# 3. *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes;*
## *von A. Einstein.*

In einer letztes Jahr erschienenen Arbeit[1]) habe ich aus der Hypothese, daß Schwerefeld und Beschleunigungszustand des Koordinatensystems physikalisch gleichwertig seien, einige Folgerungen gezogen, welche sich den Ergebnissen der Relativitätstheorie (Theorie der Relativität der gleichförmigen Bewegung) sehr gut angliedern. Es zeigte sich dabei aber, daß die Gültigkeit des einen Grundsatzes jener Theorie, nämlich des Satzes von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, nur für Raum-Zeitgebiete konstanten Gravitationspotentials Gültigkeit beanspruchen kann. Trotzdem dies Resultat die allgemeine Anwendbarkeit der Lorentztransformation ausschließt, darf es uns nicht von der weiteren Verfolgung des eingeschlagenen Weges abschrecken; wenigstens hat meiner Meinung nach die Hypothese, daß das „Beschleunigungsfeld" ein Spezialfall des Gravitationsfeldes sei, eine so große Wahrscheinlichkeit, insbesondere mit Rücksicht auf die bereits in der ersten Arbeit gezogenen Folgerungen betreffend die schwere Masse des Energieinhaltes, das eine genauere Durchführung der Folgerungen jener Äquivalenzhypothese geboten erscheint.

Seitdem hat Abraham eine Theorie der Gravitation aufgestellt[2]), welche die in meiner ersten Arbeit gezogenen Folgerungen als Spezialfälle enthält. Wir werden aber im folgenden sehen, daß sich das Gleichungssystem Abrahams mit der Äquivalenzhypothese nicht in Einklang bringen läßt, und daß dessen Auffassung von Zeit und Raum sich schon vom rein mathematisch formalen Standpunkte aus nicht aufrecht erhalten läßt.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. p. 35. 1911.
2) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. Nr. 1. 1912.

### § 1. Raum und Zeit im Beschleunigungsfeld.

Das Bezugssystem $K$ (Koordinaten $x, y, z$) befinde sich im Zustande gleichförmiger Beschleunigung in Richtung seiner $x$-Koordinate. Diese Beschleunigung sei eine gleichförmige im Bornschen Sinne; d. h. die Beschleunigung seines Anfangspunktes, bezogen auf ein beschleunigungsfreies System, in bezug auf welches die Punkte von $K$ gerade keine, bzw. eine unendlich kleine Geschwindigkeit besitzen, sei eine konstante Größe. Ein solches System $K$ ist nach der Äquivalenzhypothese streng gleichwertig einem ruhenden System, in welchem ein massenfreies statisches Gravitationsfeld[1]) bestimmter Art sich befindet. Die räumliche Ausmessung von $K$ geschieht durch Maßstäbe, welche — im Ruhezustande an der nämlichen Stelle von $K$ miteinander verglichen — die gleiche Länge besitzen; es sollen die Sätze der Geometrie gelten für so gemessene Längen, also auch für die Beziehungen zwischen den Koordinaten $x, y, z$ und anderen Längen. Diese Festsetzung ist nicht selbstverständlich erlaubt, sondern enthält physikalische Annahmen, die sich eventuell als unrichtig erweisen könnten; sie gelten z. B. höchst wahrscheinlich nicht in einem gleichförmig rotierenden Systeme, in welchem wegen der Lorentzkontraktion das Verhältnis des Kreisumfanges zum Durchmesser bei Anwendung unserer Definition für die Längen von $\pi$ verschieden sein müßte. Der Maßstab sowie die Koordinatenachsen sind als starre Körper aufzufassen. Dies ist erlaubt, trotzdem der starre Körper nach der Relativitätstheorie keine reale Existenz besitzen kann. Denn man kann den starren Meßkörper durch eine große Anzahl kleiner nicht starrer Körper ersetzt denken, die so aneinander gereiht werden, daß sie aufeinander keine Druckkräfte ausüben, indem jeder besonders gehalten wird. Die Zeit $t$ im System $K$ denken wir durch Uhren gemessen von solcher Beschaffenheit und solcher fester Anordnung in den Raumpunkten des Systems $K$, daß die Zeitspanne, welche — mit ihnen gemessen — ein Lichtstrahl braucht, um von einem Punkt $A$ nach einem Punkte $B$ des Systems $K$ zu gelangen, nicht von dem Zeitpunkt der Aussendung des Licht-

1) Die Massen, welche dies Feld hervorbringen, hat man sich im Unendlichen zu denken.

strahles in $A$ abhängig ist. Es wird sich ferner zeigen, daß widerspruchsfrei die Gleichzeitigkeit dadurch definiert werden kann, daß bezüglich des *Richtens* der Uhren die Fortsetzung getroffen wird, daß alle Lichtstrahlen, welche einen Punkt $A$ von $K$ passieren, in $A$ dieselbe, von der Richtung unabhängige Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzen.

Wir denken uns nun das Bezugssystem $K(x, y, z, t)$ von einem beschleunigungsfreien Bezugssystem (von konstantem Gravitationspotential) $\Sigma(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ aus betrachtet. Wir setzen voraus, daß die $x$-Achse dauernd in die $\xi$-Achse falle und die $y$-Achse dauernd der $\eta$-Achse, die $z$-Achse dauernd der $\zeta$-Achse parallel sei. Diese Festsetzung ist möglich unter der Annahme, daß der Zustand der *Beschleunigung* auf die Gestalt von $K$ in bezug auf $\Sigma$ nicht von Einfluß sei. Diese physikalische Annahme legen wir zugrunde. Aus ihr folgt, daß für beliebige $\tau$

$$\left\{\begin{aligned} \eta &= y, \\ \zeta &= z \end{aligned}\right. \tag{1}$$

sein muß, so daß wir nur noch die Beziehung aufzusuchen haben, welche zwischen $\xi$ und $\tau$ einerseits, $x$ und $t$ andererseits, besteht. Zur Zeit $\tau = 0$ mögen beide Bezugssysteme zusammenfallen; dann müssen die gesuchten Substitutionsgleichungen jedenfalls von der Form sein

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \lambda + \alpha t^2 + \ldots \\ \tau &= \beta + \gamma t + \delta t^2 + \ldots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die Koeffizienten dieser für genügend kleine positive und negative Werte von $t$ gültigen Reihen sind als vorläufig unbekannte Funktionen von $x$ anzusehen. Indem wir uns auf die angeschriebenen Glieder beschränken, erhalten wir durch Differenziation

$$\left\{\begin{aligned} d\xi &= (\lambda' + \alpha' t^2)\,dx + 2\,\alpha t\,dt, \\ d\tau &= (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)\,dx + (\gamma + 2\,\delta t)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Im System $\Sigma$ denken wir uns die Zeit derart gemessen, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird. Wir können dann die Gleichung einer Schale, die sich mit Lichtgeschwindigkeit von einem beliebigen Raum-Zeitpunkt ausbreitet, indem wir uns auf die unendlich kleine Umgebung des Raum-Zeitpunktes beschränken, in der Form schreiben

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - d\tau^2 = 0\,.$$

Dieselbe Schale muß im System $K$ die Gleichung haben

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0\,.$$

Die Substitutionsgleichungen (2) müssen derart sein, daß diese beiden Gleichungen äquivalent sind. Dies verlangt wegen (1) die Identität

$$d\xi^2 - d\tau^2 = dx^2 - c^2\,dt^2\,. \tag{4}$$

Setzt man in die linke Seite dieser Gleichung die Ausdrücke in $dx$ und $dt$ vermittelst (3) ein und setzt links und rechts die Koeffizienten von $dx^2$, $dt^2$ und $dx\,dt$ einander gleich, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= (\lambda' + \alpha' t^2)^2 - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)^2,\\ -c^2 &= 4\,\alpha^2 t^2 - (\gamma + 2\,\delta\,t)^2,\\ 0 &= (\lambda' + \alpha' t^2)\cdot 2\,\alpha\,t - (\beta' + \gamma' t + \delta' t^2)(\gamma + 2\,\delta\,t). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten in $t$ identisch bis zu so hohen Potenzen von $t$, daß die in (2) weggelassenen Terme noch keinen Einfluß haben, also die erste Gleichung bis zur zweiten, die zweite und dritte bis zur ersten Potenz von $t$. Hieraus fließen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda'^2 \beta'^2, & 0 &= \beta'\gamma', & 2\,\lambda\,\alpha' - \gamma'^2 - 2\,\beta'\,\delta' &= 0,\\ -c^2 &= -\gamma^2, & 0 &= \gamma\,\delta\,,\\ 0 &= \beta'\gamma, & 0 &= 2\,\alpha\,\lambda' - 2\,\beta'\,\delta - \gamma\gamma'. \end{aligned}$$

Da $\gamma$ nicht verschwinden kann, folgt aus der ersten Gleichung der dritten Zeile $\beta' = 0$. $\beta$ ist also eine Konstante, die wir bei passender Wahl der Anfangspunkte der Zeit gleich Null setzen dürfen. Der Koeffizient $\gamma$ muß ferner positiv sein; es ist also nach der ersten Gleichung der zweiten Zeile

$$\gamma = c\,.$$

Nach der zweiten Gleichung der zweiten Zeile ist

$$\delta = 0.$$

Weil $\beta'$ verschwindet, und wir $x$ mit $\xi$ wachsend annehmen können, so folgt aus der ersten Gleichung der ersten Zeile

$$\lambda' = 1,$$

also, wenn für $t = 0$ und $\xi = 0$, $x = 0$ sein soll,

$$\lambda = x.$$

Endlich folgen aus der dritten Gleichung der ersten und der zweiten Gleichung der dritten Zeile unter Benutzung der schon gefundenen Relationen die Differentialgleichungen

$$2\alpha' - c'^2 = 0,$$

$$2\alpha - c c' = 0.$$

Aus ihnen folgt, wenn wir mit $c_0$ und $a$ Integrationskonstante bezeichnen

$$c = c_0 + ax,$$

$$2\alpha = a(c_0 + ax) = ac.$$

Damit ist die gesuchte Substitution für genügend kleine Werte von $t$ ermittelt. Es gelten bei Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von $t$ die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi = x + \frac{ac}{2} t^2, \\ \eta = y, \\ \zeta = z, \\ \tau = ct, \end{cases}$$

wobei die Lichtgeschwindigkeit $c$ im System $K$, welche nur von $x$, aber nicht von $t$ abhängen kann, durch die soeben abgeleitete Beziehung

$$(5) \qquad c = c_0 + ax$$

gegeben ist. Die Konstante $c_0$ hängt davon ab, mit einer wie rasch laufenden Uhr wir die Zeit im Anfangspunkte von $K$ messen. Die Bedeutung der Konstante $a$ ergibt sich in folgender Weise. Die erste und vierte der Gleichungen (4) liefert für den Anfangspunkt ($x = 0$) von $K$ mit Rücksicht auf (5) die Bewegungsgleichung

$$\xi = \frac{a}{2c_0} \tau^2.$$

$a/c_0$ ist also die Beschleunigung des Anfangspunktes von $K$ in bezug auf $\Sigma$, gemessen in dem Zeitmaße, in welchem die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist.

### § 2. Differentialgleichung des statischen Gravitationsfeldes, Bewegungsgleichung eines materiellen Punktes im statischen Gravitationsfelde.

Aus der früheren Arbeit geht schon hervor, daß im statischen Gravitationsfeld eine Beziehung zwischen $c$ und dem Gravitationspotential existiert, oder mit anderen Worten, daß das Feld durch $c$ bestimmt ist. In demjenigen Gravitationsfelde, welches dem im § 1 betrachteten Beschleunigungsfelde entspricht, ist nach (5) und dem Äquivalenzprinzip die Gleichung.

$$\Delta c = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = 0 . \tag{5a}$$

erfüllt, und es liegt die Annahme nahe, daß wir diese Gleichung als in jedem massenfreien statischen Gravitationsfelde gültig anzusehen haben.[1]) Jedenfalls ist diese Gleichung die einfachste mit (5) vereinbare.

Es ist leicht, diejenige vermutlich gültige Gleichung aufzustellen, welche derjenigen von Poisson entspricht. Es folgt nämlich aus der Bedeutung von $c$ unmittelbar, daß $c$ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, der davon abhängt, mit einer wie beschaffenen Uhr man $t$ im Anfangspunkte von $K$ mißt. Die der Poissonschen Gleichung entsprechende muß also in $c$ homogen sein. Die einfachste Gleichung dieser Art ist die lineare Gleichung

$$\Delta c = k c \varrho , \tag{5b}$$

wenn unter $k$ die (universelle) Gravitationskonstante, unter $\varrho$ die Dichte der Materie verstanden wird. Letztere muß so definiert sein, daß sie durch die Massenverteilung bereits gegeben, d. h. bei gegebener Materie im Raumelement von $c$ unabhängig ist. Dies erzielen wir, indem wir die Masse eines Kubikzentimeter Wasser gleich 1 setzen, in was für einem Gravitationspotential er sich auch befinden möge; $\varrho$ ist dann das Verhältnis der im Kubikzentimeter enthaltenen Masse zu dieser Einheit.

---

1) In einer in kurzem nachfolgender Arbeit wird gezeigt werden, daß die Gleichung (5a) und (5b) noch nicht exakt richtig sein können. In dieser Arbeit sollen sie vorläufig benutzt werden.

Wir suchen nun das Bewegungsgesetz eines materiellen Punktes im statischen Schwerefeld zu ermitteln. Zu diesem Zwecke suchen wir das Bewegungsgesetz eines kräftefrei bewegten materiellen Punktes in dem im § 1 betrachteten Beschleunigungsfelde. Im System $\Sigma$ ist dies Bewegungsgesetz

$$\begin{aligned} \xi &= A_1 \tau + B_1 , \\ \eta &= A_2 \tau + B_2 , \\ \zeta &= A_3 \tau + B_3 , \end{aligned}$$

wobei die $A$ und $B$ Konstante sind. Diese Gleichungen gehen vermöge (4) in die für genügend kleine $t$ gültigen Gleichungen über:

$$\begin{aligned} x &= A_1 c t + B_1 - \frac{a c}{2} t^2 , \\ y &= A_2 c t + B_2 , \\ z &= A_3 c t + B_3 . \end{aligned}$$

Durch einmaliges und nochmaliges Differenzieren erhält man aus der ersten Gleichung, indem man in dieselben $t = 0$ einsetzt, die beiden Gleichungen[1])

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 c , \\ \ddot{x} &= 2 A_1 \dot{c} - a c . \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Eliminieren von $A_1$

$$c \ddot{x} - 2 \dot{c} \dot{x} = - a c^2 ,$$

oder die Gleichung

$$\frac{d}{d t} \left( \frac{\dot{x}}{c^2} \right) = - \frac{a}{c^2} .$$

Auf analoge Weise resultieren für die beiden anderen Komponenten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d t} \left( \frac{\dot{y}}{c^2} \right) &= 0 , \\ \frac{d}{d t} \left( \frac{\dot{z}}{c^2} \right) &= 0 . \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen gelten zunächst im Augenblick $t = 0$. Sie gelten aber allgemein, weil dieser Zeitpunkt durch nichts

1) Die in (2) weggelassenen Glieder machen sich bei dieser zweimaligen Differenziation und nachherigem Nullsetzen von $t$ im Resultat nicht bemerkbar.

von den übrigen ausgezeichnet ist als dadurch, daß wir ihn zum Anfangspunkt unserer Reihenentwickelung gemacht haben. Die so gefundenen Gleichungen sind die gesuchten Bewegungsgleichungen des kräftefrei bewegten Punktes im konstanten Beschleunigungsfelde. Berücksichtigen wir, daß $a = \partial c / \partial x$, und daß $(\partial c / \partial y) = (\partial c / \partial z) = 0$ ist, so können wir diese Gleichungen auch in der Form schreiben:

$$
(6) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{c^2}\right) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

In dieser Form der Gleichungen ist die $x$-Richtung nicht mehr ausgezeichnet; beide Seiten haben Vektorcharakter. Wir haben diese Gleichungen deshalb wohl auch als die Bewegungsgleichungen eines materiellen Punktes im statischen Gravitationsfelde aufzufassen, falls der Punkt nur der Einwirkung der Schwere unterliegt.

Aus (6) folgt zunächst, in welcher Beziehung die in (5b) auftretende Konstante $k$ zu der Gravitationskonstante $K$ im gewöhnlichen Sinne steht. Im Falle gegen $c$ kleiner Geschwindigkeiten ist nämlich nach (6)

$$
\ddot{x} = -c\frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},
$$

so daß (5b) bei Vernachlässigung gewisser Glieder in

$$
\Delta \Phi = k c^2 \varrho
$$

übergeht. Es ist also

$$
K = k c^2 .
$$

Die Gravitationskonstante $K$ ist also keine universelle Konstante, sondern nur der Quotient $K/c^2$.

Multiplizieren wir die Gleichungen (6) der Reihe nach mit $\dot{x}/c^2$, $\dot{y}/^2$, $\dot{z}/c^2$, und addieren wir, so ergibt sich, wenn

$$
q^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2
$$

gesetzt wird,

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2c^2}\right),
$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{q^2}{c^2}\right)\right]=0,$$

oder

(7) $$\frac{c}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}=\text{konst.}$$

Diese Gleichung enthält das Energieprinzip für den im stationären Gravitationsfeld bewegten materiellen Punkt. Die linke Seite dieser Gleichung hängt von $q$ genau in derselben Weise ab, wie die Energie des materiellen Punktes nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie von $q$ abhängt. Wir haben daher die linke Seite der Gleichung bis auf einen (nur vom Massenpunkt selbst abhängigen) Faktor als die Energie $E$ des Punktes anzusehen. Dieser Faktor ist offenbar gleich der Masse $m$ im obigen festgesetzten Sinne zu setzen, weil jene Definition die Masse unabhängig vom Gravitationspotential festlegt. Es ist also

(8) $$E=\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}},$$

oder angenähert

(8a) $$E=mc+\frac{m}{2c}q^2.$$

Aus dem zweiten Gliede dieser Entwickelung geht zunächst hervor, daß die von uns als Energie bezeichnete Größe eine von der gewohnten abweichende Dimension besitzt. Dementsprechend wird auch die Maßzahl der einzelnen Energiegröße eine andere, nämlich eine $c$ mal kleinere als in dem uns geläufigen System. Es hängt ferner die „kinetische Energie", welche allerdings nach (8) genau genommen von der Gravitationsenergie nicht getrennt werden kann, nicht nur von $m$ und $q$, sondern auch von $c$, d. h. vom Gravitationspotential ab. Aus (8) folgt ferner das wichtige Resultat, daß die Energie des im Schwerefeld ruhenden Punktes $mc$ ist. Wenn wir somit an der Beziehung

$$\text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \text{zugeführte Energie}$$

festhalten wollen, so ist die auf den ruhenden materiellen Punkt im Schwerefelde ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K} = - m \operatorname{grad} c.$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in einem beliebigen statischen Schwerefelde für den Fall ableiten, daß außer der Schwere noch andere Kräfte auf den Punkt wirken. Wir bemerken, daß die Gleichungen (6) den in der Relativitätsmechanik geltenden Bewegungsgleichungen nicht ähnlich sind. Multiplizieren wir sie aber mit der linken Seite von (7), so erhalten wir die den Gleichungen (6) äquivalenten Gleichungen:

$$\text{(6a)} \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \quad \text{usw.}$$

Die linke Seite hat, abgesehen von dem in der gewöhnlichen Relativitätstheorie belanglosen, im Zähler auftretenden Faktor $1/c$ genau dieselbe Form wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie. Wir werden deshalb die Klammergröße als $x$-Komponente der Bewegungsgröße zu bezeichnen haben (für einen Punkt der Masse 1). Wir haben ferner soeben gezeigt, daß $-\partial c / \partial x$ als $x$-Komponente der vom Gravitationsfeld auf einen unbewegten Massenpunkt ausgeübten Kraft aufzufassen ist. Die auf einen beliebig bewegten Massenpunkt von der Masse 1 vom Schwerefeld ausgeübte Kraft kann sich hiervon nur durch einen mit $q$ verschwindenden Faktor unterscheiden. Die soeben aufgestellte Gleichung führt dazu, diese Kraft $\mathfrak{K}_g$ gleich $-\frac{\partial c/\partial x}{\sqrt{1-q^2/c^2}}$ zu setzen. Die rechte Seite der aufgestellten Gleichung wird dann $\mathfrak{K}_g$. Es ist also die zeitliche Ableitung des Impulses gleich der wirkenden Kraft. Wirkt auf den Punkt noch eine andere Kraft $\mathfrak{K}$, so werden wir auf der rechten Seite der Gleichung noch ein Glied $\mathfrak{K}/m$ zu addieren haben, so daß die Bewegungsgleichung eines Punktes von der Masse $m$ die Form annimmt:

$$\text{(6b)} \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{m\frac{\dot{x}}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{m\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \mathfrak{K}_x \quad \text{usw.}$$

Diese Gleichung ist aber nur dann zulässig, wenn das Energieprinzip in der Form

$$\mathfrak{K}\,\mathfrak{q} = \dot{E}$$

erfüllt ist. Dies läßt sich in folgender Weise dartun.

Schreibt man (6b) in der Form

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dot{x}}{c^2}E\right\} + \frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}E = \mathfrak{K}_x \text{ usw.}$$

und multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\dot{x}/c^2$ usw., und addiert dieselben, so findet man

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^4}\dot{E} + \frac{1}{2}E\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) + E\frac{\dot{c}}{c^3} = \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{q}}{c^2}.$$

Hieraus ergibt sich die gesuchte Relation, wenn man berücksichtigt, daß wegen (8)

$$\frac{q^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{m^2}{E^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{c^4}\right) = -\frac{\dot{c}}{c^3} + \frac{m^2 \dot{E}}{E^3}$$

ist. Die Beziehungen der Kraft zum Impuls- und Energiesatz bleiben also erhalten.

## § 3. Bemerkungen über die physikalische Bedeutung des statischen Schwerepotentials.

Messen wir in einem Raume von nahezu konstantem Schwerepotential die Lichtgeschwindigkeit, indem wir mittels einer bestimmten Uhr die Zeit messen, welche das Licht zum Durchlaufen eines geschlossenen Weges von bestimmter Länge braucht, so erhalten wir für die Lichtgeschwindigkeit immer dieselbe Zahl, ganz unabhängig davon, in einem Raume von wie großem Schwerepotential wir diese Messung ausführen.[1]) Es folgt dies unmittelbar aus dem Äquivalenzprinzip. Wenn wir sagen, daß die Lichtgeschwindigkeit in einem Punkte $P$ $c/c_0$ mal größer sei als in einem Punkte $P_0$, so bedeutet dies

1) Die zur Zeitmessung benutzte Uhr ist dabei immer die nämliche; sie wird immer an die Stelle gebracht, für die $c$ ermittelt werden soll.

also, daß wir uns in $P$ zur Zeitmessung[1]) einer Uhr bedienen müssen, welche $c/c_0$ mal langsamer läuft als die zur Zeitmessung in $P_0$ zu benutzende Uhr, falls der Gang beider Uhren an demselben Orte miteinander verglichen wird. Anders ausgedrückt: eine Uhr läuft desto schneller, an eine Stelle von je größerem $c$ wir sie bringen. Diese Abhängigkeit der Raschheit des zeitlichen Ablaufes vom Gravitationspotential ($c$) gilt für den zeitlichen Ablauf beliebiger Vorgänge. Dies wurde bereits in der früheren Arbeit dargelegt.

Ebenso hängt die Spannkraft einer in bestimmter Weise gespannten Feder, überhaupt die Kraft bzw. die Energie eines beliebigen Systems stets davon ab, an einem Orte von wie großem $c$ sich das System befindet. Dies geht leicht aus folgender elementaren Überlegung hervor. Wenn wir nacheinander in mehreren kleinen Raumteilen von verschiedenem $c$ experimentieren und uns stets derselben Uhr, derselben Maßstäbe usw. bedienen, so finden wir überall — abgesehen von etwaigen Verschiedenheiten der Intensität des Schwerefeldes — dieselben Gesetzmäßigkeiten mit denselben Konstanten. Dies folgt aus dem Äquivalenzprinzip. Als Uhr können wir uns dabei etwa zweier Spiegel von der Distanz 1 cm bedienen, indem wir die Zahl der Hin- und Hergänge eines Lichtsignals zählen; wir operieren dann mit einer Art Lokalzeit, welche Abraham mit $l$ bezeichnet. Diese steht dann mit der universellen Zeit in der Relation

$$d l = c\, d t.$$

Messen wir die Zeit durch $l$, so wird man mittels der Deformationsenergie einer bestimmten, in einer bestimmten Weise gespannten Feder einer Masse $m$ eine bestimmte Geschwindigkeit $dx/dl$ erteilen, unabhängig davon, an einem Orte von wie großem $c$ dieser Prozeß vor sich geht. Es ist

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dx}{c\, dt} = a,$$

wobei $a$ von $c$ unabhängig ist. Nach (8) kann aber die dieser Bewegung entsprechende kinetische Energie gleich

---

1) Nämlich zur Messung der in den Gleichungen mit „$t$“ bezeichneten Zeit.

$$\frac{m}{2c}q^2 = \frac{m}{2c}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2c}a^2c^2 = \frac{ma^2}{2}\cdot c$$

gesetzt werden. Die Energie der Feder ist also $c$ proportional, und es gilt ein Gleiches für Energie und Kräfte irgend eines Systems.

Diese Abhängigkeit hat eine unmittelbare physikalische Bedeutung. Denke ich mir z. B. einen masselosen Faden zwischen zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ verschiedenen Gravitationspotentials gespannt. Eine von zwei vollkommen gleich beschaffenen Federn ziehe in $P_1$, die zweite in $P_2$ an dem Faden, derart, daß Gleichgewicht besteht. Die Verlängerungen $l_1$ und $l_2$, welche die beiden Federn dabei erfahren, werden aber nicht gleich sein, sondern die Gleichgewichtsbedingung wird lauten[1])

$$l_1 c_1 = l_2 c_2 .$$

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit diesem allgemeinen Ergebnis auch die Gleichung (5b) in Übereinstimmung ist. Aus dieser Gleichung und aus dem Umstande, daß die auf eine Masse $m$ wirkende Gravitationskraft gleich $-m \operatorname{grad} c$ ist, folgt nämlich, daß die Kraft $\mathfrak{K}$, mit der sich zwei im Potential $c$ in der Entfernung $r$ befindliche Massen anziehen, in erster Annäherung gegeben ist durch

$$\mathfrak{K} = ck\frac{mm'}{4\pi r^2} .$$

Es ist also auch diese Kraft $c$ proportional. Denken wir uns ferner eine „Gravitationsuhr“ bestehend aus einer Masse $m$, die um eine festgehaltene Masse $m'$ bei konstantem Abstand $R$ unter alleiniger Wirkung der Gravitationskraft von $m'$ umläuft, so geschieht dies nach (6b) in erster Näherung nach den Gleichungen

$$m\ddot{x} = c\,\mathfrak{K}_x \text{ usw.}$$

Hieraus folgt

$$m\omega^2 R = c^2 k\frac{mm'}{4\pi R^2} .$$

Die Ganggeschwindigkeit $\omega$ der Gravitationsuhr ist also $c$ proportional, wie dies für Uhren jeder Art der Fall sein soll.

---

1) Hierbei ist allerdings vorausgesetzt, daß auf den gespannten masselosen Faden im Gravitationsfeld keine Kraft wirkt. Dies wird in einer bald folgenden Arbeit begründet werden.

### § 4. Allgemeine Bemerkungen über Raum und Zeit.

In was für einem Verhältnis steht nun die vorstehende Theorie zu der alten Relativitätstheorie (d. h. zu der Theorie des universellen $c$)? Nach Abrahams Meinung sollen die Transformationsgleichungen von Lorentz nach wie vor im unendlich Kleinen gelten, d. h. es soll eine $x$-$t$-Transformation geben, so daß

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$dt' = \frac{-\frac{v}{c^2}\,dx + dt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gelten. $dx'$ und $dt'$ müssen vollständige Differentiale sein. Es sollen also die Gleichungen gelten

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{-v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{-\frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right\}.$$

Es sei nun im ungestrichenen System das Gravitationsfeld ein statisches. Dann ist $c$ eine beliebig gegebene Funktion von $x$, von $t$ aber unabhängig. Soll das gestrichene System ein „gleichförmig“ bewegtes sein, so muß $v$ bei festgehaltenem $x$ jedenfalls von $t$ unabhängig sein. Es müssen daher die linken Seiten der Gleichungen, somit auch die rechten Seiten verschwinden. Letzteres ist aber unmöglich, da bei beliebig in Funktionen von $x$ gegebenem $c$ nicht beide rechten Seiten zum Verschwinden gebracht werden können, indem man $v$ in Funktion von $x$ passend wählt. Damit ist also erwiesen, daß man auch für unendlich kleine Raum–Zeitgebiete nicht an der Lorentztransformation festhalten kann, sobald man die universelle Konstanz von $c$ aufgibt.

Mir scheint das Raum–Zeitproblem wie folgt zu liegen. Beschränkt man sich auf ein Gebiet von konstantem Gravitationspotential, so werden die Naturgesetze von ausgezeichnet einfacher und invarianter Form, wenn man sie auf ein Raum-Zeitsystem derjenigen Mannigfaltigkeit bezieht, welche durch die Lorentztransformationen mit konstantem $c$ miteinander verknüpft sind. Beschränkt man sich nicht auf Gebiete von konstantem $c$, so wird die Mannigfaltigkeit der äquivalenten Systeme, sowie die Mannigfaltigkeit der die Naturgesetze ungeändert lassenden Transformationen eine größere werden, aber es werden dafür die Gesetze komplizierter werden.

Prag, Februar 1912.

(Eingegangen 26. Februar 1912.)