Vorlesung Mathematische Konzepte
WS 2009/2010

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert

Blatt 3

---

1. Berechnen Sie (sowohl unter Benutzung der Differentiationsregeln als auch direkt aus der Definition der Ableitung) die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{an der Stelle } x_0 = 2.$$

2. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = (x - x_0)^2$,

   (b) $f(x) = x^n$ (Beweis durch Induktion, Produktregel!),

   (c) $f(x) = (2x^2 - 1)^2$ (Kettenregel!).

3. Gegeben sei ein Polynom

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

   Bringen Sie die Koeffizienten $\{a_k\}$ mit den Ableitungen von $f(x)$ in Verbindung.

4. Leiten Sie die angegebenen Funktionen nach $x \in R$ ab.

   (a) $f(x) = \sinh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

   (b) $f(x) = \cosh(x) \equiv \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$,

   (c) $f(x) = \tanh(x) \equiv \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,

   (d) $f(x) = \tan(x) \equiv \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

   (e) $f(x) = \arctan(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),

   (f) $f(x) = \arccos(x)$ (Verwenden Sie die Ableitung der Umkehrfunktion!),

   (g) $f(x) = \sin(\arccos(x))$,

   (h) $f(x) = \frac{x}{\sin(2x^2+3)}$.

5. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

   (a) $f(x) = 3x^4 \cdot (\ln x)^2$,

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 4\mathrm{e}^x} \cdot \ln(x^2)$,

(c) $f(x) = \ln\left[\sqrt{4\mathrm{e}^{2x}+3} + 2\mathrm{e}^x\right]$,

(d) $f(x) = \frac{x-1}{x \cdot \ln x}$,

(e) $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x+1}-1}{\mathrm{e}^{x+1}+1}$,

(f) $f(x) = \sinh(\mathrm{e}^x)$,

(g) $f(x) = \operatorname{arcosh}(3x^2-2)$,

(h) $f(x) = \operatorname{arcoth}(\mathrm{e}^x)$.

6. Zeigen Sie, dass für jedes reelle α gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$$

7. Bestimmen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-x-2}{x^2-3x+2}$,

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\mathrm{e}^x-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-x-1}{x^2}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{(x-c)^2}{x\cdot(\ln x-2)-c\cdot(\ln c-2)}$ für $c>0$,

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$.