Skripten des Vorkurses „Mathematik für Physiker“
von Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert

Axel Bernhard Freyn

Augsburg, SS 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Ziel der theoretischen Physik ist die Formulierung physikalischer Gesetzmäßigkeiten mit mathematischen Mitteln. Wie einige kleine Beispiele zeigen, ist dafür die Beherrschung umfangreicher mathematischer Mittel Voraussetzung.
Beispiele:

2. Newtonsches Gesetz:
$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(m * \frac{d}{dt}\vec{r}\right)$$

Maxwellsche Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{div}\vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \end{array}\right\} \text{(El. Feld)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{I} \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 \end{array}\right\} \text{(Mag. Feld)}$$

physikalische Größen $\hat{=}$ “Zahlenwert+Einheit“
Einige für Physiker zentrale Bereiche der Mathemtik sind:

- Funktionen (einer oder mehrere Variablen), reelwertig, komplexwertig
- Komplexe Zahlen(“i“)
- Vektoren, Felder
- Differentialrechnung
- Differentialgleichungen (auch partielle)
- Integration
- Koordinatentransformationen
- Integralsätze
- Spezielle Funktionen
- Funktionsreihen
- Transformationen in Funktionsräumen (z.B.: Fourier-Transformationen)

2 Grundlagen

2.1 Menge

Die Definition nach Georg Cantor (1845-1918):
“Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen

Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (Elemente der Menge M) zu einem Ganzen.“

Diese Definition führt in der Praxis schnell zu Widersprüchen. Diese werden duch die formale Mengendefinition vermieden.

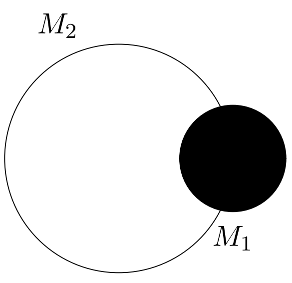
Definition:

1. $x \in M$: x ist Element von M
2. $x \notin M$: x ist nicht Element von M
3. Aufzählende Charakterisierung: $M = \{x, y, z, \dots\}$;
   Natürliche Zahlen $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
4. Beschreibende Charakterisierung: $M = \{x$:x hat Eigenschaft E$\}$

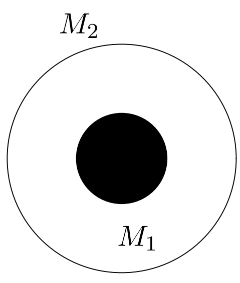
Vergleich von Mengen

Definition:

1. Gleichheit:
   $M_1 = M_2$ gilt, wenn beide Mengen dieselben Elemente haben
2. Inklusion:
   M_1 heißt Teilmenge von M_2: $M_1 \subset M_2$, für $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$
   Wenn M_1 nicht Teilmenge von M_2 ist, schreiben wir $M_1 \notin M_2$



$M_1 \not\subset M_2$



$M_1 \subset M_2$

Satz:

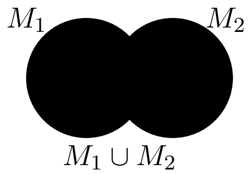
1. Reflexivität:
   Für jede Menge M gilt: $M \subset M$
2. Transitivität:
   Mengen M_1,M_2,M_3: $M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_3 \Rightarrow M_1 \subset M_3$
3. Identität:
   Mengen M_1,M_2: $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2, M_2 \subset M_1$

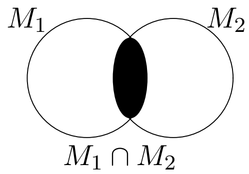
Verknüpfung von Mengen

Definition: beliebige Mengen M_1, M_2

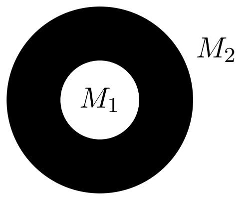
1. Vereinigung
$$M_1 \cup M_2 = \{x : x \in M_1 \quad \underline{\textit{und/oder}} \quad x \in M_2\}$$

2. Durchschnitt
$$M_1 \cap M_2 = \{x : x \in M_1 \quad \underline{\textit{und}} \quad x \in M_2\}$$





3. Komplement
$$C_{M_2}(M_1) = \{x : x \in M_2, x \notin M_1\}$$



4. Leere Menge
Die leere Menge $\emptyset$ ist die Menge, die keine Elemente enthält.

Gesetze:

1. Kommutativgesetz
$$M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$$
$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

2. Assoziativgesetz
$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$
$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap M_3$$

3. Distributivgesetz
$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$
$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

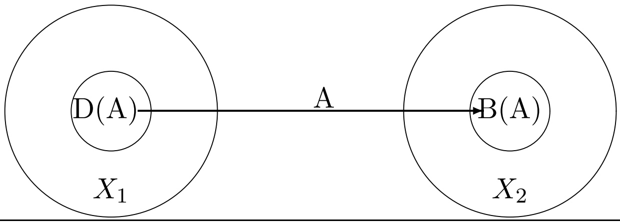
2.2 Abbildung

Definition: X_1,X_2: beliebige Mengen

1. Eine Vorschrift A, die jedem Element $x_1 \in D(A) \subset X_1$ eindeutig ein Element $x_2 = A(x_1) \subset X_2$ zuordnet, heißt eine Abbildung aus X_1 in X_2: $A : X_1 \to X_2$
2. D(A): Definitionsmenge von A
3. B(A): Bildmenge von A

$$B(A) = \{x_2 : x_2 = A(x_1) \text{ für } x_1 \in D(A)\}$$

4. Ist $X \subset D(A)$, so heißt A(X), $A(X) = \{x_2 : x_2 = A(x1) \text{ für } x_1 \in X\}$, Bild von X unter A



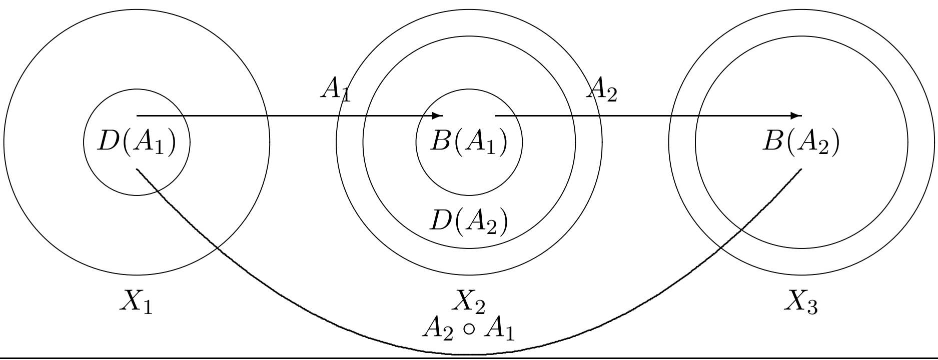
Definition: Menge X_1,X_2,X_3

$$A_1 : X_1 \to X_2$$
$$A_2 : X_2 \to X_3, \qquad B(A_1) \subset D(A_2)$$

Dann heißt:

$$A_2 \circ A_1 : X_1 \to X_3$$
$$D(A_2 \circ A_1) = D(A_1)$$

$A_2 \circ A_1 = A_2(A_1(x_1))$



Gesetze:

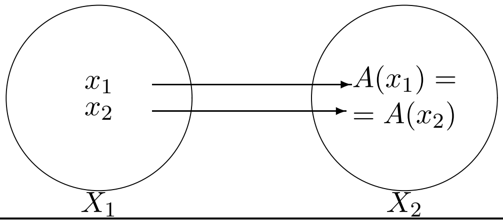
Assotiativgesetz: X_1,X_2,X_3,X_4

$$\begin{aligned} &A_1 : X_1 \to X_2 & & \\ &A_2 : X_2 \to X_3 & & B(A_1) \subset (A_2) \\ &A_3 : X_3 \to X_4 & & B(A_2) \subset (A_3) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$(A_3 \circ (A_2 \circ A_1))\,(x_1) = ((A_3 \circ A_2) \circ A_1)\,(x_1) = A_3\,(A_2\,(A_1\,(x_1)))$$

Definition: Eine Abbildung $A : X_1 \to X_2$ heißt eineindeutig, wenn aus $A(x_1) = A(\overline{x_1})$ immer folgt $x_1 = \overline{x_1}$. Gegenbeispiel:



Nicht eindeutig!!

Definition: Umkehrabbildung: $A : X_1 \to X_2$ sei eindeutig. Dann ist die Umkehrabbildung A^{-1}

$$A^{-1} : X_2 \to X_1 \text{ mit } D(A^{-1}) = B(A)$$

mit $B(A^{-1} = D(A)$ gegeben durch

$$A^{-1}(x_2) = x_1 \quad \text{mit} \quad x_2 = A(x_1)$$

Gesetze:

1. $A^{-1}(A(x)) = x \qquad x \in D(A)$
2. $A(A^{-1}(y)) = y \qquad y \in B(A)$
3. $(A^{-1})^{-1}(x) = A(x) \qquad x \in D(A)$

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ Mächtigkeit n
$Y = \{y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m\}$ Mächtigkeit m

Definition: Zwei Menge X,Y heißen von gleicher Mächtigkeit, wenn es eine eineindeutige Abbildung $A : X \to Y$ gibt mit $D(A) = X, B(A) = Y$

Beispiel:

$$\left.\begin{array}{r} X = \{1,2,3,4,\dots\} \\ Y = \{2,4,6,8,\dots\} \\ A(X) = 2x \quad x \in X \\ A^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \quad x \in Y \end{array}\right\} \text{X und Y haben also dieselbe Mächtigkeit.}$$

> **Definition**: Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie von der gleichen Mächtigkeit wie die Menge der natürlichen Zahlen ist.

2.3 Zahlenbereiche

1. Natürliche Zahlen: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
2. Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \dots\}$
3. Rationale Zahlen: Menge der Brüche $\mathbb{B} = \{x : x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$
   Gleichheit: $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} \Leftrightarrow p_1q_2 = p_2q_1 \Rightarrow \mathbb{Q}$
   $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Drüche, für die p und q teilerfremd sind.
4. Reelle Zahlen: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \quad \cup$“$\{$Menge aller Folgen in $\mathbb{Q}\}$“
5. Komplexe Zahlen:$\mathbb{C} = \{z = a + ib; a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$

Vergleich der Zahlenbereiche:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & & \mathbb{Z} & & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & \nearrow & & \nwarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & 0 & & \textit{neg.} & & \textit{gebrochene} & & \textit{irrationale} & & i \\ & & & & \textit{Zahlen} & & \textit{Zahlen} & & \textit{Zahlen} & & \\ & & & & & & & & \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi & & \end{array}$$

> **Definition**: Gruppe: Eine Menge M mit mindestens 2 Elementen bildet eine Gruppe bezüglich einer Verknüpfung $\circ$, wenn für alle Elemente $x, y \in M$ die folgenden Eigenschaften gelten.
>
> 1. Abgeschlossenheit: $x \circ y \in M$
> 2. Assozativgesetz: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$
> 3. Neutrales Element: Es gibt $e \in M$ mit $x \circ e = x$
> 4. Inverses Element: zu jedem $x \in M$ gibt es ein $\overline{x} \in M \quad mit \quad x \circ \overline{x} = e$

> **Definition**: Abel'sche Gruppe:
> Eine Gruppe M mit $\circ$ heißt Kommutativ oder Abel'sch, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $x \circ y = y \circ x$

Definition: Körper:
Eine Menge M mit mindestens 2 Elementen bildet einen Körper wenn gilt:

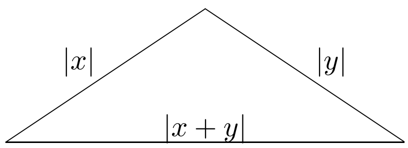
1. M bildet eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Addition mit dem neutralen Element"1"
2. M $/\{0\}$(Man schreibt auch:($C_M 0$) bildet eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Multiplikation mit dem neutralen Element"1"
3. Distributivgesetz: $x, y, e \in M$
   $(x + y) * z = x * z + y * z$

Definition: Geordnete Körper:
Ein Körper K heißt geordnet, wenn eine Beziehung ">0"definiert ist mit:

1. Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen
   $$x = 0, \overbrace{x > 0}^{\text{x positiv}}, \underbrace{-x > 0}_{\text{x negativ}}$$
2. $x > 0; y > 0 \Rightarrow x + y > 0$
3. $x > 0; y > 0 \Rightarrow x * y > 0$

$$|x| = \begin{cases} x & f\ddot{u}r \quad x \geq 0 \\ -x & f\ddot{u}r \quad x < 0 \end{cases}$$

Satz: Dreiecksungleichung



$$x, y \in K$$

$$|x + y| \geq ||x| - |y||$$

Daraus folgt

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Definition: metrischer Raum: Eine Menge M heißt metrischer Raum, wenn für jedes Paar $x, y \in M$ eine nichtnegative Zahl $d(x, y)$ definiert ist, mit

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ für $z \in M$

$d(x, y)$ heißt Abstand der Elemente x,y
relle Zahlen:$d(x, y) = |x - y| = |y - x|$

3 Funktionen

3.1 Grundlegende Eigenschaften

Unterschied zur Abbildung: Funktionen $F : X \to Y$

X: Metrischer Raum
Y: Körper

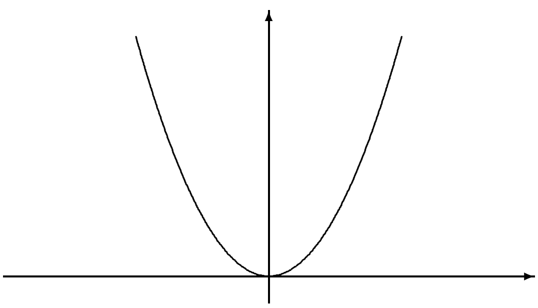
Offen ist allerdings die Dimension
Beispiel: Temperaturverteilung in einem Hochofen:

$T(\vec{r})$: Temperaturverteilung
X: Dreidimensionaler Raum
Y: Temperatur in K: Reelle Zahl
$T : R^3 \to R$

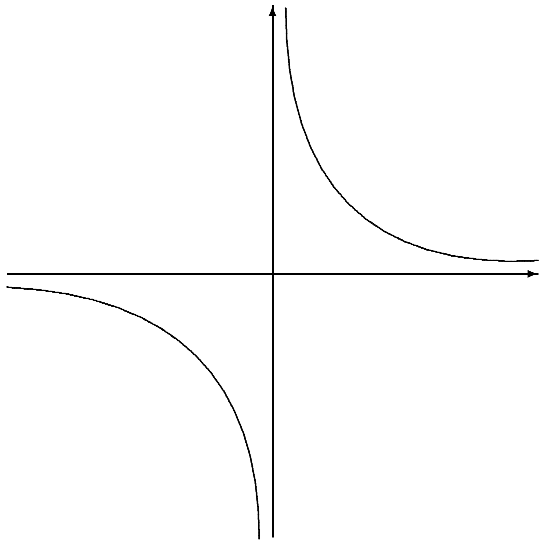
Definition:$f : R \to R$ Graph: $G_f = \{(x, y) : x \in D_f), y = f(x)\}$

Beispiele:

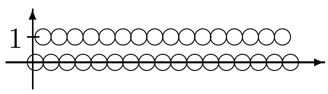
1. $D(f) = R, f(x) = x^2$;



2. $D(f) = C_R\{0\}, f = \frac{1}{x}$

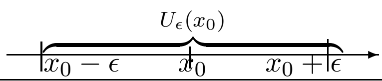


3. $D(f) = [0,1], f(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r \quad x \in Q \\ 0 & f\ddot{u}r \quad x \in C_R\{Q\} \end{cases}$



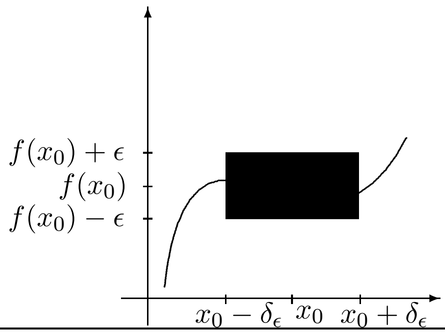
3.2 Stetige Funktionen

Definition: ϵ-Umgebung
Es sei M ein metrischer Raum mit einer Abstandsfunktion d, $x_0 \in M$
Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ heißt die Menge $U_\epsilon(x_0) = \{x : x \in M, d(x, x_0) < \epsilon\}$ ϵ-Umgebung von x_0



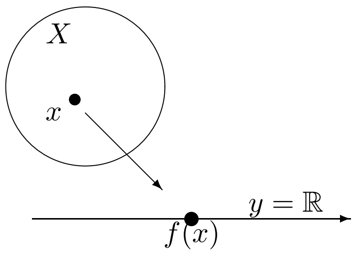
Definition: Stetigkeit einer Funktion:
Es seien X,Y, metrische Räume $f : X \to Y$

1. f heißt stetig an $x_0 / in D_f$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\Delta_\epsilon > 0$ existiert, so daß für alle $x \in D_f \cap U_{\Delta_\epsilon}(x_0)$ folgt: $f(x) \in U_\epsilon(f(x_0))$
2. f heißt stetig auf $X \in D_f$, wenn f stetig ist in allen Punkten $x_0 \in X_0$



Definition: Die Funktion $f : R \to R$ heißt stetig an x_0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_f > 0$ existiert, so daß aus $|x - x_0| < \delta_\epsilon, x \in D(f)$ stets folgt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

3.3 Reellwertige Funktionen



Definition: Sei X ein metrischer Raum, $f, g : X \to R$

1. Summe von Funktionen $D(f + g) = D(f) \cap D(g)$
   $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$
2. Produkt von Funktionen $D(f * g) = D(f) \cap D(g)$
   $(f * g)(x_0) = f(x_0) * g(x_0)$
3. Quotient von Funktionen $D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap C_{D_{(g)}}\{x : g(x) = 0\}/$
   $(\frac{f}{g})(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$

Satz: X sei ein metrischer Raum,$f, g : X \to R$
f,g ist stetig an $x_0 \in D(f) \cap D(g)$

1. $f + g$ ist stetig an x_0

2. $f * g$ ist stetig an x_0
3. $\frac{f}{g}$ ist stetig an x_0, falls $g(x_0) \neq 0$

Funktionen $f : R \to R$

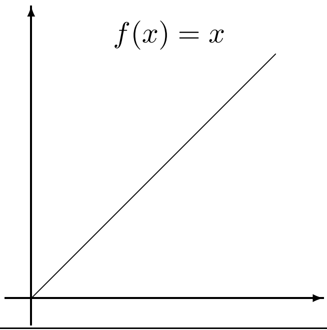
Definition:

1. Eine Funktion $P : R \to R$, welche durch $D(P) = R$ und

$$P(x) = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu * x \qquad a_\mu \in R, \mu, n \in N_0; N_0 = N \cup \{0\}$$

gegeben ist, heißt Polynom. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der Grad des Polynoms.

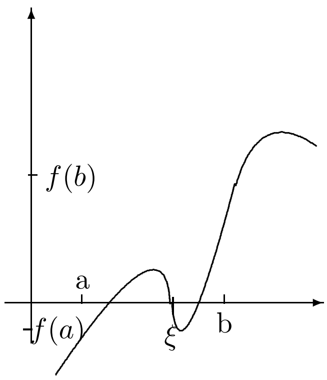
2. Sind P,Q Polynome, so heißt die Funktion $R : R \to R$, welche durch $D(R) = C_R\{x : Q(x) = 0\}; \qquad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ gegeben ist, eine (gebrochen–) rationale Funktion.



Satz:

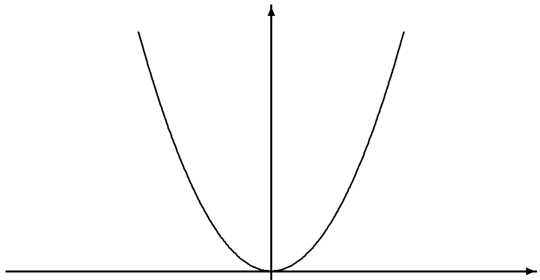
Rationale Funktionen sind auf ihrem gesamtenDefinitionsbereich stetig.

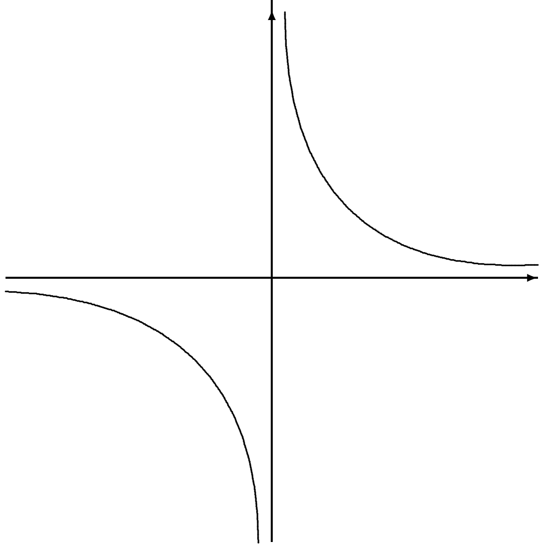
Satz:



f sei definiert und stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gilt $f(a) * f(b) < 0$. Dann gibt es mindesens ein ξ,

$$\xi \in \underbrace{(a;b)}_{\substack{\| \\ ]a;b[}} \text{ mit} f(\xi) = 0$$





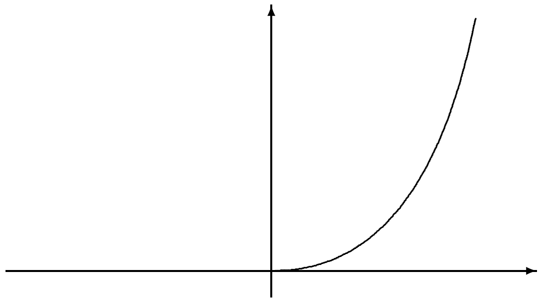
3.4 Monotone Funktionen und Umkehrfunktionen

Definition:

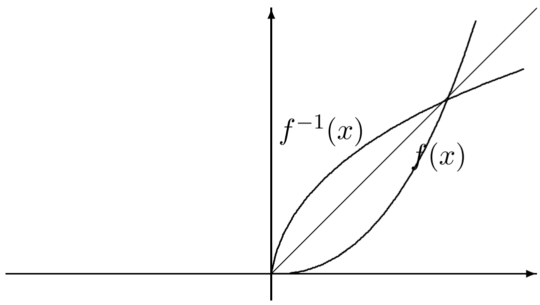
1. Eine Funktion$f : r \to R$ heißt auf $X \subset D(f)$ monoton wachsend/fallend, wenn für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)/f(x_1) \geq f(x_2)$
2. Gilt unter 1. sogar “$<$“/ “$>$“, so nennen wir die Funktion streng monoton wachsend / fallend.
3. f heißt monoton, wenn f auf X entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Satz:

Die Funktion f sei streng monoton wachsend / fallend. Dann gilt



1. Die Umkehrfunktion f^{-1} existiert.
2. f^{-1} ist ebenfalls streng monoton wachsend / fallend.



Satz:

f sei streng monoton und stetig auf $D(f)$ und $D(f)$ sei kompakt. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig auf $B(f)$.

4 Wichtige Funktionen

4.1 Potenzen mit ganzen und rationalen Exponenten

Definition: Es sei $b \in R, m \in Z$. Wir setzen

1. $b^m = \prod_{\mu=1}^{m} b$ falls $m > 0$
2. $b^m = \frac{1}{b^{-m}}$ falls $b \neq 0, m < 0$
3. $b^0 = 1$; b: Basis; m:Exponent

Satz: Es sei $0 \neq b, b_1, b_2 \in R; m_1, m_2, m_3 \in Z$

1. $b^{m_1} * b^{m_2} = b^{m_1+m_2}$
2. ${b_1}^m * {b_2}^m = (b_1 * b_2)^m$
3. $(b_1^m)^{m_2} = b^{(m_1*m_2)}$

Satz: Es sei $0 \leq b_1, b_2 \in R; 0 < m \in Z$

$${b_1}^m < {b_2}^m \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

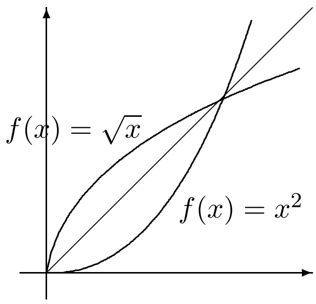
Satz: Es sei $1 \leq b \in R; 0 < m_1, m_2 \in Z$

$$b^{m_1} < b^{m_2} \Leftrightarrow m_1 < m_2$$

Satz:

Wurzel: $0 \leq b \in R; n \in N$: Dann existiert genau ein $x \geq 0$ mit $x^n = b$: Wir schreiben:

$$x = b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$



Satz: $0 \leq b_1, b_2 \in R; n \in N$

$${b_1}^{\frac{1}{n}} < {b_2}^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

Satz: $1 \leq b \in R; n_1, n_2 \in N$

$$b^{\frac{1}{n_1}} < b^{\frac{1}{n_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2}$$

Satz: $0 < b \in R, p \in Z, q \in N$. Dann gilt für alle $\lambda \in N$

$$(b^{\frac{1}{q}})^p = (b^{\frac{1}{\lambda * q}})^{\lambda * p}$$

Definition:
Sei $0 < b \in R; r \in Q$ mit $r = \frac{P}{Q}, p \in Z, q \in N$.
Wir schreiben:

$$b^r = b^{\frac{p}{q}} = (b^{\frac{1}{q}})^P$$

Satz: $0 < b, b1, b2 \in \mathbb{R}; r, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

- $b^{r_1} * b^{r_2} = b^{(r_1+r_2)}$
- ${b_1}^r * {b_2}^r = (b_1 * b_2)^r$
- $(b^{r_1})^{r_2} = b^{(r_1*r_2)}$

Satz: $0 < b_1, b_2 \in \mathbb{R}; 0 < r \in \mathbb{Q}$

$${b_1}^r < {b_2}^r \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

Satz: $1 < b \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$

$$b^{r_1} < b^{r_2} \Leftrightarrow r_1 < r_2$$

4.2 Potenz- und Exponentialfunktion

Potenzen b^r mit $0 < b \in R, r \in Q$

Definition:

1. Potenzfunktion:
   Sei $r \in Q$: Die Funktion $f(x) = x^r$ mit $D(f) = (-\infty, \infty)$ heißt Potenzfunktion.
2. Exponentialfunktion:
   Sei $b > 0$: Die Funktion$f(x) = b^x$ mit $D(f) = \mathbb{Q}$ heißt Exponentialfunktion.

Satz

1. $r \in Q : f(x) = x^r$ ist stetig auf $(-\infty, \infty)$
2. $0 < b \in R : f(x) = b^x$ ist stetig auf $\mathbb{Q}$

$D(f)$ läßt sich auf $\mathbb{R}$ erweitern $\Rightarrow$ Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$
Die Funktion $f(x) = b^x$ für $x \in \mathbb{R}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.
Rechengesetze:
Satz: Es seien $0 < b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}; x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

1. $b^{x_1} * b^{x_2} = b^{x_1+x_2}$
2. ${b_1}^x * {b_2}^x = (b_1 * b_2)^x$
3. $(b_1^{x_1})^{x_2} = b^{(x_1 * x_2)}$

Satz: Monotonie der Potenzfunktion

$$0 < x_1, x_2 \in R; 0 < r \in R$$

$${x_1}^r < {x_2}^r \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Satz: Monotonie der Exponentialfunktion

$$1 < b \in R; x_1, x_2 \in R$$

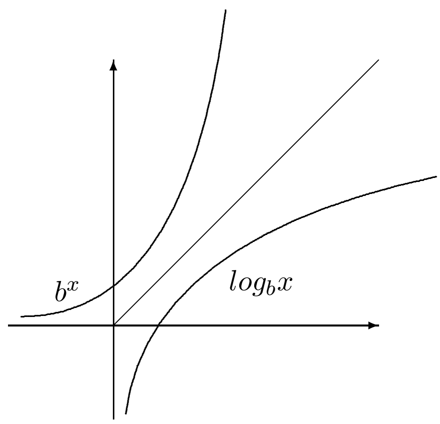
$$b^{x_1} < b^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

4.3 Logarithmusfunktion

Definition:$1 < b \in R$ Die Umkehrfunktion von $f(x) = b^x$ heißt Logarithmus zur Basis b:

$$f^{-1}(x) = \log_b x$$

Es ist $D(\log_b x) = (0; \infty)$



Rechengesetze:

$$0 < x, x_1, x_2 \in R$$

1. $\log_b(x_1 * x_2) = \log_b(x_1) + \log_b(x_2)$
2. $\log_b(1) = 0, \log_b(b) = 1, \log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x)$
3. $\log_b(x^r) = r * \log_b(x) \qquad (r \in R)$

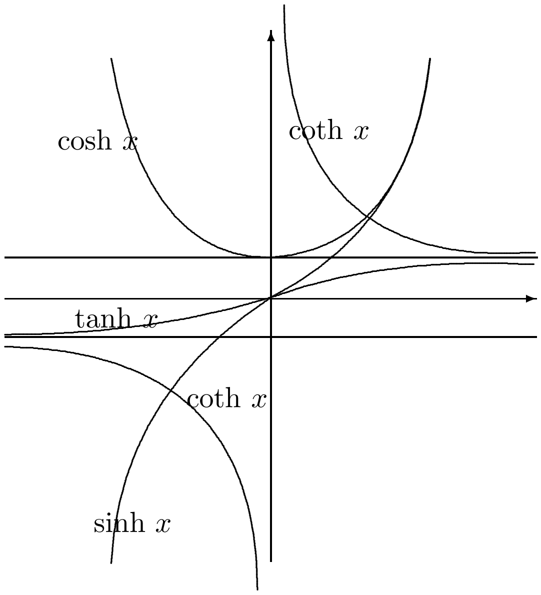
Spezialfälle

$b = 10$	„Logarithmus decimalis“	$\mathrm{ld}\, x := \log_{10} x$
$b = e \approx 2,71828\ldots$	„Logarithmus naturalis“	$\mathrm{ld}\, x := \log_e x$
$b = 2$	„Logarithmus dualis“	$\mathrm{lb}\, x := \log_2 x$

4.4 Hyperbolische Funktionen

Defniniert auf $\mathbb{R}$

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad$ (definiert auf $C_{\mathbb{R}}\{0\}$)



Satz: Additionstheoreme:

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

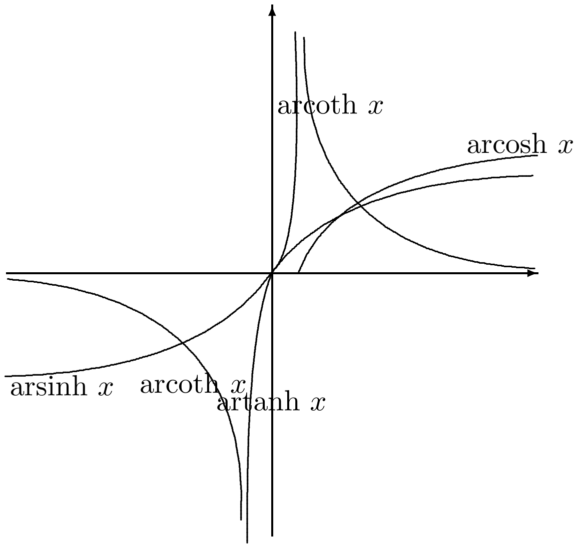
1. $\sinh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 * \cosh x_2 + \cosh x_1 * \sinh x_2$
2. $\cosh(x_1 + x_2) = \sinh x_1 * \sinh x_2 + \cosh x_1 * \cosh x_2$

Satz: Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

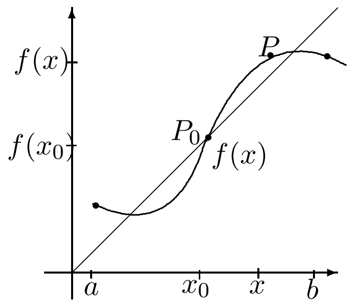
Umkehrfunktionen:

$f(x):$	f^{-1}	D	B
$\sinh x$	$arsinhx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$arcoshx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$artanhx = \frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\coth x$	$arcothx = \frac{1}{2}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$



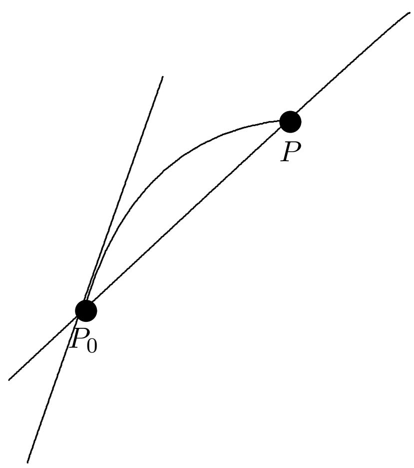
5 Differentialrechnung

5.1 Motivation



Sekante:

1. $(x_0, f(x_0)), (x, f(x))$
2. $(x_0, f(x_0)), m_p = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



Tangente: $\lim\limits_{P \to P_0}$

Tangente: Steigung an p_0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

5.2 Definition der Ableitung

Definition: Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, D(f)=I$ beliebig

1. f heißt differenzierbar an $x_0\in I$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{df}{dx}(x_0)$ existiert. Ist x_0 rechter bzw linker Endpunkt von I, so heißt f an x_0 linksseitig bzw. rechtsseitig differenzierbar.
2. Die Funktion $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $D(f')=D(f)\cap\left\{x:\frac{df}{dx}(x_0)\text{ existiert}\right\}$ und $f'(x)=\frac{df}{dx}(x_0)$ heißt Ableitung von f. Ist f' stetig auf einer Menge $X\subset D(f)$, so heißt f stetig differenzierbar auf X.

Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert..

$$\begin{aligned}
f &= f^{(0)}\\
&\vdots\\
f'' &= (f')'\\
f''' &= (f'')'\\
&\vdots\\
f^{(n)} &= (f^{(n-1)})'
\end{aligned}$$

Nomenklatur

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}(x_0)\qquad\text{Ortskoordinate}$$

$$\dot{g}(t_0)=\frac{dg}{dt}(t_0)\qquad\text{Zeitkoordinate}$$

Einfache Funktionen:

1. $f(x)=a$
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{a-a}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$
2. $f(x)=a*x$
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{ax-ax_0}{x-x_0}=a$$

3. $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - {x^2}_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x*x - x*x_0 + x*x_0 - x_0*x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(x * \frac{x - x_0}{x - x_0} + \frac{x - x_0}{x - x_0} * x_0 \right) = \\ &= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2 * x_0 \end{aligned}$$

4. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$: Beweis mit vollständiger Induktion:
   (a) Induktionsbeginn $n = 1$:
   $$f(x) = x, f'(x) = 1$$
   (b) Induktionsannahme $n - 1 \to n$. Es gelte für
   $$g(x) = x^{n-1} : g'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^{n-1} - {x_0}^{n-1}}{x - x_0} = (n-1) * {x_0}^{n-2}$$
   (c) Induktionsschluß: Wir berechnen
   $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^{n-1} * x - x^{n-1} * x_0 + x^{n-1} * x_0 - {x_0}^{n-1} * x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(x^{n-1} \frac{x - x_0}{x - x_0} + \frac{x^n - 1}{-} {x_0}^{n-1} * x_0 \right) = \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(x^{n-1} + (n-1){x_0}^{n-2} x_0 \right) \\ &= {x_0}^{n-1} + (n-1){x_0}^{n-1} \\ &= n{x_0}^{n-1} \end{aligned}$$

Satz:

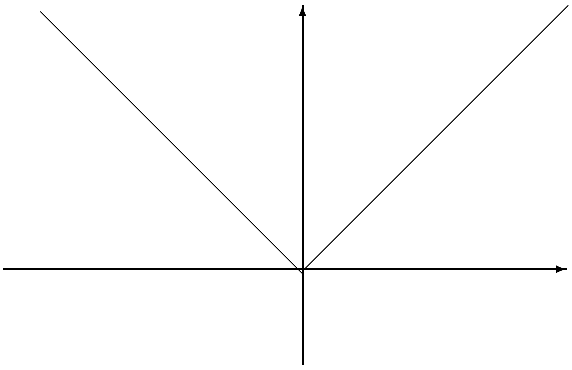
Die Funktion$f(x) = |x|, D(f) = \mathbb{R}$ ist differenzierbar auf $C_{\mathbb{R}}\{0\}$. Es gilt:

$$F'(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

.

Beweis:

1. $x < 0, x_0 < 0$
   $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1$$
2. $x > 0, y_0 > 0$
   $$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$



Satz:

Die Funktion f sei definiert auf I und differenzierbar an $x_0 \in I$. Dann ist f stetig an x_0.

5.3 Ableitungsregeln

Satz: Die Funktionen f und g seien definiert auf I und differenzierbar an $x_0 \in I$. Dann gilt:

1. Summenregel: $f + g$ ist differenierbar an x_0

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2. Produktregel: $f * g$ ist differenierbar an x_0

$$(f*g)'(x_0) = f'(x_0) * g(x_0) + g'(x_0) * f(x_0)$$

3. Quotientenregel: $\frac{f}{g}$ ist differenierbar an x_0

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0) * f'(x_) - f(x_0) * g'(x_0)}{[g(x)]^2}$$

$$\text{Merkhilfe: } \frac{NAZ - ZAN}{N^2} = \frac{\text{Nenner*Ableitung Zähler - Zähler*Ableitung Nenner}}{\text{Nennerquadrat}}$$

Beweise:

1. Summenregel:

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_0 &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] + [g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

2. Produktregel:

$$\begin{aligned}(f*g)'(x_0 &= \lim_{x\to x_0}\frac{(f*g)(x)-(f*g)(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)*g(x)-f(x_0)*g(x)+f(x_0)*g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\left(g(x_0)*\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0}{x-x_0}\right) = \\ &= g(x_0)*f'(x_0)+f(x_0)*g'(x_0)\end{aligned}$$

3. Quotientenregel: $h(x)=\left(\frac{1}{g}\right)(x)$

$$\begin{aligned}h'(x) &= \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}*\frac{-1}{g(x)*g(x_0)} = \\ &= g'(x_0)*\frac{-1}{[g(x_0)]^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f*\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \\ &= f'(x_0)*h(x_0)+f(x_0)*h'(x_0) = \\ &= f'(x_0)*\frac{g(x_0)}{[g(x_0)]^2}+f(x_0)*\left(-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\right) = \\ &= \frac{f'(x_0)*g(x_0)-f(x_0)*g'(x_0)}{[g(x)]^2}\end{aligned}$$

Satz:

Ein Polynom $P(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}a_\nu x^\nu$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und es gilt:

$$P'(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu*a_\nu*x^{\nu-1}$$

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$
$$P'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$$

Satz: Kettenregel:

Es sei $h = g \circ f$ definiert auf I. Ist f differenzierbar an x_0 und g differenzierbar an $y_0 = f(x_0)$, so ist h differnzierbar an x_0 und es gilt:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) * f'(x_0) = \frac{dg}{dy}y_0 * \frac{df}{dx}x_0$$

Beispiel:$h(x) = (3x^2 + 7x)^3$ definiert auf ganz $\mathbb{R}$

$$h'(x) = \underbrace{3(3x^2+7)^2}_{\text{Äußere Ableitung}} * \underbrace{(6x+7)}_{\text{Innere Ableitung}} = (18x+21)(3x^2+7)^2$$

Satz:

Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, f sei differenzierbar an $x_0 \in I$. Gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar an $y_0 = f(x_0)$. Es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis: $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}y - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \\ &= \frac{1}{f'(x_0}\end{aligned}$$

5.4 Ableitungen wichtiger Funktionen

Satz:

Es sei $\{x_n\}$ eine Folge von Zahlen, $x_n \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x_n| < 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ (Beispiel:$x_n = \frac{1}{n}$). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e \qquad (\approx 2,71828\ldots)$$

Satz:

$x > 0, x \in \mathbb{R}$ $(log_b x)' = \frac{1}{x} log_b e$

Beweis: $0 < |h_n| < x, h_n \to 0$

$$
\begin{aligned}
(log_b(x_0)) &= \lim_{x\to x_0} \frac{log_b x - log_b x_0}{x - x_0} = \qquad\qquad h_n := x - x_0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{log_b(x_0 + h_n) - log_b(x_0)}{h_n} = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} * log_b\left(\frac{x_0 + h_n}{x_0}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} * log_b\left(1 + \frac{h_n}{x_0}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} * \frac{x}{h_n} * log_b\left(1 + \frac{h_n}{x_0}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} * log_b\left(1 + \frac{h_n}{x_0}\right)^{\frac{x}{h_n}} = \\
&= \frac{1}{x} * log_b e
\end{aligned}
$$

Speziell für b=e:
Satz: $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(e^x)' = e^x$. **Beweis**:

$$
\begin{aligned}
&y = f(x) = e^x \\
&x = f^{-1}(y) = \ln y \\
&f'(x) = \tfrac{dy}{dx} = \tfrac{1}{(f^{-1}(y))'} = \tfrac{1}{(\ln y)'} = y = e^x
\end{aligned}
$$

Satz

$$x \in \mathbb{R}, b > 0 \Longrightarrow (b^x)' = b^x * \ln b$$

Beweis:

$$(b^x)' = \left(e^{x \ln b}\right)' = e^{x \ln b} * \ln b = b^x \ln b$$

Hyperbolische Funktionen

1. $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$$(\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$
2. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$$(\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$
3. $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$$(\tanh x)' = \frac{(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2}{(\cosh x)^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - (\tanh x)^2$$

4. $\coth x = \frac{coshx}{sinhx}$

$$(\coth x)' = \frac{(\sinh x)^2 - (\cosh x)^2}{(\sinh x)^2} = -\frac{1}{(\sinh x)^2} = 1 - (\coth x)^2$$

Die **Umkehrfunktionen**:

1. $\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\begin{aligned}(\operatorname{arsinh})'(x) &= \frac{1}{x + sqrtx^2 + 1}(1 + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} * 2x) = \\ &= \frac{\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+\sqrt{x^1+1}} * \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

2. arcosh als Übung

3. $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$

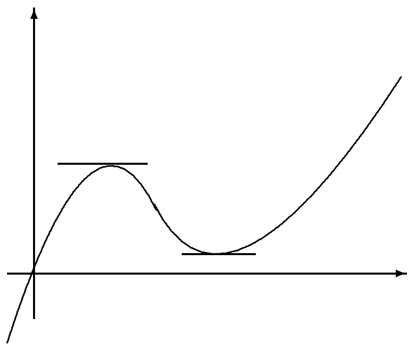
$$\begin{aligned}(\operatorname{artanh})'(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} * \frac{(1-x)*1-(1+x)*(-1)}{(1-x)^2} = \\ &= \frac{(1-x)*2}{2(1+x)(1-x)^2} = \\ &= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

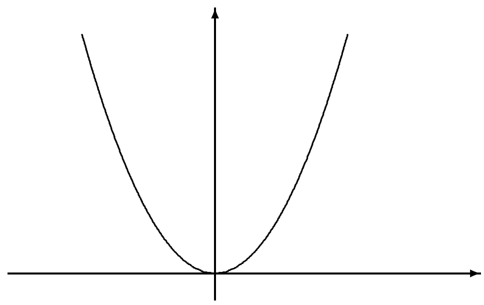
4. arcoth als Übung

5.5 Mittelwertsätze der Differentialrechnung

Satz:

Es sei f definiert auf $[a, b]$ und differenzierbar an $x_0 \in (a, b)$. Hat f an x_0 ein lokales Maximum/Minimum, so gilt notwendig $f'(x_0) = 0$





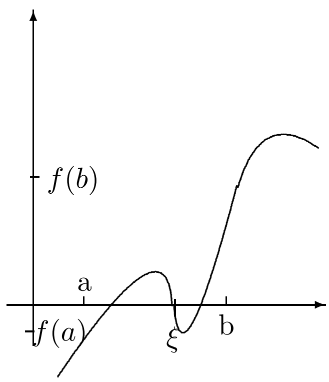
Beweis:

f hat an x_0 ein lokales Maximum. Dann gilt für genügend großes $x_0 \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{aligned} f(x_0+\tfrac{1}{n}) \leq f(x_0) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{=\frac{1}{n}}} \leq 0 \\ f(x_0-\tfrac{1}{n}) \leq f(x_0) \quad &\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{\underbrace{x-x_0}_{=-\frac{1}{n}}} \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{f'(x_0)=0}$$

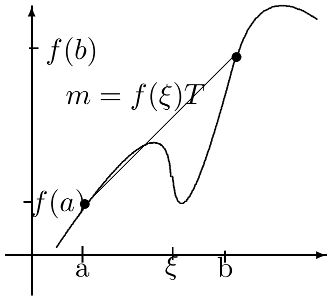
Satz von Rolle:

Die Funktion f sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Es gilt:$f(a)=f(b)$. Dann gibt es wenigstens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi)=0$.



Beweis:

Ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in [a, b]$, dann gilt für jedes $\xi \in (a, b)$; $f'(\xi) = 0$. Ist f nicht konstant, dann gibt es mindestens ein ξ_1 mit $f'(\xi_1) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b] \to f'(\xi) = 0$.



Satz: 1.Mittelwertsatz:

Die Funktion f sei stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Satz:

Eine Funktion f sei stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) und es gelte $f'(x) = 0$ auf (a, b). Dann ist f konstant.

Beweis: $x_0 \in [a, b], \xi_0 \in [a, x_0]$

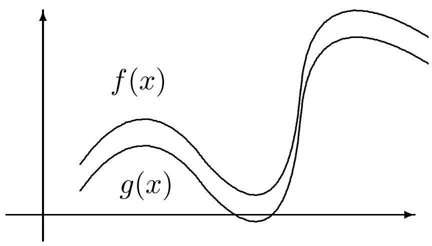
$$\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} = f'(\xi_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0) = f(0) \forall x_0 \in [a, b]$$

Satz:

Die Funktionen f und g seien stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a,b). Es gelte $f'(x) = g'(x) \qquad \forall x \in (a, b)$. Dann gilt:

$$f(x) = g(x) + c \qquad \forall x \in (a, b)$$



Beweis: Definiere $h(x) = f(x) - g(x)$.

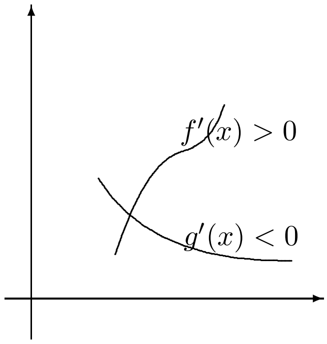
$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \to h(x) = c = konstant$$

$$f(x) - g(x) = c$$

Satz:

Die Funktion f sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b).

1. $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f ist streng monoton wachsend.
2. $f'(x) < 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow$ f ist streng monoton fallend.



Beweis:

1. $f'(x) > 0 \forall x \in (a,b)$

$$a \le x_1 < x_2 \le b \text{ Dann gibt es ein } \xi \in (x_1,x_2) \text{ mit}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

2. $f'(x) < 0 \forall x \in (a,b)$

$$a \le x_1 < x_2 \le b \text{ Dann gibt es ein } \xi \in (x_1,x_2) \text{ mit}$$

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{<0}\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Satz: 2. Mittelwertsatz:

Die Funktionen f und g seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) und ferner sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$:

1. $g(a) \neq g(b)$
2. Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

5.6 Die Regeln von de l'Hospital

Grenzwerte von Quotienten $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für den Fall, daß $f(x), g(x) \to 0$ oder $f(x), g(x) \to \infty$

Satz:

Es sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $-\infty \leq l \leq +\infty$. Ferner seien f,g stetig differenzierbar auf (a, b) und es sei

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

Dann folgt aus

1. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$ oder
2. $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$

die Aussage

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

$$\left(\text{Analog für } \lim_{x\to a}\right)$$

Beispiel:

$$\begin{array}{llll}
\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b} g(x) = 0 & & & \lim\limits_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = L \\
1. f'(x), g'(x) & & & \| \\
\lim\limits_{x\to b} f'(x) = \lim\limits_{x\to b} g'(x) = 0 & & & \lim\limits_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \\
\qquad \| \qquad\qquad \| & & & \| \\
\lim\limits_{x\to b} F(x) = \lim\limits_{x\to b} G(x) = 0 & & & \lim\limits_{x\to b} \frac{F(x)}{G(x)} = L \\
2. F'(x), G'(x) & & & \Uparrow \\
\lim\limits_{x\to b} F'(x) \neq 0, \lim\limits_{x\to b} G'(x) \neq 0 & \Rightarrow & & \lim\limits_{x\to b} \frac{F'(x)}{G'(x)} = L
\end{array}$$

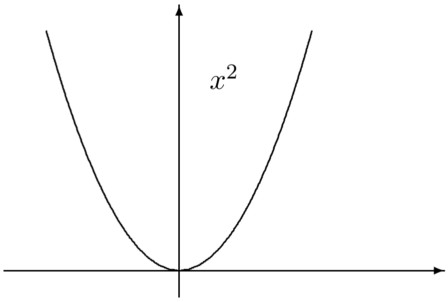
Beispiele:

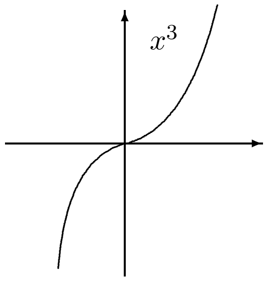
1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} == \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

5.7 Kurvendiskussion

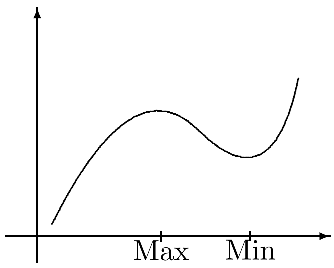


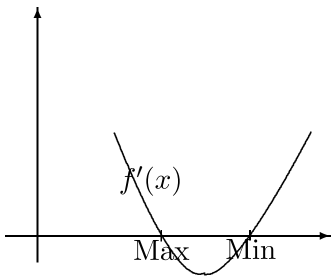


Satz:

Sei f definiert auf $[a, b]$ und zweimal differenzierbar an $x_0 \in (a, b)$

1. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so hat f an x_0 ein lokales Minimum.
2. Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so hat f an x_0 ein lokales Maximum.





Definition: f sei definiert auf $[a, b]$ und differenzierbar an $x_0 \in (a, b)$. f hat an x_0 genau dann einen Wendepunkt, wenn f' an x_0 ein lokales Extremum besitzt.

Satz:

f sei definiert auf $[a, b]$ und zweimal differenzierbar an $x_0 \in (a, b)$. Hat f an x_0 einen Wendepunkt, so gilt notwendig $f''(x_0) = 0$.

Satz:

f sei definiert auf $[a, b]$ und n–mal differenzierbar an $x_0 \in (a, b)$. Gilt $f^{(k)}(x_0) = 0$ für $k = 2, \ldots, (n-1)$und$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ für $n \geq 3$, n ungerade, so hat f an x_0 einen Wendepunkt.

<u>Ablauf der Kurvendiskussion</u>

1. Bestimmung der Nullstellen
2. Bestimmung des Definitionsbereichs, der Stetigkeits– und Differenzierbarkeitsintervalle
3. Klassifikation der Unstetigkeitsstellen von f und Untersuchung des Verhaltens von f an den Rändern des Definitionsbereichs und im „im Unendlichen “.
4. Untersuchung der Parität (des Symmetrieverhaltens)
5. Bestimmung der lokalen Extrema und der Wendepunkte
6. Bestimmung der Monotonie
7. Berechnung geeigneter Funktionswerte
8. Skizzierung der Funktion

Beispiel:$f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$ $D = \mathbb{R}$

1. $x_1 = 2$
   Polynomdivision:
   $$\begin{array}{l}(x^3 - 3x^2 \quad -10x + 24)/(x-2) = x^2 - x - 12 \\ \;x^3 - 2x^2 \\ \qquad -x^2 - 10x \\ \qquad -x^2 + 2x \\ \qquad\qquad 12x + 24 \\ \qquad\qquad 12x + 24 \\ \qquad\qquad\quad 0\end{array}$$
   Über die Lösungsformel für Polynome 2. Grades erhält man:
   $$x_{2;3} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow x_2 = -3; x_3 = 4$$
2. f ist stetig und differenzierbar auf $D(f) = \mathbb{R}$
3. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

4. Symmetrie dauert hier zu lange.

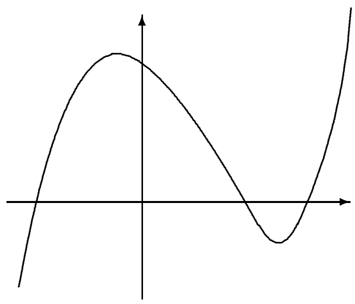
5. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 10 = 0 \Rightarrow x'_{1;2} = 1 \pm \sqrt{\frac{13}{3}}$

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x''_1 = 1$$

$$f''(x_{1;2}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Minimum bei} & 1 - \sqrt{\frac{13}{3}} \\ \text{Maximum bei} & 1 + \sqrt{\frac{13}{3}} \end{cases}$$

$$f'''(6) = 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } 1$$

6. $-\infty < x < 1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$: f ist monoton wachsend
$1 - \sqrt{\frac{13}{3}} < x < 1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$:f ist streng monoton fallend
$1 + \sqrt{\frac{13}{3}} < x < +\infty$:f ist streng monoton wachsend



$-\infty < x < 1$: f ist rechtsgekrümmt
$1 < x < +\infty$: f ist linksgekrümmt

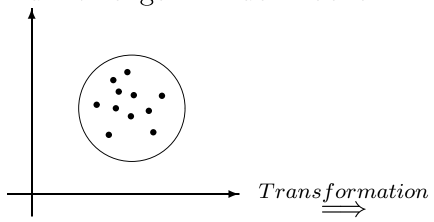
7. Einige wichtige Punkte

x	$f(x)$
-2	24
$1 - \sqrt{\frac{13}{3}}$	$30,04$
0	24
1	12
$1 + \sqrt{\frac{13}{3}}$	$-6,04$
5	24

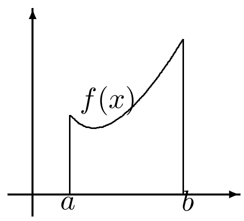
6 Integralrechnung

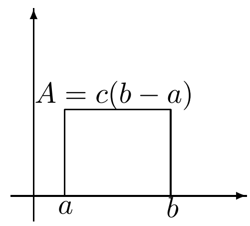
6.1 Idee des Riemann–Integrals

Punktmenge F in der Ebene

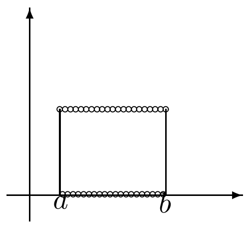


Punktmenge F, die durch eine auf einem Intervall $[a, b]$ positive, beschränkte Funktion f definiert ist



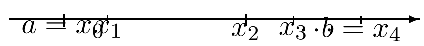


$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für x rational} \\ 0 & \text{für x irrational} \end{cases}$$



Definition: Gegeben sein das Intervall $[a, b]$

1. Je $n+1$ Zahlen $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ bilden eine Partition (Zerlegung) von $[a, b]$
2. Für $1 \le k \le n$ heißt $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ k-tes Teilintervall mit der Länge $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$



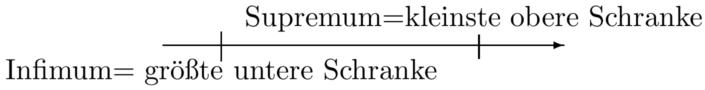
3. Die Zahl$||P|| = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$ heiß Norm von P

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

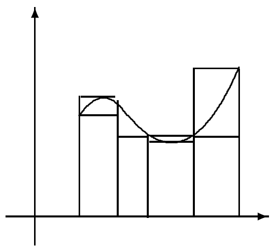
Definition: Es sei f beschränkt auf $[a, b]$ und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Partition auf $[a, b]$. Wir setzen:

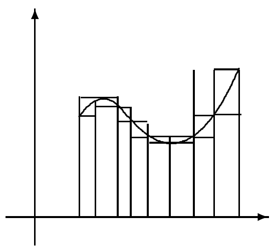
1. $m_k(f) = \inf\limits_{I_k} f(x), M_k(f) = \sup\limits_{I_k} f(x)$

2.



$$m(x) = \inf_{[a,b]} f(x), M(x) = \sup_{[a,b]} f(x)$$





3. $\underline{S}_P(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k(f) * \Delta x_k$ heißt Untersumme von f bezüglich P.

$$\overline{S}_P(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) * \Delta x_k \text{ heißt Obersumme von f bezüglich P.}$$

$$\underline{S}_P(f) \leq \overline{S}_P(f)$$

6.2 Riemann-Darboux-Integrale

Satz:

Für jede Partition P gilt $m(f)(b-a) \leq \underline{S}_P(s) \leq \overline{S}_P(f) \leq M_f(b-a)$.

„Beweis ": $m(f) \le m_k(f) \le M_k(f) \le M(f)$

$$\begin{aligned} m(f)(b-a) &= \sum_k m(f)\Delta x_k \\ &\le \sum_k m_k(f)\Delta x_k = \underline{S}_P(f) \\ &\le \sum_k M_k(f)\Delta x_k = \overline{S}_P(f) \\ &\le \sum_k M(f)\Delta x_k = M(f)(b-a) \end{aligned}$$

Definition: Eine Partition $P' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ von $[a,b]$ heißt Verfeinerung einer Partition $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$von $[a,b]$, wenn gilt:

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$$

Satz:

Es sei P' eine Verfeinerung von P. Dann gilt

1. $\overline{S}_{p'}(f) \le \overline{S}_P(f)$
2. $\underline{S}_{p'}(f) \ge \underline{S}_P(f)$

Satz:

Für zwei beliebige Partitionen P_1, P_2 gilt:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \le \overline{S}_{P_2}$$

Beweis:

Es sei die Partition $P = P_1 \cup P_2$. P ist eine Verfeinerung sowohl von P_1 als auch von P_2. Dann gilt:

$$\underline{S}_{P_1}(f) \le \underline{S}_P(f) \le \overline{S}_P(f) \le \overline{S}_{P_2}(f)$$

Definition:

1. Als unteres Riemann-Darboux-Integral bezeichnen wir

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_P \underline{S}_P(f)$$

2. Als oberes Riemann-Darboux-Integral bezeichnen wir

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_P \underline{S}_P(f)$$

Satz:

Es gilt: $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$

Satz:

Es sei $b \leq c \leq a$. Dann gilt:

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$
2. $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$

Satz:

Ist $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine beliebige Partition auf $[a, b]$, so gilt

1. $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \underline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx$
2. $\overline{\int_a^b} f(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\int_{x_{k-1}}^{x_k}} f(x)dx$

6.3 Das Riemann-Integral

Definition: Die Funktion f sei beschränkt auf $[a; b]$. Gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

so heißt f Riemann–integrierbar (R–integrierbar) auf $[a, b]$ und der gemeinsame Wert heißt das Riemann–Integral von f auf $[a, b]$: $\int_a^b f(x)dx$

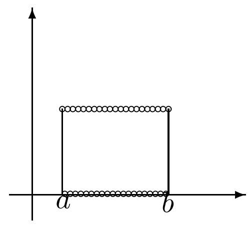
Beispiele:

1. $f(x) = 1$, definiert auf $[a, b]$
   Für jede Partition P gilt: $\underline{S}_P(f) = b - a = \overline{S}_P(f)$
   Dann folgt:

$$\underline{\int_a^b} 1dx = (b - a) * 1 = \overline{\int_a^b} 1dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b 1dx = b - a$$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in [a,b] \cap C_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \end{cases}$



Für jede Partition P auf $[a,b]$ gilt:

$$\underline{S}_P(f) = 0, \qquad \overline{S}_P(f) = (b-a)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} = 0 \neq \overline{\int_a^b} = (b-a)$$

$f(x)$ ist also nicht R–integrierbar.

Satz: Riemann-Integrabilitätskriterium:

Die Funktion $f(x)$ ist auf $[a,b]$ genau dann R–integrierbar, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ eine Partition P existiert mit

$$\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(t) < \epsilon$$

Satz:

Die Funktion sei monoton auf [a,b]. Dann ist f Riemann–integrierbar auf $[a,b]$

Beweis:

Es sei $\underbrace{\underline{o.B.d.A}}_{\text{ohne Beschränkung der Allgemeinheit}}$ f streng monoton wachsend. Für jede Partition P von $[a,b]$ gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) &= \sum_{k=1}^{n} [M_k(f) - m_k(f)]\Delta x_k \leq \\
&\leq ||P|| \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_k - 1)] = \\
&= ||P|| \, [(f(x_n) - f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})) + \\
&\qquad \cdots + (f(x_2) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(x_0)] = \\
&= ||P|| [f(b) - f(a)]
\end{aligned}$$

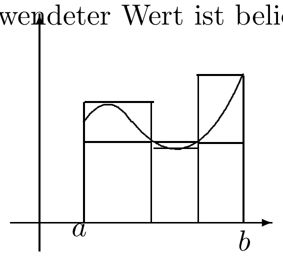
1. $f(a) = f(b)$, es folgt für jedes P:$\underline{S}_P(f) = \overline{S}_P(f)$
2. Für $f(x) < f(b)$ wählen wir ui $\epsilon > 0$ eine Partition derart, daß $||P|| < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)} \Leftrightarrow ||P||(f(b) - f(a) < \epsilon$
   $\Rightarrow \overline{S}_P(f) - \underline{S}_P(f) < \epsilon$

Satz:

Die Funktion f sei stetig auf [a,b]. Dann ist f Riemann–integrierbar auf [a,b].

Verwendeter Wert ist beliebig

Riemannsche Summen:



6.4 Eigenschaften des Riemann-Integrals

1. Ist $a = b$ und $f(a)$ definiert, so setzen wir

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Ist $a > b$ und f R–integrierbar auf $[b, a]$, so setzen wir

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Satz: Homogenität des Integrals:

Sei f Riemann–integrierbar auf $[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch die Funktion $c * f(x)$ R–integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b c * f(x)dx = c * \int_a^b f(x)dx$$

Satz: Additivität des Integrals:

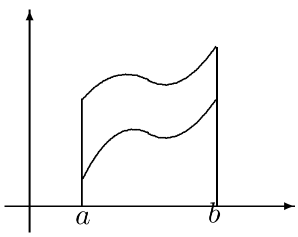
Seien f und g R–integrierbar auf $[a, b]$. Dann ist auch $(f + g)$ R–integrierbar auf $[a, b]$ mit:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Satz: Monotonieeigenschaft:

Seien f und g R–integrierbar auf $[a, b]$ und $g \leq f(x)$ auf $[a, b]$. Dann gilt:

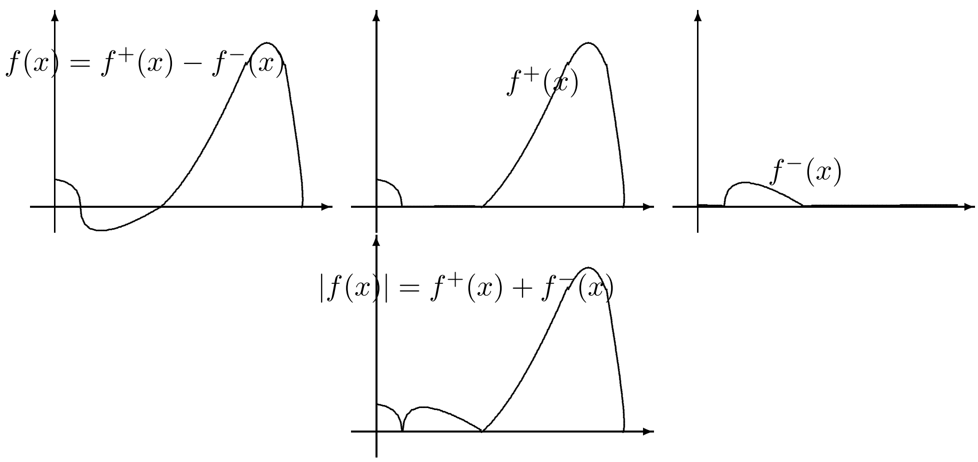
$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$$



Sei f auf $[a, b]$ definiert. Wir setzen für $x \in [a, b]$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{wenn } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{wenn } f(x) > 0 \end{cases}$$



Satz:

Ist f auf $[a, b]$ R–integrierbar, so sind auch f^+ und f^- R–integrierbar.

Satz:

Ist f auf $[a, b]$ R–integrierbar, so auch $|f|$. Es gilt:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Satz:

Seien f, g auf $[a, b]$ R–integrierbar. Dann ist auch (f*g) R–integrierbar.

Satz:

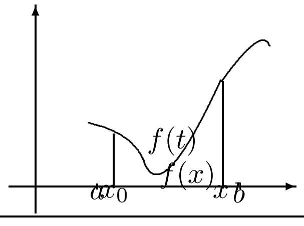
Ist f R–integrierbar auf $[a, b]$, dann ist f R–integrierbar auf jedem Teilintervall $[c, d] \subset (a, b)$.

Satz:

Ist f beschränkt auf $[a, b]$ und R–integrierbar auf jedem Teilintervall $[c, d] \subset (a, b)$, dann ist f R–integrierbar auf $[a, b]$

6.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei I ein beliebiges Intervall und f R–integrierbar auf jedem Intervall $[a, b] \subset I$. Ist $x_0 \in I$, so heißt die Funktion F mit $D_F = I$ und $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ „Integral von f als Funktion der oberen Grenze“



Satz:

F ist stetig auf I.

Satz: Hauptsatz:

Ist f stetig an $x \in I$, so ist F differenzierbar an x und es gilt $F'(x) = f(x)$

Sei I ein beliebiges Intervall, f und F seien definiert auf I und F differenzierbar auf I. Gilt auch I $F(x) = f(x)$,dann heißt F Stammfunktion von f auf I.
Jede stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion, denn

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

ist differenzierbar auf I mit $F'(x) = f(x)$

Satz:

F_1,F_2 seien Stammfunktion von f auf I. Dann gibt es eine Konstante c mit $F_1(x) = F_2(x) + c$

Satz:

Sei f R–integrierbar auf $[a, b]$ und F Stammfunktion von f auf $[a, b]$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b = [F(x)]_a^b$$

6.6 Das unbestimmte Integral

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt : \text{„Integral als Funktion der oberen Grenze“}$$

$F_1(x) = F_2(x) + c$

Definition: Es sei I ein beliebiges Intervall:

- S(I)={f: f besitzt Stammfunktion auf I}
- Für $f \int S(I)$ definieren wir das unbestimmte Integral
  $\int f(x)dx = \{F : FistStammfunktionvonfaufI\}$
- Ist $f \in S(I), F_1 \in \int f(x)dx$, so schreiben wir
  $\int f(x)dx = F_1(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$I = \{0, \infty\}, \alpha \neq -1$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

Satz:

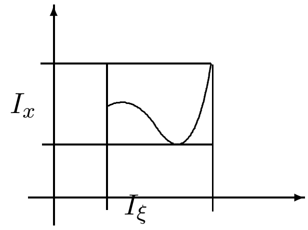
Es sei $f, g \in S(I)$. Dann ist auch $f + g \in S(I)$ und es gilt: $\int (f+g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Satz:

Es sei $f \in S(I)$, $\lambda \neq 0$. Dann ist auch $\lambda * f \in S(I)$ und es gilt: $\int (\lambda * f)(x)dx = \lambda * \int f(x)dx$

Satz: Substitution

Sei $\psi(\xi)$ stetig differenzierbar auf I_ξ, f(x) stetig auf $I_x = \psi(\xi)$.



1. $\int f(\psi(\xi)) \frac{d\psi}{d\xi}(\xi) d\xi = [\int f(x)dx]_{x=\psi(\xi)}$
2. Falls $\frac{d\psi}{d\xi}(\xi) \neq 0$ auf I_ξ:
   $\int f(x)dx = [\int f(\psi(\xi)) \frac{d\psi}{d\xi}(\xi) d\xi]_{\xi=\psi^{-1}(x)}$

Beispiel:

1. $x = \psi(\xi) = 3\xi$

$$\begin{aligned}\int \cosh(3\xi) d\xi &= \frac{1}{3} \int \cosh(3\xi) d\xi = \\ &= \left(\frac{1}{3} \int \cosh x dx\right)_{x=3\xi} = \\ &= \left(\frac{1}{3} \sinh x + c\right)_{x=3\xi} = \\ &= \frac{1}{3} \sinh(3\xi) + c\end{aligned}$$

2. $x = \psi(\xi) = 1 - \xi^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi &= -\frac{1}{\int} \frac{-2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \\ &= \left(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right)_{x=1-\xi^2} = \\ &= \left(-\sqrt{x} + c\right)_{x=1-\xi^2} = -\sqrt{1-\xi^2} + c\end{aligned}$$

3. $x = \psi(\xi) = 1 + \xi^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx &= \left(\int \frac{1+\xi^2}{\sqrt{\xi^2}} * 2\xi\right)_{\xi=\sqrt{x-1}} = \\ &= \left(2\int(1+\xi^2)d\xi\right)_{\xi=\sqrt{x-1}} = \\ &= \left(2\xi + \frac{2}{3}\xi^3 + c\right)_{\xi=\sqrt{x-1}} = \\ &= 2 * \sqrt{1-x} + \frac{2}{3} * (x-1)^{\frac{2}{3}} + c\end{aligned}$$

Satz: partielle Integration:

Seien f,g stetig differenzierbar auf I. Dann gilt:
$\int f(x) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int(f'(x) * g(x)dx$

Beispiel:

1. $\int \underbrace{x}_{f} * \underbrace{\cosh x}_{g'} dx = \underbrace{x}_{f} * \underbrace{\sinh x}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} * \underbrace{\sinh x}_{g} dx = x \sinh x - \cosh x$
2. $\int \ln x dx = \int 1 * \ln x dx = x * \ln x - x + c$

6.7 Bestimmte Integration durch Substitution und partielle Integration

Satz:

Es sei $\psi(\xi)$ stetig auf $[\alpha, \beta]$, f stetig auf $[a, b] = \psi([\alpha, \beta])$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\psi(\xi)) * \psi'(\xi)d\xi$$

Beispiel:

1. $x = \xi^3 + 1 = \psi(\xi)$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 \frac{3\xi^2}{\xi^3+1}d\xi &= \int\limits_1^9 \frac{1}{x}dx = \\ &= \ln 9 - \ln 1 = \\ &= \ln 9\end{aligned}$$

2. $x = \xi^2 = \psi(\xi), \psi'(\xi)d = 2\xi$

$$\begin{aligned}
\int\limits_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}} &= \int\limits_2^3 \frac{2\xi}{1+\xi} d\xi = \\
&= 2\int\limits_2^3 \frac{1+\xi-1}{1+\xi} d\xi = \\
&= 2\int\limits_2^3 \left(1 - \frac{1}{1+\xi}\right) d\xi = \\
&= 2\int\limits_2^3 1 d\xi - 2\int\limits_2^3 \frac{1}{1+\xi} d\xi = \\
&= 2*3 - 2*2 - 2*\ln(1+3) - 2*\ln(1+2) = \\
&= 2 - 2\ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Satz: Partielle Integration:

Seien f,g stetig differenzierbar auf $[a, b]$. Dann gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel:

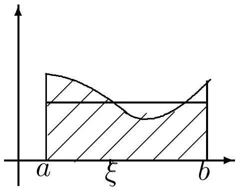
1.
$$\begin{aligned}
\int\limits_1^2 x\ln x dx &= [\frac{x^2}{2}lnx]_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{x^2}{2} * \frac{1}{x} dx = \\
&= 2\ln 2 - \frac{1}{2}\int\limits_1^2 x dx = \\
&= 2ln2 - [\frac{1}{4}x^2]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
J_n = \int\limits_1^e n(\ln x)^n dx &= [(\ln x)^n]_1^e - \int\limits_1^e xn(\ln x)^{n-1} * \frac{1}{x} dx = \\
&= e - \int\limits_1^e n(\ln x)^{n-1} dx = \\
&= e - \frac{n}{n-1} * J_{n-1}
\end{aligned}$$

6.8 Mittelwertsätze der Integralrechnung

Satz: 1. Mittelwertsatz:

Sei f stetig auf $[a, b]$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\xi) * (b - a)$



Beweis: $F(x) = \int_a^b f(t)dt$

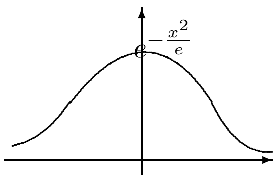
1.Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Es gibt ein $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F'(\xi) * (b - a) = f(\xi) * (b - a)$

Es existieren noch weitere Mittelwertsätze der Integralrechnung, diese würden aber den Rahmen dieses Kurses sprengen.

6.9 Uneigentliche Integrale

Bisher war $I = [a, b]$ endlich und f war in I beschränkt. Bei uneigentlichen Integralen ist das nicht mehr der Fall:

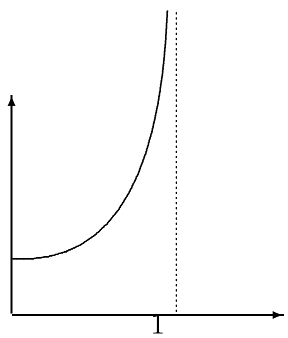


1. Es sei $-\infty < a < b \leq +\infty$. Eine Funktion f heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, b]$, wenn f auf jedem Intervall $[a, B] \subset [a, b)$ R–integrierbar ist und der Grenzwert $\lim_{B \to b^-} \int_a^B f(x)dx = \int_a^{b^-} f(x)dx$ existiert.
2. Es sei $-\infty \leq a < b < +\infty$. f heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, b]$, wenn f auf jedem Intervall $[A, b] \subset (a, b]$ R–integrierbar ist und $\lim_{A \to a^+} \int_a^b f(x)dx = \int_{a^+}^b f(x)dx$ existiert.
3. Es sei $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. f heißt uneigentlich integrierbar auf $[a, b]$, wenn für ein $c \subset (a, b)$ f auf $(a, c]$ und $[c, b)$ uneigentlich integrierbar ist.

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)dx = \int_{a^+}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b^-} f(x)dx$$

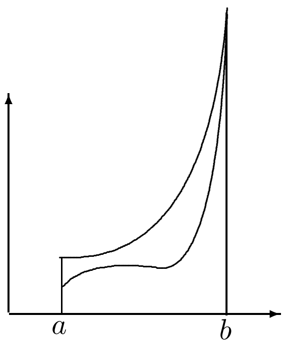
Beispiele:

1. $\int\limits_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx$
   Es gilt für $0 < A < 1$:
   $$\int\limits_{A}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} -\ln A & \text{für} \quad \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} * (1 - a^{1-\alpha}) & \text{für} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$$
   $\lim\limits_{a \to 0^+} \int\limits_{a}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx$ existiert genau dann, wenn $\alpha < 1$:
   $\int\limits_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$
2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx,$ $\qquad B > 1$:
   $\int\limits_{1}^{B} \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln B & \text{für} \quad \alpha = 1 \\ \frac{1}{a-\alpha} * (B^{1-\alpha} - 1) & \text{für} \quad \alpha \neq 1 \end{cases}$
   $\lim\limits_{B \to \infty} \int\limits_{1}^{B} \frac{1}{x^\alpha} dx$ existiert für $\alpha > 1$:
   $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$
3. $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ $\qquad 0 < B < 1$
   $\int\limits_{0}^{B} \frac{1}{1-x} dx = [-2\sqrt{1-x}]_0^B = 2 - 2\sqrt{1-B}$
   $\int\limits_{0}^{1} {}^1 sqrt 1 - x dx = \lim\limits_{B \to 1^-} \int\limits_{0}^{B} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$



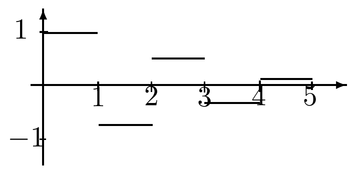
Satz: Vergleichskriterium

f,g seien R–integrierbar auf jedem Intervall $[a, B] \subset [a, b)$ und es gelte $0 \leq f(x) \leq g(x)$ auf$[a, b)$. Konvergiert $\int\limits_{a}^{b^-} g(x)dx$, so konvergiert auch $\int\limits_{a}^{b^-} f(x)dx$ und es gilt:
$\int\limits_{a}^{b^-} f(x)dx \leq \int\limits_{a}^{b^-} g(x)dx$



Satz: Spezialfall

f sei R–integrierbar auf jedem Intervall $[a, B] \subset [a, b)$. Konvergiert $\int\limits_a^{B^-} |f(x)|dx$, so konvergiert auch $\int\limits_a^{B^-} f(x)dx$.



7 Trigonometrische Funktionen

Wurden aus Zeitgründen und da weitgehend bekannt übersprungen

8 Funktionsreihen

8.1 Taylor'scher Satz

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu * x^\nu \qquad\qquad a_\nu \Leftrightarrow \frac{f^{(\nu)}}{\nu!}$$

Satz: Taylor'scher Satz für Polynome:

Ist $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$ Polynom und $x_0 \in \mathbb{R}$,so hat f auf ganz $\mathbb{R}$ die Darstellung $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} * (x - x_0)^\nu$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x - x_0 + x_0)^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} (x - x_0)^\mu x_0^{\nu-\mu} \right) = \\ &= \sum_{\mu=0}^{n} b_\mu (x - x_0)^\mu \end{aligned}$$

1. $f(x_0) = b_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b_0 = \frac{(f^{(0)}(x_0)}{0!}$
2. $1 \leq k \leq n$
   $f^k(x) = \sum\limits_{\mu=k}^{n} b_\mu \mu(\mu-1)...(\mu-k+1)(x-x_0)^\mu$
   $f^{(k)}(x_0) = b_k k! \Leftrightarrow b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

Satz: Taylor'scher Satz:

Sei I ein beliebiges Intervall, die Funktion $(n+1)$–mal stetig differenzierbar auf I und x_0 ein innerer Punkt von I. Dann gilt:

1. Für alle $x \in I$ läßt sich f durch die Taylor'sche Formel mit der Entwicklungsmitte x_0 darstellen.
   $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R_n(x, x_0)$
2. Restglied:
$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f(n+1)(t) dt$$

Satz:

Für ein $\theta \in (0,1)$gilt:

1. Lagrange
$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$
2. Cauchy
$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}$$

Satz:

Ist f auf I beliebig oft differenzierbar, so läßt sich f an der Stelle $x \in f$ genau dann durch die Taylorreihe mit Entwicklungsmitte x_0:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^{\nu}$$

darstellen,wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0) = 0$

Satz:

Sei f auf I beliebig oft differenzierbar mit $x \in I$. Existiert ein $k > 0$ mit

$$\max_{[x_0,x]} |f^{(\nu)}(\xi) \leq k \text{ bzw } \max_{[x,x_0]} |f^{(\nu)}(\xi)| \leq k$$

unabhängig von ν, so gilt:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{infty} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^{\nu}$$

8.2 Taylorreihen elementarer Funktionen

Satz:

Es gilt auf $-\infty, +\infty$: $e^x = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!}$

Beweis:

$\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} = \frac{1}{\nu!}, T_N(x, 0) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x^\nu}{\nu!}$
$\max_{[0,x]} |f^{(\nu)}(\xi)| = e^x$ bzw: $\max_{[x,0]} |f^{(\nu)}(\xi)| = 1$

8.3 Wiederholung der Taylor-Reihen

Polynom:$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$
Taylor'scher Satz:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^{\nu}$$

Ziel: $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x1\nu = \sum\limits_{\nu=0}^{n} b_\nu (x-x_0)^\nu$
Weg:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x1\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x - x_0 + x_0)^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \begin{pmatrix} \nu \\ \mu \end{pmatrix} (x-x_0)^\mu x_0^{\nu-\mu} \right] \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu (x-x_0)^\nu \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu = 2: \quad & \frac{2!}{0!2!} * x_0^2 + \frac{2!}{1!1!}(x-x_0) * x_0 + \frac{2!}{2!0!}(x-x_0)^2 x_0^0 \\ & = x_0^2 + 2x_0(x-x_0) + (x-x_0)^2 \end{aligned}}$$

Satz: Für allgemeine Funktion:

Ist eine Funktion $f(x)$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, so kann sie mit der Formel

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x-x_0)^\nu + R$$

ausgedrückt werden.
Bei den meisten in der Physik auftretenden Funktionen verschwindet das Restglied R für $\lim\limits_{n\to\infty}$. Die praktische Bedeutung des Taylor'schen Satzes liegt auch in der durch ihn möglichen einfachen Näherung beliebig komplexer Funktionen durch Polynomfunktionen, die man leicht ableiten, lösen oder integrieren kann.

9 Komplexe Zahlen

9.1 Imaginäre Zahlen

Die quadratische Gleichung $x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar. Es wird eine „symbolische Lösung“eingeführt:
$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

Definition: Imaginäre Einheit:
Die Zahl $i = \sqrt{-1}$ mit $i^2 = -1$ heißt imaginäre Einheit.

Damit ist nun jede Quadratische Gleichung der Form $x^2 + b^2 = 0$ mit $b \in \mathbb{R}$ lösbar:
$x = \pm ib$

9.2 Körper der komplexen Zahlen

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$

1. Die Zahl $z = a + ib$ heißt komplexe Zahl.
2. Wir bezeichen $\begin{array}{ll} a = Rez & \text{als Realteil} \\ b = Imz & \text{als Imaginärteil} \end{array}$ von z

Satz:

Seien $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ komplexe Zahlen. Dann gilt $z_1 = z_2$ genau dann, wenn $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.

Definition: Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Dann heißt die Zahl $z^* = a - ib$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.

Definition: Seien $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ komplexe Zahlen.

1. Die Summe der Zahlen z_1 und z_2 ist gegeben durch $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$
2. Das Produkt der Zahlen z_1 und z_2 ist gegeben durch $z_1 * z_2 = a_1 * a_2 - b_1 * b_2 + i(a_1 * b_2 + a_2 * b_1)$

Speziallfälle für $z = a + ib, z^* = a - ib$:

1. $z + z^* = 2 * a = 2 * Rez$
2. $z - z^* = 2 * i * b = 2 * i * Imz$
3. $z * z^* = a^2 + b^2$

Satz:

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Addition mit neutralem Element $e = 0 + i * 0$. Zu jeder Zahl $z = a + ib$ existiert ein Inverses $-z = -a - ib$

Beweis:

1. Abgeschlossenheit: trivial
2. Assoziativität:

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= a_1 + (a_2 + a_3) + i(b_1 + (b_2 + b_3)) = \\ &= (a_1 + a_2) + a_3 + i((b_1 + b_2) + b_3) = \\ &= (z_1 + z_2) + z_3 \end{aligned}$$

3. Neutrales Element

$$\begin{aligned} z + e &= a_1 + (a + ib) + (0 + i0) = \\ &= (a + 0) + i(b + 0) = \\ &= a + ib = z \end{aligned}$$

4. Inverses Element

$$\begin{aligned} z + (-z) &= (a + (-a)) + i(b + (-b)) = \\ &= 0 + i0) = e \end{aligned}$$

5. Kommutativität

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = \\ &= (a_2 + a_1) + i(b_2 + b_1) = \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

Satz:

Die komplexen Zahlen $C_{\mathbb{C}}\{0\}$ bilden eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Multiplikation mit dem neutralen Element $e = 1 + i0$. Zu jeder Zahl $z = a + ib \neq 0$ existiert ein Inverses $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Beweis:

1. Abgeschlossenheit
2. Assoziativität $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$; Beweis analog oben
3. neutrales Element:

$$\begin{aligned} z * e &= (a + ib) * (1 + i0) = \\ &= a * 1 - b * 0 + i(a * 0 + b * 1) = \\ &= a + ib = z \end{aligned}$$

4. Inverses Element:

$$\begin{aligned} z * z^{-1} &= (a + ib)\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + br}\right) = \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2}\left[a^2 + b^2 - i(ab - ba)\right] = \\ &= 1 - i * 0 = e \end{aligned}$$

5. Kommutativität:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1) + i(a_2b_1 + a_1b_2) = z_2 * z_1 \end{aligned}$$

Satz:

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen vollständigen Körper:

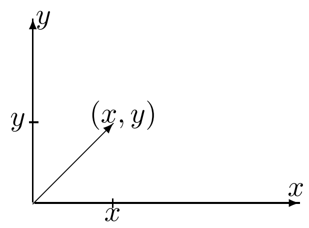
1. Gruppe bezüglich „+“und „∗“
2. Distributivgesetz: $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$
3. Vollständigkeit: Wenn eine beliebige Folge konvergiert, so liegt ihr Grenzwert wieder in $\mathbb{C}$

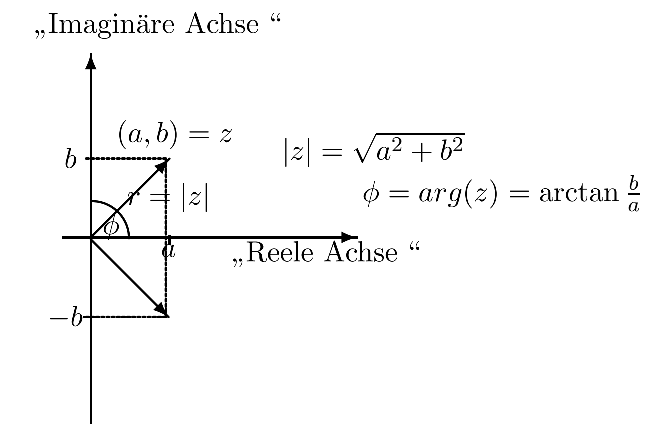
Satz: Fundamentalsatz der Algebra:

> Der Bereich der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h. jede algebraische Gleichung mit komplexen Koeffizienten besitzt in ihm eine Lösung.

Definition: Zu $z = a + ib$ heißt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz^*}$ Betrag von z.
$|z| \geq 0,\qquad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

9.3 Gauß’sche Zahlenebene





$$\begin{array}{ccc} z = a + ib & \longleftrightarrow & z = (a, b) \\ \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Zwei Darstellungen von komplexen Zahlen:

$$\begin{array}{rl} \text{Kartesische Darstellung} & \text{Polare Darstellung} \\ z = (a, b) = a + ib & z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) \\ z^* = (a, -b) = a - ib & z^* = |z|(\cos\phi - i\sin\phi) = |z|(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \cos(x) & = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^\nu}_{i^{2\nu}} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\nu}}{(2\nu)!} \\ \sin(x) & = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^\nu}_{i^{2\nu}} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \\ \hline \cos x + i\sin x & = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(ix)^\nu}{\nu!} = e^{ix} \end{array}$$

Satz: Euler’sche Formel:

> Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^{ix} = \cos z + i\sin z$

Spezialfälle:

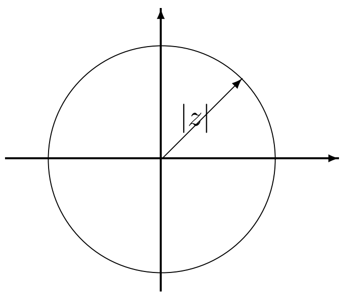
$$\phi = \frac{\pi}{2} : e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + i * 1 = i$$
$$\phi = \pi : e^{i\pi} = -1 + i * 0 = -1$$
$$\phi = \frac{3}{2}\pi : e^{i\frac{3}{2}\pi} = 0 + i * (-1) = -i$$
$$\phi = 2\pi : e^{i*2\pi} = 1 + i * 0 = 1$$

$z_1 = |z_1|e^{i\phi}$, $z_2 = |z_2|e^{i\phi}$

- Multiplikation: $z_1 * z_2 = |z_1| * |z_2| * e^{i(\phi_1+\phi_2)}$
- Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} * e^{i(\phi_1-\phi_2)}$
- Potenzierung: $z_1^n = |z_1|^n * e^{in\phi}$
- Wurzelziehen: $z_1^{\frac{1}{n}} = |z_1|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\phi}{n}}$

$$\begin{aligned} e^{i(\phi+2\pi n)} &= \cos(\phi + 2\pi n) + i \sin(\phi + 2\pi n) = \\ &= \cos\phi + i\sin\phi = \\ &= e^{i\phi} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$e^{i\phi} = 1 * e^{i\phi}$
$z = |z|e^{i\phi}$
$|z| = 1 \Rightarrow z = e^{i\phi}$(alle auf einem „Einheitskreis“um den Ursprung)



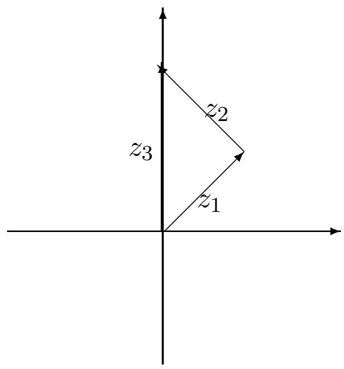
Satz:

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen metrischen Raum.

Beweis:

$D(z_1, z_2) = |z_1, z_2|$

1. $|z_1 - z_2| = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
2. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$



$|e^{i\phi}| = \sqrt{e^{i\phi}e^{-i\phi}} = 1 * \sqrt{\cos^2\phi + i\sin^2\phi}$
$\Rightarrow \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$
Durch Addition/Subtraktion von z/z^*:
$\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$
$\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$

10 Vektoren und Matrizen

10.1 Vektoren: Grundlagen

Beispiel: $T(\vec{r})$

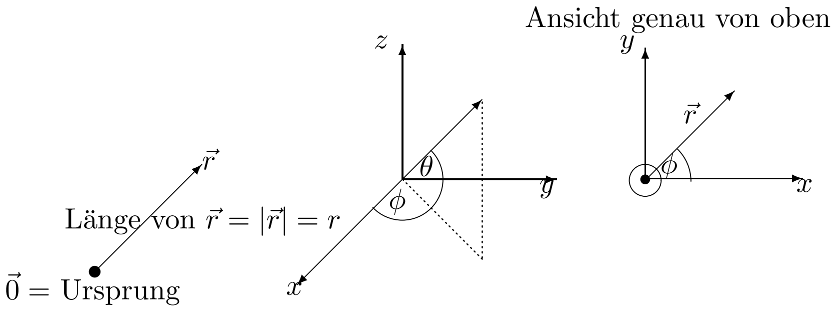
Temperatur einer Rakete: $T(\vec{r}, \vec{v})$
6-dimensionaler Vektor

Tensoren n-ter-Stufe

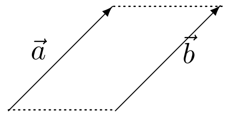
1. Tensor 0-ter Stufe
   Skalar, reelle Zahl, z.B.: T, m, V
2. Tensor 1-ter Stufe
   Vektor {Länge, Richtung}
3. Tensor 2-ter Stufe Matrix

Allgemein:
Tensor n-ter Stufe $\mathfrak{A} = \{A_i\}, \text{ mit } i \in 1, 2, \ldots, n-1, n$
Die Elemente eines Vektors $A_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ werden mit einem Index unterschieden: $r_i = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$,
die einer Matrix: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$: mit zwei Indizes. Eine Matrix ist also ein Tensor 2. Stufe.

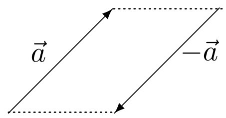
„**Definition**“: Ein Vektor ist ein Element des n-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^n$



Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind gleich, $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie durch Verschiebung auseinander hervorgehen.

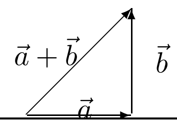


Zu jedem Vektor $\vec{a}$ existiert ein gleichlanger, aber antiparalleler Vektor $-\vec{a}$:



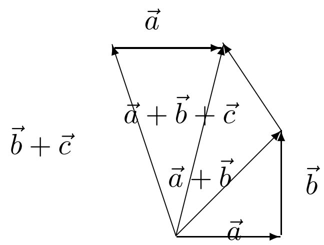
Addition zweier Vektoren:

Definition:

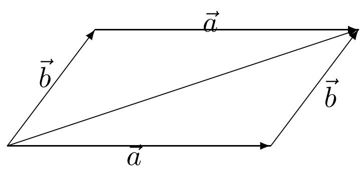


Eigenschaften:

1. Abgeschlossenheit
2. Assoziativität: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$



3. Neutrales Element: Es gibt einen Nullvektor $\vec{0}$, der die Länge 0 hat: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. Inverses Element; $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. Addition ist kommutativ: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$



Satz:

Die Vektoren bilden eine Abel'sche Gruppe bezüglich der Addition.

Multiplikation mit einem Skalar:

Definition: Sei $\vec{a}$ ein Vektor, α ein Skalar $\in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha * \vec{a}$ ein Vektor mit

1. $|\alpha * \vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$
2. $\alpha * \vec{a} = \begin{cases} \uparrow\uparrow \vec{a} & \text{für} \alpha > 0 \\ \uparrow\downarrow \vec{a} & \text{für} \alpha < 0 \end{cases}$

Spezialfälle: $1 * \vec{a} = \vec{a}, 0 * \vec{a} = \vec{0}, (-1) * \vec{a} = -\vec{a}$
Eigenschaften:

1. Assoziativität: $\alpha(\beta * \vec{a}) = (\alpha * \beta)\vec{a} = \alpha\beta\vec{a}$
2. Distributivität:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$
$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

3. Einheitsvektor:

$$\vec{a} \longrightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = |\vec{a}|^{-1} * \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$
$$|\vec{e}_{\vec{a}}| = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$
$\vec{e}_{\vec{a}}$ ist parallel zu $\vec{a}$: $\vec{e}_{\vec{a}} \uparrow\uparrow \vec{a}$

Satz:

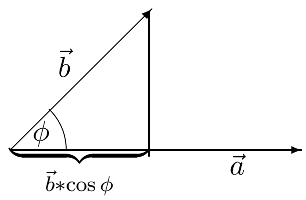
Die Vektoren bilden einen Vektorraum V^n über dem Körper $\mathbb{R}$

10.2 Produkte von Vektoren

Skalarprodukt

Definition: Seien $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren. Dann ist das Skalarprodukt

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\phi, \qquad \phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$



Satz:

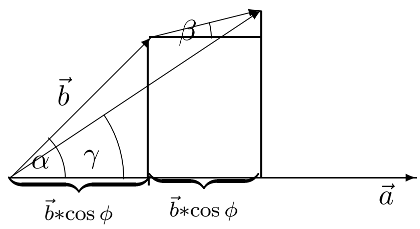
Seien $\vec{a}, \vec{b}$ Vektoren. Dann gilt

$$\vec{a} * \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 1. & |\vec{a}| = 0 \text{ und/oder } |\vec{b}| = 0 \\ 2. & \cos\phi = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Im englischen heißt das Skalarprodukt häufig auch „dot product“.
$\vec{a} * \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \underbrace{<\vec{a}|\vec{b}>}_{bra \quad cket-Vektor}$

Eigenschaften: $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| * \cos\phi, \qquad \text{mit:} \phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

1. Kommutativität: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$
2. Distributivität: $(\vec{a} + \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * \vec{c} + \vec{b} * \vec{c}$

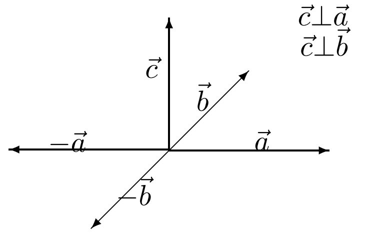


3. Bilinearität: $(\alpha * \vec{a}) * \vec{b} = \vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$
4. Betrag (Norm) eines Vektors:
   Für $\vec{a} = \vec{b}$ folgt: $\vec{a} * \vec{a} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} * \vec{a}}$
   $\vec{e} * \vec{e} = 1$
5. Schwarz'sche Ungleichung:
   $|\vec{a} * \vec{b}| \leq |\vec{a}| * |\vec{b}|$ wegen $|\cos\phi| \leq 1$
6. Dreiecksungleichung: $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
   Beweis:

$$\begin{aligned} -a * b \leq \vec{a} * \vec{b} \leq a * b \Leftrightarrow & \\ & \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leq a^2 + 2\vec{a}\vec{b} + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq |a + b^2 \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow |a - b| \leq \vec{a} + \vec{b}| \leq a + b \end{aligned}$$

Spezialfall: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$:
$\vec{c} = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + b^2 \Leftrightarrow$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$: „Kosinussatz“

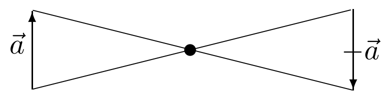
Vektorprodukt: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

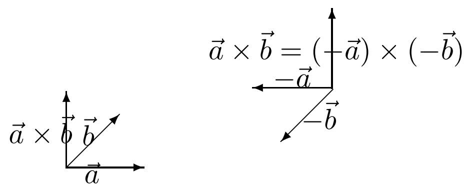


$c = a * b * \sin\phi$ mit $\phi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$
Fläche des von a und b aufgespannten Parallelogramms.

Definition: Eine Rauminversion ist eine Spiegelung aller Raumpunkte an einem bestimmten vergegebenen Punk (z.B. am Ursprung).

Unter einer Rauminversion gehen „normale“Vektoren in ihr Negatives über.

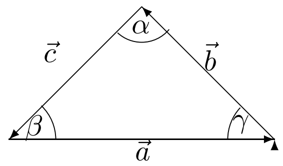




Wir nennen die anderen Vektoren (z.B. $\vec{a} \times \vec{b}$) „axiale“Vektoren oder Pseudovektoren. Sie bezeichnen einen Drehsinn.

Eigenschaften

1. Antikommutativ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$ und/oder $|\vec{b}| = 0$ oder $\vec{b} = \alpha\vec{a}, \alpha \in \mathbb{R}$
3. Distributiv $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
4. nicht assoziativ $\underbrace{\vec{a} \times \underbrace{(\vec{b} \times \vec{c})}_{\perp\vec{b},\perp\vec{c}}}_{\text{in}(\vec{b},\vec{c})\text{Ebene}} \neq \underbrace{\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\perp\vec{a},\perp\vec{b}} \times \vec{c}}_{\text{in}(\vec{a},\vec{b})\text{Ebene}}$
5. bilinear für $\alpha \in \mathbb{R}$
   $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$
6. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$



$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (0 - \vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
$\vec{a} \times \vec{b} = (0 - \vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$
$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
$ab \sin(\pi - \gamma) = bc \sin(\pi - \alpha) = ca \sin(\pi - \beta)$
Mit $\sin(\pi - \phi) = \sin \phi$ folgt:
$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$ „Sinussatz"

Produkte mit Vektoren

1. Einfache Vektorprodukte:

   $\alpha * \vec{a} = \vec{b}$
   $\vec{a} * \vec{b} = c$
   $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

2. Zusammengesetzte Vektorprodukte

   - Spatprodukt:
     $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) * |\vec{c}| * cos\phi$
     mit $\phi = \sphericalangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$
     Das Spatprodukt beschreibt das Volumen eines Spats bzw. Parallelepipets, das durch die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} und \vec{c}$ aufgespannt wird.
   - Doppeltes Vektorprodukt $\vec{p} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c} =$
     $\vec{p} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$
     $0 = \vec{p} * \vec{a} = \beta(\vec{a} * \vec{b}] = \gamma * (\vec{a} * \vec{c}) \Rightarrow \beta = \alpha(\vec{a} * \vec{c}), \gamma = \alpha * (\vec{a} * \vec{b})$
     $\vec{p} = \alpha[\vec{b}(\vec{a} * \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} * \vec{b})]$
     $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} * (\vec{a} * vecc) - \vec{c} * (\vec{a} * \vec{b}) = 0$ Entwicklungssatz
     Merkhilfe: „bac-cab"Regel

   Jacobi-Identität:
   $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

10.3 Basisvektoren und Komponentendarstellungen

Einheitsvektoren
$\vec{e}$ mit $|\vec{e}| = 1$
$\vec{a} \Rightarrow \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}| * \vec{e}_{\vec{a}}$

$\alpha * \vec{a} + \beta\vec{b} = 0;$
$\vec{b} = \gamma * \vec{a}$
$\alpha * \vec{a} + \beta * \vec{b} = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{\gamma}$
$\alpha * \vec{a} - \gamma * \beta\vec{a} = 0$
$\alpha = \gamma * \beta$

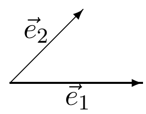
Definition: Zwei Vektoren heißen linear unabhängig, wenn die Gleichung $\alpha * \vec{a} + \beta * \vec{b} = 0$ nur für $\alpha, \beta = 0$ erfüllt ist.
$\alpha * \vec{a} + \beta * \vec{b} + \gamma * \vec{c} = 0 \qquad \alpha, \beta, \gamma \neq 0$
$\Rightarrow \vec{c} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}{-\gamma}$

Definition: n Vektoren $a_1, ..., a_n$ heißen linear unabhängg, wenn die Gleichung $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i * \vec{a}_i = 0$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n = 0$ erfüllt ist.

Definition: Die Dimension eines Vektorraums ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Satz:

In einem n–dimensionalen Vektorraum bildet jede Menge von n linear unabhängigen Vektoren eine Basis $n : \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$. Jeder Vektor läßt sich in der Form $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i * \vec{e}_1$ darstellen.
Beispiel:



Am besten als Basis geeignet ist jedoch ein **Orthonormalsystem**.

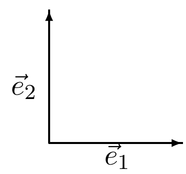
- Orthogonalität:
  $$\vec{e}_1, \vec{e}_2 = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq j \\ 1 \text{ für } i = j \end{cases} \quad = \delta ij \text{ „Kronecker–Delta“}$$

  $$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 * \vec{e}_1 = 1 & \vec{e}_1 * \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_1 * \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}_2 * \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}_2 * \vec{e}_2 = 1 & \vec{e}_2 * \vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}_3 * \vec{e}_1 = 0 & \vec{e}_3 * \vec{e}_2 = 0 & \vec{e}_3 * \vec{e}_3 = 1 \end{array}$$

  Daraus kann man ableiten:

  $$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_i * \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

- Normierung: Länge=1

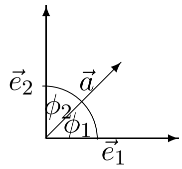


allgemein: $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i$

$\vec{e}_j \vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i * \vec{e}_j * \vec{e}_i = \alpha_j$

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ „Spaltenvektor“

$\vec{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)$ „Zeilenvektor“



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} ? a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$a_1 = \vec{e}_1 * \vec{a} = |\vec{e}_1||\vec{a}| * \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{e}_1) = |\vec{a}| * \cos\phi_1$

$a_2 = \vec{e}_2 * \vec{a} = |\vec{e}_2||\vec{a}| * \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{e}_2) = |\vec{a}| * \cos\phi_2$

$\Rightarrow$: $a_i = \vec{e}_i * \vec{a} = |\vec{a}| * \underbrace{\cos\phi_1}_{Richtungskosinus}$

Komponentendarstellung:

Basisvektoren:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad , \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nullvektor: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Addition: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} (a_i \vec{e}_1 + b_i \vec{e}_i) = \sum\limits_{i=1}^{3} c_i \vec{e}_i$
  $\Longrightarrow \vec{e}_i \vec{c} = c_j = a_j + b_j$
  $$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

- Multiplikation mit einem Skalar: $\vec{b} = \alpha * \vec{a}$
  $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i = \alpha \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$
  $\Longrightarrow \vec{b}_i = \vec{e}_i \vec{b} = \vec{e}_i(\alpha \vec{a}) = \alpha a_i$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * a_1 \\ \alpha * a_2 \\ \alpha * a_3 \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{a} * \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i\right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \underbrace{\vec{e}_i \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \\
&= \begin{matrix} a_1 b_1 \delta_{11} + & a_1 b_2 \delta_{12} + & a_1 b_3 \delta_{13} + \\ +a_2 b_1 \delta_{21} + & a_2 b_2 \delta_{22} + & a_2 b_3 \delta_{23} + \\ +a_3 b_1 \delta_{31} + & a_3 b_2 \delta_{32} + & a_3 b_3 \delta_{33} \end{matrix} = \\
&= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

- Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i\right) \times$$

$$\left(\sum_{j=1}^{3} b_j \vec{e}_j\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \underbrace{|e_1|}_{1}\ \underbrace{|\vec{e}_2|}_{1}\ \underbrace{\sin \sphericalangle(\underbrace{\vec{e}_1, \vec{e}_2}_{90^o})}_{1} * \vec{e}_3 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_i(\times e_j \times \vec{e}_k) = \begin{cases} 1 \text{ falls } (i,j,k) \text{ zyklisch aus (1,2,3)} \\ -1 \text{ falls } (i,j,k) \text{ antizyklisch aus (1,2,3)} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Vektorprodukt:$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} c_k \vec{e}_k$

- Spatprodukt:

$$\begin{aligned}
\vec{d}(\vec{a} \times \vec{b}) &= \left(\sum_{m=1}^{3} d_m \vec{e}_m \right) \left(\sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j \epsilon_{ijk} \right) = \\
&= \left(\sum_{m=1}^{3} d_m \vec{e}_m \right) \left(\sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (e_i \times e_j) \right) = \\
&= \left(\sum_{i,j,m=1}^{3} a_i b_j d_m \underbrace{\vec{e}_m (\vec{e}_i \times \vec{e}_j)}_{\epsilon_{ijm}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{e}_1 \\ a_2 & b_2 & \vec{e}_2 \\ a_3 & b_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

10.4 Matrizen

Eine Matrix entspricht einem „Zahlenschema“:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & a_1 3 & a_1 4 \\ a_2 1 & a_2 2 & a_2 3 & a_2 4 \\ a_3 1 & a_3 2 & a_3 3 & a_3 4 \end{pmatrix}$$

Definition einer Matrix:

$$A = \underbrace{\left.\begin{pmatrix} a_1 1 & \dots & a_1 n \\ \vdots & & \vdots \\ a_m 1 & \dots & a_m n \end{pmatrix}\right\}}_{\text{n Spalten}} \text{m Zeilen} = (a_{ij}) \quad \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$$

Quadratische Matrix:$m = n$
Zwei Matrizen A, B sind genau dann gleich, wenn

1. $m = n$ (die Matrizen haben gleich viele Spalten und gleich viele Zeilen)
2. $a_{ij} = b_{ij} \forall \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$

1. Nullmatrix:
   $A = (a_{ij}) \begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix} \qquad a_{ij} = 0 \forall i, j$

2. Symmetrische Matrizen:
   $a_{ij} = a_{ji}$
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3. Diagonalmatrix:
   $A = (a_{ij}) mit \begin{cases} a_{ij} = a_{ij} & \text{für } i == j \\ a_{ij} = 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$
   $a_{ij} = d_{ij}\delta_{ij}$

4. Einheitsmatrix E
   $E_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Matrix $A = (a_{ij})$:
   $\begin{array}{cc} m\times & n \\ \downarrow & \downarrow \\ Zeilen & Spalten \end{array}$ -Matrix

6. Transponierte Matrix:
   $a^T = (a_{ij}^T = a_{ji})$
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 6 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$
   A^T ist eine $(m \times n)$–Matrix

7. Spaltenvektor:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spaltenvektor:} \\ \text{m Komponenten} \\ (m \times 1)\text{–Matrix}}} & 3 & 4 \\ 4 & & 2 & 1 \\ 5 & & 8 & 9 \end{pmatrix}$:

8. Zeilenvektor:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$: Zeilenvektor, n Komponenten, $(1 \times n)$ –Matrix

Rechenregeln:

Definition: $A = (a_{ij}), B = b_{ij})$seien $(m \times x)$–Matrizen.
Dann ist die Summe $C = A + B$ gegeben durch:

$$C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Satz:

Die $(m \times n)$ Matrizen bilden eine Gruppe bezüglich der Addition.

Definition: $A = (a_{ij})$ sei eine $(m \times x)$–Matrix. Dann ist $\lambda A, \lambda \in \mathbb{R}$ eine $(m \times n)$–Matrix mit $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Definition: Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times x)$–Matrix, $B = (b_{ij}$ eine $(n \times r)$–Matrix. Dann ist die Produktmatrix $C = A * B = (c_{ij}$ eine $(m \times r)$–Matrix mit $c^n_{ij=\sum k=1} a_{ik} * b_{ki}$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (2×3)–Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3×3)–Matrix

$C = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 5 \\ 25 & -1 & 22 \end{pmatrix}$ (2×3)–Matrix

Satz:

Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:
$A * B \neq B * A$

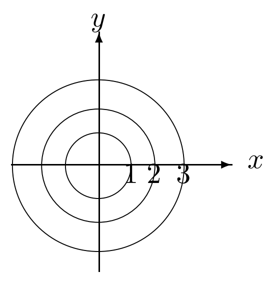
Beweis:

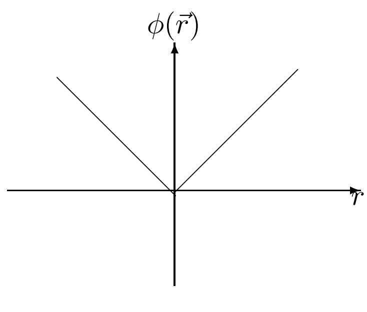
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A * B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$
$$B * A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

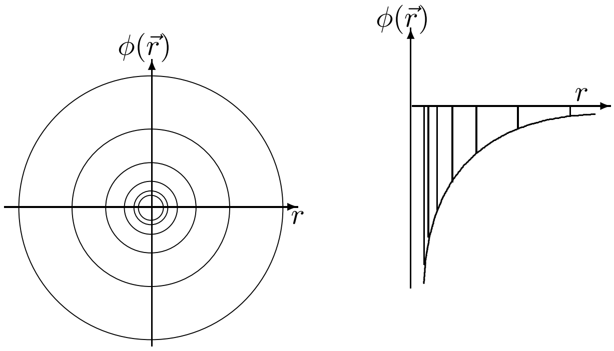
11 Felder

11.1 Grundlagen

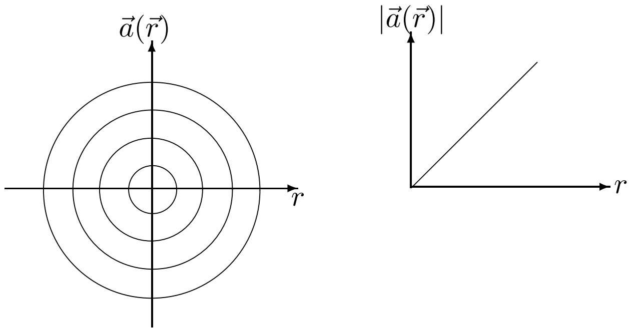
Funktionen $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$\vec{r} \quad T(\vec{r})$
$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ „(skalares Feld)“
Vektorfelder: $\mathbb{R}^3 \Longrightarrow \mathbb{R}^3 : \vec{F}(\vec{r})$



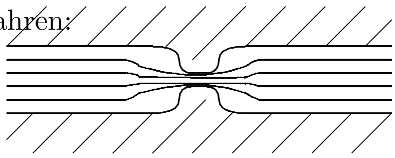




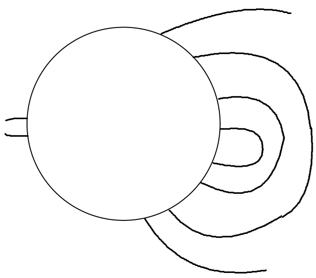
Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r}) = \alpha * \vec{r} = alpha|\vec{r}| * \vec{e}_{\vec{r}}$



Kanufahren:



Magnetfeld der Erde:



11.2 Partielle Ableitungen

$f(\vec{r});$ $$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} r_i * \vec{e}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitung: $\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}$
z.B. $\phi(x_1, x_2, x_3)$
$\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\phi(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3 = -\phi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right)_{x_{2,3}} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \partial_{x_1}\phi = \partial_1 \phi = \phi_{x_1}$. Die partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)$ und $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right)$ werden analog definiert.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e_i}$$

Definition: Gradient von $\phi(\vec{r})$:
$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e_i}$

Rechenregeln:

1. $\partial_i(\phi_1 + \phi_2) = \partial_i \phi_1 + \partial_i \phi_2$
2. $\partial_i(\phi_1 * \phi_2) = (\partial_i \phi_1) * \phi_2 + \phi_1(\partial_i \phi_2)$
3. $\partial(\vec{a} * \vec{b}) = (\partial_i \vec{a}) * \vec{b} + \vec{a}(\partial_i \vec{b}) = \partial_i(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$
4. $\partial_(\vec{a} \times \vec{b}) = (\partial_i \vec{a}) \times \vec{b} + \vec{a} \times (\partial_i \vec{b})$

Höhere Ableitungen:
$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}$
$\frac{\partial^n \phi}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial^{n-1}\phi}{\partial x_i^{n-1}}\right] = \ldots$

Gemischte Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ falls } \phi \text{ 2-mal stetig differenzierbar}$$

Beispiel: $\phi = x_1^3 x_2^2 x_3$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2^2 x_3$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2 x_3$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 6x_1^2 x_2 x_3$$
$$\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 6x_1^2 x_2 x_3$$

Normale Funktion:
$f(t) = f(x(t)) \Rightarrow f'(t) = f'(x) * x'(t) = \frac{df(x(t))}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$

Skalares Feld:
$\phi = [x_1(t_1), x_2(t_2), x_3(t_3)] \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} * \frac{\partial x_1}{\partial t_1}$
$\phi(x_1(t), x_2(t)x_3(t)) = \phi(\vec{r}(t))$

$$D = \frac{\phi(x_1(t+\Delta t), \phi(x_2(t+\Delta t), \phi(x_3(t+\Delta t) - \phi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)}{\Delta t}$$
$$\text{mit } \Delta x_i = x_i(t+\Delta t) - x_i(t)$$

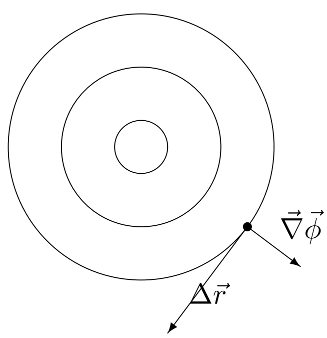
$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{\Delta t}[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) + \\ & + \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) + \\ & + \phi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2, x_3)] = \\ = & \frac{1}{\Delta x_1}[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)]\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \\ + & \frac{1}{\Delta x_1}[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)]\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \\ + & \frac{1}{\Delta x_1}[\phi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \phi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)]\frac{\Delta x_1}{\Delta t} \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta t \to 0} D = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} * \frac{dx_i}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$ „Totale Ableitung“

$d\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_i$ „Totales Differential“

11.3 Gradient

$\text{grad}\,\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3},\right) = \vec{\nabla}\phi$
$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3},\right) = \vec{e}_1 * \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 * \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 * \frac{\partial}{\partial x_3}$
$\phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \Delta x_i = \frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\Delta x_3 = (\vec{\nabla}\phi) * \Delta\vec{r}$
An Flächen im Raum mit $\phi = const$ gilt:
$\Delta\phi = 0 = \underbrace{(\vec{\nabla}\phi)}_{|\vec{\nabla}\phi| \neq 0} \underbrace{(\Delta\vec{r})}_{|\Delta\vec{r}| \neq 0} \Longrightarrow$
$\vec{\nabla}\phi$ steht senkrect auf $\Delta\vec{r}$ und zeigt in Richtung des stärksten Anstiegs.



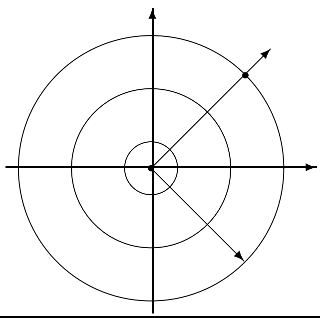
Beispiele:

- $\phi = x_1^3 x_2^5$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = 3x_1^2x_2^5$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = 5x_1^3x_2^4$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = 0$$
$$\vec{\nabla}\phi = (3x_1^2x_2^5, 5x_1^3x_2^4, 0)$$

- $\phi(\vec{r}) = r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \frac{2x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \Longrightarrow$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{2x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_i}{|\vec{r}|}$$
$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}_{\vec{r}}$$



$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3},\right)$$
$$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3},\right)$$
$$\vec{\nabla}\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} * a_i \qquad , \vec{a}(x_1, x_2, x_3)$$

Das Vektorfeld $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}(x_1, x_2, x_3)$ „Quellenfeld“ist ein skalares Feld.

Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) &= \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b} \\
\operatorname{div}(\gamma\vec{a}) &= \gamma \operatorname{div}\vec{a} \\
\operatorname{div}(\gamma * \vec{a}) &= \vec{\nabla} * (\gamma\vec{a}) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_1}(\phi a_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) a_i + \phi \left(\frac{\partial}{\partial x_1} a_i \right) \right] = \\
&= (\vec{\nabla}\phi)\vec{a} + \phi\vec{\nabla}\vec{a} = \\
&= (\operatorname{grad}\phi)\vec{a} + \phi \operatorname{div}\vec{a} \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\phi) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = \underbrace{\triangle}_{\text{Laplace-Operator}} \phi
\end{aligned}
$$

$\triangle = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$

Vektorfeld $\vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{a} &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} a_j \right) \vec{e}_k = \\
&= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 = \\
&= \operatorname{rot}\vec{a} \qquad \text{Rotation, „Wirbelfeld“}
\end{aligned}
$$

Rechenregeln:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\vec{a}+\vec{b}) &= \mathrm{rot}\,\vec{a} + \mathrm{rot}\,\vec{b} \\
\mathrm{rot}(\alpha\vec{a}) &= \alpha\,\mathrm{rot}\,\vec{a} \\
\mathrm{rot}(\phi\vec{a}) &= \phi\,\mathrm{rot}\,\vec{a} + (\mathrm{grad}\,\phi)\times\vec{a} \\
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) &= \mathrm{rot}(\vec{\nabla}\phi) = \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} * \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\vec{e}_k \\
\text{Beispiel:k=3} & \\
\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)\right)_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \\
\boxed{\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = 0} & \\
\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{a}) &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a_j\right)\right) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}a_j\right) = 0
\end{aligned}
$$

Vektorfeld $\vec{a}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) &= \mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{a}) - \triangle\vec{a} \\
\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{a}) - (\vec{\nabla}\vec{\nabla})\vec{a} \\
\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}
\end{aligned}
$$

A Empfohlene Literatur und Übungsblätter:

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Literatur

Literatur zum Vorkurs:

1. S. Großmann
   Mathematischer Einführungskurs für die Physik
   Teubner, Stuttgart
2. H. Fischer und H. Kaul
   Mathematik für Physiker, Band 1
   Teubner, Stuttgart
3. K. Weltner (Hrsg.)
   Mathematik für Physiker, Band 1 und 2
   Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden
4. K. Länger
   Mathematik kompakt
   Oldenbourg, München, Wien
5. H. Schulz
   Mathematik mit Bleistift
   Springer, Berlin, Heidelberg
6. M. André und P. Meier
   Analysis für Ingenieure
   BI-Hochschultaschenbuch, Bibliographisches Institut, Mannheim
7. A. Kemnitz
   Mathematik zum Studienbeginn
   Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden
8. G. Berendt und E. Weimar
   Mathematik für Physiker
   BI-Hochschultaschenbuch, Bibliographisches Institut, Mannheim, 2 Bde.

Handbücher, Formelsammlungen:

1. I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew
   Taschenbuch der Mathematik
   Harri Deutsch, Frankfurt

2. M. Abramowitz und I. Stegun
   Handbook of Mathematical Functions
   Dover, New York

3. K. Rottmann
   Mathematische Formelsammlung
   BI-Hochschultaschenbuch, Bibliographisches Institut, Mannheim

Numerische Mathematik:

1. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky und W. T. Vetterling
   Numerical Recipes — The Art of Scientific Computing
   Cambridge University Press, Cambridge, 1989

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Blatt 1 — Kleiner Test (natürlich anonym)

1. Diskutieren Sie die folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = x^2 - x^4$
   (b) $f(x) = \sin(4x)$
   (c) $f(x) = \mathrm{e}^x$
   (d) $f(x) = \ln(1 + x)$

   Skizzieren Sie die Funktionen, berechnen Sie die erste und zweite Ableitung, bestimmen Sie Minima und Maxima, eventuell Wendepunkte.

2. Bestimmen Sie die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = x^7$
   (b) $f(x) = \sqrt{(x/3)}$
   (c) $f(x) = -\cos(3x)$
   (d) $f(x) = (3 + 2x)^{-1}$

3. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int_0^2 x^3 dx \ ; \quad \int_0^\pi \sin(x) dx \ ; \quad \int_0^\pi \cos(2x) dx \quad .$$

4. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ sowie den Betrag von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ für

$$\mathbf{a} = (1, 5) \ , \quad \mathbf{b} = (2, 3) \quad .$$

5. Berechnen Sie den Betrag der komplexen Zahlen $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 + i$ sowie deren Produkt $z_1 z_2$. Hier ist i die imaginäre Einheit, $i^2 = -1$. Bestimmen Sie $1/z_1$ und $1/z_2$.

6. Bestimmen Sie die Eigenwerte und die (normierten) Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad .$$

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Blatt 2

1. Gegeben sei ein Polynom
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$
Bringen Sie die Koeffizienten $\{a_k\}$ mit den Ableitungen von $f(x)$ in Verbindung.

2. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:
   (a) $y = (x - x_0)^2$,
   (b) $y = x^3$,
   (c) $y = x^n$ (Beweis durch Induktion, Produktregel!),
   (d) $y = (2x^2 - 1)^2$ (Kettenregel!).

3. Die (natürliche) Exponentialfunktion $y = \mathrm{e}^x$ sei definiert durch die Relation
$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = y(x) \qquad (\text{kurz}: \quad y' = y)$$
und $y(0) = 1$.
   (a) Skizzieren Sie diese Funktion.
   (b) Benutzen Sie die obige Relation, um die folgende Reihendarstellung herzuleiten:
$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

4. Die Umkehrfunktion von e^x heißt (natürlicher) Logarithmus, $y = \ln x$, d.h. $x = \mathrm{e}^y$.
   (a) Skizzieren Sie diese Funktion.
   (b) Berechnen Sie mit Hilfe von $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ die erste Ableitung von $\ln x$.
   (c) Begründen Sie: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ und $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$.

5. Leiten Sie die angegebenen Funktionen nach $x \in R$ ab.
   (a) $y(x) = \sinh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,
   (b) $y(x) = \cosh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,
   (c) $y(x) = \tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,
   (d) $y(x) = \tan(x) \equiv \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
   (e) $y(x) = \arctan(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),
   (f) $y(x) = \arccos(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),
   (g) $y(x) = \sin(\arccos(x))$,
   (h) $y(x) = \frac{x}{\sin(2x^2+3)}$.

6. Berechnen Sie die angegebenen (unbestimmten) Integrale.
   (a) $\int dx (2x+3)^4$,
   (b) $\int dx (11x^2+7)^2$,
   (c) $\int dx [x(x^2+3)^{10}]$,
   (d) $\int dx \frac{1}{1-x^2}$ (Partialbruchzerlegung!),
   (e) $\int dx \frac{x^4}{1+x^2}$ (Polynomdivision!),
   (f) $\int dx \frac{x}{1-x^2}$,
   (g) $\int dx [x e^{-x^2}]$,
   (h) $\int dx [x e^{1-x}]$ (partielle Integration!),
   (i) $\int dx \tan(x) = \int dx \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
   (j) $\int dx [x \cos(3x^2+1)]$,
   (k) $\int dx \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$,
   (l) $\int dx [x \ln(x)]$ (partielle Integration!),
   (m) $\int dx \ln(x)$ (partielle Integration!).

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Blatt 3

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die folgenden Beziehungen gelten:

   (a) $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$,

   (b) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

   (c) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

2. Es sei n eine natürliche und x eine reelle Zahl. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:
$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

3. Berechnen Sie (ohne Benutzung der Differentiationsregeln direkt aus der Definition) die Ableitung von
$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}\quad\text{an der Stelle } x_0=2$$

4. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x)=3x^4\cdot(\ln x)^2$,

   (b) $f(x)=\sqrt[3]{3x^4+4\mathrm{e}^x}\cdot\ln(x^2)$,

   (c) $f(x)=\ln\left[\sqrt{4\mathrm{e}^{2x}+3}+2\mathrm{e}^x\right]$,

   (d) $f(x)=\frac{x-1}{x\cdot\ln x}$,

   (e) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{x+1}-1}{\mathrm{e}^{x+1}+1}$,

   (f) $f(x)=\sinh(\mathrm{e}^x)$,

   (g) $f(x)=\operatorname{arcosh}(3x^2-2)$,

   (h) $f(x)=\operatorname{arcoth}(\mathrm{e}^x)$.

5. Zeigen Sie, dass für jedes reelle α gilt:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x}=0$$

6. Bestimmen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{\mathrm{e}^x - 1}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1 + \mathrm{e}^x)}{x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x^2}$,

(e) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{(x - c)^2}{x \cdot (\ln x - 2) - c \cdot (\ln c - 2)}$ für $c > 0$,

(f) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$.

7. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Unter- und Obersummen (überprüfen Sie das Ergebnis anhand der üblichen Integrationsregeln):

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \, dx$,

   (b) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^x \, dx$.

8. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$,

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x \, dx$,

   (c) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x} \, dx$,

   (d) $\displaystyle\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x \, dx$,

   (e) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^3 \, dx$,

   (f) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$.

9. Bestimmen Sie Rekursionsformeln für die folgenden Integrale:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 x^n \mathrm{e}^x \, dx$,

   (b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \cdot (\ln x)^n \, dx$.

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Blatt 4

1. Bestimmen Sie die Stammfunktion von
   (a) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$
   (b) $g(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$
   (c) $h(x) = \dfrac{12x^3 - 27x^2 - 8x + 37}{3x^2 - 3x - 6}$

2. Begründen Sie folgende Reihendarstellung der (natürlichen) Logarithmusfunktion:
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}.$$

3. Bestimmen Sie die ersten (drei) Glieder der Reihendarstellung der angegebenen Funktionen. Verwenden Sie dazu die Formel
$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$
   (Falls nicht anders angegeben, gilt $x_0 = 0$.)
   (a) $f(x) = \sin(x) \qquad (x_0 = 0$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}!)$,
   (b) $f(x) = \cos(x)$,
   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$,
   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,
   (e) $f(x) = \arctan(x)$,
   (f) $f(x) = (1+x)^\alpha$,
   (g) $f(x) = \sqrt{1+x} \qquad (x_0 = 0$ und $x_0 = 1)$.

4. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg z$:
   (a) i^n für ganze Zahlen n ,
   (b) $(1+i)^4$,
   (c) $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3$,
   (d) $\frac{2-i}{2-3i}$,
   (e) $\frac{1}{(3-i)^2}$,
   (f) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

5. Betrachten Sie die Funktion $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, x reell, $\mathrm{i}^2 = -1$. Wie lautet ihre Reihendarstellung?
   (a) Wie groß ist der Betrag $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|$?
   (b) Bestimmen Sie die Ableitung.
   (c) Schreiben Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = f(x) + \mathrm{i}g(x)$, wobei $f(x)$ und $g(x)$ reelle Funktionen sind. Drücken Sie die erste Ableitung von f durch g aus und umgekehrt.
   (d) Begründen Sie mit Hilfe der geometrischen Interpretation in der komplexen Ebene, dass
   $$f(x) = \cos(x), \qquad g(x) = \sin(x).$$
   (e) Leiten Sie aus der Reihendarstellung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ die Reihendarstellung von $\cos(x)$ und $\sin(x)$ her.

6. Benutzen Sie die Darstellung (Euler'sche Formel) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, um die folgenden Beziehungen zu beweisen:
   (a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos\ y \pm \cos x \sin y$,
   (b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
   (c) $\sin^2 x = (\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,
   (d) $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

7. Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (0, b, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, c)$. Berechnen Sie $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ und $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

V. Eyert, P. Schwab, F. Kalisch, T. Lück, H. Woldemariam, M. Dzierzawa
Lehrstuhl für Theoretische Physik II, Universität Augsburg

Vorkurs Mathematik für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2000/2001

Blatt 5

1. Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$. Zerlegen Sie einen Vektor $\mathbf{b}$ in einen zu $\mathbf{a}$ parallelen und einen dazu senkrechten Anteil

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp$$

und zeigen Sie, daß gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\parallel &= \frac{1}{a^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}\ , \\ \mathbf{b}_\perp &= \frac{1}{a^2}\,\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\ . \end{aligned}$$

2. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ seien drei nicht in einer Ebene liegende Vektoren. Definieren Sie drei sogenannte reziproke Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{a}_j\times\mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{a}_j\times\mathbf{a}_k)}\ , \qquad i,j,k \text{ zyklisch} \quad .$$

   (a) Zeigen Sie für $i,j = 1,2,3$:
   $$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij} \quad .$$

   (b) Verifizieren Sie:
   $$\mathbf{b}_1\cdot(\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3) = [\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3)]^{-1} \quad .$$

   (c) Zeigen Sie, daß die $\mathbf{a}_i$ die zu den $\mathbf{b}_j$ reziproken Vektoren sind.

3. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ von

   (a) $f(x,y,z) = xy^5 + z$,
   (b) $f(x,y,z) = x^2(3xy+z)yz$,
   (c) $f(x,y,z) = \sin(xy+z^2)$,
   (d) $f(x,y,z) = z\ln x$,
   (e) $f(x,y,z) = x^5 + y^3 z$.

4. Zeigen Sie, daß die zweiten partiellen Ableitungen des Feldes $\varphi(\mathbf{r}) = x_1^5 + x_2^3 x_3$ die Identität

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}$$

erfüllen.

5. Berechnen Sie die Gradienten der folgenden skalaren Felder:

(a) $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$,

(b) $\varphi(\mathbf{r}) = |\mathbf{r}|$,

(c) $\varphi(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{|\mathbf{r}|^2}$,

(d) $\varphi(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|)$.

6. Zeigen Sie für beliebige 2×2 Matrizen A und B:

(a) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$,

(b) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$,

(c) $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CAB)$.