Vorlesung Mathematische Konzepte
WS 2009/2010

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert

Blatt 2

---

1. Der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe oder Levi-Civita-Tensor ist definiert durch
$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{für } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$
Beweisen Sie die Identität
$$\sum_j \epsilon_{ikj}\epsilon_{jlm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl} \quad ,$$
in der δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet,
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad .$$

2. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ seien drei nicht in einer Ebene liegende Vektoren. Definieren Sie drei sogenannte reziproke Vektoren $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$:
$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k}{\mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k)} \;, \qquad i,j,k \text{ zyklisch} \quad .$$
   (a) Zeigen Sie für $i,j = 1,2,3$:
   $$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} \quad .$$
   (b) Verifizieren Sie:
   $$\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3) = [\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)]^{-1} \quad .$$
   (c) Zeigen Sie, daß die $\mathbf{a}_i$ die zu den $\mathbf{b}_j$ reziproken Vektoren sind.

   (d) Bestimmen Sie die zu drei orthonormalen Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ reziproken Vektoren.

3. Gegeben sei ein beliebiger Vektor $\mathbf{a}$. Zerlegen Sie einen Vektor $\mathbf{b}$ in einen zu $\mathbf{a}$ parallelen und einen dazu senkrechten Anteil
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp$$
und zeigen Sie, daß gilt:
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\parallel &= \frac{1}{a^2}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a}\,, \\ \mathbf{b}_\perp &= \frac{1}{a^2}\,\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})\,. \end{aligned}$$