Vorkurs Mathematik
für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2008/2009

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert, Priv.-Doz. Dr. Karl-Heinz Höck

Blatt 2

---

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgenden Beziehungen gelten:

   (a) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,

   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

   (c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

2. Es sei n eine natürliche und x eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $x \neq 1$ gilt:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

3. Berechnen Sie (ohne Benutzung der Differentiationsregeln direkt aus der Definition) die Ableitung von

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{an der Stelle } x_0 = 2$$

4. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $y = (x - x_0)^2$,

   (b) $y = x^3$,

   (c) $y = x^n$ (Beweis durch Induktion, Produktregel!),

   (d) $y = (2x^2 - 1)^2$ (Kettenregel!).

5. Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

   Bringen Sie die Koeffizienten $\{a_k\}$ mit den Ableitungen von $f(x)$ in Verbindung.

6. Die (natürliche) Exponentialfunktion $y = \mathrm{e}^x$ sei definiert durch die Relation

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y(x) \qquad (\text{kurz}: \quad y' = y)$$

und $y(0) = 1$.

   (a) Skizzieren Sie diese Funktion.

   (b) Benutzen Sie die obige Relation, um die folgende Reihendarstellung herzuleiten:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

7. Die Umkehrfunktion von e^x heißt (natürlicher) Logarithmus, $y = \ln x$, d.h. $x = \mathrm{e}^y$.

   (a) Skizzieren Sie diese Funktion.

   (b) Berechnen Sie mit Hilfe von $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ die erste Ableitung von $\ln x$.

   (c) Begründen Sie: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ und $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$.

8. Leiten Sie die angegebenen Funktionen nach $x \in R$ ab.

   (a) $y(x) = \sinh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

   (b) $y(x) = \cosh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

   (c) $y(x) = \tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,

   (d) $y(x) = \tan(x) \equiv \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

   (e) $y(x) = \arctan(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),

   (f) $y(x) = \arccos(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),

   (g) $y(x) = \sin(\arccos(x))$,

   (h) $y(x) = \frac{x}{\sin(2x^2+3)}$.

9. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = 3x^4 \cdot (\ln x)^2$,

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 4\mathrm{e}^x} \cdot \ln(x^2)$,

   (c) $f(x) = \ln\left[\sqrt{4\mathrm{e}^{2x} + 3} + 2\mathrm{e}^x\right]$,

   (d) $f(x) = \frac{x-1}{x \cdot \ln x}$,

   (e) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+1}-1}{\mathrm{e}^{x+1}+1}$,

   (f) $f(x) = \sinh(\mathrm{e}^x)$,

   (g) $f(x) = \operatorname{arcosh}(3x^2 - 2)$,

   (h) $f(x) = \operatorname{arcoth}(\mathrm{e}^x)$.