13. *Das Prinzip von der Erhaltung der Schwerpunktsbewegung und die Trägheit der Energie;* *von A. Einstein.*

In einer voriges Jahr publizierten Arbeit[1]) habe ich gezeigt, daß die Maxwellschen elektromagnetischen Gleichungen in Verbindung mit dem Relativitätsprinzip und Energieprinzip zu der Folgerung führen, daß die Masse eines Körpers bei Änderung von dessen Energieinhalt sich ändere, welcher Art auch jene Energieänderung sein möge. Es zeigte sich, daß einer Energieänderung von der Größe ΔE eine gleichsinnige Änderung der Masse von der Größe $\Delta E / V^2$ entsprechen müsse, wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet.

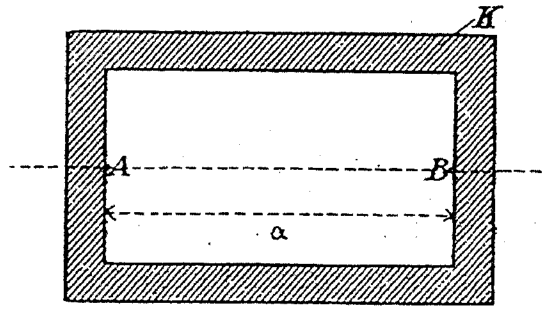
In dieser Arbeit will ich nun zeigen, daß jener Satz die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß das Gesetz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes (wenigstens in erster Annäherung) auch für Systeme gelte, in welchen außer mechanische auch elektromagnetische Prozesse vorkommen. Trotzdem die einfachen formalen Betrachtungen, die zum Nachweis dieser Behauptung durchgeführt werden müssen, in der Hauptsache bereits in einer Arbeit von H. Poincaré enthalten sind[2]), werde ich mich doch der Übersichtlichkeit halber nicht auf jene Arbeit stützen.

§ 1. Ein Spezialfall.

K sei ein im Raume frei schwebender, ruhender starrer Hohlzylinder. In A sei eine Einrichtung, um eine bestimmte Menge S strahlender Energie durch den Hohlraum nach B zu senden. Während der Aussendung jener Strahlungsmenge wirkt ein Strahlungsdruck auf die linke Innenwand des Hohlzylinders K, der letzterem eine gewisse nach links gerichtete Geschwindigkeit verleiht. Besitzt der Hohlzylinder die Masse M,

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. **18**. p. 639. 1905.
2) H. Poincaré, Lorentz-Festschrift p. 252. 1900.

so ist diese Geschwindigkeit, wie aus den Gesetzen des Strahlungsdruckes leicht zu beweisen, gleich $\frac{1}{V} \frac{S}{M}$, wobei V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Diese Geschwindigkeit behält K so lange, bis der Strahlenkomplex, dessen räumliche Ausdehnung im Verhältnis zu der des Hohlraumes von K sehr klein sei, in B absorbiert ist. Die Dauer der Bewegung des Hohlzylinders ist (bis auf Glieder höherer Ordnung) gleich α / V, wenn α die Entfernung zwischen A und B bedeutet. Nach Absorption des Strahlenkomplexes in B ruht der Körper K wieder. Bei dem betrachteten Strahlungsvorgang hat sich K um die Strecke



$$\delta = \frac{1}{V} \frac{S}{M} \cdot \frac{\alpha}{V}$$

nach links verschoben.

Im Hohlraum von K sei ein der Einfachheit halber masselos gedachter Körper k vorhanden nebst einem (ebenfalls masselosen) Mechanismus, um den Körper k, der sich zunächst in B befinden möge, zwischen B und A hin und her zu bewegen. Nachdem die Strahlungsmenge S in B aufgenommen ist, werde diese Energiemenge auf k übertragen, und hierauf k nach A bewegt. Endlich werde die Energiemenge S in A wieder vom Hohlzylinder K aufgenommen und k wieder nach B zurückbewegt. Das ganze System hat nun einen vollständigen Kreisprozeß durchgemacht, den man sich beliebig oft wiederholt denken kann.

Nimmt man an, daß der Transportkörper k auch dann masselos ist, wenn er die Energiemenge S aufgenommen hat, so muß man auch annehmen, daß der Rücktransport der Energiemenge S nicht mit einer Lagenänderung des Hohlzylinders K verbunden sei. Der Erfolg des ganzen geschilderten Kreisprozesses besteht also einzig in einer Verschiebung δ des ganzen Systems nach links, welche Verschiebung durch Wiederholung des Kreisprozesses beliebig groß gemacht werden kann. Wir erhalten also das Resultat, daß ein ursprünglich ruhendes System, ohne daß äußere Kräfte auf dasselbe wirken, die Lage seines Schwerpunktes beliebig viel verändern kann, und zwar ohne daß das System irgend eine dauernde Veränderung erlitte.

Es ist klar, daß das erlangte Resultat keinen inneren Widerspruch enthält; wohl aber widerstreitet es den Grundgesetzen der Mechanik, nach denen ein ursprünglich ruhender Körper, auf welchen andere Körper nicht einwirken, keine Translationsbewegung ausführen kann.

Setzt man jedoch voraus, daß jeglicher Energie E die Trägheit E/V^2 zukomme, so verschwindet der Widerspruch mit den Elementen der Mechanik. Nach dieser Annahme besitzt nämlich der Transportkörper, während er die Energiemenge S von B nach A transportiert, die Masse S/V^2; und da der Schwerpunkt *des ganzen Systems* während dieses Vorganges nach dem Schwerpunktssatz ruhen muß, so erfährt der Hohlzylinder K während desselben im ganzen eine Verschiebung S' nach rechts von der Größe

$$\delta' = \alpha \cdot \frac{S}{V^2} \cdot \frac{1}{M} \cdot$$

Ein Vergleich mit dem oben gefundenen Resultat zeigt, daß (wenigstens in erster Annäherung) $\delta = \delta'$ ist, daß also die Lage des Systems vor und nach dem Kreisprozeß dieselbe ist. Damit ist der Widerspruch mit den Elementen der Mechanik beseitigt.

§ 2. Über den Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes.

Wir betrachten ein System von n diskreten materiellen Punkten mit den Massen $m_1, m_2 \ldots m_n$ und den Schwerpunktskoordinaten $x_1 \ldots z_n$. Diese materiellen Punkte seien in thermischer und elektrischer Beziehung nicht als Elementargebilde (Atome, Moleküle), sondern als Körper im gewöhnlichen Sinne von geringen Dimensionen aufzufassen, deren Energie durch die Schwerpunktsgeschwindigkeit nicht bestimmt sei. Diese Massen mögen sowohl durch elektromagnetische Vorgänge als auch durch konservative Kräfte (z. B. Schwerkraft, starre Verbindungen) aufeinander einwirken; wir wollen jedoch annehmen, daß sowohl die potenzielle Energie der konservativen Kräfte als auch die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung der Massen stets als unendlich klein relativ zu der „inneren“ Energie der Massen $m_1 \ldots m_n$ aufzufassen seien.

Es mögen im ganzen Raume die Maxwell-Lorenzschen Gleichungen

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{u}{V}\varrho + \frac{1}{V}\frac{dX}{dt} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \\
\frac{u}{V}\varrho + \frac{1}{V}\frac{dY}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \\
\frac{u}{V}\varrho + \frac{1}{V}\frac{dZ}{dt} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \\
\frac{1}{V}\frac{dL}{dt} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \\
\frac{1}{V}\frac{dM}{dt} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \\
\frac{1}{V}\frac{dN}{dt} &= \frac{dX}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}
\end{aligned}
\right.
$$

gelten, wobei

$$\varrho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

die 4π-fache Dichte der Elektrizität bedeutet.

Addiert man die der Reihe nach mit

$$\frac{V}{4\pi} X x, \quad \frac{V}{4\pi} Y x \ldots \frac{V}{4\pi} N x$$

multiplizierten Gleichungen (1) und integriert man dieselben über den ganzen Raum, so erhält man nach einigen partiellen Integrationen die Gleichung

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \int \frac{\varrho}{4\pi} x (u X + v Y + w Z)\, d\tau \\
& + \frac{d}{dt}\left\{\int x \cdot \frac{1}{8\pi}(X^2 + Y^2 \ldots + N^2)\, d\tau\right\} \\
& - \frac{V}{8\pi}\int (Y N - Z M)\, d\tau = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

Das erste Glied dieser Gleichung stellt die von dem elektromagnetischen Felde den Körpern $m_1 \ldots m_n$ zugeführte Energie dar. Nach unserer Hypothese von der Abhängigkeit der Massen von der Energie hat man daher das erste Glied der Summe dem Ausdruck

$$V^2 \sum x_\nu \frac{d m_\nu}{d t}$$

gleichzusetzen, da wir nach dem Obigen annehmen, daß die einzelnen materiellen Punkte m_ν ihre Energie und daher auch ihre Masse *nur* durch Aufnahme von elektromagnetischer Energie ändern.

Schreiben wir ferner auch dem elektromagnetischen Felde eine Massendichte (ϱ_e) zu, die sich von der Energiedichte durch den Faktor $1/V^2$ unterscheidet, so nimmt das zweite Glied der Gleichung die Form an:

$$V^2 \frac{d}{dt}\left\{\int x\,\varrho_e\,d\tau\right\}.$$

Bezeichnet man mit J das im dritten Gliede der Gleichung (2) auftretende Integral, so geht letztere über in:

$$\sum\left(x_\nu \frac{d m_\nu}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left\{\int x\,\varrho_e\,d\tau\right\} - \frac{1}{4\pi V} J = 0. \tag{2a}$$

Wir haben nun die Bedeutung des Integrales J aufzusuchen. Multipliziert man die zweite, dritte, fünfte und sechste der Gleichungen (1) der Reihe nach mit den Faktoren NV, $-MV$, $-ZV$, YV, addiert und integriert über den Raum, so erhält man nach einigen partiellen Integrationen

$$\frac{dJ}{dt} = -4\pi V \int \frac{\varrho}{4\pi}\left(X + \frac{v}{V} N - \frac{w}{V} M\right) d\tau = -4 V R_x, \tag{3}$$

wobei R_x die algebraische Summe der X-Komponenten aller vom elektromagnetischen Felde auf die Massen $m_1 \ldots m_n$ ausgeübten Kräfte bedeutet. Da die entsprechende Summe aller von den konservativen Wechselwirkungen herrührenden Kräfte verschwindet, so ist R_x gleichzeitig die Summe der X-Komponenten *aller* auf die Msssen m_ν ausgeübten Kräfte.

Wir wollen uns nun zunächst mit Gleichung (3) befassen, welche von der Hypothese, daß die Masse von der Energie abhängig sei, unabhängig ist. Sehen wir zunächst von der Abhängigkeit der Massen von der Energie ab und bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}_\nu$ die Resultierende aller X-Komponenten der auf m_ν wirkenden Kräfte, so haben wir für die Masse m_ν die Bewegungsgleichung aufzustellen:

$$m_\nu \frac{d^2 x_\nu}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{m_\nu \frac{d x_\nu}{dt}\right\} = \mathfrak{X}_\nu, \tag{4}$$

folglich erhalten wir auch:

$$\frac{d}{d\,t}\sum\left(m_\nu\frac{d\,x_\nu}{d\,t}\right)=\sum\mathfrak{X}_\nu=R_x. \tag{5}$$

Aus Gleichung (5) und Gleichung (3) erhält man

$$\frac{J}{4\,\pi\,V}+\sum m_\nu\frac{d\,x_\nu}{d\,t}=\text{konst.} \tag{6}$$

Führen wir nun die Hypothese wieder ein, daß die Größen m_ν von der Energie also auch von der Zeit abhängen, so stellt sich uns die Schwierigkeit entgegen, daß für diesen Fall die mechanischen Gleichungen nicht mehr bekannt sind; das erste Gleichheitszeichen der Gleichung (4) gilt nun nicht mehr. Es ist jedoch zu beachten, daß die Differenz

$$\frac{d}{d\,t}\left\{m_\nu\frac{d\,x_\nu}{d\,t}\right\}-m_\nu\frac{d^2\,x_\nu}{d\,t^2}=\frac{d\,m_\nu}{d\,t}\frac{d\,x_\nu}{d\,t}$$

$$=\frac{1}{V^2}\int\frac{\varrho}{4\,\pi}\frac{d\,x_\nu}{d\,t}(u\,X+v\,Y+w\,Z)\,d\,\tau$$

in den Geschwindigkeiten vom zweiten Grade ist. Sind daher alle Geschwindigkeiten so klein, daß Glieder zweiten Grades vernachlässigt werden dürfen, so gilt auch bei Veränderlichkeit der Masse m_ν die Gleichung

$$\frac{d}{d\,t}\left(m_\nu\frac{d\,x_\nu}{d\,t}\right)=\mathfrak{X}_\nu$$

sicher mit der in Betracht kommenden Genauigkeit. Es gelten dann auch die Gleichungen (5) und (6), und man erhält aus den Gleichungen (6) und (2a):

$$\frac{d}{d\,t}\left[\sum(m_\nu\,x_\nu)+\int x\,\varrho_e\,d\,\tau\right]=\text{konst.} \tag{2b}$$

Bezeichnet ξ die X-Koordinate des Schwerpunktes der ponderabelen Massen und der Energiemasse des elektromagnetischen Feldes, so ist

$$\xi=\frac{\sum(m_\nu\,x_\nu)+\int x\,\varrho_e\,d\,\tau}{\sum m_\nu+\int\varrho_e\,d\,\tau},$$

wobei nach dem Energieprinzip der Wert des Nenners der rechten Seite von der Zeit unabhängig ist.[1]) Wir können daher Gleichung (2b) auch in der Form schreiben:

$$\frac{d\,\xi}{d\,t} = \text{konst.} \tag{2c}$$

Schreibt man also jeglicher Energie E die träge Masse E/V^2 zu, so gilt — wenigstens in erster Annäherung — das Prinzip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes auch für Systeme, in denen elektromagnetische Prozesse vorkommen.

Aus der vorstehenden Untersuchung folgt, daß man entweder auf den Grundsatz der Mechanik, nach welchem ein ursprünglich ruhender, äußeren Kräften nicht unterworfener Körper keine Translationsbewegung ausführen kann, verzichten oder annehmen muß, daß die Trägheit eines Körpers nach dem angegebenen Gesetze von dessen Energieinhalt abhänge.

Bern, Mai 1906.

---

1) Nach der in dieser Arbeit entwickelten Auffassung ist der Satz von der Konstanz der Masse ein Spezialfall des Energieprinzipes.

(Eingegangen 17. Mai 1906.)