Vorkurs Mathematik
für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2008/2009

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert, Priv.-Doz. Dr. Karl-Heinz Höck

Blatt 5 (Mittwoch + Donnerstag)

---

1. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, b, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, c)$. Berechnen Sie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

2. Eine kleine physikalische Anwendung

   (a) Verifizieren Sie für beliebige $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, dass gilt:

   $$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

   (b) Der Drehimpuls ist durch $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ definiert, wobei $\mathbf{r}$ der Ortsvektor und $\mathbf{p}$ der Impuls ist. Drücken Sie das Betragsquadrat $|\mathbf{L}|^2$ mit Hilfe der Beträge des Orts- und des Impulsvektors sowie des Skalarprodukts der beiden Vektoren aus.

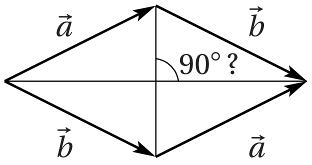
   (c) Was ergibt sich insbesondere, wenn die Bewegung auf einer Kreisbahn erfolgt und der Drehimpuls bezüglich des Ursprungs berechnet wird?

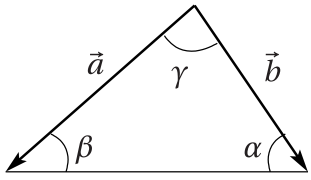
   (d) Was ergibt sich für die Bewegung auf einer Geraden, wenn der Drehimpuls bezüglich eines Punkts auf dieser Geraden berechnet wird?

3. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung

   (a) Die Diagonalen einer Raute sind orthogonal.

   (b) Für jedes beliebige Dreieck gilt der Sinussatz $\dfrac{\sin\alpha}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\sin\beta}{|\mathbf{b}|} = \dfrac{\sin\gamma}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}$.

a) 

b) 

4. Zeigen Sie für beliebige 2×2 Matrizen A, B und C:

   (a) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,

   (b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,

   (c) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.

   (d) $\det A = \lambda_1 \lambda_2$, $\quad \mathrm{Tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$ (λ_1, λ_2 sind die Eigenwerte von A).

5. Bestimmen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   die Eigenwerte, (normierten) Eigenvektoren, $\det A_i$, $\mathrm{Tr}\ A_i$ und die inverse Matrix A_i^{-1}. Berechnen Sie außerdem die Matrixprodukte $A_1 A_2$ und $A_2 A_1$.

6. Die 2×2-Matrix

$$U(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   beschreibt eine Drehung mit Winkel α um den Ursprung.

   (a) Skizzieren Sie die Wirkung der Drehmatrix auf die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $U(\alpha)$.

   (c) Nähern Sie die Drehmatrix für kleine Winkel $\alpha \ll 1$.