2. *Antwort auf eine Abhandlung M. v. Laues „Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie"; von A. Einstein.*

In der zitierten Arbeit bringt Laue die mathematische Grundlage der Statistik der Strahlung in eine Form, die an Prägnanz und Schönheit nichts zu wünschen übrigläßt. Was aber die Anwendung jener Grundlage auf die Strahlungstheorie anbelangt, so scheint er mir einem bedenklichen Irrtume zum Opfer gefallen zu sein, der dringend Berichtigung fordert. Wenn Laues Behauptung, daß die Koeffizienten der Fourierentwicklung der bei natürlicher Strahlung auftretenden örtlichen Schwingung nicht voneinander statistisch unabhängig zu sein brauchten, berechtigt wäre, böte sich wirklich ein höchst aussichtsreicher Weg zur Überwindung der Schwierigkeiten dar, welche in der theoretischen Unverdaulichkeit aller Gesetze besteht, in denen das Plancksche „h" eine Rolle spielt. Dies war eben der Grund, der mich vor fünf Jahren veranlaßte, in einer mit L. Hopf zusammen publizierten Arbeit diese Frage näher zu prüfen.

Das Resultat jener in ihrer Durchführung nicht ganz einwandfreien Arbeit, wird von Laue als richtige Konsequenz der zugrunde gelegten Voraussetzungen anerkannt. Aber Laue bestreitet die Zulässigkeit der Grundvoraussetzung, die sich so formulieren läßt:

Wenn ich dadurch eine vollkommen ungeordnete Strahlung (statistisch unabhängige Fourierkoeffizienten) erhalte daß ich unendlich viele vollkommen gegebene, ganz miteinander übereinstimmende Strahlungen derart superponiere, daß bei dieser Superposition die Gesamtphasen dieser superponierten Strahlungen zufällig gewählt werden, so muß die natürliche Strahlung erst recht statistisch ungeordnet sein.

Diese Grundvoraussetzung schien mir damals evident. Der Umstand aber, daß sie von einem so erfahrenen Fachmann, wie Laue, nicht geteilt wird, beweist das Gegenteil. Ich will deshalb im folgenden einen Beweis geben, der von einer derartigen Voraussetzung frei ist und — wie ich hoffe — unwiderleglich dartut, daß unsere Undulationstheorie die statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten unbedingt fordert. Bevor ich diesen Beweis beginne, will ich aber zeigen, warum die in den Teilen II und III der Laueschen Abhandlung gegebene Betrachtung nach meiner Ansicht nicht beweisend ist.

Laue betrachtet eine Strahlung, die durch eine große Anzahl unregelmäßig über eine Schicht von der Dicke $c\tau$ verteilter Resonatoren senkrecht zu dieser Schicht emittiert wird. Im Teile II seiner Abhandlung nimmt er an, daß alle diese Resonatoren gleichzeitig und nach demselben Gesetze schwingen; im Teile III, daß die Schwingungen aller Resonatoren durch dasselbe, als gegeben zu denkende statistische Gesetz beherrscht seien. In beiden Fällen ergibt sich nicht die statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten der Entwicklung für die resultierende Strahlung. Hieraus darf aber nach meiner Meinung keineswegs die Zulässigkeit der Hypothese gefolgert werden, daß auch *bei der natürlichen Strahlung* jene Unabhängigkeit nicht vorhanden sei. Denn es ist doch gar nicht gesagt, daß der Grad von Unordnung, welchen jene ungeordnete Verteilung der Resonatoren über die Schicht von der Dicke $c\tau$ mit sich bringt, derselbe sei wie bei der natürlichen Strahlung.

Dieser Verdacht erhebt sich um so dringender, als nach Laues rechnerischen Ergebnissen der Grad der statistischen Abhängigkeit zweier durch die Indizes p und p' charakterisierten Glieder der Entwicklung für die resultierende Strahlung wesentlich durch den Wert

$$\frac{\pi(p-p')\tau}{T}$$

bedingt werde, d. h. *durch eine von der Schichtdicke abhängige Größe*, während doch eine derartige statistische Abhängigkeit bei der natürlichen Strahlung — falls eine solche vorhanden wäre — nichts zu tun haben dürfte mit der besonderen Erzeugungsart der betrachteten Strahlung.

Nach meiner Ansicht ist daher keiner der von Laue betrachteten Fälle der natürlichen Strahlung bezüglichen

Unordnung äquivalent, so daß aus seinen Ergebnissen über die natürliche Strahlung nichts gefolgert werden kann. Ich halte vielmehr meine frühere Behauptung aufrecht und suche dieselbe im folgenden durch einen neuen Beweis zu stützen, indem ich mich der von Laue in seiner Arbeit dargelegten Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bediene.

§ 1. Statistische Eigenschaften einer Strahlung, die durch Superposition unendlich vieler, voneinander unabhängig erzeugter Strahlungen entstanden ist.

Jede der betrachteten Teilstrahlungen sei durch eine Fouriersche Entwicklung von der Form

$$\sum_n a_n^{(\nu)} \cos 2\pi n \frac{t}{T} + b_n^{(\nu)} \sin 2\pi n \frac{t}{T} \tag{1}$$

für das Zeitintervall 0 bis T dargestellt, wobei die Koeffizienten dem Wahrscheinlichkeitsgesetz

$$d W = f^{(\nu)}(a_1^{(\nu)} \dots a_z^{(\nu)} \dots, \; b_1^{(\nu)} \dots b_z^{(\nu)}) \; d a_1^{(\nu)} \dots d b_z^{(\nu)} \dots \tag{2}$$

genügen sollen, welches Gesetz für jedes (ν), d. h. für jede der betrachteten Teilstrahlungen ein besonderes sein kann. Das Gesetz sei ferner ein solches, daß

$$\left\{\begin{aligned} \overline{a_n^{\,\nu}} &= \int a_n^{\,\nu} f^{(\nu)} \, d a_1^{(\nu)} \dots d b_z^{(\nu)} = 0 \\ \overline{b_n^{\,\nu}} &= \int b_n^{\,\nu} f^{(\nu)} \, d a_1^{(\nu)} \dots d b_z^{(\nu)} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Die resultierende Strahlung ist für das Zeitintervall 0 bis T durch die Entwicklung

$$\left\{\begin{aligned} & \sum_n A_n \cos 2\pi n \frac{t}{T} + B_n \sin 2\pi n \frac{t}{T} \\ = & \sum_\nu \sum_n \left(a_n^{(\nu)} \cos 2\pi n \frac{t}{T} + b_n^{(\nu)} \sin 2\pi n \frac{t}{T} \right) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

gegeben, woraus die Gültigkeit der Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \sum_\nu a_n^{(\nu)} \\ B_n &= \sum_\nu b_n^{(\nu)} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

hervorgeht. Welches statistische Gesetz folgt für die Fourierkoeffizienten $A_1 \dots B_z$?

Aus einer Betrachtung, die der im Teile I der Laueschen Arbeit durchgeführten ganz analog ist, findet man, daß das gesuchte statistische Gesetz das folgende ist:

$$dW = \textbf{konst.}\, e^{-\sum\limits_{mn}(\alpha_{mn} A_m A_n + \beta_{mn} B_m B_n + 2\gamma_{mn} A_m B_n)} \, dA_1 \ldots dB_z\,. \tag{6}$$

Hieraus ersieht man, daß durch Superposition unendlich vieler Teilstrahlungen die statistische Unabhängigkeit der Fourier-Koeffizienten noch keineswegs garantiert wird. Wohl aber gestattet das Gesetz (6) die Frage nach der statistischen Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten auf eine einfachere Frage zu reduzieren. Jene statistische Unabhängigkeit wird nämlich dann und nur dann erfüllt sein, wenn im Exponenten der Exponentialfunktion nur die Quadrate der A_m und B_m, aber keine Produkte dieser Größen auftreten; d. h. es muß sein:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_{mn} = \beta_{mn} &= 0 \quad \text{für } m \neq n \\ \gamma_{mn} &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Es ist ferner wegen (3) und (5) klar, daß im Falle statistischer Unabhängigkeit die Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} \overline{A_m A_n} = \overline{B_m B_n} &= 0 \quad \text{für } m \neq n \\ \overline{A_m B_n} &= 0 \end{aligned}\right. \tag{7a}$$

bestehen müssen. Da die Zahl der Bedingungen (7a) gleich ist der Zahl der Bedingungen (7), und alle Bedingungen (7a) voneinander unabhängig sind, so folgt, daß im Falle der Gültigkeit von (6) die Bedingungen (7a) *hinreichend* sind für die statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten.

Wir gelangen daher zu folgendem vorläufigen Ergebnis: Da wir von der natürlichen Strahlung annehmen müssen, daß ihre statistischen Eigenschaften durch Superposition von inkohärenten Teilstrahlungen nicht geändert werden, so sind die Gleichungen (7a) bei der natürlichen Strahlung hinreichende Bedingungen für die statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten.

§ 2. Nachweis der statistischen Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten bei der natürlichen Strahlung.

Es sei $F(t)$ eine Komponente des Strahlungsvektors stationärer natürlicher Strahlung, gegeben für unendlich lange Zeit. T sei eine gegen die Schwingungsdauer der langwelligsten in der Strahlung auftretenden Lichtart große Zeitdauer. Zwischen den Zeiten t_0 und $t_0 + T$ sei $F(t)$ dargestellt durch die Fourierreihe

$$\sum_n \left(A_n \cos 2\pi n \frac{t - t_0}{T} + B_n \sin 2\pi n \frac{t - t_0}{T}\right). \tag{4a}$$

Es ist klar, daß die zu $F(t)$ gehörigen Fourierkoeffizienten A_n, B_n von der Wahl der Epoche t_0 abhängen werden. Indem wir die Entwicklung für sehr viele, zufällig gewählte t_0 ausgeführt denken, erlangen wir ein statistisches Material zur Ableitung statistischer Eigenschaften der Koeffizienten A_n, B_n, welche wir bei der natürlichen Strahlung notwendig fordern müssen.

Um diese Eigenschaften abzuleiten, entwickeln wir $F(t)$ in eine Fourierreihe zwischen den Zeiten 0 und ϑ, wobei ϑ eine gegenüber T sehr große Zeitdauer sei. Für dies Zeitintervall sei

$$F(t) = \sum_\nu \alpha_\nu \cos\left(2\pi\nu \frac{t}{\vartheta} + \varphi_\nu\right). \tag{8}$$

Wählen wir t_0 zwischen $t = 0$ und $t = \vartheta - T$, so können die Koeffizienten A_n und B_n durch t_0 und die Koeffizienten α_ν und φ_ν der Entwicklung (8) ausgedrückt werden; man erhält zunächst

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T}\sum_\nu \left\{\int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_\nu \cos\left(2\pi\nu\frac{t}{\vartheta} + \varphi_\nu\right)\cos\left(2\pi n \frac{t-t_0}{T}\right) dt\right\} \\ B_n &= \frac{2}{T}\sum_\nu \left\{\int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_\nu \cos\left(2\pi\nu\frac{t}{\vartheta} + \varphi_\nu\right)\sin\left(2\pi n \frac{t-t_0}{T}\right) dt\right\}. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Führt man die Integration aus, so erhält man, indem man in bekannter Weise Glieder mit dem Faktor $\frac{1}{\pi(\nu/\vartheta + n/T)}$ gegen solche mit dem Faktor $\frac{1}{\pi(\nu/\vartheta - n/T)}$ vernachlässigt:

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= \sum_\nu \alpha_\nu \frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)\cos\left(\chi_{\nu n} + 2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right)}{\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)} \\ B_n &= -\sum_\nu \alpha_\nu \frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)\sin\left(\chi_{\nu n} + 2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right)}{\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

wobei

$$\chi_{\nu n} = \pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} + n\right) + \varphi_\nu$$

gesetzt ist. Die Formeln (10) gelten nur für Werte von t_0 zwischen $t_0 = 0$ und $t_0 = \vartheta - T$, weil die Entwicklung gemäß (8) nur für das Zeitintervall $0 - \vartheta$ gilt. Wir erlauben uns jedoch, die Formel (8) für das Intervall $0 - (\vartheta + T)$ anzuwenden. Damit ersetzen wir zwischen den Zeitwerten ϑ und $\vartheta + T$ die Funktion $F(t)$ durch die Werte von $F(t)$ zwischen den Zeiten 0 und T. Durch dieses Vorgehen werden im folgenden unsere Mittelwertbetrachtungen gefälscht, aber nur relativ unendlich wenig, weil das Zeitintervall T gegen ϑ unendlich klein ist. Von dieser Erwägung ausgehend, werden wir die Gleichungen (10) so anwenden, wie wenn sie im ganzen Intervall $0 < t_0 < \vartheta$ gelten würden.

Wir bilden nun mit Hilfe von (10) den Mittelwert $\overline{A_m A_n}$, d. h. die Größe

$$\overline{A_m A_n} = \frac{1}{\vartheta}\int\limits_0^\vartheta A_m A_n \, d t_0 .$$

Dabei tritt das Integral

$$\int\limits_0^\vartheta \cos\left(\chi_{\mu m} + 2\pi\mu\frac{t_0}{\vartheta}\right)\cos\left(\chi_{\nu n} + 2\pi\nu\frac{t_0}{\vartheta}\right) d t_0$$

auf. Dieses verschwindet wegen der Ganzzahligkeit von μ und ν, wenn $\mu \neq \nu$, und hat für $\mu = \nu$ den Wert $\frac{\vartheta}{2}(-1)^{m-n}$. Mit Rücksicht darauf ergibt die erste der Gleichungen (10)

$$\text{(11)} \quad \overline{A_m A_n} = \frac{(-1)^{m-n}}{2}\sum_\nu a_\nu^2 \frac{\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - m\right)\sin\pi\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)}{\pi^2\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - m\right)\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum a_\nu^2 \frac{\sin^2\pi\nu\frac{T}{\vartheta}}{\pi^2\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - m\right)\left(\nu\frac{T}{\vartheta} - n\right)} .$$

A priori ist klar, daß eine statistische Abhängigkeit nur zwischen Strahlungskomponenten von sehr nahe gleicher Frequenz zu erwarten ist. m und n gehören also demselben engen Spektralbereich an, ebenso jene Werte von ν, welche zu unserer Summe merklich beitragen.

In (11) ist der Bruch auf der rechten Seite eine wegen der Kleinheit von T/ϑ mit ν langsam veränderliche Größe. Deshalb kann bezüglich der Größe α_ν^2 über viele aufe nander folgende Glieder ohne merkbaren Fehler gemittelt werden, und es wird jener Mittelwert $\overline{\alpha_\nu^2}$ als Konstante aus der Summe herausgesetzt werden können, da die Summation überhaupt nur über einen engen Spektralbereich zu erstrecken ist. Die über den Bruch erstreckte Summe kann dann noch in ein Integral verwandelt werden, so daß man erhält:

$$\overline{A_m A_n} = \frac{1}{2} \overline{\alpha_\nu^2} \frac{\vartheta}{\pi T} \int \frac{\sin^2 x}{(x - m\pi)(x - n\pi)} dx . \tag{12}$$

Das Integral kann ohne merklichen Fehler zwischen $-\infty$ und $+\infty$ genommen werden, statt zwischen der durch den vorerwähnten Spektralbereich bestimmten Grenzen.

Dieses Integral hat für $m = n$ den Wert π, verschwindet aber stets[1]), wenn $m \neq n$ (m und n sind ganze Zahlen). Damit ist zunächst das Verschwinden von $\overline{A_m A_n}$ (für $m \neq n$) bewiesen; der Beweis für das Verschwinden von $\overline{B_m B_n}$ (für $m \neq n$) und $\overline{A_m B_n}$ ist analog zu führen. Aus dem Verschwinden dieser Mittelwerte folgt nach § 1 die behauptete statistische Unabhängigkeit der Fourierkoeffizienten.

---

1) Das Integral ist nämlich gleich

$$\frac{1}{(m-n)\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x - m\pi} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x - n\pi} dx \right\} .$$

Jedes der letzteren Integrale ist gleich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 y}{y} dy = 0 .$$

Bemerkung zur Korrektur: Statt bei der Auswertung von (11) über viele aufeinanderfolgende Summenglieder zu mitteln, kann man auch unendlich viele, voneinander unabhängige Entwicklungen (8) zugrunde legen und über diese mitteln. Nimmt man an (11) jene Mittelwertbildung vor, so tritt der dementsprechend verstandene Mittelwert $\overline{\alpha_\nu^2}$ vor das Summenzeichen. Das Endresultat bleibt natürlich dasselbe.

(Eingegangen 24. Juni 1915.)
