11. *Bemerkungen zu unserer Arbeit: „Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper“; von A. Einstein und J. Laub.*

Hr. Laue war so freundlich, uns auf eine in unserer im Titel genannten Arbeit enthaltene Unrichtigkeit hinzuweisen.[1]) Wir sagen dort (Ann. d. Phys. 26. p. 535. 1908):

„Es ist bemerkenswert, daß die Grenzbedingungen für die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ an der Grenze zweier Medien dieselben sind, wie für ruhende Körper. Es folgt dies direkt aus den Gleichungen (1a) bis (4a).“

Abgesehen davon, daß für die Herleitung der Grenzbedingungen die Gleichungen (3a) und (4a) nicht in Betracht kommen, ist diese Behauptung nur dann richtig, wenn die Bewegungskomponente normal zur Grenzfläche verschwindet, was bei der im § 2 der genannten Arbeit behandelten Aufgabe tatsächlich zutrifft. Die allgemein gültigen Grenzbedingungen findet man wohl am leichtesten auf folgendem Wege, der dem von Heinrich Hertz eingeschlagenen entspricht.

Ist die Grenzfläche, oder besser gesagt, die unendlich dünne Grenzübergangsschale, beliebig bewegt, so werden sich in einem momentan in ihr gelegenen ruhenden Punkt die das elektromagnetische Feld bestimmenden Größen im allgemeinen unstetig bzw. unendlich rasch mit der Zeit ändern; diese Änderungen werden aber stetig sein für einen Punkt, der sich *mit der Materie bewegt*. Es wird also die Anwendung des Operators

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\mathfrak{v} \nabla)$$

an einem Skalar oder einem Vektor auch in der Grenzfläche

1) Hr. Laue hat uns in seinem Briefe bereits die Grenzbedingungen richtig angegeben und uns eine andere Ableitung derselben mitgeteilt.

nicht zu unendlich großen Werten führen. Schreiben wir nun die Gleichung (1a)[1]) in der Form:

$$\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{D}\right\} + \mathfrak{s} = \operatorname{curl}\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{D}$$

und nehmen wir an, daß die Stromdichte $\mathfrak{s}$ auch in der Grenzschicht endlich sei, so ist die linke Seite dieser Gleichung in der Grenzschicht endlich. Dasselbe gilt also auch für die rechte Seite der Gleichung.

Zur leichten Interpretation dieses Resultates denken wir uns das Koordinatensystem so gelegt, daß ein bestimmtes, unendlich kleines Stück der Grenzfläche, das wir nun betrachten wollen, der YZ-Ebene parallel sei. Dann ist klar, daß die Ableitungen aller Größen nach y und z in dem betrachteten Stück der Grenzfläche endlich bleiben. Es muß also auch der Inbegriff derjenigen Glieder der rechten Seite obiger Gleichung, die Differentiationen nach x enthalten, etwas Endliches liefern. Durch einfaches Entwickeln der rechten Seite und Weglassen der nach y und z differenzierten Glieder gelangt man zu dem Resultate, daß in der Grenzschicht die Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{v}_x}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} - \frac{\mathfrak{v}_x}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} + \frac{\mathfrak{v}_x}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}_z}{\partial x}$$

endlich bleiben. Setzen wir noch voraus, daß die Geschwindigkeitskomponenten an der Grenzfläche keinen Sprung erleiden, so folgt daraus, daß die Ausdrücke:

$$\mathfrak{D}_x,$$

$$\mathfrak{H}_y + \frac{\mathfrak{v}_x}{c}\mathfrak{D}_z,$$

$$\mathfrak{H}_z - \frac{\mathfrak{v}_x}{c}\mathfrak{D}_y$$

auf beiden Seiten der Grenzfläche (YZ-Ebene) denselben Wert

1) l. c.

haben. Da $\mathfrak{D}_x$ und die Komponenten von $\mathfrak{v}$ stetig sind, können wir die beiden letzten Ausdrücke auch ersetzen durch:

$$\mathfrak{H}_y - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_z \mathfrak{D}_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{D}_z),$$

$$\mathfrak{H}_z - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}_x \mathfrak{D}_y - \mathfrak{v}_y \mathfrak{D}_x).$$

Von der speziellen Wahl der Lage der Koordinatenachsen relativ zum betrachteten Element der Grenzfläche machen wir uns frei, indem wir das Resultat in den Bezeichnungen der Vektoranalysis schreiben. Bezeichnen wir durch die Indizes n bzw. $\bar{n}$ die Komponente des betreffenden Vektors im Sinne bzw. senkrecht zur Normale der Unstetigkeitsfläche, so folgt, daß

$$\mathfrak{D}_n,$$

$$\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{D}]\right\}_{\bar{n}}$$

an der Grenzfläche stetig sein müssen.

In gleicher Weise schließt man aus der Gleichung (2a)[1] die Stetigkeit der Komponenten:

$$\mathfrak{B}_n,$$

$$\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\right\}_{\bar{n}}.$$

Bern und Würzburg, November 1908.

1) l. c.

(Eingegangen 6. Dezember 1908.)

Nachtrag. Wenn an der betrachteten Grenzfläche eine Schicht wahrer Elektrizität ($\int \varrho\, d\tau$) von der Flächendichte η sich befindet, so wird $\mathfrak{s}$ unendlich. Es ist dann

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} + \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\,\triangle)\,\mathfrak{D} - \mathfrak{s}$$

in der Grenzschicht endlich, wobei $\mathfrak{s}$ durch $(\mathfrak{v}/c)\,\varrho$ ersetzt werden kann. Für diesen Fall findet man ebenfalls die obigen Grenzbedingungen, mit dem Unterschiede, daß die erste derselben durch

$$\mathfrak{D}_{n2} - \mathfrak{D}_{n1} = \eta$$

zu ersetzen ist.

(Eingegangen 19. Januar 1909.)