5. *Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper;*
von A. Einstein und J. Laub.

In einer kürzlich veröffentlichten Abhandlung[1]) hat Hr. Minkowski die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern angegeben. In Anbetracht des Umstandes, daß diese Arbeit in mathematischer Beziehung an den Leser ziemlich große Anforderungen stellt, halten wir es nicht für überflüssig, jene wichtigen Gleichungen im folgenden auf elementarem Wege, der übrigens mit dem Minkowskischen im wesentlichen übereinstimmt, abzuleiten.

§ 1. Ableitung der Grundgleichungen für bewegte Körper.

Der einzuschlagende Weg ist folgender: Wir führen zwei Koordinatensysteme K und K' ein, welche beide beschleunigungsfrei, jedoch relativ zueinander bewegt sind. Ist im Raume Materie vorhanden, die relativ zu K' ruht, gelten in bezug auf K' die Gesetze der Elektrodynamik ruhender Körper, welche durch die Maxwell-Hertzschen Gleichungen dargestellt sind. Transformieren wir diese Gleichungen auf das System K, so erhalten wir unmittelbar die elektrodynamischen Gleichungen bewegter Körper für den Fall, daß die Geschwindigkeit der Materie räumlich und zeitlich konstant ist. Die so erhaltenen Gleichungen gelten offenbar mindestens in erster Annäherung auch dann, wenn die Geschwindigkeitsverteilung der Materie eine beliebige ist. Diese Annahme rechtfertigt sich zum Teil auch dadurch, daß das auf diese Weise erhaltene Resultat streng gilt in dem Falle, daß eine Anzahl von mit verschiedenen Geschwindigkeiten gleichförmig bewegten Körpern vorhanden ist, welche voneinander durch Vakuumzwischenräume getrennt sind.

---

1) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908.

Wir wollen mit Bezug auf das System K' den Vektor der elektrischen Kraft $\mathfrak{E}'$, der magnetischen Kraft $\mathfrak{H}'$, der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}'$, der magnetischen Induktion $\mathfrak{B}'$, den des elektrischen Stromes $\mathfrak{s}'$ nennen; ferner bezeichne ϱ' die elektrische Dichte. Es mögen für das Bezugssystem K' die Maxwell-Hertzschen Gleichungen gelten:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{H}' = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'} + \mathfrak{s}'\right),$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{curl}' \mathfrak{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}'}{\partial t'},$$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{D}' = \varrho',$$

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{div}' \mathfrak{B}' = 0.$$

Wir betrachten ein zweites rechtwinkliges Bezugssystem K, dessen Achsen dauernd parallel sind denen von K'. Der Anfangspunkt von K' soll sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in der positiven Richtung der x-Achse von K bewegen. Dann gelten bekanntlich bei passend gewähltem Anfangspunkt der Zeit nach der Relativitätstheorie für jedes Punktereignis folgende Transformationsgleichungen[1]):

$$\text{(5)} \qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \beta(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \beta\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \end{aligned}\right. \qquad \left(\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

wobei x, y, z, t die Raum- und Zeitkoordinaten im System K bedeuten. Führt man die Transformationen aus, so erhält man die Gleichungen:

$$\text{(1a)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \mathfrak{s}\right),$$

$$\text{(2a)} \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

$$\text{(3a)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho,$$

$$\text{(4a)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0,$$

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17.** p. 902. 1905.

wobei gesetzt ist:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_x', \\ \mathfrak{E}_y = \beta\left(\mathfrak{E}_y' + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z'\right), \\ \mathfrak{E}_z = \beta\left(\mathfrak{E}_z' - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y'\right), \\ \mathfrak{D}_x = \mathfrak{D}_x', \\ \mathfrak{D}_y = \beta\left(\mathfrak{D}_y' + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z'\right), \\ \mathfrak{D}_z = \beta\left(\mathfrak{D}_z' - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y'\right); \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_x', \\ \mathfrak{H}_y = \beta\left(\mathfrak{H}_y' - \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z'\right), \\ \mathfrak{H}_z = \beta\left(\mathfrak{H}_z' + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_y'\right), \\ \mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_x', \\ \mathfrak{B}_y = \beta\left(\mathfrak{B}_y' - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z'\right), \\ \mathfrak{B}_z = \beta\left(\mathfrak{B}_z' + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y'\right) \end{cases}$$

und

$$(8)\quad \varrho = \beta\left(\varrho' + \frac{v}{c}\mathfrak{s}_x'\right),$$

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{s}_x = \beta\left(\mathfrak{s}_x' + \frac{v}{c}\varrho'\right), \\ \mathfrak{s}_y = \mathfrak{s}_y', \\ \mathfrak{s}_z = \mathfrak{s}_z'. \end{cases}$$

Will man die Ausdrücke für die gestrichenen Größen als Funktion der ungestrichenen haben, so vertauscht man die gestrichenen und ungestrichenen Größen und ersetzt v durch $-v$.

Die Gleichungen (1a) bis (4a), welche die elektromagnetischen Vorgänge relativ zum System K beschreiben, haben dieselbe Gestalt, wie die Gleichungen (1) bis (4). *Wir wollen daher die Größen*

$$\mathfrak{E},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{H},\ \mathfrak{B},\ \varrho,\ \mathfrak{s}$$

analog benennen, *wie die entsprechenden Größen relativ zum System K'. Es sind also $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, ϱ, $\mathfrak{s}$ die elektrische Kraft, die dielektrische Verschiebung, die magnetische Kraft, die magne-*

tische Induktion, die elektrische Dichte, der elektrische Strom in bezug auf K.

Die Transformationsgleichungen (6) und (7) reduzieren sich für das Vakuum auf die früher gefundenen[1]) Gleichungen für elektrische und magnetische Kräfte.

Es ist klar, daß man durch wiederholte Anwendung solcher Transformationen, wie die soeben durchgeführte, stets auf Gleichungen von derselben Gestalt wie die ursprünglichen (1) bis (4) kommen muß, und daß für solche Transformationen die Gleichungen (6) bis (9) maßgebend sind. Denn es wurde bei der ausgeführten Transformation in formaler Beziehung nicht davon Gebrauch gemacht, daß die Materie relativ zu dem ursprünglichen System K' ruhte.

Die Gültigkeit der transformierten Gleichungen (1a) bis (4a) nehmen wir an auch für den Fall, daß die Geschwindigkeit der Materie räumlich und zeitlich variabel ist, was in erster Annäherung richtig sein wird.

Es ist bemerkenswert, daß die Grenzbedingungen für die Vektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ an der Grenze zweier Medien dieselben sind, wie für ruhende Körper. Es folgt dies direkt aus den Gleichungen (1a) bis (4a).

Die Gleichungen (1a) bis (4a) gelten genau wie die Gleichungen (1) bis (4) ganz allgemein für inhomogene und anisotrope Körper. Dieselben bestimmen die elektromagnetischen Vorgänge noch nicht vollständig. Es müssen vielmehr noch Beziehungen gegeben sein, welche die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{s}$ als Funktion von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ ausdrücken. Solche Gleichungen wollen wir nun für den Fall angeben, daß die *Materie isotrop* ist. Betrachten wir zunächst wieder den Fall, daß alle Materie relativ zu K' ruht, so gelten in bezug auf K' die Gleichungen:

$$\mathfrak{D}' = \varepsilon \mathfrak{E}', \tag{10}$$

$$\mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}', \tag{11}$$

$$\mathfrak{s}' = \sigma \mathfrak{E}', \tag{12}$$

wobei $\varepsilon =$ Dielektrizitätskonstante, $\mu =$ Permeabilität, $\sigma =$ elektrische Leitfähigkeit als bekannte Funktionen von x', y', z', t' anzusehen sind. Durch die Transformation von (10) bis (12)

1) A. Einstein, l. c. p. 909.

auf K mittels der Umkehrung unserer Transformationsgleichungen (6) bis (9) erhält man die für das System K geltenden Beziehungen:

$$(10\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{D}_x = \varepsilon\,\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{D}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{H}_z = \varepsilon\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right), \\ \mathfrak{D}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y = \varepsilon\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right), \end{cases}$$

$$(11\mathrm{a})\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_x = \mu\,\mathfrak{H}_x, \\ \mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z = \mu\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z\right), \\ \mathfrak{B}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{E}_y = \mu\left(\mathfrak{H}_z - \frac{v}{c}\mathfrak{D}_y\right), \end{cases}$$

$$(12\mathrm{a})\quad \begin{cases} \beta\left(\mathfrak{s}_x - \frac{v}{c}\varrho\right) = \sigma\,\mathfrak{E}_x, \\ \mathfrak{s}_y = \sigma\beta\left(\mathfrak{E}_y - \frac{v}{c}\mathfrak{B}_z\right), \\ \mathfrak{s}_z = \sigma\beta\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right), \end{cases}$$

Ist die Geschwindigkeit der Materie nicht der X-Achse parallel, sondern ist diese Geschwindigkeit durch den Vektor $\mathfrak{v}$ bestimmt, so erhält man die mit den Gleichungen (10a) bis (12a) gleichartigen vektoriellen Beziehungen:

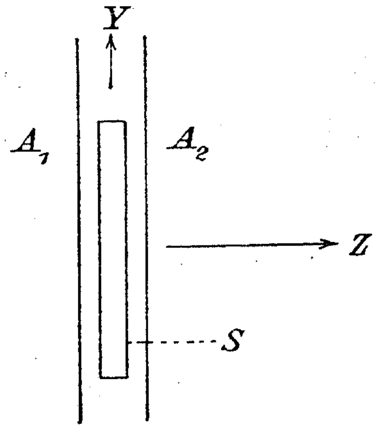
$$(13)\quad \begin{cases} \mathfrak{D} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}] = \varepsilon\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\right\}, \\ \mathfrak{B} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{E}] = \mu\left\{\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{D}]\right\}, \\ \beta\left(\mathfrak{s}_{\mathfrak{v}} - \frac{|\mathfrak{v}|}{c}\varrho\right) = \sigma\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\right\}_{\mathfrak{v}}, \\ \mathfrak{s}_{\bar{\mathfrak{v}}} = \sigma\beta\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\,\mathfrak{B}]\right\}_{\bar{\mathfrak{v}}}, \end{cases}$$

wobei der Index $\mathfrak{v}$ bedeutet, daß die Komponente nach der Richtung von $\mathfrak{v}$, der Index $\bar{\mathfrak{v}}$, daß die Komponenten nach den auf $\mathfrak{v}$ senkrechten Richtungen $\bar{\mathfrak{v}}$ zu nehmen ist.

§ 2. Über das elektromagnetische Verhalten bewegter Dielektrika. Versuch von Wilson.

Im folgenden Abschnitt wollen wir noch an einem einfachen Spezialfall zeigen, wie sich bewegte Dielektrika nach der Relativitätstheorie verhalten, und worin sich die Resultate von den durch die Lorentzsche Theorie gelieferten, unterscheiden.

Es sei S ein im Querschnitt angedeuteter, prismatischer Streifen (vgl. Figur) aus einem homogenen, isotropen Nichtleiter, der sich senkrecht zur Papierebene in beiderlei Sinn ins Unendliche erstreckt und sich vom Beschauer nach der Papierebene zu mit der konstanten Geschwindigkeit v zwischen den beiden Kondensatorplatten A_1 und A_2 hindurchbewegt. Die Ausdehnung des Streifens S senkrecht zu den Platten A sei unendlich klein relativ zu dessen Ausdehnung parallel den Platten und zu beiden Ausdehnungen der Platten A; der Zwischenraum zwischen S und den Platten A (im folgenden kurz Zwischenraum genannt) sei außerdem gegenüber der Dicke von S zu vernachlässigen.



Das betrachtete Körpersystem beziehen wir auf ein relativ zu den Platten A ruhendes Koordinatensystem, dessen positive X-Richtung in die Bewegungsrichtung falle, und dessen Y- und Z-Achsen parallel bzw. senkrecht zu den Platten A sind. Wir wollen das elektromagnetische Verhalten des zwischen den Platten A sich befindenden Streifenstückes untersuchen, falls der elektromagnetische Zustand stationär ist.

Wir denken uns eine geschlossene Fläche, welche gerade den wirksamen Teil der Kondensatorplatten nebst dem des dazwischen liegenden Streifenstückes einschließt. Da sich innerhalb dieser Fläche weder bewegte wahre Ladungen, noch elektrische Leitungsströme befinden, gelten die Gleichungen (vgl. Gleichungen (1a) bis (4a)):

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 0\,,$$
$$\operatorname{curl} \mathfrak{E} = 0\,.$$

Innerhalb dieses Raumes sind also sowohl die elektrische, wie auch die magnetische Kraft von einem Potential ableitbar. Wir können daher sofort die Verteilung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, falls die Verteilung der freien elektrischen bzw. magnetischen Dichte bekannt ist. Wir beschränken uns auf die Betrachtung des Falles, daß die magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ parallel der Y-Achse ist, die elektrische $\mathfrak{E}$ parallel der Z-Achse. Dazu, sowie zu der Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden Felder innerhalb des Streifens, sowie innerhalb des Zwischenraumes homogen sind, berechtigen uns die oben erwähnten Größenordnungsbedingungen für die Abmessungen des betrachteten Systems. Ebenso schließen wir unmittelbar, daß die an den Enden des Streifenquerschnittes sich befindenden magnetischen Massen nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum magnetischen Feld liefern.[1]) Die Gleichungen (13) geben dann für das Innere des Streifens folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{D}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{H}_y = \varepsilon\left(\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}\mathfrak{B}_y\right),$$

$$\mathfrak{B}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{E}_z = \mu\left(\mathfrak{H}_y + \frac{v}{c}\mathfrak{D}_z\right).$$

Diese Gleichungen lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{B}_y &= \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{E}_z + \mu\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{H}_y, \\ \left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z &= \varepsilon\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\,\mathfrak{H}_y. \end{aligned}\right.$$

Zur Deutung von (1) bemerken wir folgendes: An der Oberfläche des Streifens erfährt die dielektrische Verschiebung $\mathfrak{D}_z$ keinen Sprung, also ist $\mathfrak{D}_z$ die Ladung der Kondensatorplatten (genauer der Platte A_1) pro Flächeneinheit. Ferner ist $\mathfrak{E}_z \times \delta$ gleich der Potentialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten A_1 und A_2, falls δ den Abstand der Platten bezeichnet, denn denkt man sich den Streifen durch einen parallel der XZ-Ebene verlaufenden unendlich engen Spalt getrennt, so ist $\mathfrak{E}_z$ nach den für diesen Vektor geltenden Grenzbedingungen, gleich der elektrischen Kraft in dem Spalt.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, daß ein von außen erregtes Magnetfeld nicht vorhanden ist, d. h. nach dem obigen, daß in dem betrachteten Raume die magnetische Feldstärke $\mathfrak{H}_y$

---

1) Es erhellt dies auch daraus, daß wir ohne wesentliche Änderung der Verhältnisse den Kondensatorplatten und dem Streifen Kreiszylinderform geben könnten, in welchem Falle freie magnetische Massen aus Symmetriegründen überhaupt nicht auftreten könnten.

überhaupt verschwindet. Dann haben die Gleichungen (1) folgende Gestalt:

$$\left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{B}_y = \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{E}_z,$$

$$\left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z = \varepsilon\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z.$$

Da $v < c$ sein muß, so sind, falls $\varepsilon\mu - 1 > 0$ ist, die Koeffizienten von $\mathfrak{E}_z$ in den beiden letzten Gleichungen positiv. Die Koeffizienten von $\mathfrak{B}_y$ und $\mathfrak{D}_z$ sind dagegen größer, gleich bzw. kleiner als Null, je nachdem die Streifengeschwindigkeit kleiner, gleich oder größer als $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, d. h. als die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen in dem Streifenmedium, ist. Hat also $\mathfrak{E}_z$ einen bestimmten Wert, d. h. legt man an die Kondensatorplatten eine bestimmte Spannung an und variiert man die Streifengeschwindigkeit von kleineren zu größeren Werten, so wächst zunächst sowohl die dem Vektor $\mathfrak{D}$ proportionale Ladung der Kondensatorplatten, wie die magnetische Induktion $\mathfrak{B}$ im Streifen. Erreicht v den Wert $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, so wird sowohl die Ladung des Kondensators, wie auch die magnetische Induktion unendlich groß. Es würde also in diesem Falle eine Zerstörung des Streifens durch beliebig kleine angelegte Potentialdifferenzen stattfinden. Für alle $v > c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ resultiert ein negativer Wert für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}$. In dem letzten Falle würde also eine an die Kondensatorplatten gelegte Spannung eine Ladung des Kondensators in dem der Spannungsdifferenz entgegengesetzten Sinne bewirken.

Wir betrachten jetzt noch den Fall, daß ein von außen erregtes magnetisches Feld $\mathfrak{H}_y$ vorhanden ist. Dann hat man die Gleichung:

$$\left(1 - \varepsilon\mu\frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{D}_z = \varepsilon\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{H}_y,$$

welche bei gegebenem $\mathfrak{H}_y$ eine Beziehung zwischen $\mathfrak{E}_z$ und $\mathfrak{D}_z$ gibt. Beschränkt man sich nur auf Größen erster Ordnung in v/c, so hat man:

$$\mathfrak{D}_z = \varepsilon\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{H}_y, \tag{2}$$

während die Lorentzsche Theorie auf den Ausdruck:

$$\mathfrak{D}_z = \varepsilon\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon - 1)\mu\mathfrak{H}_y \tag{3}$$

führt.

Die letzte Gleichung wurde bekanntlich von H. A. Wilson (Wilsoneffekt) experimentell geprüft. Man sieht, daß sich (2) und (3) in Gliedern erster Ordnung unterscheiden. Hätte man einen dielektrischen Körper von beträchtlicher Permeabilität, so könnte man eine experimentelle Entscheidung zwischen den Gleichungen (2) und (3) treffen.

Verbindet man die Platten A_1 und A_2 durch einen Leiter, so tritt auf den Kondensatorplatten eine Ladung von der Größe $\mathfrak{D}_z$ pro Flächeneinheit auf; man erhält sie aus der Gleichung (2), indem man berücksichtigt, daß bei verbundenen Kondensatorplatten $\mathfrak{E}_z = 0$ ist. Es ergibt sich:

$$\mathfrak{D}_z = \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{H}_y.$$

Verbindet man die Kondensatorplatten A_1 und A_2 mit einem Elektrometer von unendlich kleiner Kapazität, so ist $\mathfrak{D}_z = 0$, und man bekommt für die Spannung $(\mathfrak{E}_z . \delta)$ die Gleichung:

$$0 = \varepsilon\mathfrak{E}_z + \frac{v}{c}(\varepsilon\mu - 1)\mathfrak{H}_y.$$

Bern, 29. April 1908.

(Eingegangen 2. Mai 1908.)