12. *Über die vom Relativitätsprinzip geforderte Trägheit der Energie;* *von A. Einstein.*

Das Relativitätsprinzip führt in Verbindung mit den Maxwellschen Gleichungen zu der Folgerung, daß die Trägheit eines Körpers mit dessen Energieinhalt in ganz bestimmter Weise wachse bez. abnehme. Betrachtet man nämlich einen Körper, der gleichzeitig nach zwei entgegengesetzten Richtungen eine bestimmte Strahlungsenergie aussendet, und untersucht man diesen Vorgang von zwei relativ zueinander gleichförmig bewegten Koordinatensystemen aus[1]), von denen das eine relativ zu dem Körper ruht, und wendet man auf den Vorgang — von beiden Koordinatensystemen aus — das Energieprinzip an, so gelangt man zu dem Resultat, daß einem Energiezuwachs ΔE des betrachteten Körpers stets ein Massenzuwachs $\Delta E / V^2$ entsprechen müsse, wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

Der Umstand, daß der dort behandelte spezielle Fall eine Annahme von so außerordentlicher Allgemeinheit (über die Abhängigkeit der Trägheit von der Energie) notwendig macht, fordert dazu auf, in allgemeinerer Weise die Notwendigkeit bez. Berechtigung der genannten Annahme zu prüfen. Insbesondere erhebt sich die Frage: Führen nicht andere spezielle Fälle zu mit der genannten Annahme unvereinbaren Folgerungen? Einen ersten Schritt in dieser Hinsicht habe ich letztes Jahr unternommen[2]), indem ich zeigte, daß jene Annahme den Widerspruch der Elektrodynamik mit dem Prinzip von der Konstanz der Schwerpunktsbewegung (mindestens was die Glieder erster Ordnung anbelangt) aufhebt.

Die *allgemeine* Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist darum vorläufig nicht möglich, weil wir ein vollständiges, dem

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 18. p. 639. 1905.
2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 20. p. 627. 1906.

Relativitätsprinzip entsprechendes Weltbild einstweilen nicht besitzen. Wir müssen uns vielmehr auf die speziellen Fälle beschränken, welche wir ohne Willkür vom Standpunkt der Relativitätselektrodynamik gegenwärtig behandeln können. Zwei solche Fälle werden wir im folgenden betrachten; bei dem ersten derselben besteht das System, dessen träge Masse untersucht werden soll, in einem starren, starr elektrisierten Körper, bei dem zweiten Fall aus einer Anzahl gleichförmig bewegter Massenpunkte, welche aufeinander keine Kräfte ausüben.

Bevor ich mit der Untersuchung beginne, muß ich hier noch eine Bemerkung über den mutmaßlichen Gültigkeitsbereich der Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum einschieben, um einem naheliegenden Einwand zu begegnen. In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, daß unser heutiges elektromechanisches Weltbild nicht geeignet ist, die Entropieeigenschaften der Strahlung sowie die Gesetzmäßigkeiten der Emission und Absorption der Strahlung und die der spezifischen Wärme zu erklären; es ist vielmehr nach meiner Meinung nötig anzunehmen, daß die Beschaffenheit eines jeglichen periodischen Prozesses eine derartige ist, daß eine Umsetzung der Energie nur in bestimmten Quanten von endlicher Größe (Lichtquanten) vor sich gehen kann, daß also die Mannigfaltigkeit der in Wirklichkeit möglichen Prozesse eine kleinere ist als die Mannigfaltigkeit der im Sinne unserer heutigen theoretischen Anschauungen möglichen Prozesse.[1]) Einen Strahlungsvorgang im besonderen hätten wir uns so zu denken, daß der momentane elektromagnetische Zustand in einem Raumteile durch eine *endliche* Zahl von Größen vollständig bestimmt sei — im Gegensatze zur Vektorentheorie der Strahlung. Solange wir jedoch nicht im Besitz eines Bildes sind, welches den genannten Forderungen entspricht, werden wir uns naturgemäß in allen Fragen, welche nicht Entropieverhältnisse sowie Umwandlungen elementar kleiner Energiemengen betreffen, der gegenwärtigen Theorie bedienen, ohne fürchten zu müssen, dadurch zu unrichtigen Resultaten zu gelangen. Wie ich mir die heutige Sachlage in diesen Fragen denke, kann

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **17**. p. 132. 1905; **20**. p. 199. 1906 und **22**. p. 180. 1907.

ich am anschaulichsten durch folgenden fingierten Fall illustrieren.

Man denke sich, daß die molekularkinetische Theorie der Wärme noch nicht aufgestellt, daß aber mit voller Sicherheit nachgewiesen sei, daß die Brownsche Bewegung (Bewegung von in Flüssigkeiten suspendierten Teilchen) nicht auf äußerer Energiezufuhr beruhe, sondern daß klar erkannt sei, daß jene Bewegungen mit Hilfe der Mechanik und Thermodynamik nicht erklärt werden können. Man würde bei dieser Sachlage mit Recht zu dem Schlusse geführt, daß eine tiefgreifende Änderung der theoretischen Grundlagen Platz greifen müsse. Trotzdem würde sich aber niemand scheuen, bei Behandlung aller Fragen, welche sich nicht auf Momentanzustände in kleinen Raumteilen beziehen, die Grundgleichungen der Mechanik und Thermodynamik anzuwenden. In diesem Sinne können wir nach meiner Meinung mit Zuversicht unsere Betrachtungen auf die Maxwellschen Gleichungen stützen.

Es scheint mir in der Natur der Sache zu liegen, daß das Nachfolgende zum Teil bereits von anderen Autoren klargestellt sein dürfte. Mit Rücksicht darauf jedoch, daß hier die betreffenden Fragen von einem neuen Gesichtspunkt aus behandelt sind, glaubte ich, von einer für mich sehr umständlichen Durchmusterung der Literatur absehen zu dürfen, zumal zu hoffen ist, daß diese Lücke von anderen Autoren noch ausgefüllt werden wird, wie dies in dankenswerter Weise bei meiner ersten Arbeit über das Relativitätsprinzip durch Hrn. Planck und Hrn. Kaufmann bereits geschehen ist.

§ 1. Über die kinetische Energie eines in gleichförmiger Translation begriffenen, äußeren Kräften unterworfenen starren Körpers.

Wir betrachten einen in gleichförmiger Translationsbewegung (Geschwindigkeit v) in Richtung der wachsenden x-Koordinate eines ruhend gedachten Koordinatensystems (x, y, z) befindlichen starren Körper. Wirken äußere Kräfte nicht auf ihn, so ist nach der Relativitätstheorie seine kinetische Energie K_0 gegeben durch die Gleichung[1])

---

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 917ff. 1905.

$$K_0 = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\},$$

wobei μ seine Masse (im gewöhnlichen Sinne) und V die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Wir wollen nun zeigen, daß nach der Relativitätstheorie dieser Ausdruck nicht mehr gilt, falls äußere Kräfte auf den Körper wirken, welche einander das Gleichgewicht halten. Um den Fall behandeln zu können, müssen wir voraussetzen, daß jene Kräfte elektrodynamische seien. Wir denken uns daher den Körper starr elektrisiert (mit kontinuierlich verteilter Elektrizität), und es wirke auf ihn ein elektromagnetisches Kraftfeld. Die elektrische Dichte denken wir uns allenthalben als sehr gering und das Kraftfeld als intensiv, derart, daß die den Wechselwirkungen zwischen den elektrischen Massen des Körpers entsprechenden Kräfte gegenüber den vom äußeren Kraftfelde auf die elektrischen Ladungen des Körpers ausgeübten Kräfte vernachlässigt werden können.[1]) Die von dem Kraftfeld auf den Körper zwischen den Zeiten t_0 und t_1 übertragene Energie ΔE ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\Delta E = \int_{t_0}^{t_1} d\,t \int v\, X \frac{\varrho}{4\,\pi}\, d\,x\, d\,y\, d\,z,$$

wobei das Raumintegral über den Körper zu erstrecken und

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

gesetzt ist. Diesen Ausdruck transformieren wir nach den in der oben zitierten Abhandlung angegebenen Transformationsgleichungen[2]) auf dasjenige Ort-Zeitsystem (ξ, η, ζ, τ), welches einem relativ zu dem Körper ruhenden, zu (x, y, z) parallelachsigen Koordinatensystem entspricht. Man erhält so in einer Bezeichnung, welche der in jener Abhandlung benutzten genau entspricht, nach einfacher Rechnung

$$\Delta E = \int\int \beta\, v\, X' \frac{\varrho'}{4\,\pi}\, d\,\xi\, d\,\eta\, d\,\zeta\, d\,\tau,$$

1) Wir führen diese Annahme ein, um annehmen zu können, daß die wirkenden Kräfte vermöge der Art, wie sie erzeugt sind, keinen beschränkenden Bedingungen unterworfen seien.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. §§ 3 u. 6. 1905.

wobei β wie dort den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

bedeutet. Es ist zu beachten, daß gemäß unseren Voraussetzungen die Kräfte X' keine beliebigen sein dürfen. Sie müssen vielmehr zu jeder Zeit so beschaffen sein, daß der betrachtete Körper keine Beschleunigung erfährt. Hierfür erhält man nach einem Satze der Statik die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung, daß von einem mit dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet die Summe der X-Komponenten der auf den Körper wirkenden Kräfte stets verschwindet. Man hat also für jedes τ:

$$\int X' \varrho' \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 0 .$$

Wären also die Grenzen für τ in dem obigen Integralausdruck für ΔE von ξ, η, ζ unabhängig, so wäre $\Delta E = 0$. Dies ist jedoch nicht der Fall. Aus der Transformationsgleichung

$$t = \beta\left(\tau + \frac{v}{V^2}\xi\right)$$

folgt nämlich unmittelbar, daß die Zeitgrenzen im bewegten System sind:

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi .$$

Wir denken uns das Integral im Ausdruck für ΔE in drei Teile zerlegt.

Der erste Teil umfasse die Zeiten τ zwischen

$$\frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \frac{t_0}{\beta},$$

der zweite Teil zwischen

$$\frac{t_0}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{t_1}{\beta},$$

der dritte zwischen

$$\frac{t_1}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi .$$

Der zweite Teil verschwindet, weil er von ξ, η, ζ unabhängige Zeitgrenzen hat. Der erste und dritte Teil hat überhaupt nur dann einen bestimmten Wert, wenn die Annahme gemacht wird, daß in der Nähe der Zeiten $t = t_0$ und $t = t_1$ die auf den Körper wirkenden Kräfte von der Zeit unabhängig seien, derart, daß für alle Punkte des starren Körpers zwischen den Zeiten

$$\tau = \frac{t_0}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_0}{\beta}$$

bez. zwischen

$$\tau = \frac{t_1}{\beta} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t_1}{\beta} - \frac{v}{V^2}\xi$$

die elektrische Kraft X' von der Zeit unabhängig ist. Nennt man X_0' bez. X_1' die in diesen beiden Zeiträumen vorhandenen X', so erhält man:

$$\Delta E = -\int \frac{v^2}{V^2}\beta \frac{\xi X_1' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta + \int \frac{v^2}{V^2}\beta \frac{\xi X_0' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Nimmt man ferner an, daß am Anfang $(t = t_0)$ keine Kräfte auf den Körper wirken, so verschwindet das zweite dieser Integrale. Mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{X_1' \varrho'}{4\pi} d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

die ξ-Komponente K_ξ der auf das Raumelement wirkenden ponderomotorischen Kraft ist, erhält man

$$\Delta E = -\frac{\left(\frac{v}{V}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \sum (\xi K_\xi),$$

wobei die Summe über alle Massenelemente des Körpers zu erstrecken ist.

Wir haben also folgendes merkwürdige Resultat erhalten. Setzt man einen starren Körper, auf den ursprünglich keine Kräfte wirken, dem Einflusse von Kräften aus, welche dem Körper keine Beschleunigung erteilen, so leisten diese Kräfte — von einem relativ zu dem Körper bewegten Koordinatensystem aus betrachtet — eine Arbeit ΔE auf den Körper, welche lediglich abhängt von der endgültigen Kräfteverteilung und der Translationsgeschwindigkeit. Nach dem Energieprinzip folgt hieraus unmittelbar, daß die kinetische Energie eines Kräften unterworfenen starren Körpers um ΔE größer ist als die kinetische Energie desselben, ebenso rasch bewegten Körpers, falls keine Kräfte auf denselben wirken.

§ 2. Über die Trägheit eines elektrisch geladenen starren Körpers.

Wir betrachten abermals einen starren, starr elektrisierten Körper, welcher eine gleichförmige Translationsbewegung im Sinne der wachsenden x-Koordinaten eines „ruhenden" Koordinatensystems ausführt (Geschwindigkeit v). Ein äußeres elektromagnetisches Kraftfeld sei nicht vorhanden. Wir wollen indessen jetzt das von den elektrischen Massen des Körpers erzeugte elektromagnetische Feld berücksichtigen. Wir berechnen zunächst die elektromagnetische Energie

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int (X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Zu diesem Zweck transformieren wir diesen Ausdruck unter Benutzung der in der mehrfach zitierten Abhandlung enthaltenen Transformationsgleichungen, indem wir unter dem Integral Größen einführen, welche sich auf ein mit dem Körper bewegtes Koordinatensystem beziehen. Wir erhalten so:

$$E_e = \frac{1}{8\pi}\int \frac{1}{\beta}\left[X'^2 + \frac{1 + \left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}(Y'^2 + Z'^2)\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Es ist zu beachten, daß der Wert dieses Ausdruckes abhängt von der Orientierung des starren Körpers relativ zur Bewegungsrichtung. Wenn sich daher die gesamte kinetische Energie des elektrisierten Körpers ausschließlich zusammensetzte aus der kinetischen Energie K_0, welche dem Körper wegen seiner ponderabeln Masse zukommt, und dem Überschuß der elektromagnetischen Energie des bewegten Körpers über die elektrostatische Energie des Körpers für den Fall der Ruhe, so wären wir damit zu einem Widerspruche gelangt, wie leicht aus folgendem zu ersehen ist.

Wir denken uns, der betrachtete Körper sei relativ zu dem mitbewegten Koordinatensystem in unendlich langsamer Drehung begriffen, ohne daß äußere Einwirkungen während dieser Bewegung auf ihn stattfinden. Es ist klar, daß diese

Bewegung kräftefrei möglich sein muß, da ja nach dem Relativitätsprinzip die Bewegungsgesetze des Körpers relativ zu dem mitbewegten System dieselben sind wie die Bewegungsgesetze in bezug auf ein „ruhendes“ System. Wir betrachten nun den gleichförmig bewegten und unendlich langsam sich drehenden Körper vom „ruhenden“ System aus. Da die Drehung unendlich langsam sein soll, trägt sie zur kinetischen Energie nichts bei. Der Ausdruck der kinetischen Energie ist daher in dem betrachteten Fall derselbe wie wenn keine Drehung, sondern ausschließlich gleichförmige Paralleltranslation stattfände. Da nun der Körper relativ zur Bewegungsrichtung im Laufe der Bewegung verschiedene (beliebige) Lagen annimmt, und während der ganzen Bewegung das Energieprinzip gelten muß, so ist klar, daß eine Abhängigkeit der kinetischen Energie eines in Translationsbewegung begriffenen elektrisierten Körpers von der Orientierung unmöglich ist.

Dieser Widerspruch wird durch die Resultate des vorigen Paragraphen beseitigt. Die kinetische Energie des betrachteten Körpers kann nämlich nicht berechnet werden wie die eines starren Körpers, auf den keine Kräfte wirken. Wir haben vielmehr gemäß § 1 zu berücksichtigen, daß unser starrer Körper Kräften unterworfen ist, welche ihre Ursache in der Wechselwirkung zwischen den elektrischen Massen haben. Bezeichnen wir also mit K_0 die kinetische Energie für den Fall, daß keine elektrischen Ladungen vorhanden sind, so erhalten wir für die gesamte kinetische Energie K des Körpers den Ausdruck

$$K = K_0 + \Delta E + (E_e - E_s),$$

wobei E_s die elektrostatische Energie des betrachteten Körpers im Zustand der Ruhe bedeutet. In unserem Falle hat man

$$\Delta E = -\frac{v^2}{V^2}\beta\,\frac{1}{4\pi}\int \xi\, X'\left(\frac{\partial X'}{\partial \xi} + \frac{\partial Y'}{\partial \eta} + \frac{\partial Z'}{\partial \zeta}\right) d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

woraus man durch partielle Integration mit Berücksichtigung des Umstandes, daß X', Y', Z' von einem Potential ableitbar sind, erhält

$$\Delta E = \frac{v^2}{V^2}\beta\,\frac{1}{8\pi}\int (X'^2 - Y'^2 - Z'^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Berücksichtigt man die im § 1 angegebenen Ausdrücke für K_0 und β, so erhält man für die kinetische Energie des elektrisierten starren Körpers den Ausdruck

$$K = \left(\mu + \frac{E_s}{V^2}\right) \cdot V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right).$$

Dieser Ausdruck ist, wie es sein muß, von der Orientierung des Körpers relativ zur Translationsrichtung unabhängig. Vergleicht man den Ausdruck für K mit dem für die Energie K_0 eines nicht elektrisch geladenen Körpers

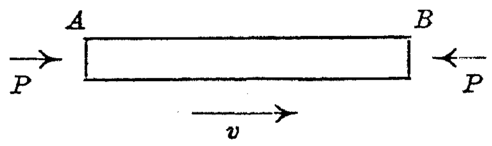
$$K_0 = \mu V^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1\right),$$

so erkennt man, daß der elektrostatisch geladene Körper eine träge Masse besitzt, welche die des nicht geladenen Körpers um die durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit dividierte elektrostatische Energie übertrifft. Der Satz von der Trägheit der Energie wird also durch unser Resultat in dem behandelten speziellen Fall bestätigt.

§ 3. Bemerkungen betreffend die Dynamik des starren Körpers.

Nach dem Vorangehenden könnte es scheinen, als ob wir von dem Ziele, eine dem Relativitätsprinzip entsprechende Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu schaffen, nicht mehr weit entfernt wären. Man muß sich indessen daran erinnern, daß die im § 1 ausgeführte Untersuchung die Energie des Kräften unterworfenen starren Körpers nur für den Fall lieferte, daß jene Kräfte zeitlich konstant sind. Wenn zur Zeit t_1 die Kräfte X' von der Zeit abhängen, so erweist sich die Arbeit ΔE, also auch die Energie des starren Körpers, nicht nur als abhängig von denjenigen Kräften, welche zu *einer* bestimmten Zeit herrschen.

Um die hier vorliegende Schwierigkeit möglichst drastisch zu beleuchten, denken wir uns folgenden einfachen Spezialfall. Wir betrachten einen starren Stab AB, welcher relativ zu einem Koordinatensystem (ξ, η, ζ) ruhe, wobei die Stabachse in der ζ-Achse ruhe. Zu einer bestimmten Zeit τ_0 mögen auf die Stabenden für ganz kurze Zeit entgegengesetzt gleiche Kräfte P wirken, während der Stab in allen übrigen Zeiten Kräften nicht unterworfen sei. Es ist klar, daß die genannte, zur Zeit τ_0 auf den Stab ausgeübte Wirkung eine Bewegung des Stabes *nicht* erzeugt. Wir betrachten nun genau denselben Vorgang von einem zum vorher benutzten parallelachsigen Koordinatensystem aus, relativ zu welchem sich unser Stab in der Richtung A—B mit der Geschwindigkeit v bewegt. Von dem letztgenannten Koordinatensystem aus beurteilt, wirken nun aber die Kraftimpulse in A und B nicht gleichzeitig; der Impuls in B ist vielmehr gegen den Impuls in A verspätet um $l\beta(v/V^2)$ Zeiteinheiten, wobei l die (ruhend gemessene) Stablänge bedeutet. Wir sind also zu dem folgenden sonderbar aussehenden Resultat gekommen. Auf den bewegten Stab AB wirkt zuerst in A ein Kraftimpuls und darauf nach einiger Zeit ein entgegengesetzter in B. Diese beiden Kraftimpulse kompensieren einander derart, daß die Bewegung des Stabes durch sie nicht modifiziert wird. Noch merkwürdiger erscheint der Fall, wenn wir nach der Energie des Stabes fragen zu einer Zeit, in welcher der Impuls in A bereits vorbei ist, während der Impuls in B noch nicht zu wirken begonnen hat. Der Impuls in A hat auf den Stab Arbeit übertragen (weil der Stab bewegt ist); um diese Arbeit muß sich also die Energie des Stabes vermehrt haben. Gleichwohl hat sich weder die Geschwindigkeit des Stabes noch sonst eine auf ihn Bezug habende Größe, von der wir die Energiefunktion des Stabes abhängen lassen könnten, geändert. Es scheint also eine Verletzung des Energieprinzipes vorzuliegen.



Die *prinzipielle* Lösung dieser Schwierigkeit liegt auf der Hand. Indem wir implizite annehmen, durch die auf den Stab wirkenden Kräfte und durch die in demselben Augenblick herrschende Stabgeschwindigkeit den Momentanzustand des Stabes vollständig bestimmen zu können, nehmen wir an, daß ein Geschwindigkeitszuwachs des Körpers durch die ihn erzeugende, irgendwo am Körper angreifende Kraft *momentan* erzeugt werde, daß also die Ausbreitung der auf einen Punkt des Körpers ausgeübten Kraft über den ganzen Körper keine

Zeit erfordere. Eine derartige Annahme ist, wie nachher gezeigt wird, mit dem Relativitätsprinzip nicht vereinbar. Wir sind also in unserem Falle offenbar genötigt, bei Einwirkung des Impulses in A eine Zustandsänderung unbekannter Qualität im Körper anzunehmen, welche sich mit endlicher Geschwindigkeit in demselben ausbreitet und in kurzer Zeit eine Beschleunigung des Körpers bewirkt, falls innerhalb dieser Zeit nicht noch andere Kräfte auf den Körper wirken, deren Wirkungen die der erstgenannten kompensieren. Wenn also die Relativitätselektrodynamik richtig ist, sind wir noch weit davon entfernt, eine Dynamik der Paralleltranslation des starren Körpers zu besitzen.

Wir wollen nun zeigen, daß nicht nur die Annahme *momentaner* Ausbreitung irgend einer Wirkung, sondern allgemeiner jede Annahme von der Ausbreitung einer Wirkung mit Überlichtgeschwindigkeit mit der Relativitätstheorie nicht vereinbar ist.

Längs der x-Achse eines Koordinatensystems (x, y, z) erstrecke sich ein Materialstreifen, relativ zu welchem sich eine gewisse Wirkung mit der Geschwindigkeit W fortzupflanzen vermöge, und es möge sowohl in $x = 0$ (Punkt A) als auch in $x = + l$ (Punkt B) sich je ein relativ zum Koordinatensystem (x, y, z) ruhender Beobachter befinden. Der Beobachter in A sende vermittelst der oben genannten Wirkung Zeichen zu dem Beobachter in B durch den Materialstreifen, welch letzterer nicht ruhe, sondern sich mit der Geschwindigkeit $v (< V)$ in der negativen x-Richtung bewege. Das Zeichen wird dann, wie aus § 5 (l. c.) hervorgeht, mit der Geschwindigkeit

$$\frac{W - v}{1 - \frac{W v}{V^2}}$$

von A nach B übertragen. Die Zeit T, welche zwischen Zeichengebung in A und Zeichenempfang in B verstreicht, ist also

$$T = l \frac{1 - \frac{W v}{V^2}}{W - v}.$$

Die Geschwindigkeit v kann jeglichen Wert annehmen, der kleiner ist als V. Wenn also $W > V$ ist, wie wir angenommen haben, so kann man v stets so wählen, daß $T < 0$ ist. Dies Resultat besagt, daß wir einen Übertragungsmechanismus für möglich halten müßten, bei dessen Benutzung die erzielte Wirkung der (etwa von einem Willensakt begleiteten) Ursache *vorangeht.* Wenn dies Resultat auch, meiner Meinung nach, rein logisch genommen keinen Widerspruch enthält, so widerstreitet es doch so unbedingt dem Charakter unserer gesamten Erfahrung, daß durch dasselbe die Unmöglichkeit der Annahme $W > V$ zur Genüge erwiesen ist.

§ 4. Über die Energie eines Systems, welches aus einer Anzahl kräftefrei bewegter Massenpunkte besteht.

Betrachtet man den Ausdruck für die kinetische Energie k eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Massenpunktes (μ)

$$k = \mu V^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} - 1 \right\},$$

so fällt auf, daß dieser Ausdruck die Gestalt einer Differenz besitzt. Es ist nämlich

$$k = \left| \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \right|_{v=0}^{v=v}.$$

Frägt man nicht speziell nach der kinetischen Energie, sondern nach der Energie ε des bewegten Massenpunktes schlechtweg, so ist $\varepsilon = k +$ konst. Während man nun in der klassischen Mechanik die willkürliche Konstante in dieser Gleichung am bequemsten verschwinden läßt, erhält man in der Relativitätsmechanik den einfachsten Ausdruck für ε, indem man den Nullpunkt der Energie so wählt, daß die Energie ε_0 für den ruhenden Massenpunkt μV^2 gesetzt wird.[1]) Man erhält dann

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

An dieser Wahl des Nullpunktes der Energie werden wir im folgenden festhalten.

---

1) Es ist zu beachten, daß die vereinfachende Festsetzung $\mu V^2 = \varepsilon_0$ zugleich der Ausdruck des Prinzipes der Äquivalenz von Masse und Energie ist, und daß im Falle des masselosen elektrisierten Körpers ε_0 nichts anderes ist als seine elektrostatische Energie.

Wir führen nun wieder die zwei stets relativ zueinander bewegten Koordinatensysteme (x, y, z) und (ξ, η, ζ) ein. Relativ zu (ξ, η, ζ) sei ein Massenpunkt μ mit der Geschwindigkeit w bewegt in einer Richtung, welche mit der positiven ξ-Achse den Winkel φ bilde. Unter Benutzung der in § 5 (l. c.) hergeleiteten Beziehungen läßt sich leicht die Energie ε des Massenpunktes, bezogen auf das System (x, y, z) bestimmen. Man erhält

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1 + \frac{v w \cos \varphi}{V^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}} \sqrt{1 - \frac{w^2}{V^2}}} .$$

Sind mehrere Massenpunkte vorhanden, denen verschiedene Massen, Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen zukommen, so erhalten wir für deren Gesamtenergie E den Ausdruck

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left\{ \sum \mu V^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right\} \\ & + \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}} \left\{ \sum \frac{\mu w \cos \varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Bis jetzt haben wir über den Bewegungszustand des Systems (ξ, η, ζ) relativ zu den bewegten Massen nichts festgesetzt. Wir können und wollen hierüber nun folgende, den Bewegungszustand von (ξ, η, ζ) eindeutig bestimmende Bedingungen festsetzen:

$$\sum \frac{\mu w_\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0, \quad \sum \frac{\mu w_\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0,$$

$$\sum \frac{\mu w_\zeta}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} = 0,$$

wobei w_ξ, w_η, w_ζ die Komponenten von w bezeichnen. Dieser Festsetzung entspricht in der klassischen Mechanik die Bedingung, daß das Bewegungsmoment des Massensystems in bezug auf (ξ, η, ζ) verschwinde. Dann erhalten wir

$$E = \left(\sum \mu V^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{w}{V}\right)^2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

oder, indem man die Energie E_0 des Systems relativ zum System (ξ, η, ζ) einführt:

$$E = \frac{E_0}{V^2} \cdot V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem für die Energie eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Massenpunktes

$$\varepsilon = \mu V^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{V}\right)^2}},$$

so erhält man folgendes Resultat: In bezug auf die Abhängigkeit der Energie vom Bewegungszustand des Koordinatensystems, auf welches die Vorgänge bezogen werden, läßt sich ein System gleichförmig bewegter Massenpunkte ersetzen durch einen einzigen Massenpunkt von der Masse $\mu = E_0 / V^2$.

Ein System bewegter Massenpunkte besitzt also — als Ganzes genommen — desto mehr Trägheit, je rascher die Massenpunkte relativ zueinander bewegt sind. Die Abhängigkeit ist wieder gegeben durch das in der Einleitung angegebene Gesetz.

Bern, Mai 1907.

(Eingegangen 14. Mai 1907.)