolute Fürst aus "Tausendundeine Nacht", der über unser Leben nach Belieben verfügen kann. Wir müssen deshalb äußerst vorsichtig sein: Wir dürfen ihm nicht zu nahe treten ("das verstehst du ja doch nicht") noch ihn langweilen mit Erklärungen, die er nicht gewünscht hat; jedes Wort muss auf die Goldwaage gelegt werden. Andererseits ist Scheherban kein Dummkopf; er hat einen Sinn für gute Geschichten. Das ist unser Vorteil, den wir wie Scheherazade für uns nutzen müssen. Eigentlich steht Scheherban für eine Öffentlichkeit, die uns Mathematiker bezahlt, aber nur wenig darüber weiß, was wir tun, und der wir einigen Respekt schulden. Wir möchten mit unserer Arbeit einen Beitrag dazu leisten, die "Zugbrücke" ([En]) herabzulassen, indem wir dafür werben, die Probleme der Vermittlung von Mathematik genauso ernst zu nehmen wie die mathematischen Probleme selber.

Die Arbeit ist aus einem gemeinsamen Seminar an der Universität Augsburg hervorgegangen, zu dem auch eine Ausarbeitung vorliegt ([Es]), auf die wir (neben [K]) für Detailfragen verweisen. Den Teilnehmerinnen und Teilnehmern dieses Seminars sei an dieser Stelle für ihre Mitarbeit an dem Projekt herzlich gedankt. Für die Ausführung einiger Figuren danken wir Jonas Eschenburg.

Die erste Nacht: Eine neue Rechenart

In einem fernen Land lebte einst ein mächtiger und schrecklicher Fürst mit Namen Scheherban. Er verübte in seinem Leben grausame Untaten, aber es wird auch Gutes über ihn berichtet: Er liebte Märchen und Geschichten [T] und, was weniger bekannt ist, er hatte sogar eine Neigung zur Mathematik. Wir stellen uns vor, dass er uns eines Abends über Raum und Zeit hinweg zu sich rufen lässt und zu uns spricht: Ihr Mathematiker könnt doch Gleichungen lösen. Auch ich habe mich ein wenig mit dieser Kunst beschäftigt. Das schöne Verhältnis des goldenen Schnitts zum Beispiel (ich liebe die ungleiche Teilung) ist die Zahl x, die um Eins kleiner ist als ihr Quadrat: $x^2 - x = 1$. Um sie zu ermitteln, füge ich auf beiden Seiten der Gleichung $\frac{1}{4}$ hinzu und erhalte $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$, also ist x die Zahl $(1 + \sqrt{5})/2$. Mein Großwesir, dem auch die Pflege der Rechenkunst obliegt, weiß sogar Gleichungen zu lösen, die auch x^3 und x^4 enthalten ([W], S.191-197), aber sobald x^5 vorkommt, versagt seine Kunst zumeist. Soll ich ihm deshalb den Kopf abschlagen lassen?

- Oh tue das nicht, Herr, sprechen wir. Denn so groß Deine Macht auch ist, Du gebietest nicht über das Zahlenreich. Schon manche von uns haben vergeblich versucht, ein Verfahren für die Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades

$$x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0 \tag{1}$$

mit Hilfe der vier Grundrechenarten sowie des Wurzelziehens zu finden, bis uns vor 170 Jahren ein junger Mann bewies, dass es ein solches Verfahren gar nicht geben kann. Er hieß Evariste Galois,[1]) und am Tage darauf starb er durch die Hand eines Feindes. Sein

[1]) Historisch ist das nicht ganz korrekt; bereits Ruffini (1799) und Abel (1824/26) bewiesen die Unmöglichkeit einer solchen Auflösung, vgl. [K]

Name ist unsterblich.

- So ist diese Gleichung also gar nicht lösbar?

- Doch ist sie es, aber die vier Grundrechenarten und das Wurzelziehen reichen zu ihrer Lösung nicht aus. Wir benötigen noch eine weitere Rechenart dazu. Sie ist dem Wurzelziehen verwandt, nur viel komplizierter. Felix Klein [K] hat uns vor über hundert Jahren darüber aufgeklärt.

- Von einer solchen Rechenart hat mir mein Wesir nie berichtet. Nennt sie mir sogleich!

- Wie Du befiehlst, Herr. Es ist die Umkehrung der rationalen Funktion

$$q(x) = -\frac{(x^{20} - 228\,x^{15} + 494\,x^{10} + 228\,x^5 + 1)^3}{1728 \cdot (x^{11} + 11\,x^6 - x)^5}, \qquad (*)$$

d.h. die Rechenart, die zu jeder Zahl y die Zahlen x mit $q(x) = y$ ermittelt. Insofern ähnelt sie dem Wurzelziehen, das ja auch die Umkehrung einer rationalen Funktion (der Potenz) ist und zu jeder Zahl y die Zahlen x mit $x^n = y$ berechnet.

Wir haben damit Scheherbans Frage so kurz wie nur möglich beantwortet; wir vermuten, dass er Weitschweifigkeit nicht mag. Wir haben sie in einer möglichst einfachen Sprache formuliert, die fortgeschrittene mathematische Fachtermini weitgehend vermeidet. Die Benutzung von Variablen ist natürlich unumgänglich und bereits im Problem angelegt, wenn über das Lösen von Gleichungen geredet wird. Rationale Funktionen erklären wir auf Nachfrage als Quotienten von Polynomen, die wiederum Summen von Vielfachen von Potenzen der Variablen x sind. Wir haben diese Begriffe damit auf *Rechenprozesse* zurückgeführt, die jedermann vertrauten elementaren Grundhandlungen der Mathematik. Die Umkehrungen rationaler Funktionen bezeichnen wir ebenfalls als Rechenprozesse, wenn wir auch im Moment nicht erklären können und wollen, wie ein solcher Prozess praktisch durchgeführt wird, ebensowenig wie wir das Wurzelziehen erklären; man kann sich ja zunächst vorstellen, dass die rationale Funktion tabelliert und die Tabelle rückwärts gelesen und interpoliert wird. Allerdings werden wir darauf hinweisen müssen, dass die Umkehrung einer rationalen Funktion gewöhnlich keineswegs wieder eine rationale Funktion ist, was sich ja bereits bei der Potenz zeigt; einzige Ausnahmen (die noch eine große Rolle spielen werden) sind die gebrochen-linearen Funktionen $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit der Umkehrung $x = \frac{dy-b}{a-cy}$.

Mit der Auffassung von Funktionen und deren Umkehrungen als Rechenprozesse haben wir auch einige begleitende Schwierigkeiten zunächst ausgeblendet, nämlich die Frage nach dem Definitionsbereich, also dem Zahlbereich, in dem wir arbeiten, sowie der Mehrdeutigkeit der Umkehrfunktion und der Lösung von (1). Wir werden auf diese wichtigen Fragen zurückkommen, im Augenblick aber sehen wir sie als nachgeordnete Probleme an, mit denen wir die eigentliche Botschaft nicht überfrachten wollen.

Doch kehren wir zu unserem Gesprächspartner zurück. Er ist durch die gänzlich unerwartete Angabe einer sehr speziellen Funktion vermutlich recht verblüfft und wird vielleicht wissen wollen: Warum denn um alles in der Welt ausgerechnet diese Funktion q? Hier sind wir an einem kritischen Punkt unseres Gesprächs angelangt. Will Scheherban eine wirkliche Antwort auf diese Frage haben, muss er sich mit uns auf ein langwieriges

Abenteuer einlassen. Aber vielleicht ist seine Frage ja zunächst ganz harmlos gemeint und will keineswegs eine Lawine mathematischer Erklärungen lostreten. Er ist von Beruf Sultan und hat noch ein paar andere Dinge zu tun. Versuchen wir es also mit einer kurzen Antwort.

- Recht hast Du, o Sultan, mit Deiner Frage, denn die Beziehung der Funktion q zu der Gleichung (1) ist in der Tat tief verborgen. Es gibt aber ein Verbindungsglied zwischen beiden Gegenständen, das aus einem ganz anderen Bereich der Mathematik stammt, der räumlichen Geometrie, und das Dir wohlbekannt ist. Es ist das *Ikosaeder*, der platonische Körper, der von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, wobei an jeder der 12 Ecken 5 Dreiecke zusammenstoßen (Fig. 1).

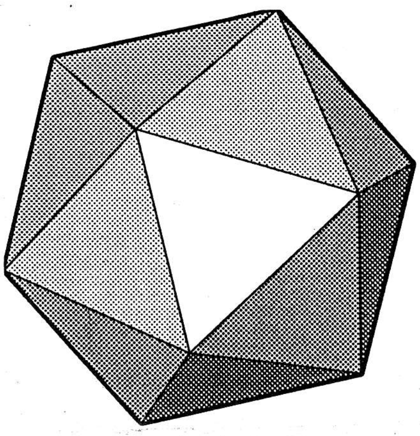

Fig. 1. Ikosaeder

Was dieser Körper mit den beiden anderen Gegenständen gemeinsam hat, ist seine *Symmetrie*. Du kennst Symmetrien aus der Kunst und der Naturbetrachtung ebenso wie aus der Geometrie; sie spielen auch in anderen Gebieten der Mathematik eine grundlegende Rolle. Funktionen und Gleichungen können ebenso wie geometrische Gegenstände Symmetrien besitzen. Die geheime Verbindung zwischen der Gleichung 5. Grades, dem Ikosaeder und der Funktion q liegt eben darin, dass diese drei Gegenstände in gewissem Sinn die gleiche Symmetrie haben. Bitte verzeihe uns, wenn wir uns ein wenig ungenau ausdrücken; genaue Erklärungen würden Deine kostbare Zeit noch stärker in Anspruch nehmen. Wir möchten aber mit dieser vagen Bemerkung zwei wichtige Grundsätze unserer Kunst andeuten. Erstens: Hinter dem komplizierten Ausdruck $(*)$ für q steht ein einfaches Prinzip, aus dem die Formel erzeugt wird, und dieses Prinzip ist Dir aus anderen Gegenstandsbereichen wohl vertraut: Es ist die Symmetrie. Zweitens: Die Mathematik muss hier (wie auch sonst häufig) den Gegenstandsbereich der ursprünglichen Frage, die algebraischen Gleichungen, verlassen und andere ihrer Provinzen aufsuchen, um zu Lösungen zu gelangen. Wenn man sie an einen Gegenstand bindet, wird sie unfruchtbar.

Die Vorstellung, die wir von dem Vermittlungsprozess von Mathematik haben, gleicht dem Bau einer Brücke. Wir fangen an beiden Ufern an: Das Problem und die Lösung (soweit sie formulierbar ist). Noch nichts deutet an, wie die beiden Enden einmal verbunden werden. Dann beginnen wir, dazwischen in großen Abständen Pfeiler zu errichten: Die

Gleichung, das Ikosaeder, die Funktion q. Sie stehen noch isoliert da, zunächst auch nur als Gerüst, aber sie lassen eine spätere Verbindung vielleicht bereits vage erahnen (die Bedeutung der Zahl 5 für alle drei Gegenstände, die verbindende Rolle der Symmetrie). Es gibt kleine Inseln, die wir beim Bau dieser Pfeiler betreten können, nämlich die Vertrautheit des Zuhörers mit den Begriffen in anderen Zusammenhängen. Es wird im weiteren darauf ankommen, die Pfeiler zu festigen und die Brückenteile an ihnen aufzuhängen, um die Verbindung wirklich herzustellen. Bereits im jetzigen Stadium sollte allerdings ein gewisser Abschluss erreicht und einige wesentliche Aspekte des Themas sollten deutlich geworden sein. Wir hoffen jedoch, dass unser Zuhörer uns gestattet, die Brücke weiterzubauen, weil wir seine Neugierde erregt haben und er etwas mehr über die Beziehung dreier so unterschiedlicher Gebilde erfahren möchte, eine Beziehung, die die Lösung einer schwierigen Aufgabe in sich birgt. Was kann die konkrete Funktion q oder gar die räumliche Gestalt des Ikosaeders mit der Lösung einer algebraischen Gleichung mit beliebig vorgegebenen Koeffizienten zu tun haben?

Wir möchten in dieser Hinsicht gerne unserem großen Vorbild Scheherazade nacheifern, die ihre nächtliche Erzählung so zu führen verstand, dass sie bei Tagesanbruch an der spannendsten Stelle unterbrach und damit einen weiteren Tag lang ihr eigenes Leben und das ihrer Leidensgenossinnen rettete. Heutzutage droht uns nicht mehr die Todesstrafe, wenn wir schlechte Erzähler sind - insoweit haben sich die Zeiten gebessert. Stattdessen sterben die Zuhörer (vor Langweile) und kommen uns so abhanden.

Die zweite Nacht: Die Ikosaedergruppe

Nehmen wir an, Scheherban hat uns mitteilen lassen, das mit der Symmetrie möchte er genauer verstehen. Nun haben wir die Erlaubnis, ein wenig präziser zu werden, sollten sie aber (in unserem eigenen Interesse) nicht überstrapazieren. Wir beginnen natürlich mit dem anschaulichsten der drei Gegenstände, dem Ikosaeder.

- Über Symmetrien von räumlichen Gestalten brauchen wir Dich nicht erst zu belehren, o Sultan, der Du die Kunst liebst und förderst; die Schönheit Deines Palastes gibt vielfältiges Zeugnis davon. Symmetrie ist die Wiederkehr der gleichen Form an anderem Ort. Anders gesagt: Eine symmetrische Gestalt lässt sich auf mancherlei Art drehen oder spiegeln, ohne sich zu verändern; die Zahl und Beschaffenheit dieser Transformationen ist ein Maß der Symmetrie. Deine wundervollen Mosaiken [Am], [B]) zeigen dieses Prinzip besonders schön; jede Spiegelung an einer der vielen Symmetrielinien lässt das Muster unverändert (Fig. 2).

- Kommt zur Sache!

- Das Ikosaeder kann auch als ein solches Muster aufgefasst werden, allerdings nicht auf einer ebenen Fläche, sondern einer Kugelfläche (*Sphäre*). Die Eckpunkte des Ikosaeders liegen ja bereits auf einer Kugel. Wenn wir uns auch die Ikosaederkanten vom Kugelmittelpunkt aus auf diese Sphäre projiziert denken, erhalten wir dort ein Muster aus 20 gleichseitigen sphärischen Dreiecken. Jedes Dreieck unterteilen wir noch einmal durch seine drei Symmetrielinien in sechs zueinander kongruente Teildreiecke ("*Kammern*"), deren Ecken immer von einem Eckpunkt, einem Kanten- und einem Flächenmittelpunkt des (auf die Sphäre projizierten) Ikosaeders gebildet werden; wir erhalten also 120 solche Kammern

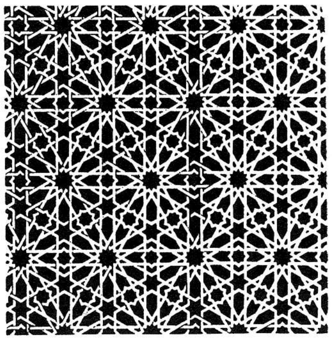

Fig. 2. Mosaik

(Fig. 3). Die Spiegelung an den Symmetrielinien ("*Kammerwänden*") lässt das ganze Muster unverändert, daher können wir jede Kammer in ihre Nachbarkammern und durch mehrfache Wiederholung schließlich in jede andere Kammer spiegeln, ohne dass das Muster verändert wird. Da die Kammern selbst keine Symmetrie mehr haben, gibt es genausoviele Symmetrietransformationen wie Kammern, also 120. Die Hälfte davon sind Drehungen; sie sind jeweils aus einer *geraden* Anzahl von Kammerspiegelungen zusammengesetzt.

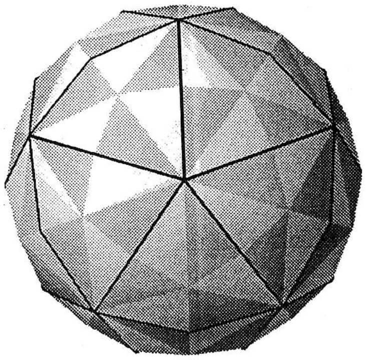

Fig. 3. Kammern des Ikosaeders

- Ich habe euch nicht dazu hergerufen, dass ihr mir das Zählen lehrt!

- Verzeih, wenn wir Dich langweilten. Aber ist nicht die Mathematik zu einem guten Teil ein systematisches Ordnen dessen, was wir bereits wissen? Doch bleiben wir nicht beim Zählen stehen: Wir können mit den 60 Ikosaederdrehungen auch *rechnen*, fast so wie mit Zahlen. Wie wir aus zwei Zahlen durch Addition oder Multiplikation eine neue erhalten, so können wir auch aus zwei Ikosaederdrehungen eine neue bilden, indem wir sie nacheinander ausführen ("*verketten*"), und zudem können wir jede Ikosaederdrehung durch Verkettung mit einer anderen wieder rückgängig machen. Eine solche in sich abgeschlossene kleine Rechenwelt nennen wir eine *Gruppe*; die 60 Ikosaederdrehungen bilden die *Ikosaedergruppe*.

Symmetrien werden stets durch eine Gruppe beschrieben, die Gruppe der Transformationen, die die gegebene Form unverändert lassen.

- Sie ist ja ganz hübsch, eure kleine Rechenwelt. Aber was hat sie mit der Gleichung 5. Grades zu tun?

- Gestatte, dass wir zuerst auf die Verbindung mit der Funktion q zu sprechen kommen, denn diese ist viel direkter.

- Ich kann nicht den geringsten Zusammenhang zwischen dem Ikosader und dieser Zahlenformel erkennen.

- Das Ikosaeder ist ein Muster auf einer Kugel, und auch die Zahlen bilden eine Kugel.

- Erklärt Euch! Sind denn die Zahlen rund?

- Nein, aber dass sie mit geometrischen Vorstellungen zu tun haben, weißt Du bereits: Du kennst den *Zahlenstrahl*, auf dem die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... in gleichmäßigen Abständen angeordnet sind; alle anderen positiven Zahlen liegen in den Lücken dazwischen. Es gibt aber noch mehr Zahlen. Um Gleichungen wie $x + 1 = 0$ zu lösen, mussten wir die negativen Zahlen einführen und gelangten so vom Zahlenstrahl zur *Zahlengeraden* und damit zu den *reellen Zahlen*. Bei der Lösung quadratischer Gleichungen kamen wir auch damit noch nicht aus, denn bereits die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ besitzt keine reelle Lösung. Wir mussten deshalb unseren Zahlenbereich nochmals erweitern, indem wir eine neue Zahl einführten, deren Quadrat -1 ist. Das hat uns Leonhard Euler vor 250 Jahren gelehrt, er gab dieser Zahl den Namen i. Nur ist für eine solche Zahl auf der Zahlengeraden kein Platz, denn weder positive noch negative Zahlen haben ein negatives Quadrat. Also müssen wir uns die neue Zahl nicht auf, sondern *neben* der reellen Zahlengeraden vorstellen, d.h. in der zweiten Dimension. Natürlich haben wir mit i ganz viele weitere Zahlen hinzugewonnen, z.B. $3i + 2$; wie bisher addieren wir Zahlen, indem wir die zugehörigen Strecken aneinanderlegen. So erhalten wir die *komplexen Zahlen*; sie bilden keinen Strahl und keine Gerade mehr, sondern eine Ebene, die *Zahlenebene* $\mathbb{C}$.

- Ihr habt aber behauptet, dass die Zahlen eine Kugel bilden, keine Ebene!

- Ganz recht. Wir sind noch nicht am Ziel. Wir müssen die Zahlenebene noch ein letztes Mal erweitern, denn rationale Funktionen wie q besitzen ja *Polstellen*, d.h. sie können "unendlich" werden (nämlich an den Stellen, wo ihr Nenner Null ist). Deshalb nehmen wir zu $\mathbb{C}$ noch die weitere "Zahl" ∞ hinzu (mit den "üblichen" Rechenregel $1/0 = \infty$, $1/\infty = 0$ usw.); die so erweiterte Zahlenebene nennen wir $\hat{\mathbb{C}}$. Sie heißt auch die *Riemannsche Zahlenkugel*, denn Bernhard Riemann hat uns vor 140 Jahren gezeigt, dass sie sich in eine Kugelfläche verwandeln lässt.

- War er ein Magier?

- Beinahe, denn zur Mathematik gehört die Verwandlungskunst; "derselbe" mathematische Gegenstand kann in verschiedener Gestalt erscheinen. Die Verwandlung der erweiterten Zahlenebene in die Kugelfläche ist übrigens leicht zu verstehen; sie geschieht durch die *stereographische Projektion*: Wir gehen von der Sphäre aus, markieren darauf einen Punkt P, den wir "Pol" nennen (wir werden dafür eine der Ikosaederecken wählen) und stellen uns die Zahlenebene als die zugehörige Äquatorebene vor. Nun projizieren wir von P aus jeden anderen Sphärenpunkt Q in gerader Linie auf diese Ebene. Der Projektionspunkt von Q ist also der Schnittpunkt Q' der Äquatorebene mit der Geraden PQ. Jedem Punkt Q' der Ebene entspricht so genau ein Punkt Q der Sphäre und umgekehrt, lediglich der Pol P hat keinen Projektionspunkt. Wenn Q sich aber P nähert, so entfernt sich Q' immer weiter vom Mittelpunkt "bis ins Unendliche", was uns das Recht gibt, dem Pol P selber den Projektionspunkt "∞" zuzuordnen (Fig. 4).

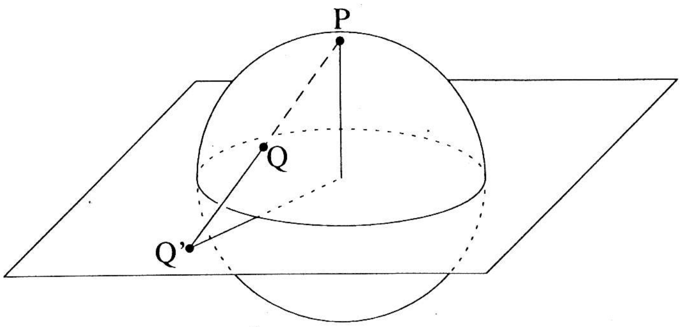

Fig. 4. Stereographische Projektion

Das Ikosaedermuster auf der Kugelfläche wird dann zu der folgenden ebenen Figur (Fig. 5):

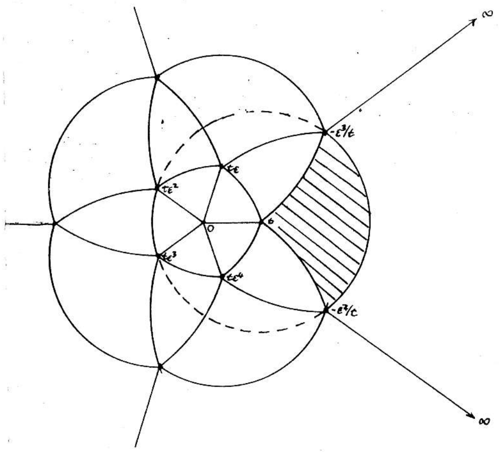

Fig. 5. Ikosaedermuster

Du siehst hier 11 der 12 Ikosaederecken (eine liegt im Unendlichen) und ihre Verbindungskanten, die in Kreisbögen verwandelt wurden. Einer der Eckpunkte liegt in der Mitte, die übrigen 10 sind auf zwei konzentrischen Kreisen symmetrisch um ihn herum angeordnet. Die Radien der beiden Kreise stehen übrigens zur Einheitslänge im Verhältnis des Goldenen Schnittes; das wird Dich sicher freuen!

- Wunderschön! Was aber hat das alles mit der Funktion q zu tun?

- Dazu erklären wir Dir am besten, wie wir q gefunden haben. Wir suchten eine rationale Funktion, die dieselbe Symmetrie hat wie das Ikosaedermuster auf der Zahlenkugel, die also auf jeder der 60 Doppelkammern, der Bausteine des Musters, gleich aussieht. Anders gesagt, die Funktion sollte *invariant* unter den 60 Ikosaederdrehungen sein, d.h. je zwei Punkte x und x', die von einer dieser Transformationen ineinander überführt werden, sollten gleiche Werte haben: $q(x) = q(x')$.[2]) Wir nahmen uns außerdem die Freiheit, drei dieser Werte festzulegen: Die Eckpunkte des Ikosaeders sollten auf ∞, Flächenmittelpunkte auf 0 und die Kantenmittelpunkte auf 1 abgebildet werden. Es gibt viele Funktionen dieser Art; q soll unter ihnen diejenige vom kleinstmöglichen Grad sein, nämlich 60.[3]) Da wir ihre Pol-, Null- und Einsstellen kennen, können wir sie berechnen; das Ergebnis ist die Formel $(*)$.

- Eine solche Funktion kann ich mir nicht vorstellen.

- Erlaube uns, Dir behilflich zu sein, eine Vorstellung zu gewinnen, indem wir q als eine Transformation[4]) der Zahlenkugel beschreiben. Zur Zahlenkugel gehören ja auch die reellen Zahlen; sie bilden darin (zusammen mit dem Punkt ∞) einen Großkreis, der diese Kugel in zwei Hälbsphären zerlegt. Jede der 120 Ikosaeder-Kammern wird nun durch q so transformiert, dass ihr Bild abwechselnd eine der beiden Halbsphären vollständig überzieht; q dehnt die Kammer also wie eine Gummihaut über die ganze Halbsphäre aus, wobei jeder der drei Innenwinkel zu 180 Grad aufgebogen wird. Benachbarte Kammern werden zusammen über die ganze Sphäre ausgebreitet, die auf diese Weise 60-fach (in 60 *Lagen*) überzogen wird; Punkte, die durch eine Ikosaederdrehung verbunden sind, werden dabei auf denselben Punkt transformiert. Wegen dieser geometrischen Deutung nennt man q auch *Ikosaederüberlagerung*.

Wir hatten in dieser Nacht zwei neue Ideen einzuführen: die Ikosaedergruppe als Ausdruck der Symmetrie des Ikosaeders und ihre Verbindung mit der Funktion q. Um die Verbindung herzustellen benötigten wir eine weitere Idee, die Riemannsche Zahlenkugel. Wir haben uns bei der Darstellung dieser Ideen ganz der geometrischen Sprache bedient, weil sie schneller zu erfassen ist: Jeder bringt aus der Alltagswelt eine große geometrische Erfahrung mit; wir müssen niemandem erst erklären, was Kugeln, Kreise oder gerade Linien sind. Dagegen ist die algebraische Alltagserfahrung vorwiegend auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen beschränkt.

Unser Brückenbau ist nun ein Stück vorangekommen; zwischen dem Ikosaeder und der Funktion q besteht bereits eine feste Verbindung. Wir wollen annehmen, dass Scheherban damit zunächst zufrieden ist, auch wenn wir die Berechung von q nicht wirklich durchgeführt

---

[2]) Wir sehen jede Ikosaederdrehung als eine Transformation der Kugelfläche an, die das Ikosaedermuster erhält. Fassen wir die Kugelfläche als erweiterte komplexe Ebene $\hat{\mathbb{C}}$ auf, so wird die Ikosaederdrehung zu einer eindeutig umkehrbaren rationalen Funktion g, d.h. zu einer gebrochen-linearen, $g(x) = (ax + b)/cx + d)$.

[3]) Der *Grad* einer rationalen Funktion $q = a/b$ ist der größere der Grade der beiden Polynome a, b. Die Gleichung $q(x) = y$, also $a(x) - y \cdot b(x) = 0$, hat für alle Werte $y \neq 0, 1, \infty$ mindestens 60 Lösungen, weil mit $q(x) = y$ auch $q(g(x)) = y$ gilt, und zwar für jede der 60 Ikosaederdrehungen g. Der Grad des Polynoms $a - y \cdot b$ ist daher mindestens 60.

[4]) Wir verwenden das Wort "Transformation" hier etwas allgemeiner auch für nicht bijektive Abbildungen.

haben. Er wird aber etwas ungeduldig (was für uns nicht ganz ungefährlich ist), denn zu der dritten und wichtigsten Figur unserer Geschichte, der Gleichung 5. Grades, sind wir noch gar nicht gekommen. Was hat diese mit der Ikosaeder-Symmetrie zu tun? Was kann an einer Gleichung überhaupt symmetrisch sein? Oh, die Symmetrie sei geradezu das Lösungsprinzip einer algebraischen Gleichung, so versichern wir. Da bemerken wir zu unserem Glück den Anbruch des Tages und dürfen bis zur folgenden Nacht darüber nachdenken, wie wir das erklären sollen.

Die dritte Nacht: Symmetrie von Gleichungen

- Um die Symmetrie von Gleichungen zu erklären, wollen wir etwas allgemeiner die Gleichung n-ten Grades betrachten:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{$1)_n$}$$

- Es genügt, wenn ihr mir über die Gleichung 5. Grades berichtet.

- Der Fall $n = 5$ ist natürlich unser Ziel, aber andere Fälle, nämlich $n = 2$ und $n = 3$, verstehen wir viel leichter. Wir können dieses Wissen für $n = 5$ nutzbar machen, aber nur dann, wenn wir die Fälle miteinschließen, deshalb wählen wir den Grad n zunächst beliebig. In der vorigen Nacht haben wir über die komplexen Zahlen gesprochen, mit deren Hilfe wir die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ lösen können. Zu unserer aller Überraschung hat uns Carl Friedrich Gauß vor 200 Jahren gezeigt, dass auch jede andere algebraische Gleichung in $\mathbb{C}$ eine Lösung besitzt. Leider konnte er sie nicht berechnen.

- Von welchem Nutzen ist eine Lösung, die man nicht kennt?

- Der Nutzen ist nicht gering, wie Du gleich sehen wirst: Das bloße Wissen um die Existenz liefert Aufschlüsse, die das Suchen erleichtert. Lass uns dieser unbekannten Zahl, die die Gleichung $(1)_n$ löst, den Namen x_1 geben.

- Warum nicht weiterhin x?

- Weil wir die Gleichung jetzt ein bisschen anders auffassen wollen. Der Ausdruck auf der linken Seite von $(1)_n$

$$p(x) := x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{2}$$

kann ja für *jede* Zahl x berechnet werden; er ist ein *Polynom* in x. Deshalb soll x von nun an eine *beliebige* Zahl bezeichnen. Die Lösung von $(1)_n$, die nach Gauß existiert bekommt daher den besonderen Namen x_1; es gilt also $p(x_1) = 0$. Es gibt aber noch weitere Lösungen!

- Wie könnt Ihr das wissen, wo Ihr nicht mal die eine kennt?

- Wieder nach Gauß. Dazu müssen wir das Polynom $p(x)$ durch das (sehr einfache) Polynom $l(x) = x - x_1$ *teilen.* Das Teilen einer ganzen Zahl durch eine andere, z.B. 23 durch 7, hat uns Euklid gelehrt: Die Zahl 7 geht dreimal in der Zahl 23 auf, wobei ein Rest bleibt, der kleiner ist als der Teiler, $23 = 7 \cdot 3 + 2$. Nach demselben Verfahren können wir ein Polynom p durch ein anderes Polynom l teilen: $p(x) = l(x) \cdot p_1(x) + r(x)$, wobei der Rest $r(x)$ ein Polynom ist, das kleineren *Grad* hat als der Teiler $l(x)$. Der Grad von $l(x)$ ist in unserem Fall Eins, also muss $r(x)$ den Grad 0 haben und somit konstant sein: $p(x) = l(x) \cdot p_1(x) + a$. Setzen wir x_1 anstelle von x ein, so folgt $a = 0$, denn

$p(x_1) = l(x_1) = 0$. Also ist $p(x) = (x - x_1)p_1(x)$ für ein Polynom $p_1(x)$, dessen Grad nur noch $n-1$ ist. Auch dieses besitzt nach Gauß eine Nullstelle x_2 und nach demselben Muster wie eben ist $p_1(x) = (x - x_2)p_2(x)$. Nach n solchen Schritten erhalten wir schließlich

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n). \tag{3}$$

Die Lösungen von $(1)_n$ sind daher genau die Zahlen $x_1, ..., x_n$. Es gibt also nicht nur eine, sondern genau n Lösungen (unter denen auch gleiche vorkommen dürfen).

- Es wird ja immer schlimmer! Statt einer Unbekannten gibt es jetzt ganz viele!

- Leider ja! Doch lass uns das Problem einmal umdrehen: Eigentlich wollen wir ja aus den gegebenen Koeffizienten $a_1, ..., a_n$ die Lösungen $x_1, ..., x_n$ bestimmen. Stellen wir uns aber einmal vor, wir wollten umgekehrt aus den Lösungen $x_1, ..., x_n$ die Koeffizienten $a_1, ..., a_n$ berechnen!

- Ich habe nie etwas Dümmeres gehört! Ihr wollt etwas ausrechnen, was euch bereits gegeben ist?

- Verzeih, wenn wir es nicht besser können: Wenn ein Problem zu schwierig ist, beschäftigen wir uns zunächst mit Fragen im Umfeld, die wir leichter lösen können.

- Ja, mein Wesir macht das auch so, wenn er die Staatskasse sanieren soll.

- Dein Spott trifft uns hart. Aber bedenke, dass man einen unbekannten Pfad auch dadurch erforschen kann, dass man ihn in umgekehrter Richtung durchwandert. Das Umkehrproblem ist in der Tat einfach. Multiplizieren wir nämlich die rechte Seite von (3) aus, so erhalten wir

$$p(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - ... \pm \sigma_n, \tag{3'}$$

wobei

$$\sigma_1 := x_1 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sigma_2 := x_1x_2 + x_1x_3... + x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_ix_j,$$

$$\sigma_3 := x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k$$

$$\sigma_n := x_1x_2...x_n.$$

- Das sehe ich nicht!

- Du musst es nur nachrechnen:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

usw.

- Und welchen Nutzen bringt die Rechnerei?

- Die Koeffizienten desselben Polynoms $p(x)$ müssen doch in (2) und (3′) dieselben sein, wir erhalten also

$$a_j = (-1)^j \sigma_j, \tag{4}$$

wobei $\sigma_1, ..., \sigma_n$ die obigen Ausdrücke sind. Damit ist das Umkehrproblem gelöst: Wenn Du uns n ganz beliebige Zahlen $x_1, ..., x_n$ nennst, so geben wir Dir eine Gleichung vom Typ $(1)_n$ an, die genau diese Zahlen als Lösungen hat; ihre Koeffizienten a_j sind nämlich durch (4) gegeben. Wir werden daher die a_j ebenso wie die σ_j von jetzt an als *Funktionen von* $x_1, ..., x_n$ auffassen.

- Mit schwindelt bei so vielen Variablen!

- Das ging uns nicht anders. Wir hätten längst die Übersicht verloren, hätten wir nicht die Sprechweisen und Vorstellungen der *räumlichen Geometrie* zu Hilfe genommen. Jeder Punkt X im dreidimensionalen Raum wird ja durch seine drei Koordinaten x_1, x_2, x_3 gegeben; der Punkt X *ist* also gewissermaßen das Zahlentripel (x_1, x_2, x_3). Analog fassen wir jeden Satz von n Zahlen $(x_1, ..., x_n)$ als einen "Punkt" X in einem "n-dimensionalen Raum" auf, den wir $\mathbb{C}^n$ nennen. Die Funktionen a_j hängen dann nur noch von der einen Variablen X ab!

- Den dreidimensionalen Raum kenne ich wohl, aber wie soll ich mir den 5-dimensionalen vorstellen?

- Gar nicht anders als den dreidimensionalen; wir übertragen einfach räumlich-anschauliche Vorstellungen auf andere Situationen, um diese zu "veranschaulichen". Der "5-dimensionale Raum" besteht aus allen Zahlenquintetts und ist an sich nicht anschaulich, nicht räumlich vorstellbar, aber die Sprache der räumlichen Geometrie lässt sich dennoch zu seiner Beschreibung sehr erfolgreich einsetzen. Die Sprache und die Einsichten der Geometrie reichen weit über ihren ursprünglichen Gegenstandsbereich hinaus!

- Kommt wieder zur Sache! Wolltet Ihr mich nicht über die Symmetrie der Gleichung unterrichten?

- Wir wollten eben dazu kommen. Die Gleichung wird ja durch ihre Koeffizienten bestimmt, und das sind die durch (4) gegebenen Funktionen a_j. Offensichtlich werden deren Werte nicht verändert, wenn wir die Variablen $x_1, ..., x_n$ nur in einer anderen Reihenfolge anordnen; wir sehen das den Ausdrücken σ_j und auch der Gleichung (3), aus der sie entstanden sind, direkt an. Eine Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ mit dieser Eigenschaft nennen wir *symmetrisch*, was im Fall $n = 2$ einfach $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$ bedeutet.

- Und das nennt Ihr "Symmetrie der Gleichung"? Dass Ihr Euch aussuchen dürft, in welcher Reihenfolge Ihr die Lösungen aufschreibt?

- Wir verstehen Deine Enttäuschung. Aber unsere Kunst besteht ja eben darin, das Selbstverständliche zu nutzen. Bitte erinnere Dich an unser Gespräch über die Symmetrie der Funktion q in der vorigen Nacht: Sie war invariant unter einer Gruppe von Transformationen, der Ikosaedergruppe. In gleichem Sinne sind auch die Funktionen a_j und überhaupt alle symmetrischen Funktionen invariant unter einer Gruppe von Transformationen.

- Und welche Transformationen sollten das sein?

- Es sind die *Permutationen* (Umordnungen, Änderungen der Reihenfolge) von n Gegenständen, z.B. der Zahlen $1, 2, ..., n$. Sie können auch als Transformationen des "Raumes" $\mathbb{C}^n$ aufgefasst werden: Das Bild eines Punktes X unter einer solchen Transformation hat die gleichen Koordinaten wie X, aber in einer anderen Reihenfolge angeordnet; zum Beispiel wird der Punkt $X = (x_1, x_2, x_3)$ in den Punkt $X' = (x_2, x_3, x_1)$ verwandelt. Die Permutationen bilden eine *Gruppe*, d.h. ihre Verkettungen und Umkehrungen sind wieder Permutationen. Da sie eben die *symmetrischen* Funktionen invariant lasssen, nennt man diese Gruppe auch die *Symmetrische Gruppe* S_n. Gewöhnlich werden wir allerdings nicht alle Permutationen betrachten, sondern nur die *geraden*, d.h. die aus einer *geraden* Anzahl von Paar-Vertauschungen zusammengesetzten.[5]) Diese bilden ebenfalls eine Gruppe, die *Alternierende Gruppe* A_n; sie lassen nicht nur symmetrische, sondern auch *alternierende* Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ invariant, also solche, die bei Vertauschung zweier Variabler ihr Vorzeichen wechseln.

- Und was hat das alles mit dem Ikosaeder zu tun?

- Dazu müssen wir zum Fall $n = 5$ zurückkehren. Die A_5 besteht wie die Ikosaedergruppe aus 60 Transformationen, denn es gibt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ verschiedene Anordnungen der Zahlen 1,2,3,4,5, und jede zweite ist eine gerade Permutation. Tatsächlich sind die beiden Gruppen "dieselben", sie sind *isomorph* (von gleicher Gestalt). Um das zu sehen, müssen wir noch einmal das Ikosaeder zur Hand nehmen. Fünf verschiedene Oktaeder lassen sich darin einspannen; ihre Eckpunkte liegen jeweils auf den Mittelpunkten von sechs zueinander parallelen oder senkrechten Kanten. Bei Drehungen des Ikosaeders werden die Oktaeder untereinander permutiert, und Du überzeugst Dich leicht, dass die 60 Ikosaederdrehungen dabei genau den 60 geraden Permutationen dieser 5 Gegenstände entsprechen.

Spätestens an dieser Stelle bekommt Scheherban einen Wutanfall. Das sei ja alles schön und gut, aber der Lösung der Gleichung 5. Grades seien wir noch immer keinen Schritt näher gekommen. Stattdessen hätten wir uns mit merkwürdigen Nebenproblemen beschäftigt und seien zum Schluss wieder in die Geometrie ausgewichen statt die algebraische Frage zu beantworten. Seine Geduld mit uns sei fast am Ende, und der Diener möge doch schon einmal das Messer schärfen.

- Groß ist Deine Weisheit, o Sultan, so werden wir zaghaft einwenden. Mögest Du Dich zu erinnern geruhen, Erhabener, dass Du selbst es warst, der über die gemeinsame Symmetrie der drei Gegenstände unterrichtet zu werden wünschte. In der vergangenen Nacht sahen wir, dass die Ikosaedergruppe die Symmetriegruppe der Funktion q ist; jetzt haben wir die Rolle dieser Gruppe für die Gleichung $(1)_5$ beleuchtet. Damit ist die Brücke zu unserer Gleichung 5. Grades geschlagen. Sogleich werden diese Symmetriebetrachtungen auf ein konkretes Lösungsverfahren führen. Die Funktionen σ_j werden dabei eine Hauptrolle spielen.

Die Rolle der Symmetrie für die Gleichung $(1)_n$, die wir zu erklären hatten, wurde erst durch einen Wechsel der Betrachtung erkennbar: Die Koeffizienten a_j sind nicht mehr als gegebene Konstanten, sondern als Funktionen der n Lösungen $x_1, ..., x_n$ zu betrachten; diese Funktionen sind es, die invariant ("symmetrisch") unter der Permutationsgruppe sind.[6]) Wegen dieser Umformulierung erschien dem Sultan die "Symmetrie der Gleichung"

---

[5]) Jede Permutation, d.h. jede beliebige Anordnung der Zahlen $1, ..., n$ entsteht dadurch, dass mehrfach nacheinander zwei Zahlen miteinander vertauscht werden. Ist die Anzahl dieser Vertauschungen gerade, so sprechen wir von einer *geraden Permutation*.

[6]) Die volle Permutationsgruppe S_n ist die *Galoisgruppe* für "generische" (d.h. nicht speziell gewählte) Gleichungen vom Typ $(1)_n$. Kleinere Galoisgruppen $G \subset S_n$ erhält man durch die Forderung, dass außer den a_j weitere, von den a_j nicht erzeugte Polynome in

sehr gekünstelt und wir haben seinen Zorn zu spüren bekommen; in unserer Angst versprechen wir ihm gleich (vielleicht etwas voreilig) eine praktische Anwendung.

Der grauende Morgen erlöst uns vorübergehend. Scheherban aber droht, dass wir in der nächsten Nacht endlich zum Punkt kommen müssten, sonst würde es wohl unsere letzte Nacht werden ...

Die vierte Nacht: Lösungsstategien

- Habt Ihr Euch genügend bedacht? Wie also lauten die Lösungen der Gleichung 5. Grades?

- Du möchtest, dass wir Dir die Lösungen $x_1, ..., x_5$ als Funktion der Koeffizienten $a_1, ..., a_5$ hinschreiben?

- Ja, wenn ich Euer Kauderwelsch richtig verstehe: Ihr sollt mir eine Formel angeben, mit der ich $x_1, ..., x_5$ berechnen kann, wenn ich die Zahlen $a_1, ..., a_5$ kenne.

- Wir wollen diese Aufgabe in zwei Schritten lösen: Zuerst werden wir bestimmte symmetrische Funktionen $f(x_1, ..., x_5)$ berechnen. Aus diesen werden wir hernach die $x_1, ..., x_5$ selbst bestimmen.

- Wazu dieser Umweg?

- Es ist kein Umweg, sondern ein Zwischenschritt. Solche symmetrischen Ausdrücke lassen sich nämlich leicht aus den Koeffizienten berechnen. Nehmen wir zum Beispiel den Ausdruck $f = x_1^2 + ... + x_n^2$, wobei $x_1, ..., x_n$ die Lösungen der Gleichung $(1)_n$ sind. Er lässt sich folgendermaßen umformen:

$$f = (x_1 + ... + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Nach (4) erhalten wir daraus $f = a_1^2 - 2a_2$. Wir brauchen also nicht die Lösungen von $(1)_n$ zu kennen, um f zu berechnen, sondern nur die Koeffizienten a_1 und a_2. Das gilt allgemeiner: *Alle symmetrischen Polynome lassen sich als Summen von Produkten der $\sigma_1, ..., \sigma_n$ schreiben* ([W], S.100).[7]) Wegen dieser Eigenschaft nennt man die σ_j auch die *elementarsymmetrischen Polynome.*

- Wunderbar! Aber können wir damit die Lösungen besser errechnen?

- Die Kunst des Gleichungslösens, o Herr, besteht darin, die *richtigen* symmetrischen Ausdrücke zu finden! Lass es uns zunächst an dem Dir vertrauten Fall $n = 2$ erklären; hier haben wir nur zwei elementarsymmetrische Polynome $\sigma_1 = x_1 + x_2 = -a_1$ und $\sigma_2 = x_1x_2 = a_2$. Die Lösungen x_1, x_2 können wir aus $f = x_1 + x_2$ und $r = x_1 - x_2$ berechnen. Leider ist r nicht symmetrisch, wohl aber r^2, und natürlich auch f; diese sind für $n = 2$ die "richtigen"

---

den Variablen $x_1, ...x_n$ invariant unter G sein sollen und damit als "bekannt" angesehen werden. Für $G = A_n$ ist $\nabla := \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ ein solches Polynom.

[7]) Jedes symmetrische Polynom f enthält einen Term der Form $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$ mit $k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n \geq 0$. Durch Abziehen eines Vielfachen von $\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}...\sigma_n^{k_n}$ können wir diesen beseitigen. Durch Wiederholung dieses Schrittes für das Differenzpolynom werden wir nacheinander alle Terme beseitigen (lexikographisch nach $(k_1, ..., k_n)$ geordnet) und f schließlich als Polynom in $\sigma_1, ..., \sigma_n$ darstellen.

symmetrischen Ausdrücke. Wir erhalten $f = -a_1$ und $r^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a_1^2 - 4a_2$. Daraus folgt die bekannte Lösungsformel $x_{1,2} = \frac{1}{2}(f \pm r) = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})$. Auch für $n = 3$ ...

- Halt! Ich habe Euch nicht hergerufen, damit Ihr mir hinlänglich bekannte Formeln wiederholt! Gebt endlich über die Gleichung 5. Grades Bescheid!

- O Fürst, verzeihe unserem geringen Verstande, dass wir stets auf Altes zurückgreifen müssen, um Neues zu erklären. Der Fall $n = 5$ ist im Detail zwar wesentlich komplizierter, aber in vieler Hinsicht analog zum Fall $n = 3$. Was wir in der einfachen Situation gelernt haben, steht uns dann in dem schwierigeren Fall bereits zur Verfügung. Dazu benötigen wir aber mehr als eine Formel: Wir müssen verstehen, wie sie zustande kommt. Unser Gebieter möge uns daher gnädig erlauben, auch den Fall $n = 3$ noch kurz auszuführen. Wir benötigen dazu als weiteren Zwischenschritt sogenannte *Resolventen*, aus denen wir die Lösungen leicht berechnen können und die ihrerseits zu symmetrischen Ausdrücken umgeformt werden können. Für $n = 2$ war es der Ausdruck $r = x_1 - x_2$, der erst durch Quadrieren zu einem symmetrischen Polynom wurde. Bei $n = 3$ verwenden wir drei ganz ähnlich gebildete Ausdrucke, nämlich die sogenannten *Lagrangeschen Resolventen* (sie wurden vor über 200 Jahren von J. L. Lagrange eingeführt). Wir benötigen dazu die komplexe Zahl $\zeta = \cos 120^o + i \sin 120^o = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, deren dritte Potenz Eins ist: $\zeta^3 = 1$. Die Resolventen von Lagrange sind dann die Ausdrücke

$$r_k(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \zeta^k x_2 + \zeta^{2k} x_3$$

für $k = 1, 2, 3$. Aus r_1, r_2, r_3 können wir die Lösungen x_1, x_2, x_3 leicht berechnen. Andererseits lassen sich daraus symmetrische Ausdrücke bilden: Es gilt nämlich

$$r_k(x_3, x_1, x_2) = x_3 + \zeta^k x_1 + \zeta^{2k} x_2 = \zeta^k r_k(x_1, x_2, x_3);$$

wegen $\zeta^{3k} = 1$ ist also die dritte Potenz dieser Ausdrücke,

$$f_k(x_1, x_2, x_3) := r_k(x_1, x_2, x_3)^3$$

invariant unter den zyklischen Permutationen $1 \to 3 \to 2 \to 1$ und (ebenso) $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Also lässt sich f_k aus den Koeffizienten a_1, a_2, a_3 berechnen.[6]) Durch Ziehen der dritten Wurzel gewinnen wir die r_k zurück und daraus die gesuchten Lösungen.[9])

- Kommt Ihr nun endlich zu $n = 5$?

---

[6]) Die Polynome f_k sind allerdings nur unter den *geraden* Permutationen invariant. Ein solches A_n-invariantes Polynom f lässt sich aber ebenfalls aus den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ berechnen, wenn man noch zusätzlich Quadratwurzeln verwendet. Man betrachtet dazu die Zerlegung $f = \frac{f+f^*}{2} + \frac{f-f^*}{2}$, wobei f^* aus f durch Vertauschen zweier Argumente, z.B. x_1 und x_2 entsteht. Der erste Summand $\frac{f+f^*}{2}$ ist symmetrisch und somit durch die σ_j oder a_j darstellbar. Der zweite ist *alternierend*, d.h. er wechselt bei Vertauschung zweier Argumente sein Vorzeichen; sein Quadrat ist also wieder symmetrisch.

[9]) In der letzten Nacht werden wir dieses Lösungsverfahren genauer beschreiben.

- Für die Gleichung 5. Grades lässt sich dieses Verfahren leider nicht einfach übernehmen, denn die A_5 hat 60 Elemente und besteht damit keineswegs nur aus den 5 zyklischen Permutationen. Aber ein analoges Verfahren führt zum Ziel, wobei die dritte Potenz (vom Grad 3) durch unsere Ikosaederüberlagerung q zu ersetzen ist, die bekanntlich vom Grad 60 ist; die Grade 3 und 60 entsprechen der Anzahl der Elemente von A_3 und A_5. Die große Frage ist natürlich: Welche Funktionen werden die Rolle der Lagrangeschen Resolventen r_k übernehmen? Um sie zu finden, müssen wir abermals in die Geometrie zurückkehren und uns mit Flächen beschäftigen, die zwei Scharen von Geraden tragen, obwohl sie keine Ebenen sind! Jedoch bemerken wir soeben den Anbruch des Tages; so verfahre denn mit uns nach Deinem Belieben, o weiser Herrscher!

Wir haben das in der vorigen Nacht gegebenes Versprechen, die Symmetriebetrachtung würde auf ein konkretes Lösungsverfahren für die Gleichung 5. Grades führen, noch nicht einlösen können; zu viel ist an Vorbereitung zu leisten. Aber unser Zuhörer ist nicht sehr geduldig; wir hoffen deshalb, ihn zunächst mit einer Analogie vertrösten zu können, die bereits verschiedene Aspekte des noch zu schildernden Verfahrens wiederspiegelt. Statt der fertigen Brücke zeigen wir ihm einstweilen ein Modell, nämlich die Lösung der Gleichung 3. Grades.

Die fünfte Nacht: Die Ikosaederresolventen

- Ich gewähre Euch noch eine letzte Chance, mich über die Lösung der Gleichung 5. Grades zu unterrichten. Aber bedenkt, dass Euer Leben an einem seidenen Faden hängt!

- Wie könnten wir dies vergessen! Lass uns noch einmal die vor uns liegende Aufgabe nennen: Wir suchen gewisse, aus den Lösungen $x_1, ..., x_5$ gebildete Ausdrücke $f(x_1, ..., x_5)$, deren Wert ungeändert bleibt, wenn dieselben Zahlen $x_1, ..., x_5$ in anderer, gerade permutierter Reihenfolge eingesetzt werden; solche A_5-invarianten Funktionen lassen sich allein durch Kenntnis der Koeffizienten $a_1, ..., a_5$ berechnen, wie wir in der dritten Nacht gesehen haben. Gleichzeitig müssen sie aber so gewählt werden, dass wir aus ihnen die Zahlen $x_1, ..., x_5$ berechnen können.

- Warum nennt Ihr mir nicht einfach diese Ausdrücke?

- Das soll sogleich geschehen. Die Funktionen f werden mit der Ikosaederüberlagerung $q(x)$ gebildet, über die wir in der zweiten Nacht sprachen. Sie hat ja bereits die Eigenschaft, dass ihre Werte ungeändert bleiben, wenn wir auf ihre Variable eine Ikosaederdrehung anwenden, und wir sahen auch schon, dass die Gruppe der Ikosaederdrehungen mit der Gruppe A_5 identisch ist. Es gibt allerdings noch ein großes Problem: q ist eine Funktion von nur *einer* Variablen x, wir suchen aber Funktionen f von fünf Variablen! Dieses Stück der Brücke fehlt uns noch: Wir müssen irgendwie die fünf Zahlen $x_1, ..., x_5$ in eine einzige Zahl x verwandeln, und zwar so, dass dabei jeder geraden Permutation von $x_1, ..., x_5$ eine Ikosaederdrehung von x entspricht! Die Ausdrücke $x = r(x_1, ..., x_5)$, die dies bewerkstelligen, werden die Rolle der Lagrangeschen Resolventen übernehmen, und sie gilt es zu finden.

- Das erscheint mir allerdings schwierig!

- Du hast recht, es ist der schwierigste Teil der ganzen Aufgabe. Wir werden zunächst für jede Gleichung $(1)_5$ vorab die Zahl der zu bestimmenden Lösungen x_i von fünf auf zwei vermindern und danach eine mächtige Verbündete zu Hilfe rufen: die Geometrie!

- "Aus Eins mach Zehn, und Zwei lass gehn, und Drei mach gleich, so bist du reich ..." Ist das nicht Euer Hexen-Einmaleins?

- Wir werden aber keinen tönenden Kessel benötigen, und die Geometrie ist keine Hexe, sondern eine gute Fee, wie Du sehen wirst. Aus fünf machen wir vier, weil es uns genügt, die Lösungen $x_1, ..., x_5$ von $(1)_5$ nur *bis auf einen beliebigen gemeinsamen Faktor* t zu bestimmen. Kennen wir nämlich die Zahlen $\tilde{x}_i = tx_i$, aber noch nicht x_i selber, so ermitteln wir den fehlenden Faktor $t = t^4/t^3$ aus den Gleichungen

$$\sigma_4(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_5) = t^4\sigma_4(x_1, ..., x_5) = t^4 a_4,$$
$$\sigma_3(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_5) = t^3\sigma_3(x_1, ..., x_5) = -t^3 a_3.$$

Mit anderen Worten, wir suchen nicht die Zahlen $x_1, ..., x_5$ selber, sondern nur ihre Quotienten oder Verhältnisse $x_1 : x_2 : ... : x_5$.[10]) Einer der Zahlen $x_1, ..., x_5$ dürfen wir daher den Wert Eins geben und haben somit nicht mehr fünf, sondern nur noch vier Zahlen zu bestimmen.

- Und wie weiter? "Verlier die Vier"?

- Goethes Hexe hilft da nicht, aber Du selber hast uns den nächsten Schritt gelehrt! Wie hast Du doch in der ersten Nacht die quadratische Gleichung $x^2 - x = 1$ gelöst?

- Ich fügte auf beiden Seiten $\frac{1}{4}$ hinzu und erhielt $(x - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$.

- Anstelle der gesuchten Zahl x hast Du also zunächst die Zahl $\tilde{x} = x - \frac{1}{2}$ bestimmt. Für die allgemeine quadratische Gleichung $x^2 + a_1x + a_2 = 0$ würdest Du entsprechend zunächst die Zahl $\tilde{x} = x + \frac{a_1}{2}$ bestimmen, denn diese erfüllt die einfachere Gleichung $\tilde{x}^2 + \tilde{a}_2 = 0$ mit $\tilde{a}_2 := a_2 - \frac{a_1^2}{4}$. Derselbe Trick klappt für die Gleichung $(1)_n$ mit $\tilde{x} = x + \frac{a_1}{n}$ (d.h. $x = \tilde{x} - \frac{a_1}{n}$): Ersetzen wir die Variable x in $(1)_n$ überall durch $\tilde{x} - \frac{a_1}{n}$, so gewinnen wir eine Gleichung für $\tilde{x}$ ohne a_1-Term; haben wir diese gelöst, so erhalten wir auch die Lösugen x der ursprünglichen Gleichung. Es genügt deshalb, die Gleichung $(1)_5$ mit $a_1 = 0$ betrachten.

- Und dadurch wird die Anzahl der Lösungen geringer?

- Nein, keineswegs; die Gleichung besitzt immer noch fünf Lösungen. Doch bitte erinnere Dich, dass $-a_1 = \sigma_1$ stets die Summe der Lösungen x_i ist; wenn a_1 verschwindet, erhalten wir somit

$$x_1 + ... + x_5 = 0, \tag{5}$$

und eine der fünf Lösungen kann aus den übrigen vier berechnet werden. Zusammen mit dem ersten Schritt haben wir die Anzahl der noch zu bestimmenden Zahlen von fünf auf drei reduziert. Geometrisch ausgedrückt bilden die Quintetts $(x_1 : ... : x_5)$, die (5) erfüllen, nicht mehr einen 5-dimensionalen, sondern nur noch einen 3-dimensionalen Raum[11])

- Das geht ja gut voran! Am Ende bleibt wohl gar nichts mehr übrig?

---

[10]) Eigentlich arbeiten wir also nicht im $\mathbb{C}^5$, sondern im 4-dimensionalen *Projektiven Raum* $\mathbb{C}P^4$.

[11]) Genauer: den 3-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{C}P^3$

- Ganz so weit geht die Hexerei nicht, aber immerhin können wir auf ganz ähnliche Weise auch noch a_2 loswerden, wie E.W. Tschirnhaus uns schon vor 300 Jahren gelehrt hat.[12]) Es genügt uns daher, die Gleichung $(1)_5$ mit $a_1 = a_2 = 0$ zu lösen; sie wird *Hauptgleichung* genannt. Ihre Lösungen $x_1, ..., x_5$ erfüllen nicht nur (5), sondern wegen $a_2 = 0$ auch noch die Beziehung

$$x_1^2 + ... + x_5^2 = 0, \tag{6}$$

mit deren Hilfe wir eine weitere Variable bestimmen können. Und nun rufen wir die Geometrie zu Hilfe: Wir können nämlich die Menge H derjenigen Quintetts $x_1 : ... : x_5$, die gleichzeitig (5) und (6) erfüllen, als eine *Fläche* in dem eben beschriebenen dreidimensionalen Raum deuten.

- Eine Fläche? Eine Zahl, die die Größe eines Areals angibt, z.B. die Größe meiner Gärten?

- Nein, das ist hier nicht gemeint. Wir meinen mit dem Wort "Fläche" keine Zahl, sondern einen räumlichen Bereich, der nur in zwei Richtungen ausgedehnt ist wie ein sehr dünnes Blatt oder wie die Begrenzungsfläche eines Körpers, etwa einer Kugel. Eine Fläche wird mathematisch durch eine Gleichung zwischen den drei Raumkoordinaten beschrieben, so wie eine Kurve durch eine Gleichung zwischen den zwei Koordinaten der Ebene gegeben wird, z.B. die Parabel $y = x^2$. In unserem Fall ist dies die quadratische Gleichung (6). Allerdings kommen in dieser Gleichung nicht drei, sondern fünf Koordinaten vor, aber wir dürfen ja eine davon gleich Eins setzen und eine zweite wegen (5) durch die negative Summe der übrigen ersetzen.

Die Geometrie kann uns nun eine wichtige Eigenschaft dieser Fläche H lehren: Obwohl sie nicht eben ist, verlaufen auf ihr viele Geraden, durch jeden ihrer Punkte genau zwei. Solche Flächen sind Dir vertraut: Du kennst ihre Gestalt von Sanduhren, Kelchen und Blumensträußen (Fig. 6).

- (Gähnend) Ich weiß, dass Ihr die Geometrie verehrt. Aber wie kann sie uns bei der Lösung unserer Gleichung helfen? Es gilt doch zu rechnen, nicht zu schauen!

- Blindes Rechnen hat uns mehrere Jahrhunderte lang nicht vorangebracht! Aber die zwei Geraden durch jeden Punkt von H geben uns genau, was wir benötigen. Geruhe Dich zu erinnern: Wir suchen Funktionen ("Resolventen") $r(x_1, ..., x_5)$, deren Werte einer Ikosaederdrehung unterworfen werden, wenn wir die Variablen $x_1, ..., x_5$ gerade permutieren, und wir dürfen annehmen, dass sich der Punkt $(x_1 : ... : x_5)$ bereits auf der Fläche H befindet. Die gesuchten Resolventen werden die Positionen dieses Punktes auf den beiden Geraden sein! Um dies zu präzisieren, benötigen wir allerdings doch wieder die Sprache

---

[12]) Sind x_i die Lösungen der Gleichung $(1)_n$ mit $a_1 = 0$, so setzen wir $\tilde{x}_i := t \cdot x_i + x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_j x_j^2 = t \cdot x_i + x_i^2 + \frac{2a_2}{n}$. Aus $\sum_j x_j = 0$ folgt $\sum_j \tilde{x}_j = 0$, und die komplexe Zahl t wird so gewählt, dass zusätzlich $\sum_j \tilde{x}_j^2 = 0$ gilt; dazu ist eine quadratische Gleichung für t zu lösen, deren Koeffizienten symmetrische Polynome in den x_i und also durch die a_i ausdrückbar sind. Die Koeffizienten $\tilde{a}_i$ der Gleichung $(\tilde{x} - \tilde{x}_1) \cdot ... \cdot (\tilde{x} - \tilde{x}_n) = 0$ mit den Lösungen $\tilde{x}_i$ sind ebenfalls symmetrische Polynome in den x_i und daher bekannt, nämlich durch die a_i ausdrückbar; insbesondere gilt $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0$. Aus $\tilde{x}_i$ erhalten wir die eigentlich gesuchten x_i durch Lösen der quadratischen Gleichung $x_i^2 + tx_i + \frac{2a_2}{n} = \tilde{x}_i$.

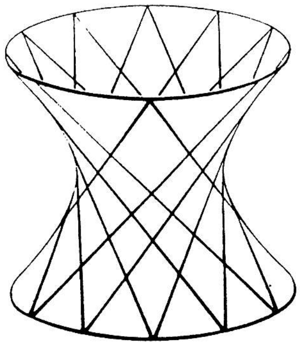

Fig. 6. Hyperboloid

der Algebra, darin stimmen wir Dir zu. Wählen wir auf geschickte Weise neue Koordinaten λ, μ, ν in unserem 3-dimensionalen Raum, so geht (6) über in eine viel einfachere Gleichung (vgl. Fig. 7): [13])

$$\nu = \lambda \cdot \mu. \tag{6'}$$

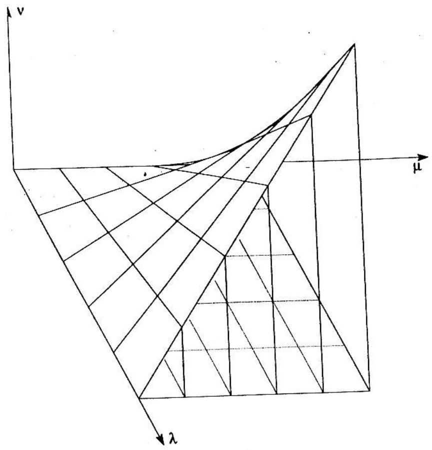

Fig. 7. Produktfläche

In diesen Koordinaten ist leicht zu sehen, dass durch jeden Punkt $(x_1 : ... : x_5) = (\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ von H zwei ganz auf H verlaufende Geraden gehen. Es sind dies die "λ-Gerade"

[13]) Für $k = 1, ..., 5$ setzen wir zunächst $y_k = \sum_j \epsilon^{kj} x_j$ mit $\epsilon := e^{2\pi i/5} = \cos 72^o + i \sin 72^o$. (Die y_k sind genauso gebildet wie die r_k im Fall $n = 3$; die dritte Einheitswurzel ζ wird hier durch die fünfte Einheitswurzel ϵ ersetzt.) In diesen neuen Koordinaten gehen die Gleichung (5) und (6) über in die Gleichungen $y_5 = 0$ und $y_1 y_4 + y_2 y_3 = 0$. Eine der Koordinaten, etwa y_4, dürfen wir gleich Eins setzen; wählen wir $y_1 = \nu$, $y_2 = -\mu$, $y_3 = \lambda$ und $y_4 = 1$, so erhalten wir (6′).

$\lambda = \lambda_0$, auf der die Koordinate λ den konstanten Wert λ_0 beibehält, und die "μ-Gerade" $\mu = \mu_0$, auf der die μ-Koordinate konstant gleich μ_0 ist. Die gesuchten Resolventen r werden die Funktionen r_λ und r_μ sein, die jedem Punkt $(x_1 : ... : x_5)$ der Fläche H seine λ-Koordinate bzw. seine μ-Koordinate zuordnen.

- Und wie kann ich damit die Gleichung 5. Grades lösen?

- Wir müssen erst noch zeigen, dass sich die Ausdrücke $r_\lambda(x_1, ..., x_5)$ und $r_\mu(x_1, ..., x_5)$ durch eine Ikosaederdrehung transformieren, wenn wir $x_1, ..., x_5$ einer geraden Permutation unterwerfen. Dann bleiben $f_\lambda := q(r_\lambda(x_1, ..., x_5))$ und $f_\mu := q(r_\mu(x_1, ..., x_5))$ bei geraden Permutationen unverändert und lassen sich daher durch die Koeffizienten unserer Gleichung, a_3, a_4, a_5, ausdrücken, sie sind uns also bekannt. Durch Umkehrung von q erhalten wir die Zahlen λ, μ, ν, nämlich $\lambda = q^{-1}(f_\lambda)$ und $\mu = q^{-1}(f_\mu)$ sowie $\nu = \lambda\mu$. Durch Rücktransformation in die alten Koordinaten finden wir also das gesuchte Wurzelquintett $(x_1 : ... : x_5)$.

- Ein weiter Weg, den Ihr da zurückgelegt habt! So hängt nun alles an diesen r_λ und r_μ?

- So ist es. Bitte erlaube uns noch zu sagen, warum diese Funktionen tatsächlich die Brücke zwischen den Ikosaederdrehungen und der Permutationsgruppe A_5 schlagen. Die Gleichungen (5) und (6) werden nicht verändert, wenn wir die $x_1, ..., x_5$ umnummerieren, also permutieren. Daher ist die Fläche H *invariant* unter Permutationen, d.h. wenn ein Punkt $(x_1 : ... : x_5)$ auf ihr liegt, so gilt das gleiche für alle 120 Punkte mit den gleichen Koordinaten in möglicherweise anderer Reihenfolge. Wir können daher jede Permutation als eine Art Drehung auffassen, bei der die Lage der Fläche H im Raum nicht verändert wird. Die Geraden auf H werden dabei mitgedreht; bei ungeraden Permutationen gehen λ-Geraden in μ-Geraden über, bei einer geraden Permutationen aber wird eine λ-Gerade $\lambda = \lambda_0$ wieder zu einer λ-Geraden $\lambda = \lambda_0'$ und ebenso werden μ-Geraden wieder zu μ-Geraden. Unter einer geraden Permutation π werden daher die λ- und die μ-Koordinate eines jeden Punktes $(x_1 : ... : x_5)$ auf H unabhängig voneinander verändert: $\lambda_0 \mapsto \lambda_0'$ und $\mu_0 \mapsto \mu_0'$ (Fig. 8).

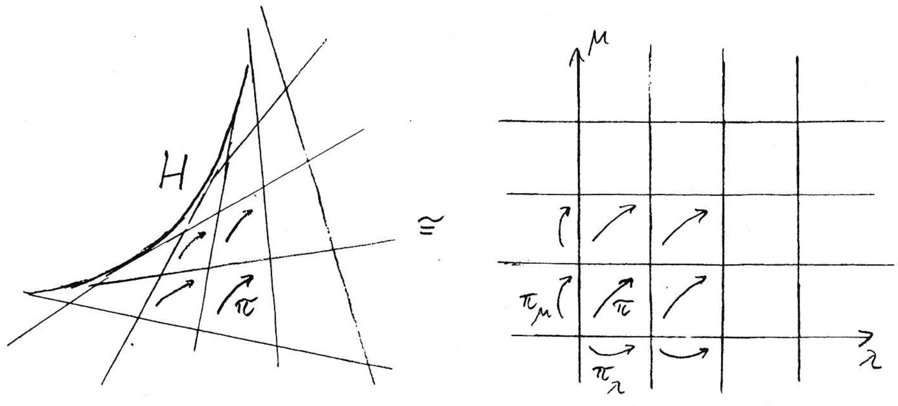

Fig. 8. A_5-Operation auf H

Wir erhalten somit aus π zwei (umkehrbar rationale, also gebrochen lineare) Transformationen π_λ und π_μ von $\hat{\mathbb{C}}$, und da die Gruppe A_5 identisch mit der Ikosaedergruppe ist, erstaunt es nicht sehr, dass diese eben die zur Permutation π gehörigen Ikosaederdrehungen sind.[14]) Damit werden die Werte der auf H definierten Funktionen $r_\lambda = \lambda$ und $r_\mu = \mu$ einer Ikosaederdrehung unterzogen, wenn ihre Argumente gerade permutiert werden, und folglich sind $f_\lambda = q(r_\lambda)$ und $f_\mu = q(r_\mu)$ invariant unter geraden Permutationen, was zu zeigen war.

Der Morgen graut, und wir sind am Ende unserer Geschichte. Verzeihe uns, o Sultan, dass wir uns nicht kürzer zu fassen vermochten. In der ersten Nacht hatten wir die Lösung nur angedeutet, der Bau der Brücke zwischen dem Problem und seiner Lösung blieb vorerst nur ein Plan. In den folgenden zwei Nächten sprachen wir über die Elemente der Lösungsmethode und errichteten gleichsam die Pfeiler der zu bauenden Brücke. In der vierten Nacht schließlich konnten wir Dir immerhin schon ein fertiges Modell präsentieren: die Lösung der Gleichung 3. Grades. Nun haben wir den Bau vollendet und nachgewiesen, dass sich jede Gleichung 5. Grades durch Anwenden der vier Grundrechenarten, Quadratwurzeln und Invertieren der Ikosaederüberlagerung q lösen lässt. Nicht Rechnungen haben uns zu diesem Ergebnis geführt, sondern die Geometrie, in erster Linie die Betrachtung der Symmetrie. Die Gleichung 5. Grades, das Ikosaeder, die Funktion q und die Lösungsfläche H mit ihren zwei Geradenscharen, sie alle haben dieselbe Symmetriegruppe A_5. Wie recht tun Deine Künstler daran, der Symmetrie eine so bedeutende Rolle zuzumessen!

Willst Du aber wissen, was noch nötig ist, um die Rechnung auch praktisch durchführen zu können, so leihe uns noch eine letzte Nacht Dein gnädiges Ohr.

Wir hatten in dieser Nacht die schwerste Aufgabe zu bewältigen, nämlich den Auflösungsprozess für die Gleichung 5. Grades wirklich anzugeben. Für die Gleichung 3. Grades hatten wir zuvor "Resolventen" $r(x_1, ..., x_3)$ gefunden, deren dritte Potenz $r(x_1, ..., x_3)^3$ invariant unter geraden Permutationen ist. Ähnlich haben wir jetzt für die Gleichung 5. Grades Resolventen $r(x_1, ..., x_5)$ gesucht, so dass nun $q(r(x_1, ..., x_5))$ unter geraden Permutationen unverändert bleibt. Um solche Ausdrücke r zu finden, mussten wir zuvor die Menge der zu behandelnden Gleichungen mit Hilfe der Tschirnhaus-Transformationen stark einschränken. Die möglichen Lösungsquintetts bilden dann eine Fläche, die von einem Geradennetz ganz überzogen ist, und Fläche wie Geradennetz sind invariant unter Permutationen. Die gesuchten Funktionen r sind nun die beiden Koordinaten dieses Geradennetzes. Man kann versuchen, die Konstruktion für beliebigen Grad n nachzuahmen; wir würden dann eine $n-3$-dimensionale "Fläche" im $n-2$-dimensionalen projektiven Raum erhalten, aber das Geradennetz finden wir nur im Fall $n = 5$; es gehört zur speziellen Geometrie dieser Situation. Das macht die Schönheit und gleichzeitig die Schwierigkeit aus, denn je spezieller die Situation wird, desto größere Aufmerksamkeit müssen wir ihr zuwenden.

[14]) Für die Rechnung vgl. [Es] sowie [K], S. 104. Die Tatsache folgt auch abstrakt aus der Darstellungstheorie der A_5 ([K], S. 268). Es gibt allerdings mehrere (bis auf innere Automorphismen genau zwei) Isomorphismen zwischen A_5 und der Ikosaedergruppe, und die zu π gehörigen λ- und μ-Transformationen sind in der Tat unterschiedlich ([Sl], S. 98).

Die letzte Nacht: Von der Idee zur Formel

In der nächsten Nacht entschuldigt sich Scheherban mit dringlicheren Aufgaben (natürlich kann unsere Kunst gegen die von Frau Scheherazade nicht lange bestehen) und schickt uns an seiner Stelle seinen Wesir und Schwiegervater, der sich zu unserer Freude als Kollege von uns vorstellt.

- Ich hatte das Glück, Euern Erzählungen im Nebengemach lauschen zu dürfen. Wie sehr bin ich Euch zu Dank verpflichtet, dass Ihr mir das Leben gerettet habt! So lässt sich die Gleichung 5. Grades, die uns so lange zum Narren gehalten hat, also auf wunderbarste Weise mit Hilfe des Ikosaeders lösen! Und doch ist mir noch nicht recht deutlich geworden, wie ich diese Rechnung wirklich durchführen soll.

- Das ist nicht verwunderlich, denn dazu sind in der Tat noch einige weitere Überlegungen nötig. Zwischen der Erkenntnis der Möglichkeit einer Rechnung und ihrer Ausführung liegt noch viel Arbeit.

- Könnt Ihr mich darüber belehren?

- Gern. Doch gestatte uns, dies zunächst an der Dir vertrauten Gleichung 3. Grades zu erläutern, über die wir in der vierten Nacht sprachen. Die Lösung geschah mit Hilfe der drei Funktionen $f_k = (r_k)^3$; sie sind A_3-invariant und daher durch die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 darstellbar. Aber wie lautet diese Darstellung? Dazu müssen wir das angedeutete Reduktionsverfahren (vgl. Anmerkungen 7 und 8 sowie [W], S. 100, 102, 191 ff) wirklich durchführen; es ist $r_3 = -a_1$, also $f_3 = (-a_1)^3$, und

$$\begin{aligned} f_{1/2} &= -a_1^3 - \frac{9}{2}a_1a_2 - \frac{27}{2}a_3 \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}\nabla, \\ \nabla^2 &= a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3 + 18a_1a_2a_3 - 27a_3^2. \end{aligned}$$

Die Lösungen sind dann (mit $\zeta = \cos 120^o + i \sin 120^o = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$3x_1 = r_1 + r_2 + r_3, \quad 3x_2 = \zeta^2 r_1 + \zeta r_2 + r_3, \quad 3x_3 = \zeta r_1 + \zeta^2 r_2 + r_3.$$

- Diese Formeln kommen mir sehr bekannt vor. Bei der Gleichung 5. Grades muss man vermutlich dasselbe mit den A_5-invarianten Ausdrücken $f_\lambda = q(r_\lambda)$ und $f_\mu = q(r_\mu)$ machen und diese durch a_3, a_4, a_5 darstellen?

- So ist es. Aber im Gegensatz zum Fall $n = 3$ stoßen wir hier auf neue Probleme. Zum Beispiel können wir das Reduktionsverfahren nur auf Polynome anwenden; f_λ und f_μ sind aber rationale Funktionen.

- Ist das denn ein großer Unterschied? Eine rationale Funktion ist doch ein Quotient zweier Polynome.

- Richtig. Genauer sind f_λ und f_μ Quotienten von Polynomen vom Grad 60 in fünf Variablen $x_1, .., x_5$. Aber Zähler- und Nennerpolynom sind nicht selbst invariant unter A_5, sondern eben nur ihr Quotient. Wir müssen den Bruch erst erweitern, um auch Zähler und Nenner invariant zu machen.

- Aber dann können wir doch auf die neuen Zähler- und Nennerpolynome das Reduktionsverfahren anwenden und so die gewünschte Formel erhalten?

- Im Prinzip ja. Allerdings wird ja der Grad durch das Erweitern erhöht, im ungünstigsten Fall bis auf 3600! Aber selbst bei Grad 60 gibt es schon mehr als 4000 Terme[15]) , die in dem Reduktionsverfahren alle nacheinander beseitigt werden müssen! Das übersteigt unsere Rechenmöglichkeiten.

- Oh weh! Dann bin ich gänzlich ratlos. Wir wissen zwar jetzt, mit welchen Hilfsmitteln wir die Rechnung durchführen *könnten*, aber wir schaffen es nicht!

- Fünf Variable sind eben zu viel; der Rechenaufwand wird riesig. Aber hierin deutet sich bereits die Lösung des Problems an, die unser Lehrmeister Felix Klein [K] (nach einer Idee von P. Gordan [G]) gegeben hat: Wir hatten ja schon in der fünften Nacht die fünf Variablen $x_1, ..., x_5$ auf zwei reduziert, λ und μ. Anstatt diese wiederum als Funktionen von $x_1, ..., x_5$ zu schreiben, wie wir es bisher gemacht haben, können wir lieber umgekehrt $x_1, ..., x_5$ und damit auch die Koeffizienten a_3, a_4, a_5 unserer Hauptgleichung als Funktionen von λ und μ ansehen.[16]) Jetzt kann man versuchen, Zähler und Nenner von $q(\lambda)$ und $q(\mu)$ durch $a_3(\lambda, \mu)$, $a_4(\lambda, \mu)$ und $a_5(\lambda, \mu)$ auszudrücken. Das gelingt tatsächlich, denn alle diese Funktionen sind invariant unter der Ikosaedergruppe, und Funktionen dieser Art gibt es nicht allzu viele. Das Verfahren ist dem frühern Reduktionsverfahren sehr ähnlich, doch mit viel weniger Rechenaufwand verbunden (vgl. [K], S. 199 ff sowie [Ba]).

- Aber stehen wir nicht wieder vor demselben Problem, dass zwar die rationale Funktion $q(\lambda)$ selbst invariant ist, aber nicht ihr Zähler- und Nennerpolynom?

- Ja, aber diesmal ist die Situation übersichtlich, denn wir haben ja Zähler und Nenner von q explizit bestimmt: Der Zähler besitzt dreifache Nullstellen in den Flächenmittelpunkten des Ikosaeders und der Nenner fünffache Nullstellen in den Eckpunkten. Eckpunkte und Flächenmittelpunkte werden aber durch Ikosaederdrehungen nur untereinander permutiert, deshalb sind Zähler und Nenner von q selbst i.W. invariant unter der Ikosaedergruppe.[17]) Wir könnten also Zähler und Nenner von q auf diese Weise durch a_3, a_4, a_5 ausdrücken. Der Rechenaufwand ist allerdings immer noch erheblich, wie unser Student W. Bauer gezeigt hat (cf. [Ba]), deshalb deutet Felix Klein diesen Weg nur an, geht ihn aber nicht wirklich!

- So gelingt also auch ihm keine Lösungsformel?

- Oh doch, aber er erhält sie auf einem etwas anderen Weg. Sein Verfahren ist rechnerisch einfacher, aber gedanklich schwieriger als das von uns beschriebene. Er parametrisiert die Hauptfläche H nicht wie wir durch die beiden Geradenparameter λ und μ, sondern viel raffinierter durch λ und eine neue Funktion η, die durch die Werte von gewissen invarianten Formen der 5 in das Ikosaeder einbeschriebenen Oktaeder gegeben wird (vgl. [Sl], S.99 und [K], S.103 und 191-194 mit den zugehörigen Kommentare sowie [Es]); diese Wertequintetts bilden die Lösungsquintetts fast aller Hauptgleichungen.[18]) Dadurch wird die Berechnung

---

[15]) Die Anzahl der möglichen Terme ist die Zahl der unterschiedlichen Zerlegungen der Zahl 60 in eine Summe aus fünf Summanden.

[16]) Aus den Formeln in Fußnote 13 folgt nämlich $x_j = \epsilon^{4j}\lambda\mu - \epsilon^{3j}\mu + \epsilon^{2j}\lambda + \epsilon^j$.

[17]) Um die Invarianz präzise zu machen, müssen wir Zähler und Nenner von q allerdings *homogenisieren*, nämlich nicht als inhomogene Polynome in *einer* Variablen, sondern als *homogene* Polynome ("*Formen*") in *zwei* Variablen auffassen, und zwar vom Grad 60. Aus dem Nenner $(\lambda^{11} + 11\lambda^6 - \lambda)^5$ wird dabei z.B. $(\lambda_1^{11}\lambda_2 + 11\lambda_1^6\lambda_2^6 - \lambda_1\lambda_2^{11})^5$.

[18]) Für jeden der fünf Oktaeder O_k $(k = 1, ..., 5)$ betrachten wir die Form w_k vom Grad 8

von $q(\lambda)$ mit Hilfe von a_3, a_4, a_5 noch einmal wesentlich vereinfacht, und außerdem braucht man die Umkehrung von q nur einmal zu berechnen, während wir λ und μ aus $q(\lambda)$ und $q(\mu)$ durch zweimalige Invertierung von q gewinnen.

- Wie kann man denn überhaupt die Umkehrung von q berechnen?

- Das kann auch auf mehrere Arten geschehen. Klein beschreibt ein Verfahren von H. A. Schwarz, bei dem die Umkehrungen von q als Quotienten von wohlbekannten Funktionen (Lösungen einer hypergeometrischen Differentialgleichung) berechnet werden (vgl. [K], S. 120-123, [S], S. 311, [Sl], S. 81-87 sowie [R]).

- Erlaubt mir eine letzte Frage: Kann man auf ähnlichem Wege auch Gleichungen von noch höherem Grad n lösen?

- Verallgemeinerbar ist unsere Grundidee: Um die Gleichung zu lösen, müssen wir zu den Koeffizienten $(a_1, ..., a_n)$ die Lösungen $(x_1, ..., x_n)$ berechnen. Viel einfacher ist die Umkehrung, also die (rationale) Abbildung Q, die jedem Satz von Lösungen $(x_1, ..., x_n)$ die Koeffizienten der zugehörigen Gleichung $(a_1, ..., a_n)$ zuordnet. Diese Abbildung ist invariant unter der Permutationsgruppe A_n, denn es kommt nicht auf die Reihenfolge an, in der die Lösungen angeordnet sind.[19]) Die Aufgabe ist, Q zu invertieren; dann erhalten wir aus den Koeffizienten die Lösungen. Stattdessen haben wir eine ganz andere A_n-invariante rationale Abbildung q betrachtet, die auf einem viel kleineren Bereich (in unserem Fall $\hat{\mathbb{C}}$) definiert ist, der aber durch dieselbe Gruppe A_n transformiert wird (hier durch die Ikosaederdrehungen). Der Übergang von Q zu q geschah durch eine rationale Abbildung r (*Resolvente*), die die A_n-Transformationen auf den beiden Bereichen ineinander überführte (d.h. eine *äquivariante* Abbildung). Dann brauchen wir nur noch q anstelle von Q zu invertieren, um die Lösungen $x_1, ..., x_n$ zu gewinnen. Dies ist ganz allgemein richtig und leicht zu einsehen, aber es ist schwer, geeignete Abbildungen q und r wirklich zu finden (vgl. [K] ab S. 311 sowie [Br]).

- Und wie lauten nun die Lösungen der Gleichung 5. Grades zu guter Letzt?

- Wegen der Tschirnhaustransformationen brauchen wir ja nur die Hauptgleichung zu betrachten; diese schreiben wir in der Form

$$x^5 + 5ax^2 + 5bx + c = 0$$

Die Lösungen x_j, $j = 1, ...5$ werden nun mit Hilfe der Umkehrung der Ikosaederüberlagerung $q(x) = -\frac{(x^{20}-228x^{15}+494x^{10}+228x^5+1)^3}{1728\cdot(x^{11}+11x^6-x)^5}$ folgendermaßen berechnet (vgl. [K], S. 193):

---

mit Nullstellen auf den 8 Flächenmittelpunkten des Oktaeders; sie ist invariant unter der Drehgruppe des Oktaeders O_k. Die Summe dieser Formen, $\sum_k w_k$, sowie ihre Quadratsumme $\sum_k w_k^2$ sind dann invariant unter der vollen Ikosaedergruppe. Deshalb müssen sie identisch verschwinden, denn sonst hätten sie Grad 8 und 16 und damit eine Nullstellenmenge entsprechender Größe, die invariant unter allen Ikosaederdrehungen wäre; eine solche Menge gibt es nicht. Deshalb liegen alle Wertequintetts $(w_1(\lambda_1, \lambda_2) : ... : w_5(\lambda_1, \lambda_2))$ auf der durch (5) und (6) definierten Fläche H. Ganz Entsprechendes gilt für die Oktaederformen v_k vom Grad 14 mit Nullstellen auf den 8 Flächenmittelpunkten und den 6 Eckpunkten von O_k sowie für alle Linearkombinationen $u_k = \eta_1 v_k + \eta_2 w_k$. Die Menge der Wertequintetts aller u_k überdeckt ganz H bis auf eine kleine Ausnahmemenge.

[19]) Wird A_n durch eine kleinere Galoisgruppe $G \subset A_n$ ersetzt, so müssen $a_1, ..., a_n$ durch Erzeugende der G-invarianten Polynome ersetzt werden; vgl. Anm. 4.

$$
\begin{aligned}
x_j &= t\tilde{x}_j \\
t &= -\frac{c}{5b}\sum_j \frac{1}{\tilde{x}_j} \\
\tilde{x}_j &= \epsilon^{4j}\lambda\mu - \epsilon^{3j}\mu + \epsilon^{2j}\lambda + \epsilon^j \\
\epsilon &= e^{2\pi i/5} = \cos 72^o + i\sin 72^o \\
\lambda &= q^{-1}(z_+), \quad \mu = q^{-1}(z_-) \\
z_\pm &= \frac{48am^2 - 12bm - c)^3}{64a^2(12(ac-b^2)m - bc)} \\
m &= \frac{(11a^3b + 2b^2c - ac^2) \pm a\nabla}{24(a^4 - b^3 + abc)} \\
\nabla^2 &= 108a^5c - 135a^4b^2 + 90a^2bc^2 - 320ab^3c + 256b^5 + c^4
\end{aligned}
$$

Wir haben damit allerdings zuletzt mehr Zahlen-Quintetts erhalten, als es Lösungen gibt, denn z_+ und z_- haben beide 60 q-Urbilder. Deshalb ist eine Probe notwendig: die so gewonnenen $x_1, ..., x_5$ sind genau dann Lösungen, wenn zusätzlich

$$
x_1x_2x_3x_4x_5 = -c, \quad \sum_j \frac{1}{x_j} = -\frac{5b}{c}, \quad \sum x_j^3 = -15a.
$$

Literatur

[Am] Amberger, Andreas: *Ebene Muster und ihre Symmetriegruppen*, Staatsexamensarbeit Augsburg 1999

[Ba] Bauer, W.: *Eliminationsverfahren bei $\hat{A}_5$-invarianten Polnomen.* Numerik-Praktikum Augsburg 1998

[B] M. Barrucand, A. Bednorz: *Maurische Architektur in Andalusien*, Benedikt Taschen Verlag Köln, o.J.

[Br] Brauer, R.: *Über die Kleinsche Theorie der algebraischen Gleichungen*, Math. Ann. **110**, 473 - 500 (1934)

[En] Enzensberger, H.M.: *Zugbrücke außer Betrieb*, Peters, 1998

[Es] Eschenburg, J.-H.: *Das Ikosaeder und die Gleichungen 5. Grades nach Felix Klein.* Seminarausarbeitung, Augsburg 1997

[G] Gordan, P.: *Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, Math. Ann. **13**, 375 - 404 (1878)

[K] Klein, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, neu herausgegeben und kommentiert von P. Slodowy, Birkhäuser 1993

[R] Riesenbeck, E.: *Die hypergeometrischen Differentialgleichungen mit endlicher Monodromie.* Staatsexamensarbeit Augsburg 1999

[RG] Ruf, U., Gallin, P.: *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik*, Bd. 1, Kallmeyer, Seelze-Velber 1998

[S] Schwarz, H.A.: *Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt*, J. Reine u. Angew. Math. **75**, 292 - 335 (1873)

[Sl] Slodowy, P.: *Das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades*, in: Mathematische Miniaturen 3, Arithmetik und Geometrie, Birkhäuser 1986

[T] *Tausendundeine Nacht.* R. Löwit, Wiesbaden o.J.

[W] van der Waerden, B.L.: *Algebra I*, 7. Auflage, Springer 1968

Institut für Mathematik, Universität Augsburg, 86135 Augsburg