3. *Statistische Untersuchung der Bewegung eines Resonators in einem Strahlungsfeld;*
von A. Einstein und L. Hopf.

§ 1. Gedankengang.

Es ist bereits auf verschiedenen Wegen gezeigt worden und heute wohl allgemein anerkannt, daß unsere gegenwärtigen Anschauungen von der Verteilung und Ausbreitung der elektromagnetischen Energie einerseits, von der statistischen Energieverteilung anderseits, bei richtiger Anwendung in der Strahlentheorie zu keinem anderen als dem sogenannten Rayleighschen (Jeansschen) Strahlungsgesetz führen können. Da dieses mit der Erfahrung in vollkommenem Widerspruch steht, ist es nötig, an den Grundlagen der zur Ableitung verwendeten Theorien eine Änderung vorzunehmen, und man hat vielfach vermutet, daß die Anwendung der statistischen Energieverteilungsgesetze auf die Strahlung oder auf rasch oszillierende Bewegungen (Resonatoren) nicht einwandfrei sei. Die folgende Untersuchung soll nun zeigen, daß es einer derartigen zweifelhaften Anwendung gar nicht bedarf, und daß es genügt, den Satz der Äquipartition der Energie nur auf die *fortschreitende* Bewegung der Moleküle und Oszillatoren anzuwenden, um zum Rayleighschen Strahlungsgesetz zu gelangen. Die Anwendungsfähigkeit des Satzes auf die fortschreitende Bewegung ist durch die Erfolge der kinetischen Gastheorie genügend erwiesen; wir werden daher schließen dürfen, daß erst eine prinzipiellere und tiefer gehende Änderung der grundlegenden Anschauungen zu einem der Erfahrung besser entsprechenden Strahlungsgesetz führen kann.

Wir betrachten einen beweglichen elektromagnetischen Oszillator[1]), der einesteils den Wirkungen eines Strahlungsfeldes unterliegt, andernteils mit einer Masse m behaftet ist und mit den im Strahlungsraum vorhandenen Molekülen in Wechselwirkung

1) Der Einfachheit halber werden wir annehmen, der Oszillator schwinge nur in der x-Richtung und sei nur in der x Richtung beweglich.

tritt. Betände diese letztere Wechselwirkung allein, so wäre der quadratische Mittelwert der Bewegungsgröße der fortschreitenden Bewegung des Oszillators durch die statistische Mechanik vollkommen bestimmt. In unserem Falle besteht außerdem die Wechselwirkung des Oszillators mit dem Strahlungsfelde. Damit statistisches Gleichgewicht möglich sei, darf diese letztere Wechselwirkung an jenem Mittelwerte nichts ändern. Mit anderen Worten: der quadratische Mittelwert der Bewegungsgröße der fortschreitenden Bewegung, welchen der Oszillator unter der Einwirkung *der Strahlung allein* annimmt, muß derselbe sein wie derjenige, welchen er nach der statistischen Mechanik unter der mechanischen Einwirkung der Moleküle allein annähme. Damit reduziert sich das Problem auf dasjenige, den quadratischen Mittelwert $\overline{(m\,v)^2}$ der Bewegungsgröße zu ermitteln, den der Oszillator unter der Einwirkung des Strahlungsfeldes allein annimmt.

Dieser Mittelwert muß zur Zeit $t = 0$ derselbe sein wie zur Zeit $t = \tau$, so daß man hat:

$$\overline{(m\,v)^2_{t=0}} = \overline{(m\,v)^2_{t=\tau}}.$$

Für das folgende ist es zweckmäßig, zweierlei Kraftwirkungen zu unterscheiden, durch welche das Strahlungsfeld den Oszillator beeinflußt, nämlich

1. Die Widerstandskraft K, welche der Strahlungsdruck einer geradlinigen Bewegung des Oszillators entgegenstellt. Diese ist bei Vernachlässigung der Glieder von Größenordnung $(v/c)^2$ (c = Lichtgeschwindigkeit) proportional der Geschwindigkeit v, wir können also schreiben: $K = -P\,v$. Nehmen wir ferner an, daß während der Zeit τ die Geschwindigkeit v sich nicht merklich ändert, so wird der von dieser Kraft herrührende Impuls $= -P\,v\,\tau$.

2. Die Schwankungen Δ des elektromagnetischen Impulses, die infolge der Bewegung elektrischer Massen im ungeordneten Strahlungsfelde auftreten. Diese können ebensowohl positiv, wie negativ sein und sind von dem Umstande, daß der Oszillator bewegt ist, in erster Annäherung unabhängig.

Diese Impulse superponieren sich während der Zeit τ auf den Impuls $(m\,v)_{t=0}$ und unsere Gleichung wird:

$$\overline{(m\,v)^2_{t=0}} = \overline{(m\,v_{t=0} + \Delta - P\,v\,\tau)^2}. \tag{1}$$

Durch Vergrößerung der Masse m können wir jederzeit erreichen, daß das mit τ^2 multiplizierte Glied, welches auf der rechten Seite von Gleichung (1) erscheint, vernachlässigt werden darf. Ferner verschwindet das mit $\overline{v\Delta}$ multiplizierte Glied, da v und Δ voneinander ganz unabhängig sowohl negativ wie positiv werden können. Ersetzen wir noch $m\overline{v^2}$ durch die Temperatur Θ mittels der aus der Gastheorie bekannten Gleichung:

$$m\overline{v^2} = \frac{R}{N}\Theta$$

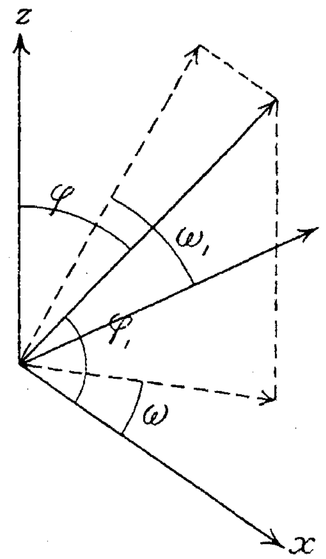
(R = absolute Gaskonstante, N = Loschmidtsche Zahl), so erhält Gleichung (1) die Form:

$$\overline{\Delta^2} = 2\frac{R}{N} P \Theta \tau. \tag{2}$$

Wir haben also nur $\overline{\Delta^2}$ und P (bzw. $\overline{K}$) durch elektromagnetische Betrachtungen zu ermitteln, dann liefert Gleichung (2) das Strahlungsgesetz.

§ 2. Berechnung der Kraft $\overline{K}$.[1])

Um die Kraft zu berechnen, welche die Strahlung einem bewegten Oszillator entgegenstellt, berechnen wir zuerst die Kraft auf einen ruhenden Oszillator und transformieren diese dann mit Hilfe der aus der Relativitätstheorie folgenden Formeln.



Der Oszillator mit Eigenschwingung ν_0 schwinge frei in der z-Richtung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems x, y, z. Bezeichnen dann $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die elektrische bzw. magnetische Kraft des äußeren Feldes, so gehorcht das Moment f des Oszillators nach Planck[2]) der Differentialgleichung:

$$16\pi^4 \nu_0^3 f + 4\pi^2 \nu_0 \ddot{f} - 2\sigma \dddot{f} = 3\sigma c^3 \mathfrak{E}_z. \tag{3}$$

Hierbei ist noch σ eine für die Dämpfung des Oszillators durch Ausstrahlung charakteristische Konstante.

---

1) Vgl. auch M. Abraham, Ann. d. Phys. **14.** p. 273 ff.. 1904.

2) M. Planck, Vorl. über die Theorie der Wärmestrahlung p. 113.

Es falle nun eine ebene Welle auf den Oszillator; der Strahl schließe mit der z-Achse den Winkel φ ein, seine Projektion auf die xy-Ebene mit der x-Achse den Winkel ω. Zerlegen wir diese Welle in zwei senkrecht zueinander polarisierte, davon die elektrische Kraft der einen in der Strahloszillatorebene liege, die der anderen senkrecht dazu, so ist klar, daß nur die erstere dem Oszillator ein gewisses Moment erteilt. Schreiben wir die elektrische Kraft dieser ersteren Wellen als Fouriersche Reihe

$$\mathfrak{E} = \sum^{n} A_n \cos \left\{ \frac{2\pi n}{T} \left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right) - \vartheta_n \right\}, \tag{4}$$

wobei T eine sehr große Zeit bedeute, so drücken sich die Richtungskosinus α, β, γ des Strahles durch φ und ω in folgender Weise aus:

$$\alpha = \sin\varphi \cos\omega, \quad \beta = \sin\varphi \sin\omega, \quad \gamma = \cos\varphi$$

und die für unsere weitere Rechnung in Betracht kommenden Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft sind:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E} \cos\varphi \cos\omega, \\ \mathfrak{E}_z &= -\mathfrak{E} \sin\varphi, \\ \mathfrak{H}_y &= \mathfrak{E} \cos\varphi \sin\omega. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Die ponderomotorische Kraft, welche auf den Oszillator ausgeübt wird, ist

$$k = f \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \frac{1}{c} \left[\frac{df}{dt} \mathfrak{H} \right].$$

Damit diese Gleichung, sowie Gleichung (3) gültig sei, muß angenommen werden, daß die Abmessungen des Oszillators stets klein seien gegen die in Betracht kommenden Strahlungswellenlängen. Die x-Komponente k_x der ponderomotorischen Kraft ist

$$k_x = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} f - \frac{1}{c} \mathfrak{H}_y \frac{df}{dt}. \tag{6}$$

Durch Auflösung von (3)[1]) erhalten wir mit Berücksichtigung von (4) und (5):

$$f = -\frac{3c^3}{16\pi^3} T^3 \sin\varphi \sum^{n} A_n \frac{\sin\gamma_n}{n^3} \cos(\tau_n - \gamma_n),$$

$$\dot{f} = \frac{3c^3}{8\pi^2} T^2 \sin\varphi \sum^{n} A_n \frac{\sin\gamma_n}{n^2} \sin(\tau_n - \gamma_n),$$

1) M. Planck, l. c. p. 114.

wobei zur Abkürzung

$$\tau_n = 2\pi n \frac{t}{T} - \vartheta_n$$

gesetzt ist und γ_n durch die Gleichung gegeben ist:

$$\operatorname{cotg} \gamma_n = \frac{\pi \nu_0 \left(\nu_0{}^2 - \frac{n^2}{T^2}\right)}{\sigma \frac{n^3}{T^3}}.$$

Da ferner:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = \frac{2\pi}{c\,T} \cos^2 \varphi \cos \omega \sum^n n A_n \sin^2 \tau_n \;{}^{1)},$$

erscheint k_x als Doppelsumme:

$$k_x = -\frac{3c^2}{8\pi} T^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \omega \sum^n \sum^m A_n \frac{\sin \gamma_n}{n^3} A_m m \cos(\tau_n - \gamma_n) \sin \tau_m,$$

$$-\frac{3c^2}{8\pi} T^2 \sin \varphi \cos \omega \sum^n \sum^m A_n \frac{\sin \gamma_n}{n^2} A_m \sin(\tau_n - \gamma_n) \cos \tau_m.$$

Bei der Mittelwertbildung kommen wegen der Unabhängigkeit der Phasenwinkel ϑ voneinander nur die Glieder $n = m$ in Betracht[2]) und es wird:

$$(7) \quad \begin{cases} \overline{k_x} = \frac{3c^2}{16\pi^2} T^2 \sin^3 \varphi \cos \omega \sum^n A_n{}^2 \frac{\sin \gamma_n}{n^2} \\ \quad = \frac{3c^2}{16\pi^2} \overline{A^2_{\nu_0 T}}\, T \frac{\sigma}{2\nu_0} \sin^3 \varphi \cos \omega. \;{}^{3)} \end{cases}$$

Dies ist der Mittelwert der x-Komponente der Kraft, welche eine in Richtung φ, ω einfallende Welle auf den ruhenden Oszillator ausübt.

Bewegt sich der Oszillator in der x-Richtung mit der Geschwindigkeit v, so ersetzen wir die Winkel φ, ω praktischer durch den Winkel φ_1 zwischen Strahl und x-Achse und den

---

1) Eigentlich wäre dieser Ausdruck für $\partial \mathfrak{E}_x / \partial x$ ebenso wie der für $\mathfrak{H}_y$ durch die Komponenten der Welle zu ergänzen, die senkrecht zu der den Oszillator erregenden polarisiert ist; doch ist klar, daß diese Ausdrücke wegen der Unabhängigkeit ihrer Phasen von denjenigen des Oszillators nichts zum Mittelwert der Kraft beitragen.

2) Diese Unabhängigkeit folgt aus dem Endergebnis der vorhergehenden Abhandlung.

3) M. Planck, l. c. p. 122.

Winkel ω_1 zwischen der Projektion des Strahles auf die yz-Ebene und der y-Achse. Es gelten dann die Beziehungen:

$$\cos\varphi_1 = \sin\varphi\cos\omega,$$
$$\sin\varphi_1\cos\omega_1 = \sin\varphi\sin\omega,$$
$$\sin\varphi_1\sin\omega_1 = \cos\varphi.$$

Zum Werte der Kraft $\overline{k_x'}$, welche auf den bewegten Oszillator wirkt, führen uns die Transformationsformeln der Relativitätstheorie[1])

$$A' = A\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right),$$
$$T' = T\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right),$$
$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right),$$
$$\cos\varphi_1' = \frac{\cos\varphi_1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi_1}, \quad \omega_1' = \omega_1.$$

Es wird:

$$\overline{k_x'} = \frac{3c^2}{16\pi^2}\overline{A'^2_{\nu_0' T'}}\,.T'\,\frac{\sigma}{2\nu_0'}(1 - \sin^2\varphi_1'\sin^2\omega_1')\cos\varphi_1'.$$

Nun ist, wenn Glieder mit $(v/c)^2$ vernachlässigt werden:

$$\overline{A'^2_{\nu_0' T'}} = \overline{A^2_{\nu_0 T}}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi_1\right),$$

oder, da wir alles auf die Eigenschwingung ν_0' des bewegten Oszillators zu beziehen haben:

$$\overline{A'^2_{\nu_0' T'}} = \overline{A^2}_{\nu_0'\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi_1\right)T}\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi_1\right)$$
$$= \left\{\overline{A^2_{\nu_0' T}} + \nu_0'\frac{v}{c}\cos\varphi_1\left(\frac{d\overline{A^2}}{d\nu}\right)_{\nu_0 T}\right\}\cdot\left(1 - 2\frac{v}{c}\cos\varphi_1\right).$$

Wir drücken weiterhin die Größe $\overline{A^2}T$ durch die mittlere Strahlungsdichte ϱ aus. Die mittlere Energie einer ebenen Welle, welche aus einer bestimmten Richtung kommt, setzen wir gleich der Energiedichte in einem Kegel vom Öffnungswinkel $d\varkappa$. Nehmen wir noch Rücksicht auf die Gleichheit der elektrischen und magnetischen Kraft und auf die beiden Polarisationsebenen, so gelangen wir zu der Beziehung:

$$\varrho\frac{d\varkappa}{4\pi} = \frac{1}{8\pi}\frac{\overline{A^2}\,T}{2}.2.2.$$

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 914. 1905.

Unser Kraftausdruck wird:

$$
(8) \quad \begin{cases} \overline{k_x'} = \dfrac{3c^2}{16\pi^2} \cdot \dfrac{\sigma}{2\nu_0'} \left\{ \varrho_{\nu_0'} + \nu_0' \dfrac{v}{c} \cos\varphi_1 \left(\dfrac{d\varrho}{d\nu}\right)_{\nu_0'} \right\} \left(\cos\varphi_1 - \dfrac{v}{c}\right) \\ \qquad \left(1 - \dfrac{\sin^2\varphi_1}{1 - 2\dfrac{v}{c}\cos\varphi_1} \sin^2\omega_1\right) d\varkappa . \end{cases}
$$

Integrieren wir schließlich noch über alle Öffnungswinkel, so erhalten wir die gesuchte Gesamtkraft:

$$
(9) \qquad \overline{K} = - \frac{3 c \sigma}{10 \pi \nu_0'} v \left\{ \varrho_{\nu_0'} - \frac{\nu_0'}{3} \left(\frac{d\varrho}{d\nu}\right)_{\nu_0'} \right\} .
$$

§ 3. **Berechnung der Impulsschwankungen $\overline{\Delta^2}$.**

Die Berechnung der Impulsschwankungen läßt sich gegenüber der Kraftberechnung bedeutend vereinfachen, da eine Transformation nach der Relativitätstheorie unnötig ist.[1] Es genügt, die elektrische und magnetische Kraft im Anfangspunkt, als nur von der Zeit abhängig, in eine Fourierreihe zu entwickeln, wenn man nur den Beweis führen kann, daß die einzelnen in diesem Ausdruck auftretenden Kraftkomponenten voneinander unabhängig sind.

Der Impuls, welchen der Oszillator in der Zeit τ in der x-Richtung erfährt, ist:

$$
J = \int_0^\tau k_x \, dt = \int_0^\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial \varkappa} f - \frac{1}{c} \mathfrak{H}_y \frac{df}{dt} \right) dt .
$$

Partielle Integration ergibt:

$$
\int_0^\tau \mathfrak{H}_y \frac{df}{dt} dt = [\mathfrak{H}_y f]_0^\tau - \int_0^\tau \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} f \, dt .
$$

Der erste Summand verschwindet, wenn man τ passend wählt, bzw. wenn τ groß genug ist. Setzt man noch — nach der Maxwellschen Gleichung

$$
\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} ,
$$

so gelangt man zu dem einfachen Ausdruck:

$$
(10) \qquad J = \int_0^\tau \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} f \, dt .
$$

---

1) Die von den Unregelmäßigkeiten des Strahlungsvorganges herrührenden Impulse wechselnden Vorzeichens können nämlich für einen *ruhenden* Resonator ermittelt werden.

Nun treten in unserem Ausdruck nur die Komponente E_z und ihre Ableitung $\partial \mathfrak{E}_z / \partial x$ auf. Deren Unabhängkeit läßt sich aber leicht nachweisen. Denn betrachten wir nur zwei sich entgegenkommende Wellenzüge (vom gleichen Öffnungswinkel), so können wir schreiben:

$$E_z = \sum \left\{ a_n \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right) + b_n \cos \frac{2\pi n}{T}\left(t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right) + a_n' \sin \frac{2\pi n}{T}\left(t + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right) + b_n' \cos \frac{2\pi n}{T}\left(t + \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c}\right)\right\}$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = \sum \left\{ \frac{2\pi n \alpha}{T c}\left[- a_n \cos \frac{2\pi n}{T}(\cdots) + b_n \sin \frac{2\pi n}{T}(\cdots) + a_n' \cos \frac{2\pi n}{T}(\cdots) - b_n' \sin \frac{2\pi n}{T}(\cdots)\right]\right\}.$$

Die Größen $a_n + a_n'$, $a_n - a_n' \cdots$ sind aber voneinander unabhängig und vom selben Charakter, wie die in der vorangehenden Abhandlung mit S bezeichneten; für solche ist dort nachgewiesen, daß sich das Wahrscheinlichkeitsgesetz einer Kombination darstellt als Produkt von Gaussschen Fehlerfunktionen der einzelnen Größen. Aus dem Gesagten schließt man leicht, daß zwischen den Koeffizienten der Entwickelungen von $\mathfrak{E}_z$ und $\partial \mathfrak{E}_z / \partial x$ keinerlei Wahrscheinlichkeitsbeziehung bestehen kann.

Wir setzen nun $\mathfrak{E}_z$ und $\partial \mathfrak{E}_z / \partial x$ als Fourierreihen an:

$$\mathfrak{E}_z = \sum_m B_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} - \vartheta_n\right),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x_z} = \sum_n C_m \cos\left(2\pi m \frac{t}{T} - \xi_m\right).$$

Dann wird:

$$f = \frac{3 c^3}{16 \pi^3} T^3 \sum_n B_n \frac{\sin \gamma_n}{n^3} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} - \vartheta_n - \gamma_n\right)$$

und

$$J = \frac{3 c^3}{16 \pi^3} T^3 \int_0^\tau dt \sum_m \sum_n C_m B_n \frac{\sin \gamma_n}{n^3} \left[\cos\left\{2\pi (n+m)\frac{t}{T} - \xi_m - \vartheta_n - \gamma_n\right\} - \cos\{2\pi(n-m)t + \xi_m - \vartheta_n - \gamma_n\}\right].$$

Bei der Integration über t ergeben sich zwei Summanden mit den Faktoren $1/n+m$ und $1/n-m$; da n und m sehr große Zahlen sind, ist der erstere sehr klein, kann also vernachlässigt werden. Man gelangt so zu dem Ausdruck:

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} J = &- \frac{3\,c^3}{32\,\pi^4} T^4 \sum^m \sum^n C_m B_n \frac{\sin\gamma_n}{n^3} \frac{1}{n-m} \cos\delta_{mn} \\ &\cdot \sin\pi(n-m)\frac{\tau}{T} \end{aligned} \right.$$

mit der Abkürzung:

$$\delta_{mn} = \pi(n-m)\frac{\tau}{T} + \xi_m - \vartheta_n - \gamma_n.$$

J^2 erscheint dann als vierfache Summe über n, m und zwei weitere Variable n' und m'. Bilden wir den Mittelwert $\overline{J^2}$, so haben wir darauf zu achten, daß die Winkel δ_{mn} und $\delta_{m'n'}$ vollkommen voneinander unabhängig sind, daß also bei der Mittelwertbildung nur die Terme in Betracht kommen, bei denen diese Unabhängigkeit aufgehoben ist. Ersichtlich ist dies nur der Fall, wenn

$$m = m' \quad \text{und} \quad n = n',$$

gelangen wir zu dem gesuchten Mittelwert:

$$\overline{J^2} = \left(\frac{3\,c^3\,T^4}{32\,\pi^4}\right)^2 \sum^m \sum^n \frac{1}{2} C_m{}^2 B_n{}^2 \left(\frac{\sin\gamma_n}{n^3}\right)^2 \frac{1}{(n-m)^2} \sin^2\pi(n-m)\frac{t}{T},$$

da

$$\sum^m \frac{1}{(n-m)^2} \sin^2\pi(n-m)\frac{t}{T}$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(\nu-\mu)^2} \sin^2(\nu-\mu)\,\pi\,\tau \cdot d\mu = \frac{\pi^2\,\tau}{T}$$

und

$$\sum^n \frac{\sin^2\gamma_n}{n^6} = \frac{1}{T^5}\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma_n}{\nu^6}\,d\nu = \frac{1}{T^5}\,\frac{\sigma}{2\,\nu_0{}^5},$$

wird:

$$(12)\qquad \overline{J^2} = \left(\frac{3\,c^3}{32\,\pi^3}\right)^2 \frac{\sigma\,\tau}{4\,\nu_0{}^5}\, \overline{B^2_{\nu_0 T}}\; \overline{C^2_{\nu_0 T}}\, T^2.$$

Nun ist:

$$\overline{J^2} = \overline{(\bar{J} + \varDelta)^2} = \bar{J}^2 + 2\,\bar{J}\,\bar{\varDelta} + \overline{\varDelta^2},$$

und da die Mittelwerte $\bar{J}$ und $\bar{\varDelta}$ verschwinden, gibt Ausdruck (12) den Wert der Impulsschwankungen $\overline{\varDelta^2}$ selbst an.

Es erübrigt noch die Mittelwerte der Amplituden $B^2_{\nu_0 T}$ und $C^2_{\nu_0 T}$ durch die Strahlungsdichte ϱ_{ν_0} auszudrücken.

Zu diesem Zweck müssen wir wieder die von den verschiedenen Richtungen herkommende Strahlung betrachten und, wie oben, die Amplitude der aus einer bestimmten Richtung kommenden Strahlung mit der Energiedichte in Beziehung setzen durch die Gleichung:

$$\overline{A^2_{\nu_0 T}}\, T = \varrho_{\nu_0}\, d\varkappa\,.$$

Die Amplitude:

$$B_{\nu_0 T} = \sum A_{\nu_0 T} \sin \varphi$$

über alle Einfallswinkel, also

$$\overline{B^2_{\nu_0 T}} \cdot T = \overline{A^2_{\nu_0 T}} \cdot T \sum \sin^2 \varphi = \tfrac{8}{3} \pi\, \varrho_{\nu_0}\,. \tag{13}$$

Analog ergibt sich:

$$\overline{C^2_{\nu_0 T}}\, T = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \overline{A^2_{\nu_0 T}}\, T \sum \sin^4 \varphi \cos^2 \omega = \frac{64}{15} \frac{\pi^3 \nu_0^2}{c^2} \varrho_{\nu_0}\,. \tag{14}$$

So erhalten wir schließlich durch Einsetzen von (13) und (14) in (12):

$$\overline{\varDelta^2} = \frac{c^4 \sigma \tau}{40 \pi^2 \nu_0^3} \varrho^2_{\nu_0}\,. \tag{15}$$

§ 5. Das Strahlungsgesetz.

Wir haben jetzt nur noch die gefundenen Werte (9) und (15) in unsere Gleichung (2) einzusetzen, so gelangen wir zu der das Strahlungsgesetz enthaltenden Differentialgleichung:

$$\frac{c^3 N}{24 \pi R \Theta \nu^2} \varrho^2 = \varrho - \frac{\nu}{3} \frac{d\varrho}{d\nu}\,,$$

welche integriert ergibt:

$$\varrho = \frac{8 \pi R \Theta \nu^2}{c^3 N}\,. \tag{16}$$

Dies ist das wohlbekannte Rayleighsche Strahlungsgesetz, welches mit der Erfahrung im grellsten Widerspruche steht. In den Grundlagen unserer Ableitung muß also eine Aussage stecken, welche sich mit den wirklichen Erscheinungen bei der Temperaturstrahlung nicht im Einklang befindet.

Betrachten wir darum diese Grundlagen kritisch näher:

Man hat den Grund dafür, daß alle exakten statistischen Betrachtungen im Gebiete der Strahlungslehre zum Rayleighschen Gesetze führen, in der Anwendung dieser Betrachtungsweise auf die Strahlung selbst finden wollen. Planck[1]) hält dies Argument mit einem gewissen Recht der Jeansschen Ableitung entgegen. Bei der obigen Ableitung war aber von einer irgendwie willkürlichen Übertragung statistischer Betrachtungen auf die Strahlung gar nicht die Rede; der Satz von der Äquipartition der Energie wurde nur auf die fortschreitende Bewegung der Oszillatoren angewandt. Die Erfolge der kinetischen Gastheorie zeigen aber, daß für die fortschreitende Bewegung dieser Satz als durchaus bewiesen angesehen werden kann.

Das bei unserer Ableitung benutzte theoretische Fundament, das eine unzutreffende Annahme enthalten muß, ist also kein anderes, als das der Dispersionstheorie des Lichtes bei vollkommen durchsichtigen Körpern zugrunde liegende. Die wirklichen Erscheinungen unterscheiden sich von den aus diesem Fundament zu erschließenden Resultaten dadurch, daß bei ersteren noch Impulsschwankungen anderer Art sich bemerkbar machen, die bei kurzwelliger Strahlung von geringer Dichte die von der Theorie gelieferten ungeheuer überwiegen.[2])

Zürich, August 1910.

---

1) M. Planck, l. c. p. 178.

2) Vgl. A. Einstein, Phys. Zeitschr. **10**. p. 185ff. Das wesentlich Neue der vorliegenden Arbeit besteht darin, daß die Impulsschwankungen zum erstenmal exakt ausgerechnet wurden.

(Eingegangen 29. August 1910.)