

**DARSTELLUNGSTHEORIE KOMPAKTER
LIEGRUPPEN
WS 2012/13**

J.-H. ESCHENBURG

VORBEMERKUNG

Dies ist das Skriptum zu meiner Vorlesung über kompakte Liegruppen und ihre Darstellungen, die ich im Wintersemester 2012/13 an der Universität Augsburg gehalten habe. Meine wichtigste Quelle war [Hsiang], dazu [Adams] und [Bröcker/Tom-Dieck], am Anfang auch [Fulton-Harris]. Darstellungen einer Gruppe sind Homomorphismen in eine Matrizen­gruppe. Es genügt, die irreduziblen Darstellungen zu untersuchen, die nicht direkte Summe zweier anderer Darstellungen sind. Die Vorlesung hatte drei Teile:

- I. Mittelung über kompakte Gruppen,
- II. Liegruppen und Liealgebren,
- III. Der Satz von Peter und Weyl.

Im ersten Teil wird bereits die wichtige Methode der Mittelung (Schwerpunkt­bildung) über eine Bahn einer Darstellung eingeführt, die die Kompaktheit der Gruppe voraussetzt. Die wichtigste Konsequenz ist das Irreduzibilitätskriterium von Schur: Eine Darstellung ist irreduzibel genau dann, wenn das normierte Integral über ihre Spur (Charakter) gleich Eins ist. Im zweiten Teil werden die analytischen Hilfsmittel der Liegruppentheorie zur Verfügung gestellt. Sein Höhepunkt ist die Weylsche Charakterformel, die mit Hilfe des Irreduzibilitätskriteriums und der Geometrie der Liegruppen die Charaktere der irreduziblen Darstellungen kennzeichnet. Der dritte Teil zeigt, warum der Raum der stetigen Funktionen auf einer Gruppe bereits sämtliche Darstellungen enthält und sich daraus zusammensetzt; dafür müssen wir einen Ausflug in die Funktionalanalysis unternehmen.

Ich danke den Hörern für ihre Geduld und Aufmerksamkeit und Christoph Kawan für die ausdauernde und effektive Unterstützung. Erich Dorner möchte ich danken für zahlreiche Hinweise. Ich bin auch weiterhin für jeden Hinweis auf Fehler oder Ungereimtheiten dankbar.

Date: 13. März 2013.

I. Mittelung über kompakte Gruppen

1. LIEGRUPPEN UND IHRE WIRKUNGEN

Gruppen dienen zum Beschreiben von Symmetrie: Wiederkehr der gleichen Struktur an anderem Ort. Dies beschreiben wir durch Transformationen, die zwar den Ort verändern, aber die Struktur erhalten, so dass wir kaum oder gar nicht in der Lage sind, die durch die Transformation geschehene Veränderung wahrzunehmen. Solche Symmetrietransformationen bilden eine Gruppe, denn Verkettungen und Umkehrungen von Symmetrietransformationen sind wieder solche, und die identische Abbildung id (das Neutralelement) ist es allemal. Ein einfaches Beispiel bildet die Drehgruppe des Würfels. Dabei wird ein Würfel mit Kanten parallel zu den Koordinatenachsen in eine andere Position der gleichen Art gedreht. Es gibt $6 \cdot 4 = 24$ solche Positionen, denn jede der 6 Flächen kann nach oben zeigen, und danach kann noch jede der 4 Kanten dieser Fläche nach vorne gedreht werden. Bei jeder dieser 24 Drehungen werden die vier Raumdiagonalen des Würfels permutiert, und die Permutation legt die Drehung fest. Da es $4! = 24$ Permutationen von 4 Gegenständen gibt, kommt jede Permutation genau einmal vor. Die Würfelgruppe ist demnach die Permutationsgruppe S_4 , oder anders gesagt, die Gruppe S_4 operiert als Transformationsgruppe auf der Menge der Punkte des Würfels.

Lassen Sie uns den Begriff "Gruppe" und "Operation" präzisieren. Die Gruppen, die wir betrachten, sollen in die Analysis passen und daher selbst differenzierbare Mannigfaltigkeiten sein, nämlich Liegruppen.¹ Eine *Liegruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit² G mit

¹Sophus Lie, 1842 - 1899, norwegischer Mathematiker

²Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist ein Raum, der lokal wie der \mathbb{R}^n aussieht, aber global nicht mehr; er ist aus offenen Mengen des \mathbb{R}^n zusammengeklebt. Man denke an die Sphäre, die Kugelfläche. Jahrtausendlang hielt man die Erdoberfläche für platt, weil man die kleine Wölbung nicht sehen konnte. Da eine differenzierbare Mannigfaltigkeit nicht notwendig eine Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist, brauchen wir zunächst einen allgemeineren Begriff, der den \mathbb{R}^n ersetzt, den Begriff des *topologischen Raums*. Das ist eine Menge X mit einer Menge von Teilmengen von X , genannt "offene Mengen", die die Eigenschaften der *offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n* (Teilmengen, die mit jedem ihrer Punkte auch noch einen kleinen Ball um diesen Punkt enthalten) haben: Endliche Schnitte und beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen, und die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X sind ebenfalls offen. Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißen *stetig*, wenn Urbilder offener Mengen offen sind: $U \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ offen. Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum X , in dem je zwei Punkte $x \neq y \in X$ disjunkte offene Umgebungen haben, also offene Mengen U, V in X mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. Eine n -dimensionale *Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorff-Raum X , der

einer Gruppenstruktur, also einer Abbildung $\mu : G \times G \rightarrow G$, $\mu(g, h) = gh$, der Gruppenmultiplikation, und einer zweiten $\iota : G \rightarrow G$, $\iota(g) = g^{-1}$, der Inversion, mit den üblichen Gruppengesetzen $g(hk) = (gh)k$ und $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ und $ge = eg = g$ für alle $g, h, k \in G$, wobei e das Neutralelement von G bezeichnet, und die beiden Abbildungen μ und ι sind differenzierbar.³ Liegruppen kennen Sie schon sehr viele, praktisch alle Beispiele von Gruppen, die Sie kennen, sind Liegruppen: Alle endlichen Gruppen (allgemeiner: alle diskreten Gruppen, zum Beispiel die Translationen um ganzzahlige Vektoren im \mathbb{R}^n) sind null-dimensionale Liegruppen. Höher-dimensionale Beispiele sind die Vektorgruppe $(\mathbb{R}^n, +)$, speziell $(\mathbb{R}, +)$, denn Addition und Subtraktion sind differenzierbar. Sodann die Matrixgruppen⁴ wie $GL_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A \neq 0\}$, die *Generelle Lineare Gruppe*; das ist eine offene Teilmenge des Matrizenraums $\mathbb{R}^{n^2} = \mathbb{R}^{n \times n}$, das Urbild der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unter der stetigen Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ (die Determinante ist ja eine Summe von Produkten von Matrixkoeffizienten und damit stetig, sogar differenzierbar). Diese Matrizenmenge bildet eine Gruppe mit der Matrix-Multiplikation und der Inversion als Gruppenoperationen und der Einheitsmatrix als Neutralelement, denn Produkt und Inverse von Matrizen mit Determinante $\neq 0$ haben wieder Determinante $\neq 0$. Außerdem sind diese Matrixoperationen differenzierbar: Das Produkt ist ein quadratisches Polynom und die Inversion eine rationale Funktion, denn sie besteht aus Unterdeterminanten geteilt durch die Determinante. Viele Untergruppen der $GL(\mathbb{R}^n)$ sind

lokal euklidisch ist, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x in X und eine offene Menge V in \mathbb{R}^n sowie einen Homöomorphismus (eine umkehrbare stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung auch wieder stetig ist) $\phi : U \rightarrow V$. So einen Homöomorphismus ϕ , der eine offene Teilmenge von X mit einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n identifiziert, nennen wir *Karte*, und eine Überdeckung von X durch Karten heißt ein *Atlas*. Für zwei Karten $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$, mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ gibt es eine *Übergangsabbildung* $\phi_2 \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$; dies ist eine Abbildung zwischen offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n . Wenn alle diese Übergangsabbildungen differenzierbar sind für je zwei Karten aus einem Atlas, dann nennt man X mit so einem Atlas (“differenzierbarer Atlas”) eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

³Wenn eine Gruppe G nur ein topologischer Raum ist statt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und die Gruppenoperationen stetige Abbildungen sind, dann nennt man G eine *topologische Gruppe*.

⁴Eine *Matrixgruppe* ist eine Untermannigfaltigkeit G des Matrizenraums $\mathbb{R}^{n \times n}$, die die Einheitsmatrix I enthält und abgeschlossen ist unter dem Matrixprodukt und der Inversion: Sind $A, B \in G$, dann auch $AB \in G$, und jedes $A \in G$ ist invertierbar mit $A^{-1} \in G$.

wieder Liegruppen, z.B. SL_n (Matrizen mit Determinante 1, die *Spezielle Lineare Gruppe* oder O_n (Matrizen A mit $A^T A = I$, die *orthogonalen Matrizen*) oder $SO_n = O_n \cap SL_n$, die *Spezielle Orthogonale Gruppe* oder Drehgruppe. Um dies zu zeigen muss man etwas arbeiten und den impliziten Funktionensatz anwenden, denn diese Gruppen sind durch nichtlineare Gleichungen definiert. Entsprechende Gruppen gibt es auch über \mathbb{C} (und teilweise auch über \mathbb{H}).

Eine *Operation* oder *Wirkung* einer Liegruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine differenzierbare Abbildung $\phi : G \times X \rightarrow X$, $\phi(g, x) = \phi_g(x) = gx$ mit den beiden Eigenschaften (1) $ex = x$ und (2) $g(hx) = (gh)x$ für alle $g, h \in G$ und $x \in X$; insbesondere folgt $g^{-1}(gx) = (g^{-1}g)x = ex = x$. Die Abbildung $\phi_g : X \rightarrow X$, $x \mapsto gx$ ist also umkehrbar mit Umkehrabbildung $\phi_{g^{-1}}$. Als Einschränkung der differenzierbaren Abbildung ϕ auf $\{g\} \times X$ ist ϕ_g selbst differenzierbar, also ein *Diffeomorphismus*, eine differenzierbare und umkehrbare Abbildung, deren Umkehrung auch wieder differenzierbar ist. Die Diffeomorphismen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X bilden selbst eine Gruppe $\text{Diff}(X)$,⁵ und eine Wirkung auf X ist ein Gruppenhomomorphismus $g \mapsto \phi_g : G \rightarrow \text{Diff}(X)$, denn (1) und (2) bilden das Homomorphiegesetz: $\phi_e = \text{id}$ (das ist das Neutralelement von $\text{Diff}(X)$) und $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$. Wenn dieser Homomorphismus auch noch injektiv ist, dann erhalten wir durch den Homomorphismus $g \mapsto \phi_g$ einen Isomorphismus von G auf eine Untergruppe von $\text{Diff}(X)$, also wird G zu einer Transformationsgruppe von X , so wie S_4 zu einer Transformationsgruppe des Würfels wurde.

2. LINEARE WIRKUNGEN ODER DARSTELLUNGEN

In dieser Vorlesung wollen wir eine besondere Beispielklasse von Wirkungen studieren, die *linearen* Wirkungen oder *Darstellungen*. Dabei ist X ein Vektorraum V über \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} und die ϕ_g sind nicht beliebige Diffeomorphismen, sondern lineare Abbildungen, also (wegen der Umkehrbarkeit) lineare Isomorphismen von V . Der Homomorphismus $g \mapsto \phi_g$ hat damit Werte in einer kleinen Untergruppe von $\text{Diff}(V)$, der Gruppe $GL(V)$ aller invertierbaren linearen Abbildungen von V nach V . Eine Darstellung von G kann daher einfach definiert werden als ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow GL(V)$, der

⁵Weil $\text{Diff}(X)$ sehr groß ist (unendlich-dimensional), ist es nicht leicht, dieser Gruppe eine Struktur als Liegruppe zu geben; das würde einen Begriff unendlich-dimensionaler Mannigfaltigkeiten (genauer Fréchet-Mannigfaltigkeiten) benötigen. Unsere Mannigfaltigkeiten und Liegruppen werden immer endlich-dimensional sein. Aber $\text{Diff}(X)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist natürlich eine topologische Gruppe.

jetzt meist nicht mit ϕ , sondern mit ρ (rho wie representation) bezeichnet wird. Beachten Sie, dass $GL(V)$ selbst eine Liegruppe ist, wenn V endlich-dimensional ist, also $V = \mathbb{R}^n$. Der Vektorraum V einer Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ heißt auch *G-Modul*.

Warum wollen wir uns gerade mit linearen Wirkungen beschäftigen? Sie haben eine universelle Bedeutung in zweifacher Weise: Zum Einen entstehen viele Wirkungen durch Einschränkung von linearen Wirkungen, zum Beispiel die Wirkung der Gruppe O_n auf der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$; eigentlich wirkt O_n linear auf \mathbb{R}^n (Matrix mal Vektor gibt Vektor), aber da jedes $A \in O_n$ die Norm jedes Vektors erhält, $|Ax| = |x|$, bleibt die Sphäre invariant unter dieser Wirkung. Viele Beispiele sind von dieser Art, auch unser Eingangsbeispiel der Würfelgruppe, denn die Würfeldrehungen sind Elemente der vollen Drehgruppe SO_3 und wirken damit linear auf dem ganzen \mathbb{R}^3 . Zum Anderen ist jede Wirkung mit einer linearen Wirkung verbunden, der *Isotropiedarstellung*. Ist nämlich $\Phi : G \times X \rightarrow X$ eine beliebige Wirkung, so nennen wir für jedes $x \in X$ die Untergruppe $G_x = \{g \in G : \phi_g(x) = x\}$ die *Isotropiegruppe* oder *Standgruppe* oder *Stabilisator* des Punktes x . Eine beliebige differenzierbare Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$ hat eine Ableitung an jeder Stelle $x \in X$; das ist eine lineare Abbildung $D\varphi_x : T_x X \rightarrow T_{\varphi(x)} X$ zwischen den *Tangentialräumen* von X in den Punkten x und $\varphi(x)$.⁶ Wenn $\varphi(x) = x$, so ist $D\varphi_x$ eine lineare Abbildung auf $T_x X$. Für $\varphi = \phi_g$ trifft das zu, falls $g \in G_x$, und wegen der Kettenregel $(D\phi_g)_x (D\phi_h)_x = (D\phi_g \phi_h)_x = (D\phi_{gh})_x$ für $g, h \in G_x$ ist die Abbildung $\rho : G \rightarrow GL(T_x X)$, $g \mapsto (D\phi_g)_x$ eine Darstellung, die *Isotropiedarstellung*.

Ein weiterer Grund, der für die linearen Wirkungen spricht, sind die Konstruktionen, die die lineare Algebra zur Verfügung stellt, um aus gegebenen Darstellungen neue zu machen: Sind $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$ zwei Darstellungen, so können wir zum Beispiel daraus die *direkte Summe* bilden, die Darstellung $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 : G \rightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$,

⁶Der Tangentialraum von X in x ist so etwas wie eine kleine euklidische Umgebung von x , zum ganzen Vektorraum ausgedehnt. Eine genauere Vorstellung: $T_x X$ enthält die Tangentenvektoren $c'(0)$ von differenzierbaren Abbildungen ("Kurven") $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ mit $c(0) = x$. Allerdings ist so ein Tangentenvektor erst definiert, wenn wir eine der Kartenabbildungen ϕ hinter die Kurve c schalten und in den \mathbb{R}^n abbilden. Aber wir können sagen, wann zwei Kurven $c, \tilde{c} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ mit $c(0) = x = \tilde{c}(0)$ den *gleichen* Tangentenvektor haben, nämlich wenn $(\phi c)'(0) = (\phi \tilde{c})'(0)$ für eine Karte ϕ des differenzierbaren Atlas (vgl. Fußnote 2). Dann können wir den Tangentenvektor $c'(0)$ ersetzen durch die Klasse $[c]$ aller Kurven, die den gleichen Tangentenvektor haben. Dies ist nur eine von mehreren Arten, den Tangentialraum einzuführen.

$\rho(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)v_1, \rho_2(g)v_2)$. In Matrixschreibweise wäre $\rho(g)$ die Blockdiagonalmatrix $\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$. Interessanter ist die Umkehrung: Welche Darstellungen $\rho : G \rightarrow GL(V)$ lassen sich auf diese Weise zerlegen? Wenn das möglich ist, würde man eine solche Darstellung *zerlegbar* nennen, wenn nicht, *unzerlegbar*. Wenn wir alle Darstellungen bestimmen wollen, wird es ausreichen, die unzerlegbaren zu kennen.

Es gibt weitere Konstruktionen. Besonders wichtig für uns ist die Darstellung $\rho = \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ auf dem Vektorraum $\text{Hom}(V_1, V_2)$, gegeben durch die Konjugation:

$$(1) \quad \rho(g)f := \rho_2(g)f\rho_1(g)^{-1}$$

für jedes $f \in \text{Hom}(V_1, V_2)$. Wir werden Darstellungen ρ_1, ρ_2 *äquivalent* nennen, wenn es einen *Isomorphismus* $f : V_1 \rightarrow V_2$ gibt mit $\rho(g)f = f$ für alle $g \in G$, also $f = \rho_2(g)f\rho_1(g)^{-1}$ oder besser

$$(2) \quad \rho_2(g)f = f\rho_1(g)$$

für alle $g \in G$. Dann überführt der Isomorphismus f die G -Wirkung ρ_1 auf V_1 in die G -Wirkung ρ_2 auf V_2 und identifiziert die beiden Räume mit ihrer G -Wirkung. Äquivalente Darstellungen werden als nicht wesentlich verschieden angesehen; wir werden also versuchen, alle unzerlegbaren Darstellungen bis auf Äquivalenz zu bestimmen. Allgemeiner heißt eine (nicht mehr notwendig bijektive) lineare Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$, die (2) erfüllt, ein *Homomorphismus von G -Moduln*, kurz *G -Homomorphismus* oder *G -Abbildung*.

3. IRREDUZIBLE DARSTELLUNGEN UND CHARAKTERE

Den etwas schwierigen Begriff “zerlegbar” ersetzen wir durch einen einfacheren: Eine Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ heißt *reduzibel*, wenn es einen echten Unterraum $W \subset V$ (also nicht $W = \{0\}$ oder $W = V$) gibt, der unter $\rho(G)$ invariant ist, $\rho(g)W \subset W$ für alle $g \in G$, und sie heißt *irreduzibel*, wenn es keinen solchen Unterraum W gibt. Zunächst ist “reduzibel” schwächer als “zerlegbar”: Wenn es sogar eine G -invariante Zerlegung gibt, dann erst recht einen invarianten Unterraum. Wir werden aber sehen, dass für kompakte Gruppen die Äquivalenz gilt. Die Stärke des Begriffs “irreduzibel” liegt in dem folgenden einfachen Satz, dem *Lemma von Schur*:⁷

Satz 3.1. *Ist $f : V_1 \rightarrow V_2$ ein Homomorphismus zwischen irreduziblen G -Moduln V_1 und V_2 , so ist f entweder ein Isomorphismus oder die*

⁷Issai Schur, 1875 (Mogiljow am Dnjepr) - 1941 (Tel Aviv), lehrte in Berlin, 1939 aus Deutschland vertrieben

Nullabbildung. Ist $V_1 = V_2$ ein \mathbb{C} -Vektorraum und $\rho_i(G) \subset GL_{\mathbb{C}}(V)$ (ρ_i komplexe Darstellung) für $i = 1, 2$, so gilt $f = \lambda I$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Da $\ker f$ und $\text{Bild } f$ offensichtlich G -invariante Unterräume von V_1 bzw. V_2 sind, sind beide Null oder der ganze Raum, also ist f bijektiv oder Null. Wenn $V_1 = V_2$ Vektorräume über \mathbb{C} und alle Abbildungen komplex linear sind, besitzt f einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann hat die G -Abbildung $f - \lambda I$ einen Kern $\neq 0$ und ist daher wegen der obigen Alternative “Null oder Isomorphismus” die Nullabbildung, also ist $f = \lambda I$. \square

Dieser Satz hat viele bemerkenswerte Anwendungen. Richtig gut anwendbar wird er allerdings erst, wenn wir Methoden gefunden haben, solche G -Homomorphismen zu konstruieren. Für kompakte Gruppen wird das die Mittelungsmethode sein, die wir im nächsten Abschnitt kennen lernen werden. Eine Anwendung, die wir sofort sehen können, ist die folgende:

Korollar 3.1. *Jede irreduzible komplexe Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ einer kommutativen Liegruppe G ist eindimensional.*

Beweis. Wegen $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ ist $f = \rho(h)$ ein G -Homomorphismus für jedes $h \in G$ (vgl. (2)), also $\rho(h) = \lambda(h)I$ für alle $h \in G$. Damit ist jeder Unterraum G -invariant. Wegen der Irreduzibilität kann V also keine echten Unterräume besitzen, d.h. $\dim_{\mathbb{C}} V = 1$. \square

Zur weiteren Untersuchung stellen sich die folgenden Fragen für die Darstellungen einer Liegruppe G :

- (1) Ist “irreduzibel” das gleiche wie “unzerlegbar”? In diesem Fall könnten wir jede Darstellung ρ in irreduzible Teildarstellungen zerlegen: $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$ mit ρ_j irreduzibel.
- (2) Wie erkennen wir irreduzible Darstellungen?
- (3) Wie klassifizieren wir irreduzible Darstellungen bis auf Äquivalenz?

Wir werden sehen, dass diese Fragen im Fall kompakter Gruppen eine befriedigende Antwort finden. Zur Frage (3) können wir schon jetzt einen Beitrag leisten. Die Frage stellt sich für beliebige Darstellungen: Wie erkennen wir, dass zwei Darstellungen $\rho_i : G \rightarrow GL(V_i)$, $i = 1, 2$, äquivalent sind? In einer Richtung können wir die Frage schon beantworten. Wenn $\rho_1 \sim \rho_2$, dann gibt es einen Isomorphismus $f : V_1 \rightarrow V_2$, der die beiden Wirkungen verbindet; insbesondere können wir also $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann wird f eine invertierbare $n \times n$ -Matrix mit

$$(3) \quad \rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$$

für alle $g \in G$, vgl. (1). Die beiden Matrizen $\rho_2(g)$ und $\rho_1(g)$ sind also konjugiert und haben deshalb die gleiche Spur.⁸ Wir definieren daher für jede Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Funktion

$$(4) \quad \chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{K}, \quad \chi_\rho(g) = \text{Spur } \rho(g),$$

den sog. *Charakter* von ρ . Weil Spuren konjugierter Matrizen gleich sind, sehen wir sofort:

Satz 3.2.

$$\rho_1 \sim \rho_2 \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}.$$

Damit können wir zwar noch nicht entscheiden, ob zwei gegebene Darstellungen ρ_1 und ρ_2 äquivalent sind, aber immerhin, ob sie nicht äquivalent sind: Wir rechnen die beiden Charaktere aus; wenn diese sich nur an einer Stelle $g \in G$ unterscheiden, sind die Darstellungen inäquivalent. Wir werden sehen, dass für kompakte Gruppen auch die Umkehrung gilt.

4. KOMPAKTE GRUPPEN UND MITTELUNG

Ein *Fixpunkt* einer Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ist ein $v \in V$ mit $\rho(g)v = v$ für alle $g \in G$. Der Ursprung ist natürlich immer ein Fixpunkt. Fixpunkte sind besonders interessant für die Darstellung $\rho = \text{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ auf $\text{Hom}(V_1, V_2)$, denn ein Fixpunkt dieser Darstellung wäre ja ein G -Homomorphismus, über den wir nach dem Schur-Lemma schon einiges wissen. Wir wollen deshalb versuchen, solche Fixpunkte zu konstruieren.

Wenn G eine endliche Gruppe ist ($|G|$ die Anzahl ihrer Elemente), dann ist das ganz einfach: Zu jedem $x \in V$ bilden wir den *Orbit* (die *Bahn*)

$$(5) \quad Gx = \{\rho(g)x : g \in G\} \subset V$$

und betrachten deren arithmetisches Mittel, den ‘‘Schwerpunkt’’

$$(6) \quad s(Gx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)x.$$

Offensichtlich ist dies ein Fixpunkt, denn für jedes $h \in G$ gilt

$$\rho(h)s(Gx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h)\rho(g)x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg)x = s(Gx),$$

denn die Verschiebung des Arguments von g zu hg ändert nur die Reihenfolge der Summanden.

⁸Erinnerung: $\text{Spur } A = \sum_i a_{ii}$, also $\text{Spur } AB = \sum_{ij} a_{ij}b_{ji} = \text{Spur } BA$ und damit $\text{Spur } SRS^{-1} = \text{Spur } S^{-1}SR = \text{Spur } R$.

Wenn G eine kompakte Liegruppe ist, müssen wir die Summe durch ein Integral ersetzen. Dazu benötigen wir ein Maß dg auf G , mit dem wir den gleichen Schluss durchführen können, wobei $|G| = \int_G dg$ jetzt das *Volumen* von G bezeichnet:

$$\rho(h)s(Gx) = \frac{1}{|G|} \int_{g \in G} \rho(h)\rho(g)x dg = \frac{1}{|G|} \int_{g \in G} \rho(hg)x dg = s(Gx).$$

Das Maß dg muss also die Eigenschaft haben, dass für die V -wertige Funktion $f(g) = \rho(g)x$ gilt:

$$\int_G f(g)dg = \int_G f(hg)dg.$$

Ein solches Maß nennt man *linksinvariantes Maß* oder *Haarmaß*. Für Liegruppen erhält man es, indem man eine Determinante ω auf dem Tangentialraum $T_e G$ festlegt, also eine antisymmetrische d -Linearform ($d = \dim G$); dazu muss man nur eine Basis des Vektorraums $T_e G$ festlegen, die unter der d -Form den Wert Eins bekommt; mit Hilfe der Linkstranslationen $L_h : G \rightarrow G$, $L_h(g) = hg$ überträgt man diese Determinante auf jeden Tangentialraum $T_h G$. Hat man nun eine lokale Parametrisierung (Umkehrung einer Karte) $\varphi : \mathbb{R}_o^d \rightarrow G$ und eine stetige Funktion $f : G \rightarrow V$ mit kompaktem Träger im Bild von φ , so definiert man $\int_G f(g) dg = \int_{\mathbb{R}_o^d} f(\varphi(u)) |\det D\varphi_u| du$, wobei $\det D\varphi_u = \omega(D\varphi_u e_1, \dots, D\varphi_u e_d)$. Nach Substitutionsregel ist dies unabhängig von der Wahl der Parametrisierung φ . Außerdem gilt $\int_G f(g) dg = \int_G f(hg) dg$: Statt φ benutzt man auf der rechten Seite die Parametrisierung $\tilde{\varphi} = L_h \varphi$.

Alternativ dazu kann man das Haarmaß für kompakte topologische Gruppen folgendermaßen konstruieren. Es genügt, \mathbb{R} -wertige stetige Funktionen zu betrachten, also den Raum $C(G)$. Wir suchen einen Mittelungsprozess, der jeder Funktion $f \in C(G)$ ein Mittel \bar{f} zuordnet. Dazu betrachten wir die Menge $E_G = \{A \subset G : A \text{ endlich}\}$ der endlichen Teilmengen von G und definieren für jedes $A \in E_G$ die Funktion $f_A \in C(G)$, das partielle Mittel von f über A :

$$f_A(g) = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} f(ag).$$

Wegen der Kompaktheit von G ist f sogar *gleichmäßig* stetig. Das ist der aus der Analysis 1 bekannte Begriff:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in G |x - y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon,$$

nur ersetzen wir " $|x - y| < \delta$ " durch die Bedingung, dass $y^{-1}x$ in einer kleinen Umgebung von $e \in G$ liegt und in diesem Sinn x und y nahe beieinander liegen.

Lemma 4.1. *Jede stetige Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist sogar gleichmäßig stetig:*

$$(7) \quad \forall \epsilon > 0 \exists U \ni e \forall x, y \in G \ y^{-1}x \in U \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Beweis. Andernfalls würde gelten:

$$\exists \epsilon > 0 \forall U \ni e \exists x, y \in G \ y^{-1}x \in U \wedge |f(y) - f(x)| \geq \epsilon$$

Dann fänden wir auch Folgen x_k, y_k in G mit $y_k^{-1}x_k \rightarrow e$, und dennoch $|f(y_k) - f(x_k)| \geq \epsilon$.⁹ Wegen der Kompaktheit könnten wir annehmen (Übergang zu Teilfolgen), dass $x_k \rightarrow x$ und $y_k \rightarrow y$. Dann wäre $y^{-1}x = \lim y_k^{-1}x_k = e$, also $y = x$, aber $|f(y) - f(x)| \geq \epsilon$, ein Widerspruch! \square

Es folgt, dass die Funktionenmenge $\Delta_f = \{f_A : A \in E_G\}$ gleichgradig stetig ist, d.h. die Bedingung (7) gilt mit derselben Umgebung U sogar für alle $f_A \in \Delta_f$. Dies ist klar aus dem Mittelungsprozess, denn mit (7) folgt auch $|f(ay) - f(ax)| < \epsilon$, da $(ay)^{-1}(ax) = y^{-1}x \in U$, und somit folgt $|f_A(y) - f_A(x)| \leq \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} |f(ay) - f(ax)| < \epsilon$.

Um das Mittel von f über ganz G zu konstruieren, betrachten wir das Funktional

$$\omega(f) := \max f - \min f \geq 0.$$

Maximum und Minimum existieren ja, weil G kompakt und f stetig ist. Wegen des Mittelungsprozesses folgt $\max f_A \leq \max f$ und $\min f_A \geq \min f$, also

$$\omega(f_A) \leq \omega(f).$$

Dann gibt es eine Folge A_k in E_G mit $\omega(f_{A_k}) \rightarrow \omega_o := \inf\{\omega(f_A) : A \in E_G\}$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit und der Beschränktheit der Funktionen f_{A_k} konvergiert eine Teilfolge gleichmäßig gegen eine Funktion \bar{f} auf G , und es gilt $\omega(\bar{f}) = \omega_o$.

Dann muss \bar{f} konstant sein: Andernfalls könnten wir noch eine Menge $A \in E_G$ finden mit $\omega(\bar{f}_A) < \omega(\bar{f}) = \omega_o$. Da $\omega((f_{A_k})_A) \rightarrow \omega(\bar{f}_A)$, wäre auch $\omega((f_{A_k})_A) < \omega_o$, ein Widerspruch, weil $(f_{A_k})_A = f_{A \cdot A_k} \in \Delta_f$.¹⁰ Diese Konstante \bar{f} ist das gesuchte Mittel, das in dem vorigen Beweis $\frac{1}{|G|} \int_G f(g) dg$ war.

⁹Hierzu brauchen wir vielleicht gewisse Voraussetzungen an die Topologie von G , zum Beispiel dass es eine Folge von ineinander enthaltenen kompakten Umgebungen U_k von e gibt mit $\bigcap_k U_k = \{e\}$. Sicher stimmt der Schluss, wenn G eine Mannigfaltigkeit ist.

¹⁰Dieses Argument muss näher ausgeführt werden, vgl. L.S. Pontrjagin: Topological Groups.

5. EXISTENZ EINES INVARIANTEN SKALARPRODUKTS

Gegeben sei eine Darstellung $\rho : G \rightarrow GL(V)$ auf $V \cong \mathbb{R}^n$ und ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ auf V . Wir schreiben gv statt $\rho(g)v$. Die Gruppe G sei kompakt und dg sei ein linksinvariantes Maß auf G , oBdA mit Volumen Eins. Dann ist

$$(8) \quad \langle v, w \rangle := \int_G \langle gv, gw \rangle_o dg$$

ein G -invariantes Skalarprodukt auf V , d.h. G liegt in der orthogonalen Gruppe bezüglich dieses Skalarprodukts, denn für jedes $h \in G$ ist $\langle hv, hw \rangle = \int_G \langle ghv, ghw \rangle_o dg = \int_G \langle gv, gw \rangle_o dg = \langle v, w \rangle$. Eine Konsequenz davon ist der folgende Satz:

Satz 5.1. *Jede Darstellung $\rho : G \rightarrow V$ ist vollständig reduzibel, d.h. sie zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen.*

Beweis. Wir können annehmen, dass V ein G -invariantes Skalarprodukt trägt, also $\rho(g) \in O(V)$ für alle $g \in G$. Wenn ein Unterraum $W \subset V$ invariant unter $\rho(g)$ ist, dann gilt das gleiche für $W^\perp = \{v \in V : \langle v, W \rangle = 0\}$, also ist mit W auch W^\perp invariant unter G , und V zerfällt in eine G -invariante direkte Summe $V = W \oplus W^\perp$. \square

Wenn V sogar ein komplexer Vektorraum ist, d.h. eine *komplexe Struktur* besitzt, eine Matrix $J \in GL(V)$ mit $J^2 = -I$ (die Skalarmultiplikation mit $i = \sqrt{-1}$), dann können wir unser anfängliches Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_o$ invariant unter J wählen. Wenn $\rho : G \rightarrow GL(V)$ dann sogar eine *komplexe Darstellung* ist, d.h. wenn ρ Werte in $GL_{\mathbb{C}}(V) = \{A \in GL(V) : AJ = JA\}$ hat, dann ist auch das gemittelte Skalarprodukt (8) J -invariant und definiert auf V auch ein hermitesches Skalarprodukt

$$(9) \quad (v, w) = \langle v, w \rangle + i \langle Jv, w \rangle.$$

Damit wird ρ sogar eine *unitäre Darstellung*, d.h. jedes $\rho(g)$ liegt in der *unitären Gruppe* $U(V)$ bezüglich (9).

6. ORTHOGONALITÄT DER CHARAKTERE

Wir betrachten jetzt komplexe Darstellungen auf komplexen Vektorräumen V und W . Sind V, W irreduzible G -Moduln, so gilt nach dem Schurlemma:¹¹

$$(10) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_G(V, V) &= \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}, \\ \text{Hom}_G(V, W) &= \{0\} \quad \text{falls } V \not\sim W. \end{aligned}$$

¹¹Für zwei Darstellungsmoduln V, W von G schreiben wir $V \sim W$, wenn die zugehörigen Darstellungen auf V und W äquivalent sind.

Diese Beobachtung ist nützlich, weil wir andererseits mit der Mittelungsmethode Elemente von $\text{Hom}_G(V, W)$ konstruieren können. Ist nämlich $A \in \text{Hom}(V, W)$, dann ist $\int_G gAg^{-1}dg \in \text{Hom}_G(V, W)$.

Wenn V und W also irreduzibel und inäquivalent sind, dann muss $\int_G gAg^{-1}dg = 0$ gelten, für alle $A \in \text{Hom}(V, W)$. Dies wenden wir an auf die Basismatrizen $A = E_{ij}$, wobei wir Basen auf V und W vorgeben müssen; die linearen Abbildungen $E_{ij} : V \rightarrow W$ bilden das i -te Basiselement von V auf das j -te von W ab und alle anderen Basiselemente auf Null; sie bilden eine Basis von $\text{Hom}(V, W)$. Wenn V und W inäquivalent sind (oder im reduziblen Fall keine gemeinsamen Faktoren haben), erhalten wir damit

$$(11) \quad \int_G gE_{ij}g^{-1}dg = 0.$$

Nach dem vorigen Abschnitt dürfen wir annehmen, dass wir G -invariante hermitesche Skalarprodukte auf V und W gewählt haben und dass die Basen unitär sind; dann wird jedes $g \in G$ zu einer unitären Matrix $(\rho(g)_{rs})$ auf $V = \mathbb{C}^n$ und $(\tilde{\rho}(g)_{pq})$ auf $W = \mathbb{C}^m$. Für Matrizen A auf W und B auf V mit Koeffizienten a_{qp} und b_{sr} erhalten wir $(AE_{ij}B)_{qr} = a_{qj}b_{ir}$.¹² Für $A = \tilde{\rho}(g)$ und $B = \rho(g)^* = \overline{\rho(g)}^T$ erhalten wir daher aus (11):

$$(12) \quad \int_G \tilde{\rho}(g)_{qj} \overline{\rho(g)}_{ri} dg = 0$$

für alle möglichen Indizes q, r, i, j .

Wenn dagegen nur eine irreduzible Darstellung (V, ρ) gegeben ist ($\tilde{\rho} = \rho$), dann ist $\text{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}I$ und für jedes $A \in \text{Hom}(V, V)$ gibt es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\int_G gAg^{-1}dg = \lambda I$. Das λ lässt sich aus der Spur berechnen:

$$\text{Spur}(\lambda I) = \text{Spur} \left(\int_G gAg^{-1}dg \right) = \int_G \text{Spur}(gAg^{-1})dg = \text{Spur} A,$$

also erhalten wir $\lambda n = \text{Spur} A$ und damit

$$(13) \quad \int_G gAg^{-1}dg = \frac{1}{n} \text{Spur} A \cdot I.$$

Auf die Basismatrizen $A = E_{ij}$ angewandt finden wir

$$(14) \quad \int_G gE_{ij}g^{-1}dg = \frac{1}{n} \delta_{ij} I,$$

¹²Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ mit $b_r = \sum_s b_{sr} e_s$ so ist $E_{ij} b_r = b_{ir} e_j$, also $E_{ij} B = (b_{i1} e_j, \dots, b_{in} e_j) =: b^i e_j$ mit $b^i = (b_{i1}, \dots, b_{in})$. Wenden wir $A = (a_1, \dots, a_m)$ darauf an, so erhalten wir $AE_{ij} B = (b_{i1} a_j, \dots, b_{in} a_j) = b^i a_j$, also $(AE_{ij} B)_{qr} = b_{ir} a_{qj}$.

oder in der Matrixdarstellung $(\rho(g)_{qp})$ bezüglich einer unitären Basis, ähnlich wie in (12)

$$(15) \quad \int_G \rho(g)_{qj} \overline{\rho(g)_{pi}} dg = \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{pq}.$$

Wir haben also gezeigt:

Satz 6.1. *Für zwei inäquivalente irreduzible unitäre Darstellungen $\rho, \tilde{\rho}$ einer kompakten Liegruppe G gilt:*

$$\begin{aligned} \int_G \tilde{\rho}(g)_{qj} \overline{\rho(g)_{ri}} dg &= 0, \\ \int_G \rho(g)_{qj} \overline{\rho(g)_{ri}} dg &= \frac{1}{n} \delta_{ij} \delta_{pq}. \end{aligned}$$

Für die Charaktere $\chi_\rho, \chi_{\tilde{\rho}}$ (Spuren von $\rho, \tilde{\rho}$) folgt insbesondere:

$$(16) \quad \int_G \chi_{\tilde{\rho}}(g) \overline{\chi_\rho(g)} dg = 0,$$

$$(17) \quad \int_G |\chi_\rho|^2 dg = 1.$$

Beweis. Die ersten beiden Gleichungen sind (12) und (15). Die beiden anderen Gleichung folgen, weil $\chi_\rho(g) = \sum_r \rho(g)_{rr}$; daraus folgt (16) und auch (17), denn mit (15) ist

$$\int_G \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} dg = \sum_{ij} \int_G \rho(g)_{jj} \overline{\rho(g)_{ii}} dg = \frac{1}{n} \sum_{ij} \delta_{ij} = 1.$$

□

Satz 6.2. *Zwei komplexe Darstellungen $\rho, \tilde{\rho}$ sind äquivalent genau dann, wenn ihre Charaktere (als Funktionen auf G) gleich sind, $\chi_\rho = \chi_{\tilde{\rho}}$. Eine komplexe Darstellung $\rho : G \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$ ist irreduzibel genau dann, wenn $\int_G |\chi_\rho(g)|^2 dg = 1$ (Irreduzibilitätskriterium).*

Beweis. Die Darstellung ρ zerfällt in irreduzible Teile, $\rho = \sum_i m_i \rho_i$ d.h. der Darstellungsmodul V ist eine G -invariante orthogonale direkte Summe $V = \sum_i V_i$, und die Teildarstellung $\rho(g)|_{V_i}$ ist m_i -fache direkte Summe einer einzigen irreduziblen Darstellung ρ_i , wobei $\rho_i \not\sim \rho_j$ für $i \neq j$. Die Multiplizitäten m_i ersieht man aus χ_ρ , denn nach (16) und (17) ist $\int_G \chi_\rho \overline{\chi_{\rho_i}} = m_i \int_G |\chi_{\rho_i}|^2 = m_i$. Also wird ρ durch χ_ρ bestimmt; die Umkehrung ist klar. Außerdem ist

$$\int_G \chi_\rho \overline{\chi_\rho} = \sum_{ij} m_i m_j \int_G \chi_{\rho_i} \overline{\chi_{\rho_j}} = \sum_i m_i^2 \int_G |\chi_{\rho_i}|^2 = \sum_i m_i^2,$$

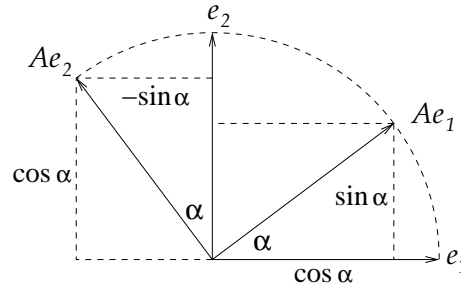
und diese Summe ist Eins genau dann, wenn nur eins der m_i Eins und alle anderen Null sind. □

7. QUATERNIONEN UND SU_2

Die einfachste kompakte Liegruppe ist die ebene Drehgruppe

$$(18) \quad SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Eigentlich ist $SO_2 = \{A \in O_2 : \det A = 1\}$; die Gleichheit (18) folgt, weil jedes $A \in SO_2$ aus zwei orthogonalen Einheitsvektoren v, w mit $\det(v, w) = 1$ besteht. Setzen wir $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, so folgt $1 = |v|^2 = a^2 + b^2$. Die zu v senkrechten Vektoren w sind $t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ für $t \in \mathbb{R}$, aber weil $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1$, ist $t = 1$. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ können wir stets eindeutig in der Form $a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$ schreiben; damit haben wir die übliche Form der Drehmatrizen $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Die Figur zeigt die geometrische Deutung als Koordinaten der beiden Spaltenvektoren Ae_1 und Ae_2 .



Wenn man in (18) die Bedingung $a^2 + b^2 = 1$ einfach fallen lässt, so erhält man die reellen Vielfachen von Drehmatrizen (*Drehstreckungen*), und diese sind abgeschlossen unter Multiplikation wie auch unter Addition; sie bilden also eine Unteralgebra der Matrixalgebra $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Das ist der Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen, wobei $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Eins und die 90-Grad-Linksdrehung $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ die imaginäre Einheit i ist:

$$(19) \quad \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Drehgruppe SO_2 wird so zur Gruppe der komplexen Einheitszahlen $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Ganz entsprechend kann man auch die Drehgruppe der komplexen Ebene definieren:

$$(20) \quad SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\},$$

denn $SU_2 = \{A \in U_2 : \det A = 1\}$ kann auf die gleiche Weise dargestellt werden: $v = Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist ein Einheitsvektor, also gilt $|a|^2 + |b|^2 = 1$, und $(w, v) = w^*v = 0 \iff w \in \mathbb{C} \begin{pmatrix} -\bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix}$, aber der Faktor muss gleich Eins sein, weil $\det \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Wieder kann man die Menge der reellen Vielfachen dieser Matrizen betrachten; sie sind

abgeschlossen gegenüber Addition und Multiplikation und bilden daher eine reelle Unter algebra von $\mathbb{C}^{2 \times 2}$; das ist die *Quaternionenalgebra*:

$$(21) \quad \mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Hier ist $1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ und es gibt drei imaginäre Einheiten: $i = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$, $k = ij = \begin{pmatrix} -i & \\ & i \end{pmatrix}$. Wir können die Quaternionenalgebra daher auch als \mathbb{R}^4 mit der Basis $1, i, j, k$ definieren, wobei die Multiplikation durch folgende Tafel gegeben wird:¹³

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Die Gruppe SU_2 besteht (wegen $|a|^2 + |b|^2 = 1$) aus den Einheitsquaternionen, die die Einheitssphäre \mathbb{S}^3 in \mathbb{R}^4 bilden; wir identifizieren einfach die Matrix $X = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ mit dem Vektor $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Dann wird $X^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ zu dem Vektor $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ -b \end{pmatrix}$ und es gilt $X^*X = |x|^2 I$, also $\bar{x}x = x\bar{x} = |x|^2$. Die Abbildung $x \mapsto \bar{x}$ heißt ebenfalls *Konjugation* in \mathbb{H} ; sie ist ein Anti-Automorphismus: $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$, weil $(XY)^* = Y^*X^*$.

Die Konjugation von Quaternionen mit Einheitsquaternionen, $x \mapsto vxv^{-1}$, ist eine orthogonale Abbildung von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, die die Eins 1 fest lässt und daher auf dem zu 1 senkrechten \mathbb{R}^3 operiert, der von i, j, k aufgespannt wird. Dadurch wird eine orthogonale Darstellung $\text{Ad} : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO_3$ definiert, die *Adjungierte Darstellung*, Diese ist nicht injektiv, denn $\text{Ad}(-1) = \text{Ad}(1) = I$, aber $\{\pm 1\}$ ist auch schon der ganze Kern,¹⁴ und Ad ist surjektiv. Wir erhalten daher eine enge Beziehung von \mathbb{S}^3 zu SO_3 :

$$(22) \quad SO_3 = \mathbb{S}^3 / \{\pm 1\}.$$

8. DARSTELLUNGEN VON SO_2 UND SU_2

Wir wollen die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $\mathbb{S}^1 = SO_2$ und $\mathbb{S}^3 = SU_2$ bestimmen. Die Gruppe \mathbb{S}^1 ist abelsch, alle irreduziblen Darstellungen sind also eindimensional, und die Darstellung ist ihr eigener Charakter. Für jede ganze Zahl k haben wir einen Homomorphismus $\chi_k = \rho_k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho_k(z) = z^k$ für $z = e^{it} \in \mathbb{S}^1$. Wir wollen

¹³Zur Geschichte der von Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865, Dublin) 1843 gefundenen Quaternionen vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion>.

¹⁴Ein Element $v \in \ker \text{Ad}$ muss mit jedem Element von \mathbb{S}^3 und somit mit ganz $\mathbb{H} = \mathbb{R}_+ \mathbb{S}^3$ vertauschen: $vxv^{-1} = x \iff xv = vx$. Wenn wir die Zerlegung $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, $a = \alpha + \vec{a}$ betrachten, dann ist das Produkt von $a = \alpha + \vec{a}$ und $b = \beta + \vec{b}$ gegeben durch $ab = \alpha\beta - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \alpha\vec{b} + \beta\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$. Damit gilt $ab - ba = 2\vec{a} \times \vec{b} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}$ linear abhängig. Ein Element $a \in \mathbb{S}^3$ kann also nur dann mit *allen* $b \in \mathbb{H}$ kommutieren, wenn $\vec{a} = 0$, also $a \in \mathbb{R} \cap \mathbb{S}^3 = \{\pm 1\}$.

unser Irreduzibilitätskriterium (Satz 6.2) darauf anwenden:

$$\int_0^{2\pi} \chi_k \bar{\chi}_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt = 2\pi,$$

also ist $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \chi_k \bar{\chi}_k = 1$. Andererseits ist

$$\int_0^{2\pi} \chi_j \bar{\chi}_k = \int_0^{2\pi} e^{ijt} e^{-ikt} dt = \int_0^{2\pi} e^{i(j-k)t} dt = 0$$

für $j \neq k$, denn die Funktion $f(t) = e^{imt} = \cos mt + i \sin mt$ erfüllt $f(t + \frac{\pi}{m}) = -f(t)$ und hat deshalb Integral Null, falls $m \neq 0$. Die Charaktere stehen also aufeinander senkrecht; sie bilden sogar eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{S}^1)$; das ist die Fourier-Zerlegung von 2π -periodischen Funktionen. Wir haben also alle irreduziblen Darstellungen von \mathbb{S}^1 gefunden.

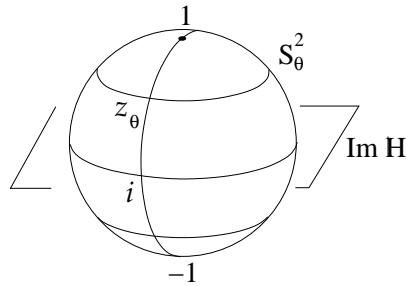
Bei $\mathbb{S}^3 = SU_2$ können wir genauso vorgehen und erst einmal eine Schar von Darstellungen hinschreiben, von denen wir dann nachrechnen, dass sie irreduzibel sind und sogar vollständig. Jede Gruppe $G \subset GL(\mathbb{C}^2)$ operiert auch auf Polynomalgebra $\mathbb{C}[x, y]$ über \mathbb{C}^2 , und zwar durch Grad-erhaltende Algebren-Automorphismen: $(g, f) \mapsto gf = \tilde{f}$ mit $\tilde{f}(v) = f(g^{-1}v)$.¹⁵ Da $\mathbb{C}[x, y]$ von den beiden Koordinatenfunktionen x und y auf \mathbb{C}^2 erzeugt wird, brauchen wir nur $\tilde{x} = gx$ und $\tilde{y} = gy$ zu finden. Die Monome $x^k y^{n-k}$ mit $k = 0, \dots, n$ bilden eine Basis der homogenen Polynome vom Grad n ; diese bilden also einen $(n+1)$ -dimensionalen Darstellungsmodul V_n von SU_2 . Die Koordinaten x, y bilden eine Basis des Raums $V_1 = \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$, des *Dualraums* von \mathbb{C}^2 . Die Operation einer Matrix A auf V_1 durch $\phi \mapsto \phi(Av)$ wird durch die adjungierte Matrix A^* dargestellt: Jede Linearform ϕ kann mit Hilfe des hermiteschen Skalarprodukts durch einen Vektor $w \in \mathbb{C}^2$ dargestellt werden, $\phi(v) = (w, v) = w^*v$ oder $\phi = w^*$, insbesondere $x = e_1^*$ und $y = e_2^*$. Also ist $(g\phi)(v) = \phi(g^{-1}v) = w^*g^{-1}v = ((g^{-1})^*w)v$. Wenn $g \in U_2$, dann ist $(g^{-1})^* = g$, also wirkt SU_2 auf V_1 wie auf \mathbb{C}^2 .¹⁶

Wir wollen zeigen, dass die Darstellung ρ_n von SU_2 auf $V_n = \langle x^k y^{n-k} : 0 \leq k \leq n \rangle$, dem Raum der homogenen Polynome vom

¹⁵Das ist eine Wirkung, denn für $g, h \in G$ ist $g(hf)(v) = hf(g^{-1}vj) = f(h^{-1}g^{-1}v) = f((gh)^{-1}v) = ((gh)f)(v)$.

¹⁶Ein anderer Weg, eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf den Linearformen operieren zu lassen, ist die Anwendung auf die Komponenten der Vektoren: $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$, also $\tilde{x} = ax + by$, $\tilde{y} = cx + dy$. Dann werden die Linearformen durch $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ statt durch A^* transformiert, und Vektoren werden durch das *bilineare* Skalarprodukt $\langle v, w \rangle = v^T w$ mit Vektoren identifiziert. Die Abbildung $v \mapsto v^T$ zwischen \mathbb{C}^2 und $\text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ ist \mathbb{C} -linear, während die Abbildung $v \mapsto v^*$ \mathbb{C} -antilinear ist. Die zugehörige Darstellung der Gruppe U_2 ist also $\tilde{\rho}(g) = (g^{-1})^T = \tilde{g}$.

Grad n , irreduzibel ist. Nach Satz 6.2 müssen wir dazu zeigen, dass $\int_G |\chi_{\rho_n}|^2 = 1$ ist. Die Funktion $\chi_n := \chi_{\rho_n}$ ist eine *Klassenfunktion*, d.h. sie ist konstant auf den Konjugationsklassen. Die Konjugationsklassen von $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ haben wir im vorigen Kapitel schon berechnet: Es sind die Bahnen der Darstellung von \mathbb{S}^3 auf $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ durch Konjugation $\text{Ad}(v)x = vxv^{-1}$. Dabei bleibt die reelle Achse $\mathbb{R} \cdot 1$ fix, und auf $\text{Im } \mathbb{H} = 1^\perp \cong \mathbb{R}^3$ wirkt $\text{Ad}(\mathbb{S}^3)$ als Drehgruppe SO_3 . Die Konjugationsklasse eines beliebigen Elementes $v = \cos \theta + e \sin \theta \in \mathbb{S}^3$ mit $e \in \mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{S}^3 : x \perp 1\}$ ist daher die 2-Sphäre $\mathbb{S}_\theta^2 = \cos \theta + \mathbb{S}^2 \sin \theta$. Insbesondere liegt das Element $z_\theta = \cos \theta + i \sin \theta$ in dieser Konjugationsklasse. Es genügt daher, $\chi_n(z_\theta)$ zu berechnen.



Nach (20) entspricht $z_\theta \in \mathbb{S}^3$ der Matrix $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU_2$. Diese wirkt auf den Basis-Linearformen x, y von \mathbb{C}^2 durch Multiplikation mit $e^{i\theta}$ und $e^{-i\theta}$, und daher wirkt sie auf den Basis-Monomen $p_k = x^k y^{n-k}$ durch

$$\rho_n(z_\theta)p_k = e^{ik\theta} x^k e^{-i(n-k)\theta} y^{n-k} = e^{i(2k-n)\theta} p_k.$$

Jedes Basiselement p_k ist also ein Eigenvektor von $\rho_n(z_\theta)$ zum Eigenwert ζ^{2k-n} mit $\zeta = e^{i\theta}$. Somit ist $\chi_n(z_\theta) = \text{Spur } \rho_n(z_\theta)$ die Summe der Eigenwerte,

$$\chi_n(z_\theta) = \sum_{k=0}^n \zeta^{2k-n} = \zeta^n + \zeta^{n-2} + \dots + \zeta^{-n} = \frac{\zeta^{n+1} - \zeta^{-(n+1)}}{\zeta - \zeta^{-1}},$$

denn $(\zeta^n + \zeta^{n-2} + \dots + \zeta^{-n})(\zeta - \zeta^{-1}) = \zeta^{n+1} - \zeta^{-n-1}$.

Für das Integral $\int_G |\chi_n(g)|^2 dg$ benötigen wir das Maß dg mit $\int_G dg = 1$. Stattdessen benutzen wir für $G = \mathbb{S}^3$ das gewöhnliche Volumenmaß dv auf \mathbb{S}^3 mit $\int_{\mathbb{S}^3} dv = \text{vol}(\mathbb{S}^3) = 2\pi^2$.¹⁷ Damit erhalten wir

$$\int_{\mathbb{S}^3} |\chi_n(g)|^2 dg = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{S}^3} |\chi_n(g)|^2 dv(g)$$

¹⁷Dies sieht man mit Cavalieri: $\text{vol}(\mathbb{S}^3) = \int_0^\pi \text{area}(\mathbb{S}_\theta^2) d\theta = \int_0^\pi 4\pi \sin^2 \theta d\theta = 2\pi^2$, denn wegen $\int_0^\pi \sin^2 = \int_0^\pi \cos^2 = \int_0^\pi (1 - \sin^2)$ gilt $2 \int_0^\pi \sin^2 = \int_0^\pi 1 = \pi$, also $\int_0^\pi \sin^2 = \pi/2$.

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi |\chi_n(z_\theta)|^2 4\pi \sin^2 \theta d\theta$$

nach Fubini, denn χ_n ist auf der Konjugationsklasse \mathbb{S}_θ^2 konstant, und diese ist eine 2-Sphäre mit Radius $\sin \theta$ und hat somit den Flächeninhalt $4\pi \sin^2 \theta$. Der Nenner von $|\chi_n(z_\theta)|^2$ ist $|e^{i\theta} - e^{-i\theta}|^2 = 4 \sin^2 \theta$ und wird gegen den Oberflächenfaktor $4\pi \sin^2 \theta$ gekürzt; nur der Zähler bleibt stehen:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\zeta^{n+1} - \bar{\zeta}^{n+1}|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\zeta^{n+1} - \bar{\zeta}^{n+1}|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (2 - \zeta^{2(n+1)} - \bar{\zeta}^{2(n+1)}) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi = 1, \end{aligned}$$

denn das Integral über die periodischen Funktionen $\zeta^{2(n+1)}$ und $\bar{\zeta}^{2(n+1)}$ verschwindet. Also sind alle Darstellungen ρ_n , $n \in \mathbb{N}$ von $G = SU_2$ irreduzibel.

Wie bei SO_2 ist es nicht schwer zu sehen, dass wir damit bereits alle irreduziblen Darstellungen von SU_2 gefunden haben: Ist ρ eine weitere irreduzible Darstellung, so ist $\int_{\mathbb{S}^3} \chi_n(g) \overline{\chi_\rho(g)} dg = 0$, und wenn wir den Oberflächenfaktor $4\pi \sin^2 \theta$ durch $\pi |e^{i\theta} - e^{-i\theta}|^2$ ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{S}^3} \chi_n(g) \overline{\chi_\rho(g)} dg \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \chi_n(z_\theta) |e^{i\theta} - e^{-i\theta}|^2 \overline{\chi_\rho(z_\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}) \overline{(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \chi_\rho(z_\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Nun ist $\chi_\rho(z_\theta)$ eine gerade Funktion von θ , weil z_θ und $z_{-\theta}$ in $G = \mathbb{S}^3$ konjugiert sind. Damit ist die ungerade Funktion $(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \chi_\rho(z_\theta)$ senkrecht zu allen Funktionen $f_n(\theta) = e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, bezüglich des L^2 -Skalarprodukts auf den 2π -periodischen Funktionen, aber die f_n bilden (nach Fourier) eine Basis aller ungeraden periodischen Funktionen, Widerspruch! Die ρ_n für $n = 0, 1, 2, \dots$ sind also alle irreduziblen Darstellungen von SU_2 .

9. REELLE, KOMPLEXE UND QUATERNIONALE DARSTELLUNGEN

Wenn eine unitäre irreduzible Darstellung $\rho : G \rightarrow U_n$ gegeben ist, dann gibt es nach Schur keine $\rho(G)$ -invarianten \mathbb{C} -linearen Abbildungen auf $V = \mathbb{C}^n$ außer Vielfachen der Einheitsmatrix. Aber es kann \mathbb{C} -antilineare Abbildungen geben!¹⁸ Wenn $j, j' : V \rightarrow V$ zwei solche Abbildungen sind (nicht notwendig verschieden), dann ist allerdings jj' wieder \mathbb{C} -linear und immer noch $\rho(G)$ -invariant, also ein Vielfaches der Einheitsmatrix. Insbesondere ist $j^2 = \lambda I$, wobei das λ reell sein muss, denn $jj^2v = j(\lambda v) = \bar{\lambda}jv$, aber $j^2jv = \lambda jv$, also $\bar{\lambda} = \lambda$. Wenn j zusätzlich orthogonal ist, bleiben nur die Fälle $\lambda = 1$ (*reelle Struktur*) und $\lambda = -1$ (*quaternionale Struktur*). Bis auf komplexe Vielfache kann es nur eine solche Struktur geben: $jj' = \mu I$ und $jj = \pm 1$ impliziert $j' = \pm \mu j$, und $(j')^2 = \mu j \mu j = \mu \bar{\mu} j^2 = \pm |\mu|^2 j^2$, das Vorzeichen von j^2 ist also wohlbestimmt und hängt nur von der Darstellung (ρ, V) ab. Deshalb nennen wir die unitäre Darstellung reell oder quaternional, wenn es eine äquivariante reelle oder quaternionale Struktur j gibt; wenn nicht, heißt sie *komplex*.

Im reellen Fall ($j^2 = 1$) können wir j als komplexe Konjugation auf \mathbb{C}^n deuten; wegen $j^2 = 1$ hat sie zwei (reelle) Eigenräume E_{\pm} zu den Eigenwerten ± 1 , und wegen $ji = -ij$ vertauscht die Multiplikation mit i diese Eigenräume; sie haben daher die gleiche reelle Dimension n . Den Eigenraum E_+ deuten wir als $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ und E_- als $i\mathbb{R}^n$. Weil jedes $\rho(g)$ mit j vertauscht, erhält es auch die Eigenräume E_{\pm} . Die Darstellung ist also über \mathbb{R} nicht mehr irreduzibel, und $\rho(g) \in U_n \cap \mathbb{R}^{n \times n} = O_n$. Die unitäre Darstellung ρ ist also eigentlich eine reelle, orthogonale Darstellung $\rho : G \rightarrow O_n \subset U_n$.

Im quaternionalen Fall ($j^2 = -1$) erhalten wir auf V eine Fortsetzung der komplexen zu einer quaternionalen Vektorraumstruktur; die Anwendung der Abbildungen j und $k = ij$ (mit $k^2 = ijij = -iijj = -1$) beschreiben die Multiplikation mit den quaternionalen Skalaren $j, k \in \mathbb{H}$. Wir können also $V = \mathbb{C}^n$ als \mathbb{H}^m mit $m = n/2$ deuten. Da jedes $\rho(g)$ mit j und mit i vertauscht, ist es \mathbb{H} -linear, also $\rho(g) \in U_n \cap \mathbb{H}^{m \times m} = Sp_m$. Somit bildet die unitäre Darstellung ρ eigentlich in die symplektische Gruppe ab: $\rho : G \rightarrow Sp_m \subset U_n$.

Beispiel: Die irreduziblen Darstellungen ρ_n von SU_2 , die wir im vorigen Abschnitt beschrieben haben, sind abwechselnd quaternional (n gerade) und reell (n ungerade).

¹⁸Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $j : V \rightarrow W$ für \mathbb{C} -Vektorräume V, W heißt *antilinear*, wenn $j(\alpha v) = \bar{\alpha}(jv)$ für $v \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Die antilinearen Abbildungen bilden einen \mathbb{C} -Vektorraum, d.h. mit j ist auch λj antilinear für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

II. Liegruppen und Liealgebren

10. EINPARAMETER-UNTERGRUPPEN

Bisher haben wir die differenzierbare Struktur einer Liegruppe noch kaum benutzt; das wird erst jetzt eine Rolle spielen. Wie können wir eine Liegruppe G am besten verstehen? Wu-Yi Hsiang [Hsiang] beantwortet diese Frage mit einem Griff in die Klamottenkiste des Agentenfilms: Wir sollten einen Spion, einen Agenten nach G schicken! Dieser muss uns gut bekannt sein, damit wir ihm vertrauen können, und er muss flexibel genug sein, um seine Aufgabe zu erfüllen. Es ist die uns bestens vertraute Liegruppe $(\mathbb{R}, +)$, die wir durch Homomorphismen nach G schicken. Einen (differenzierbaren) Homomorphismus $\phi : \mathbb{R} \rightarrow G$ nennen wir eine Einparameter-Untergruppe; er erfüllt das Homomorphiegesetz $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Aber wieviele solcher Homomorphismen gibt es? Können wir in jeder Richtung von G welche finden, d.h. gibt es zu jedem Anfangsvektor $v \in T_e G$ eine Einparameter-Untergruppe ϕ mit $\phi'(0) = v$? Dass dies der Fall ist und diese Einparameter-Untergruppe sogar eindeutig durch v bestimmt wird, wollen wir im Folgenden zeigen. Wir werden ϕ als *Integralkurve* eines Vektorfeldes beschreiben, nämlich des zu $v \in T_e G$ gehörigen *linksinvarianten Vektorfeldes* V .

Ein *Vektorfeld* V auf einer Mannigfaltigkeit G ist bekanntlich eine differenzierbare Zuordnung $G \ni g \mapsto V_g \in T_g G$, wobei "differenzierbar" durch die Beschreibung in Koordinaten erklärt ist. Speziell für eine Liegruppe G definieren wir zu jedem $v \in T_e G$ das Vektorfeld V auf G mit

$$(23) \quad V_g = (DL_g)_e v$$

für alle $g \in G$, wobei $L_g : G \rightarrow G$ die *Linkstranslation* ist, $L_g x = gx$ für alle $x \in G$. (Entsprechend ist die *Rechtstranslation* $R_g x = xg$ definiert.)

Lemma 10.1. *Das durch (23) definierte Vektorfeld V ist linksinvariant, d.h. invariant unter alle Linkstranslationen auf G : Für alle $g, h \in G$ gilt*

$$(24) \quad (DL_h)_g V_g = V_{hg}.$$

Umgekehrt ist jedes linksinvariante Vektorfeld V durch (23) mit $v = V_e$ gegeben.

Beweis. Ist V durch (23) definiert, dann gilt

$$(DL_h)_g V_g = (DL_h)_g (DL_g)_e v = D(L_h L_g)_e v = D(L_{hg})_e v = V_{hg},$$

denn $L_h L_g x = h g x = L_{hg} x$. Umgekehrt ist jedes linksinvariante Vektorfeld V durch (23) mit $v = V_e$ gegeben, denn (23) ist ein Spezialfall von (24). \square

Eine *Integralkurve* eines Vektorfelds V auf einer Mannigfaltigkeit G ist eine Kurve $t \mapsto g(t) : I \rightarrow G$ mit

$$(25) \quad g'(t) = V_{g(t)}.$$

Das Auffinden einer Integralkurve ist - in Koordinaten geschrieben - das Lösen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung; der Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen sagt also, dass es zu jedem $g_o \in G$ genau eine Integralkurve $g(t)$ mit maximalem Definitionsbereich gibt mit Anfangswert $g(0) = g_o$.

Lemma 10.2. *Eine Einparameter-Untergruppe ϕ mit $\phi'(0) = v$ ist die Integralkurve des linksinvarianten Vektorfelds V auf G mit $V_e = v$. Umgekehrt ist für jedes linksinvariante Vektorfeld V auf G die Integralkurve $t \mapsto g(t)$ mit $g(0) = e$ eine Einparameter-Untergruppe.*

Beweis. Ist $\phi(t)$ eine Einparameter-Untergruppe mit $\phi'(0) = v$ und V das zugehörige linksinvariante Vektorfeld, so gilt $\phi(s+t) = \phi(s)\phi(t)$ und damit $\phi'(s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(s+t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(s)\phi(t) = (DL_{\phi(s)})_e \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(t) = (DL_{\phi(s)})_e V_e = V_{\phi(s)}$, also ist ϕ Integralkurve von V .

Ist umgekehrt V ein linksinvariantes Vektorfeld, dann ist auch das Feld aller Integralkurven von V invariant unter allen Linkstranslationen, d.h. für jede Integralkurve $g(t)$ und jedes $h \in G$ ist $hg(t)$ wieder eine Integralkurve¹⁹ und ihr Anfangswert ist natürlich $hg(0)$. Speziell für die Integralkurve $g(t)$ mit Anfangswert $g(0) = e$ und für $h = g(s)$ ist somit $t \mapsto g(s)g(t)$ wieder eine Integralkurve von V mit Anfangswert $g(s)$. Das Gleiche gilt aber auch für die Kurve $t \mapsto g(s+t)$: Sie ist eine Integralkurve,²⁰ und ihr Anfangswert für $t = 0$ ist offensichtlich $g(s)$. Nach dem Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen sind die beiden Integralkurven identisch,

$$(26) \quad g(s)g(t) = g(s+t),$$

also ist $t \mapsto g(t)$ eine Einparameter-Untergruppe.²¹ \square

¹⁹ $(hg)' = (DL_h)_g g' = (DL_h)_g V_g \stackrel{(24)}{=} V_{hg}$.

²⁰ $\frac{d}{dt} g(s+t) = g'(s+t) = V_{g(s+t)}$.

²¹Die Gleichung (26) gilt zunächst nur für $s, t, s+t$ im Definitionsbereich der maximalen Integralkurve $g(t)$ von V , also sicher für $|s|, |t|, |s+t| < \epsilon$, aber dieses kleine Stückchen Einparameter-Untergruppe wächst sich zu einer vollständigen Einparameter-Untergruppe aus: Wenn $g(t)$ für alle $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ definiert ist, dann kann man $g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ fortsetzen: Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{t}{n} \in (-\epsilon, \epsilon)$, und wir setzen dann $g(t) = g(\frac{t}{n})^n$.

Wir sehen also insbesondere die Flexibilität unseres “Spions”: In jede Richtung $v \in T_e G$ startet eine Einparameter-Untergruppe ϕ_v mit $\phi'_v(0) = v$, und diese ist durch v eindeutig bestimmt. Wenn wir den Vektor v zu sv verlängern oder verkürzen ($s \in \mathbb{R}$), erhalten wir im Wesentlichen dieselbe Einparametergruppe:

$$(27) \quad \phi_{sv}(t) = \phi_v(st)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, denn $t \mapsto \phi_v(st)$ ist wieder eine Einparameter-Untergruppe, da $\phi(s(t+u)) = \phi(st)\phi(su)$, und die Anfangsableitung $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_v(st) = sv$ ist dieselbe wie die der Einparametergruppe ϕ_{sv} , also folgt die Gleichheit (27) aus dem Eindeutigkeitsatz für Integralkurven von V .²²

Wir können alle Einparameter-Untergruppen ϕ_v mit Hilfe einer Abbildung zusammenfassen, der *Exponentialabbildung*:

$$(28) \quad \exp : T_e G \rightarrow G, \quad \exp(v) = \phi_v(1).$$

Wegen (27) gilt

$$(29) \quad \exp(sv) = \phi_{sv}(1) = \phi_v(s);$$

die Exponentialabbildung bildet also die Gerade $\mathbb{R}v \subset T_e G$ auf die gesamte Einparameter-Untergruppe ϕ_v ab. Der Name “Exponentialabbildung” kommt von dem Fall einer Matrixgruppe $G \subset GL(V)$, wo $\phi_v(t) = \exp tv$ für $v \in T_e G \subset \text{End}(V)$ wirklich mit der Exponentialreihe beschrieben wird:

$$(30) \quad e^{tv} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tv)^k}{k!} = I + tv + \frac{t^2}{2!}v^2 + \frac{t^3}{3!}v^3 + \dots,$$

denn nach dem Exponentialgesetz ist $\phi(t) = e^{tv}$ eine Einparameter-Untergruppe mit $\phi'(0) = v$, vgl. Übungen. Diese muss in G liegen, denn in G gibt es eine solche Einparameter-Untergruppe ϕ_v , die natürlich auch Einparameter-Untergruppe in $GL(V)$ ist, und wegen der Eindeutigkeit von ϕ_v in $GL(V)$ ist dies die durch (30) gegebene Einparameter-Untergruppe.

²²Wie lassen sich die anderen Integralkurven eines linksinvarianten Vektorfelds V beschreiben? Wenn ϕ die Integralkurve mit $\phi(0) = e$ und $h \in G$ beliebig ist, dann hatten wir oben (Fußnote 19) gesehen, dass $g(t) = h\phi(t)$ die Integralkurve mit Anfangswert $g(0) = h$ ist. Die Integralkurven sind also Nebenklassen der Einparameter-Untergruppe ϕ oder Bahnen der Wirkung von \mathbb{R} auf G durch Rechts-translation mit ϕ , also der Wirkung $\Phi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G$, $\Phi(t, h) = h\phi(t)$.

11. RICHTUNGSABLEITUNG, LIEPRODUKT UND LIEALGEBRA

Jedes Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M kann auch als linearer Operator auf dem Raum $C^\infty(M)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen aufgefasst werden, nämlich als *Richtungsableitung*: Für jede Funktion f definieren wir eine neue Funktion $Xf \in C^\infty(M)$ (deutlicher bezeichnet mit $\partial_X f$) als Ableitung von f in Richtung X :

$$(31) \quad Xf = \partial_X f = Df.X, \quad (Xf)(p) = Df_p X_p = (f \circ c)'(0),$$

wobei $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ eine Kurve ist mit $c(0) = p$ und $c'(0) = X_p$.

Wenn eine zu M diffeomorphe Mannigfaltigkeit \tilde{M} und ein Diffeomorphismus $\phi : M \rightarrow \tilde{M}$ gegeben sind, dann können wir das Vektorfeld X mit ϕ auf \tilde{M} verpflanzen und erhalten ein Vektorfeld \tilde{X} auf \tilde{M} , gegeben durch $\tilde{X}_{\phi(p)} = D\phi_p X_p$ oder

$$(32) \quad \tilde{X} \circ \phi = D\phi \circ X.$$

Diese Gleichung (32) kann auch für beliebige differenzierbare Abbildungen ϕ zwischen Mannigfaltigkeiten erfüllt sein, nicht nur für Diffeomorphismen; zwei Vektorfelder X, \tilde{X} mit dieser Eigenschaft heißen *ϕ -verwandt*. Die Richtungsableitung ist in folgendem Sinne invariant unter ϕ -Verwandtschaft: Ist $\tilde{f} \in C^\infty(\tilde{M})$, so gilt

$$(33) \quad (\tilde{X}\tilde{f}) \circ \phi = X(\tilde{f} \circ \phi),$$

denn für eine Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ wie oben gilt

$$(\tilde{X}\tilde{f}) \circ \phi = D\tilde{f}_\phi \tilde{X}_\phi \stackrel{(32)}{=} D\tilde{f}_\phi D\phi.X = D(\tilde{f} \circ \phi).X = X(\tilde{f} \circ \phi).$$

Ersetzen wir M durch eine offene Teilmenge $\mathbb{R}_o^n \subset \mathbb{R}^n$ (Karte), dann haben wir zum Beispiel die Richtungsableitungen nach den (konstanten) Basisvektorfeldern e_i ; das sind die *partiellen Ableitungen* $e_i f = \partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Da jedes Vektorfeld auf \mathbb{R}_o^n in dieser Basis dargestellt werden kann, $X = \sum_i \xi_i e_i$ mit $\xi_i \in C^\infty(\mathbb{R}_o^n)$, können wir die Richtungsableitung als Linearkombination von partiellen Ableitungen verstehen:

$$(34) \quad Xf = \sum \xi_i e_i f = \sum \xi_i \partial_i f.$$

Wenn wir ein zweites Vektorfeld $Y = \sum_j \eta_j e_j$ haben, so können wir die beiden Operatoren verketteten:

$$XYf = \sum_{ij} \xi_i \partial_i (\eta_j \partial_j f) = \sum_{ij} (\xi_i (\partial_i \eta_j) \partial_j f + \xi_i \eta_j \partial_i \partial_j f).$$

Das ist ein Differentialoperator zweiter Ordnung, aber wenn wir statt des Produkts XY den Kommutator $[X, Y] = XY - YX$ betrachten, dann fällt der symmetrische Term zweiter Ordnung weg (partielle Ableitungen kommutieren), und wir erhalten

$$[X, Y]f = \sum_{ij} (\xi_i \partial_i \eta_j - \eta_i \partial_i \xi_j) \partial_j f.$$

Damit ist $[X, Y]f$ wieder eine Richtungsableitung, und zwar für das Vektorfeld

$$(35) \quad [X, Y] = \sum_j \left(\sum_i \xi_i \partial_i \eta_j - \eta_i \partial_i \xi_j \right) e_j.$$

Dieses Vektorfeld nennen wir *Lieprodukt* von X und Y . Der Raum der Vektorfelder auf \mathbb{R}_0^n (und ebenso auf M) bekommt damit eine Algebrenstruktur,²³ genauer: die Struktur einer *Liealgebra*. Es gelten die folgenden beiden Regeln:

$$[X, Y] = -[Y, X] \quad (\text{Antikommutativität})$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (\text{Jacobi-Identität})$$

Die Antikommutativität ist klar nach Definition des Kommutators, und die Jacobi-Identität folgt durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]] &= X[Y, Z] - [Y, Z]X = XYZ - XZY - YZX + ZYX, \\ [Y, [Z, X]] &= Y[Z, X] - [Z, X]Y = YZX - YXZ - ZXY + XZY, \\ [Z, [X, Y]] &= Z[X, Y] - [X, Y]Z = ZXY - ZYX - XYZ + YXZ. \end{aligned}$$

Jeder Term auf der rechten Seite erscheint zweimal mit unterschiedlichem Vorzeichen.

Eine *Liealgebra* ist eine Algebra mit Produkt $[\cdot, \cdot]$, das die Antikommutativität und die Jacobi-Identität erfüllt.²⁴ Der Raum der Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit ist also eine Liealgebra, die allerdings sehr groß ist, unendlich-dimensional (ein Vektorfeld kann ja lokal überall abgeändert werden).

Nach (33) überträgt sich ϕ -Verwandtschaft von Vektorfeldern auf das Lieprodukt.

Auf einer *Liegruppe* G haben wir einen Teilraum $L(G)$ des Raums aller Vektorfelder betrachtet, die linksinvarianten Vektorfelder. Da die Abbildung $L(G) \ni V \mapsto v \in T_e G$ ein Vektorraum-Isomorphismus ist (Umkehrung $v \mapsto V$ mit $V_g = (DL_g)_e v$), hat $L(G)$ dieselbe Dimension wie G . Da linksinvariante Vektorfelder L_g -verwandt zu sich selbst sind für alle $g \in G$, gilt dasselbe für die Lieprodukte; diese sind also wieder linksinvariante Vektorfelder. Damit bildet $L(G)$ eine endlich-dimensionale Liealgebra, die *Liealgebra von G* , die wir auch mit \mathfrak{g} bezeichnen.

²³Eine *Algebra* ist ein Vektorraum V mit einer bilinearen Abbildung $\mu : V \times V \rightarrow V$, genannt *Produkt*.

²⁴Eine Liealgebra ist nicht assoziativ; die Jacobi-Identität ist der Ersatz für das Assoziativgesetz.

12. DER SATZ VON FROBENIUS

Eine k -dimensionale *Distribution* oder *Unterraumverteilung* Δ auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Zuordnung

$$M \ni p \mapsto \Delta_p \subset T_p M,$$

wobei Δ_p ein Unterraum von $T_p M$ ist, der von lokal definierten linear unabhängigen (differenzierbaren) Vektorfeldern X_1, \dots, X_k aufgespannt wird, d.h. $\Delta_p = \langle (X_1)_p, \dots, (X_k)_p \rangle$, kurz $\Delta = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$. Eine Distribution Δ heißt *integrabel*, wenn es durch jeden Punkt $x_o \in M$ eine Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ gibt mit $\Delta_x = T_x L$ für alle $x \in L$.

Satz 12.1. *Eine Distribution $\Delta = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ ist integrabel genau dann, wenn auch die Lieprodukte $[X_i, X_j]$ zu Δ gehören, kurz $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$; eine solche Distribution heißt involutiv.*

Beweis. Wenn durch jeden Punkt x eine Integralmannigfaltigkeit L geht, dann sind X_i und X_j längs L tangentielle Vektorfelder auf L . Damit ist auch $[X_i, X_j]$ längs L ein tangentiales Vektorfeld auf L , also insbesondere $[X_i, X_j]_x \in T_x L$, also ist Δ involutiv.

Jetzt sei umgekehrt Δ involutiv vorausgesetzt. Wir zeigen durch Induktion nach k , dass es um jeden Punkt ein lokales Koordinatensystem, einen Diffeomorphismus $u = (u_1, \dots, u_n) : M_o \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $\Delta = \langle \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_k} \rangle$, wobei $\frac{\partial}{\partial u_j}$ u -verwandt zu e_j ist, $Du_x \left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_x = e_j$.²⁵ Für $k=1$ ist $\Delta = \langle X \rangle$. Der Fluss ϕ_t von X ist eine Schar von lokal definierten Diffeomorphismen auf M mit $\frac{d}{dt} \phi_t(x) = X_{\phi_t(x)}$. Durch einen Punkt x_o wählen wir eine zu den Flusslinien transversale Hyperfläche H (zum Beispiel in einer Karte ein Stück Hyperebene senkrecht zur Flusslinie durch x_o) mit Parametrisierung $\psi : \mathbb{R}_o^{n-1} \rightarrow H$, dann definiert die Abbildung $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}_o^{n-1} \rightarrow M$, $(t, u) \mapsto \phi_t(\psi(u))$ eine Parametrisierung von M in einer Umgebung von x_o , und deren Umkehrabbildung (t, u) hat die gewünschte Eigenschaft $X = \frac{d}{dt}$.

Induktionsschluss $k-1 \rightarrow k$: Es sei $\Delta = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$. Wie gerade gezeigt, konstruieren wir mit Hilfe des Flusses ϕ_t von X_1 ein Koordinatensystem $u = (t, u_2, \dots, u_n)$ mit $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$. Die Koordinaten t, u_2, \dots, u_n fassen wir als Funktionen auf M_o auf. Indem wir X_j für

²⁵Die Notation kommt von der zugehörigen Richtungsableitung: Ist $\psi = u^{-1}$ die Umkehrabbildung von u , dann ist $\left(\frac{\partial}{\partial u_j} \right)_x = D\psi_{u(x)} e_j$, und für jede Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die Richtungsableitung

$$\frac{\partial}{\partial u_j} f = Df \cdot \frac{\partial}{\partial u_j} = Df \cdot D\psi \cdot e_j = D(f \circ \psi) \cdot e_j = \frac{\partial}{\partial u_j} (f \circ \psi).$$

$j = 2, \dots, k$ durch $\tilde{X}_j = X_j - (\partial_{X_j} t)X_1$ ersetzen, erhalten wir $\partial_{\tilde{X}_j} t = 0$, denn

$$\partial_{\tilde{X}_j} t = \partial_{X_j - (\partial_{X_j} t)X_1} t = \partial_{X_j} t - (\partial_{X_j} t)\partial_{X_1} t = 0$$

(man beachte $\partial_{X_1} t = \frac{\partial}{\partial t} t = 1$). Insbesondere sind die Vektorfelder $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$ tangential zu der Hyperfläche $H = \{x \in M_o : t(x) = 0\}$ und spannen dort eine involutive Distribution Δ' der Dimension $k - 1$ auf,²⁶ die nach Induktionsvoraussetzung integrierbar ist. Es gibt also ein Koordinatensystem $s = (s_2, \dots, s_n) : H \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ mit $\Delta' = \langle \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_k} \rangle$. Mit Hilfe des Flusses ϕ_t von X_1 erweitern wir dieses zu einem vollen Koordinatensystem auf M_o : Ein Punkt $x \in M_o$ bekommt die Koordinaten (t, s_2, \dots, s_n) genau dann, wenn $x = \phi_t(x_o)$ mit $x_o \in H$ und $s(x_o) = (s_2, \dots, s_n)$. Für dieses Koordinatensystem behaupten wir

$$\Delta = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial s_k} \right\rangle. \quad (*)$$

Weil Δ von $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ sowie $\tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k$ aufgespannt wird, ist zum Beweis von (*) nur zu zeigen, dass $\partial_{\tilde{X}_j} s_p = 0$ für alle $j \in \{2, \dots, k\}$ und $p > k$. Wir setzen dazu $f_{jp} = \partial_{\tilde{X}_j} s_p = \tilde{X}_j s_p$ und leiten für diese Funktion eine Differentialgleichung her:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{jp} = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{X}_j s_p \stackrel{(1)}{=} \left[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}_j \right] s_p \stackrel{(2)}{=} \sum_k h_{jk} \tilde{X}_k s_p = \sum_k h_{jk} f_{kp},$$

wobei wir in (1) benutzt haben, dass $\frac{\partial}{\partial t} s_p = 0$, weil (t, s_1, \dots, s_n) ein Koordinatensystem ist, und in (2), dass $[\frac{\partial}{\partial t}, \tilde{X}_j] = [X_1, \tilde{X}_j] \in \langle \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_k \rangle$, weil $[X_1, \tilde{X}_j]t = 0$, da $\tilde{X}_j t = 0$ und $\tilde{X}_j X_1 t = 0$, weil $X_1 t = 1$.

Auf der Hyperfläche $H = \{t = 0\}$ ist die Distribution Δ' integrierbar, und $\{(s_2, \dots, s_k) = \text{const}\}$ sind die Integralmannigfaltigkeiten, deshalb gilt $X_j s_p = 0$ auf H , also $f_{jp}|_{t=0} = 0$. Da die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} f_{jp} = \sum_k h_{jk} f_{kp}$ längs der Integralkurven von X_1 eine eindeutige Lösung zu vorgegebenem Anfangswert besitzt, gilt $f_{jp} = 0$ überall. \square

Wir wenden diesen Satz nun auf eine Liegruppe G an. Eine *Untergruppe* H von G ist eine Liegruppe H mit einem injektiven differenzierbaren Gruppensomorphismus $\iota : H \rightarrow G$.

Satz 12.2. *Ein Unterraum $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g} = T_e G$ ist Tangentialraum einer Untergruppe H von G genau dann, wenn $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.*

²⁶Aus $\tilde{X}_j t = 0$ folgt auch $[\tilde{X}_j, \tilde{X}_k]t = 0$, also ist auch $[\tilde{X}_j, \tilde{X}_k]$ tangential zu H und damit in Δ' .

Beweis. Wir fassen \mathfrak{h} als Teilraum des Raums $\mathfrak{g} = L(G)$ der linksinvarianten Vektorfelder auf G und damit als Distribution Δ auf G auf: $\Delta_g = \{(DL_g)_e X : X \in \mathfrak{h}\}$. Wenn $\mathfrak{h} = T_e H$ für eine Untergruppe H , dann ist die Nebenklasse $gH \subset G$ eine Integralmannigfaltigkeit von Δ durch g , denn für jedes $gh \in gH$ ist $T_{gh}gH = T_{gh}L_gH = T_{gh}L_gL_hH = T_{gh}L_{gh}H = (DL_{gh})_e T_e H = (DL_{gh})_e \mathfrak{h} = \Delta_{gh}$. Also ist Δ integrabel und damit involutiv, d.h. $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Umgekehrt sei Δ involutiv, also integrabel, und H die maximale Integralmannigfaltigkeit durch das Neutralelement e . Dann ist $L_g H$ die Integralmannigfaltigkeit durch g , für jedes $g \in G$. Insbesondere ist $h^{-1}H$ für jedes $h \in H$ eine Integralmannigfaltigkeit, die durch $h^{-1}h = e$ geht, also $h^{-1}H = H$, und damit ist H eine Untergruppe. \square

Ein ganz ähnlicher Satz gilt für Gruppenhomomorphismen: Wenn $\phi : G \rightarrow G'$ ein (differenzierbarer) Gruppenhomomorphismus ist, dann ist $\phi_* := D\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Homomorphismus von Liealgebren. Das folgt aus dem vorigen Satz, denn eine differenzierbare Abbildung $\phi : G \rightarrow G'$ ist Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn $\text{Graph}(\phi) = \{(g, \phi(g)) : g \in G\} \subset G \times G'$ eine Untergruppe von $G \times G'$ ist.²⁷ Das Entsprechende gilt für lineare Abbildungen $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$: Sie sind Liealgebren-Homomorphismen genau dann, wenn

$$\text{Graph}(\phi_*) = \{(X, \phi_*(X)) : X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$$

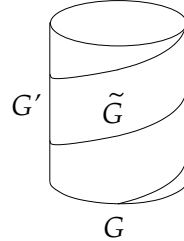
eine Unter-Liealgebra von $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ ist. Wenn also $\phi : G \rightarrow G'$ ein Homomorphismus ist, dann ist $\text{Graph}(\phi)$ eine Untergruppe von $G \times G'$ mit Liealgebra $T_{(e,e')} \text{Graph}(\phi) = \text{Graph}(D\phi_e)$, also ist $\phi_* = D\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ Homomorphismus von Liealgebren.

Umgekehrt gibt es aber ein Problem, selbst dann, wenn G zusammenhängend ist. Wenn wir mit einem Homomorphismus von Liealgebren $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ starten, dann ist $\text{Graph}(\phi_*) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ eine Unter-Liealgebra, zu der nach unserem Satz eine (zusammenhängende) Untergruppe $\tilde{G} \subset G \times G'$ mit Liealgebra $\tilde{\mathfrak{g}} = \text{Graph}(\phi_*)$ gehört. Allerdings ist nicht klar, dass \tilde{G} auch wieder ein Graph ist, d.h. ob die erste Projektion $\pi_1 : G \times G' \rightarrow G$, eingeschränkt auf die Untergruppe $\tilde{G} \subset G \times G'$, bijektiv ist. Zwar ist $\pi := \pi_1|_{\tilde{G}} : \tilde{G} \rightarrow G$ ein Homomorphismus, und π_* ist bijektiv (die Projektion von $\text{Graph}(\phi_*) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'$ auf \mathfrak{g}); eine solche Abbildung nennt man *Überlagerung*.²⁸ Ein solcher Homomorphismus π

²⁷ $(e, \phi(e)) = (e, e') \iff \phi(e) = e'$, und $(g, \phi(g))(h, \phi(h)) = (gh, \phi(g)\phi(h)) = (gh, \phi(gh)) \iff \phi(g)\phi(h) = \phi(gh)$.

²⁸Eine stetige Abbildung $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ zwischen topologischen Räumen heißt *Überlagerung*, wenn π surjektiv ist und es um jedes $g \in G$ eine Umgebung U_g gibt mit $\pi^{-1}(U_g)$ homöomorph zu $U_g \times D$ für eine diskrete Menge D . In unserem Fall

ist surjektiv, aber nicht notwendig injektiv, wie das Beispiel $G = \mathbb{S}^1$ mit $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$ und $G' = \mathbb{R}$ mit $\mathfrak{g}' = \mathbb{R}$ zeigt (siehe Figur); dabei ist $\phi_*(it) = mt$ mit $m > 0$ eine beliebige lineare Abbildung von $i\mathbb{R}$ nach \mathbb{R} , weil alle Lieklammern verschwinden.



In einem solchen Fall ist $\tilde{G} \subset G \times G'$ kein Graph und definiert daher keinen Homomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$. Aber wenn G *einfach zusammenhängend* ist, d.h. wenn jeder geschlossene Weg durch eine Homotopie auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, dann ist jede Überlagerung $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ ein Diffeomorphismus.²⁹ Somit haben wir den folgenden Satz:

Satz 12.3. *Gegeben seien zwei Liegruppen G, G' mit Liealgebren $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$.*
 (a) *Wenn $\phi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus ist, dann ist $\phi_* = D\phi_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Liealgebren-Homomorphismus.*
 (b) *Wenn $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ ein Liealgebren-Homomorphismus und G einfach zusammenhängend ist, dann gibt es einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$ mit $\phi_* = D\phi_e$.*

Es bleibt die Frage, ob die Voraussetzung “einfach zusammenhängend” für Liegruppen immer erfüllbar ist. Zu jeder Liegruppe G kann man eine einfach zusammenhängende Liegruppe \tilde{G} und einem Homomorphismus $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ finden, der eine Überlagerung ist; insbesondere ist $\pi_* : \tilde{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ ein Isomorphismus von Liealgebren.³⁰ Man kann sogar

ist π ein Gruppenhomomorphismus und π_* ist bijektiv. Dann ist $\pi(\tilde{G}) \subset G$ eine Untergruppe gleicher Dimension und somit ganz G , weil G zusammenhängend ist und daher von einer Eins-Umgebung erzeugt wird. Damit ist π surjektiv. Der Kern $K = \{\tilde{g} : \pi(\tilde{g}) = e\}$ von π ist diskret. Deshalb gibt es eine offene Umgebung \tilde{U} von \tilde{e} in \tilde{G} mit $k\tilde{U} \cap \tilde{U} = \emptyset$ für alle $k \in K$. Setzen wir $U = \pi(\tilde{U})$, so ist $U_g := gU$ eine Umgebung von $g \in G$ mit den verlangten Eigenschaften.

²⁹Wenn π zu einem Punkt $g \in G$ mindestens zwei Urbilder besitzt, kann man diese durch einen Weg in \tilde{G} verbinden, dessen Bild unter π in G dann nicht zusammenziehbar sein kann.

³⁰Die Gruppe \tilde{G} kann folgendermaßen konstruiert werden: Die Elemente von \tilde{G} sind Paare $(g, [\gamma])$, wobei $g \in G$ und $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ ein Weg von $\gamma(0) = e$ nach $\gamma(1) = g$ ist und $[\gamma]$ die Homotopieklasse von γ mit festen Endpunkten e und g bezeichnet; mit der Gruppenmultiplikation in G können wir solche Paare multiplizieren. Der Homomorphismus $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ ist einfach die Abbildung $(g, [\gamma]) \mapsto g$.

zu jeder abstrakten (endlich-dimensionalen) Liealgebra \mathfrak{g} genau eine einfach zusammenhängende Liegruppe G konstruieren.³¹

Ein Beispiel haben wir schon gesehen: Die Gruppe $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ ist einfach zusammenhängend, und wir haben den Homomorphismus $\text{Ad} : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO_3$ betrachtet mit $\text{Ad}(q)x = qxq^{-1}$; dessen Kern besteht nur aus den Elementen ± 1 von \mathbb{S}^3 . Die Gruppe $SO_3 \cong \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ ist also nicht einfach zusammenhängend und wird von der \mathbb{S}^3 zweifach überlagert. Das kann man auch anschaulich feststellen, indem man ein Glas mit Flüssigkeit in die Hand nimmt und um 360 Grad dreht; danach ist der Arm verdreht: Dieser geschlossene Weg in SO_3 ist nicht zusammenziehbar. Um den Arm wieder frei zu bekommen, muss man entweder zurückdrehen oder nochmals weitere 360 Grad in die gleiche Richtung drehen, denn die 720-Grad-Drehung ist zusammenziehbar.

13. ADJUNGIERTE DARSTELLUNG UND LIEPRODUKT

Weiterhin sei G eine Liegruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} . Jedes $g \in G$ definiert auf G einen *inneren Automorphismus* $i(g) : G \rightarrow G$, $i(g)x = gxg^{-1}$. Die Ableitung von $i(g)$ ist also ein Liealgebren-Automorphismus, genannt $\text{Ad}(g) := i(g)_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Da $i(g)i(h) = i(gh)$ für alle $g, h \in G$, ist die Abbildung $i : G \rightarrow \text{Aut}(G)$ ein Homomorphismus von Liegruppen, und das Entsprechende gilt für die Ableitung: $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ist ein Homomorphismus in eine Matrixgruppe, eine Darstellung, die *Adjungierte Darstellung* von G . Jede Liegruppe kommt sozusagen mit ihrer Adjungierten Darstellung auf die Welt. Sie ist für uns besonders wichtig, da durch sie die Konjugationsklassen beschreibbar sind: $x \sim y \iff y = i(g)x$ für ein $g \in G$; die Konjugationsklassen sind also die Bahnen unter der Wirkung von $i(G) \subset \text{Aut}(G)$ auf G , und $\text{Ad}(g)$ ist der zu $i(g)$ gehörige Liealgebren-Homomorphismus.³²

Was ist die Ableitung von $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$? Sie wird ein Liealgebren-Automorphismus $\text{ad} = \text{Ad}_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ sein, wobei $\mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ die Liealgebra von $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ ist. Das ist der Raum der *Derivationen* der Liealgebra \mathfrak{g} ; Derivationen sind lineare Abbildungen $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ mit $f([X, Y]) = [fX, Y] + [X, fY]$. Wenn nämlich $g(t)$ eine Schar von

³¹Dazu braucht man das nichtkommutative *Exponentialgesetz*, die Campbell-Baker-Hausdorff-Formel, die für die Matrix-Exponentialabbildung folgendermaßen lautet: $e^X e^Y = e^Z$ mit $Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \dots$, genauer ist Z eine Reihe in immer höheren Kommutatorprodukten von X und Y . Mit dieser Formel kann man auf einer Umgebung U der Null in \mathfrak{g} eine Gruppenstruktur definieren und U dann zum Erzeugendensystem einer Liegruppe G machen, wobei keine weiteren Relationen auftreten als die schon in U vorhandenen.

³²Ein Algebren-Homomorphismus ist eine lineare Abbildung, die auch das Produkt erhält.

Automorphismen von \mathfrak{g} ist mit $g(0) = I$ und $g'(0) = f$, dann gilt $g(t)[X, Y] = [g(t)X, g(t)Y]$, und durch Differentiation bei $t = 0$ nach der Produktregel folgt $f[X, Y] = [fX, Y] + [X, fY]$.³³ Aber wir können für jedes $X \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\text{ad}(X)$ sogar berechnen:

Satz 13.1. *Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt:*

$$(36) \quad \text{ad}(X)Y = [X, Y].$$

Beweis. Dazu müssen wir zunächst das Lieprodukt von beliebigen Vektorfeldern auf einer Mannigfaltigkeit oder einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n neu interpretieren. Gegeben seien zwei Vektorfelder X und Y auf \mathbb{R}_o^n mit Flüssen ϕ_t und ψ_s , also $\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X_{\phi_t(x)}$ und $\frac{d}{ds}\psi_s(x) = Y_{\psi_s(x)}$. Dann gilt

$$(37) \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} \phi_{-t}\psi_s\phi_t(x) \right|_{s=0} = (D\phi_{-t})_{\phi_t(x)}Y_{\phi_t(x)}.$$

Wenn wir nun den Ausdruck auf der rechten Seite nach t differenzieren, gibt es eigentlich drei Summanden, entsprechend den drei Vorkommen von t , wobei an einer Stelle nach t abgeleitet, und den anderen zwei Stellen aber $t = 0$ eingesetzt wird. Der mittlere Term ist daher Null, weil $(D\phi_0)_{\phi_t(x)}$ für alle t konstant gleich der Einheitsmatrix I ist. Deshalb erhalten wir

$$(38) \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} (D\phi_{-t})_{\phi_t(x)}Y_{\phi_t(x)} \right|_{t=0} = -DX.Y_x + DY.X_x = [X, Y]_x.$$

Dies können wir auf linksinvariante Vektorfelder X, Y auf einer Liegruppe G anwenden. Deren Flüsse sind $\phi_t(g) = g\gamma_X(t)$ und $\psi_s(g) = g\gamma_Y(s)$, wobei γ_X und γ_Y die zu X und Y gehörigen Einparameter-Untergruppen sind. Daher gilt

$$(39) \quad \phi_{-t}\psi_s\phi_t(e) = \gamma_X(t)\gamma_Y(s)\gamma_X(-t) = i(\gamma_X(t))\gamma_Y(s)$$

³³Wir können \mathfrak{g} durch eine beliebige endlich-dimensionale Algebra A ersetzen. Dann ist $\text{Aut}(A)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(A)$, denn Elemente $g \in \text{Aut}(A)$ werden durch die Gleichungen $g(ab) = g(a)g(b)$ für alle $a, b \in A$ (oder für alle a, b in einer Basis von A) gekennzeichnet. Nach einem hier nicht bewiesenen Satz sind abgeschlossene Untergruppen von Liegruppen stets Unter-Liegruppen, insbesondere Untermannigfaltigkeiten. Die Liealgebra $\mathfrak{aut}(A)$ besteht aus den Anfangsableitungen f von Kurven $g(t)$ in $\text{Aut}(A)$ mit $g(0) = I$, $g'(0) = f$, und aus $g(t)(a \cdot b) = g(t)a \cdot g(t)b$ folgt durch Differentiation bei $t = 0$ die Derivationseigenschaft $f(a \cdot b) = f(a) \cdot b + a \cdot f(b)$. Dass jede Derivation f auch wirklich in $\mathfrak{aut}(A)$ liegt, folgt mit der Matrix-Exponentialabbildung: Es gilt $e^f \in \text{Aut}(A)$, denn $f^2(a \cdot b) = f(fa \cdot b + a \cdot fb) = f^2a \cdot b + 2fa \cdot fb + a \cdot f^2b$ und durch Induktion $f^n(a \cdot b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k a \cdot f^{n-k} b$. Also ist $e^f(a \cdot b) = \sum_n \frac{1}{n!} f^n(a \cdot b) = \sum_n \sum_k \frac{1}{n!} \binom{n}{k} f^k a \cdot f^{n-k} b = \sum_n \sum_k \frac{1}{k!(n-k)!} f^k a \cdot f^{n-k} b = e^f a \cdot e^f b$.

und damit

$$(40) \quad \left. \frac{\partial}{\partial s} \phi_{-t} \psi_s \phi_t(e) \right|_{s=0} = \text{Ad}(\gamma_X(t))Y$$

(mit $Y_e = Y$), und somit

$$[X, Y] = \left. \frac{\partial}{\partial t} (D\phi_{-t})_{\phi_t(e)} Y_{\phi_t(e)} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \text{Ad}(\gamma_X(t))Y \right|_{t=0} = \text{ad}(X)Y.$$

Damit ist Satz 13.1 bewiesen. \square

14. MAXIMALE TORI IN KOMPAKTEN LIEGRUPPEN

Die einfachsten Liegruppen G sind die abelschen. Für sie ist die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathfrak{g}, +)$ nach (G, \cdot) , denn $\gamma(t) = \exp t(X + Y)$ und $\tilde{\gamma}(t) = \exp(tX) \exp(tY)$ sind beides Einparameter-Untergruppen mit gleicher Anfangsableitung $X + Y$, also sind sie gleich. In der Tat gilt wegen der Kommutativität

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(s)\tilde{\gamma}(t) &= \exp(sX) \exp(sY) \exp(tX) \exp(tY) \\ &= \exp((s+t)X) \exp((s+t)Y) \\ &= \tilde{\gamma}(s+t) \end{aligned}$$

und $\tilde{\gamma}'(0) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX) \exp(tY) \right|_{t=0} = X + Y$. Weil $D \exp_0 = I$ (da $D \exp_0 X = \left. \frac{d}{dt} \exp(tX) \right|_{t=0} = X$), ist der Kern L dieses Homomorphismus eine diskrete Untergruppe von $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^d$. Wenn G zusammenhängend ist, dann ist $G = \mathbb{R}^d/L$, und wenn G noch dazu kompakt ist, ist L ein *Gitter*, d.h. ist isomorph zu $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$, genauer $L = \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_d$ für eine Basis b_1, \dots, b_d von \mathbb{R}^d . Da $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d = (\mathbb{S}^1)^d$, heißt eine solche Gruppe ein d -dimensionaler *Torus*.³⁴

In einer nicht mehr notwendig kommutativen kompakten Liegruppe G suchen wir die maximalen zusammenhängenden abelschen Untergruppen. Sie sind abgeschlossen, sonst wären sie nicht maximal (ihr Abschluss wäre ja noch größer), also sind sie selbst kompakt und damit *Tori*, genannt *maximale Tori*.

Für die unitäre Gruppe $G = U_n$ zum Beispiel bilden die unitären Diagonalmatrizen einen Torus $(\mathbb{S}^1)^n$, denn die n Einträge auf der Diagonalen liegen wegen Unitarität alle in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Dies ist ein maximaler Torus, denn keine nicht-diagonale Matrix in U_n vertauscht mit sämtlichen Diagonalmatrizen. In der linearen Algebra lernt man, dass

³⁴Ursprünglich ist ein Torus eine Ringfläche, ein geschlossener Schlauch: Der gerade Schlauch ist topologisch ein Zylinder $\mathbb{S}^1 \times [a, b]$, und zu einem Ring geschlossen wird er homöomorph zu $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1)^2$.

jede unitäre Matrix unitär konjugiert zu einer Diagonalmatrix ist.³⁵ Der maximale Torus der Diagonalmatrizen trifft also sämtliche Konjugationsklassen, was in unserem Zusammenhang besonders wichtig ist, denn die Charaktere der Darstellungen von U_n sind Klassenfunktionen; es wird also genügen, sie auf den Diagonalmatrizen zu kennen.

Jede kompakte Liegruppe besitzt zusammenhängende abelsche Untergruppen (zum Beispiel Einparameter-Untergruppen) und damit auch maximale Tori. Wir wollen zeigen, dass die Eigenschaft, die wir für U_n gesehen haben, für *jede* kompakte Liegruppe G zutrifft: Ein maximaler Torus T in G trifft sämtliche Konjugationsklassen, und alle maximalen Tori sind zueinander konjugiert. Dies ist ein Satz von Élie Cartan.

Dazu schränken wir die Adjungierte Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g} \subset GL(\mathfrak{g})$ auf $T \subset G$ ein. Wir wissen, dass sich jede Darstellung einer kompakten Liegruppe in irreduzible Teildarstellungen zerlegen lässt, und dass die komplexen irreduziblen Darstellungen einer abelschen Gruppe eindimensional sind. Die Komplexifizierung $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ von \mathfrak{g} zerfällt also unter der Wirkung von $\text{Ad}(T)$ in den Fixraum F und eindimensionale Teildarstellungen, die wir uns einzeln ansehen wollen.

Der Fixraum F von $\text{Ad}(T)$ enthält die Liealgebra \mathfrak{t} von T , weil T abelsch ist und die Konjugationen $i(t)$ daher trivial sind. Der Fixraum kann aber auch nicht größer sein als \mathfrak{t} , denn für $X \in F$ und $g \in T$ ist $i(g)\gamma_X(t)$ die Einparametergruppe mit Anfangsableitung $i(g)_*X = \text{Ad}(g)X = X$,³⁶ also ist $g\gamma_X(t)g^{-1} = \gamma_X(t)$ für alle $g \in T$. Da T maximal abelsch ist, muss $\gamma_X(t) \in T$ liegen für alle $t \in \mathbb{R}$ und damit $X \in \mathfrak{t}$. Also haben wir $F = \mathfrak{t}$ bewiesen.

³⁵Das stimmt sogar für eine etwas größere Klasse von Matrizen, den *normalen Matrizen*, d.h. Matrizen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, für die $A^*A = AA^*$ gilt. Eine Matrix B , die mit A vertauscht, lässt die Eigenräume von A invariant ($v \in E_\lambda \Rightarrow ABv = BAv = \lambda Bv \Rightarrow Bv \in E_\lambda$). Für eine normale Matrix A lässt also A^* die Eigenräume von A invariant, und damit ist $(E_\lambda)^\perp$ invariant unter A ($v \in E_\lambda, w \in (E_\lambda)^\perp \Rightarrow (Aw, v) = (w, A^*v) = 0$, da $A^*v \in E_\lambda$, also $Aw \in (E_\lambda)^\perp$). Wir können also $(E_\lambda)^\perp$ als eigenen Vektorraum ansehen, auf dem A operiert; von diesem können wir einen weiteren Eigenraum abspalten, usw. Durch Induktion über die Dimension folgt, dass \mathbb{C}^n orthogonale direkte Summe der Eigenräume von A ist. Mit anderen Worten, es gibt eine unitäre Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ aus Eigenvektoren: $Ab_i = \lambda_i b_i$ oder $AB = BD$ mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Somit gilt $A = B^{-1}DB$ mit $B \in U_n$.

³⁶Allgemein überführt ein Liegruppen-Homomorphismus $\phi : G \rightarrow G'$ die Einparameter-Untergruppe γ_X wieder in eine Einparameter-Untergruppe mit Anfangsvektor $(\phi \circ \gamma)'(0) = \phi_*X$, also in γ_{ϕ_*X} . Mit der Exponentialabbildung ausgedrückt:

$$(41) \quad \phi(\exp(X)) = \exp(\phi_*X).$$

Jede eindimensionale Darstellung von T ist durch einen Homomorphismus $\alpha : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ gegeben, und der zugehörige Darstellungsmodul wird durch einen Vektor $X_\alpha \in \mathfrak{g}^c$ aufgespannt, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}X_\alpha$, wobei für alle $u \in T$

$$(42) \quad \text{Ad}(u)X_\alpha = \alpha(u)X_\alpha.$$

Da \mathfrak{g}^c endlich-dimensional ist, bilden die vorkommenden Homomorphismen α , die sogenannten *Wurzeln* (engl. *roots*), eine endliche Teilmenge $\Delta \subset \text{Hom}(T, \mathbb{S}^1)$, und wir haben die Zerlegung

$$(43) \quad \mathfrak{g}^c = \mathfrak{t}^c \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Wir wählen nun auf \mathfrak{g} ein $\text{Ad}(G)$ -invariantes Skalarprodukt; wir wissen ja, dass jede Darstellung einer kompakten Gruppe ein Skalarprodukt invariant lässt, das wir aus einem beliebigen Skalarprodukt durch Mitteln über die Gruppe gewinnen. Insbesondere lässt $\text{Ad}(v)$ für jedes $v \in T$ diese Zerlegung invariant, die aus Eigenräumen von $\text{Ad}(u)$ besteht, vgl. (42), also ist die Zerlegung (43) orthogonal, wobei wir das Skalarprodukt auf \mathfrak{g} zu einem hermiteschen Skalarprodukt auf \mathfrak{g}^c fortsetzen. Außerdem haben die Eigenwerte von orthogonalen Matrizen Betrag 1, deshalb hat jedes α Werte in $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Die endlich vielen eindimensionalen Darstellungen $\alpha : T \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\alpha \in \Delta$, haben jede einen $(r - 1)$ -dimensionalen Kern $\ker \alpha = \alpha^{-1}(1)$, $r = \dim T$. Wir wählen $u \in T$ außerhalb dieser Kerne, $u \in T \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha$; solche $u \in T$ nennen wir *regulär*. Für ein solches Element betrachten wir die Bahn $B = i(G)u \subset G$. Allgemein gilt für eine Wirkung einer Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M : Jede Bahn Gu , $u \in M$ ist eine Untermannigfaltigkeit von M , eine Einbettung des Nebenklassenraums $G/H = \{gH : g \in G\}$, wobei $H = G_u = \{g \in G : gu = u\}$ die *Standgruppe* von G ist.³⁷

Das ist eine ganz allgemeine Tatsache: Wie immer die Wirkung aussieht, die Bahn $B = Gu$ ist immer diffeomorph zum Nebenklassenraum G/H mit $H = G_u$, und der Diffeomorphismus $\bar{\psi} : G/H \rightarrow Gu$ ist induziert von der Abbildung $\psi : G \rightarrow M$, $g \mapsto gu$. Da diese äquivariant ist, $\psi(g'g) = g'\psi(g)$, ist $\bar{\psi}$ sogar ein äquivarianter Diffeomorphismus, d.h. wie immer die Wirkung von G auf M definiert war, auf dem Nebenklassenraum G/H wird sie zur Linkstranslation.

³⁷Der Nebenklassen-Raum $G/H = \{gH : g \in G\}$ ist eine Mannigfaltigkeit mit $\dim G/H = \dim G - \dim H$, und die Abbildung $\psi : G \rightarrow M$, $g \mapsto gx$, definiert eine Abbildung $\bar{\psi} : G/H \rightarrow M$, $gH \mapsto gx$, die eine injektive Immersion ist, d.h. auch die Ableitung $D\bar{\psi}_{gH} : T_{gH}(G/H) \rightarrow T_{gx}M$ ist injektiv.

Als Konsequenz davon können wir insbesondere die *Isotropiedarstellung* von H auf $T_{eH}(G/H)$ berechnen. Wir erinnern zunächst an die Definition: Weil jedes $h \in H$ den Punkt $u = \bar{\psi}(eH)$ fest lässt, bildet Dh_u den Tangentialraum $T_uB = T_{eH}(G/H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ auf sich ab; der Homomorphismus $h \mapsto Dh_u : G \rightarrow GL(T_uB)$ heißt Isotropiedarstellung. Wie immer die Wirkung von G definiert war – wir können diese Darstellung stets mit Hilfe der Adjungierten Darstellung von G berechnen:

Lemma 14.1. *Die Isotropiedarstellung von H auf $T_{eH}(G/H) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ wird von der Einschränkung der Adjungierten Darstellung $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ auf H induziert. Für jedes $\text{Ad}(H)$ -invariante Komplement $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ zu \mathfrak{h} in \mathfrak{g} ist die Isotropiedarstellung die Einschränkung von $\text{Ad}(H)$ auf \mathfrak{m} .*

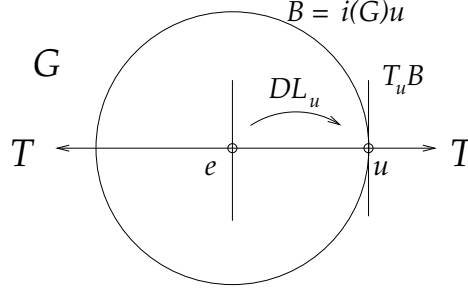
Beweis. Die Gruppe G operiert auf G/H durch Linkstranslation: $g'(gH) = g'gH$. Das gilt insbesondere für die Untergruppe H , aber weil $hgH = hgh^{-1}H$ für jedes $h \in H$, kommt die Wirkung von H von der Konjugationswirkung von H auf G her; diese wird durch die kanonische Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$, $g \mapsto gH$ auf die Wirkung von H auf G/H abgebildet. Entsprechend kommen die Ableitungen der Wirkungen von $h \in H$ im Punkt eH von der Ableitung der Konjugationswirkung in e her, also von der Adjungierten Darstellung. \square

In unserem Spezialfall der Wirkung durch Konjugation ist $H = G_u$ der *Centralisator* von u , also $H = \{g \in G : gu = ug\}$. Insbesondere ist $T \subset H$. Wenn u regulär ist, also $\alpha(u) \neq 1$ für alle $\alpha \in \Delta$, dann haben T und H dieselbe Liealgebra, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$. Wenn nämlich eine Einparameter-Untergruppe $\gamma = \gamma_X$ ganz zu H gehört, dann ist $u\gamma(t) = \gamma(t)u$, also $\text{Ad}(u)X = \left. \frac{d}{dt} i(u)\gamma_X(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_X(t) \right|_{t=0} = X$. Das wäre nach (42) nicht möglich, wenn X einen Anteil in einem der \mathfrak{g}_α hätte, weil $\alpha(u) \neq 1$, also ist $X \in \mathfrak{t}$.

Lemma 14.2. *Die Bahn $B = i(G)u \subset G$ für reguläres $u \in T$ schneidet T orthogonal und transversal, d.h. T_uB ist das orthogonale Komplement zu T_uT in T_uG , wobei das $\text{Ad}(G)$ -invariante Skalarprodukt auf $\mathfrak{g} = T_eG$ durch DL_u nach T_uG verpflanzt wurde.*

Beweis. Weil T abelsch ist, vertauscht die Linkstranslation L_u mit der Wirkung von T durch Konjugation. Da $i(T)$ jedes $u \in T$ fest lässt (d.h. T liegt in der Standgruppe von u unter der Wirkung von $i(G)$), ist $Di(v)_u$ eine lineare Abbildung auf T_uG für jedes $v \in T$, und $(DL_u)_e$ überführt $Di(v)_e$ auf T_eG auf $Di(v)_u$ auf T_uG . Auf T_eG haben wir die Zerlegung (43), die durch $(DL_u)_e$ auf eine entsprechende Zerlegung von

$T_u G$ übertragen wird, wobei der Fixraum $\mathfrak{t} = T_e T$ auf $T_u T$ abgebildet wird.



Nach Lemma 14.1 ist die Isotropiedarstellung von $i(T)$ im Punkt u äquivalent zur Adjungierten Darstellung auf \mathfrak{t}^\perp . Bei Anwenden der äquivarianten linearen Abbildung $(DL_u)_e$ geht \mathfrak{t}^\perp über auf das orthogonale Komplement von $T_u T$ in $T_u G$; dieses muss also der Tangentialraum des Orbits $B = i(G)u$ sein. Somit schneiden sich B und T senkrecht. \square

Satz 14.1. *Jeder maximale Torus T in einer kompakten Liegruppe G schneidet jede Konjugationsklasse in G , und je zwei maximale Tori in G sind zueinander konjugiert.*

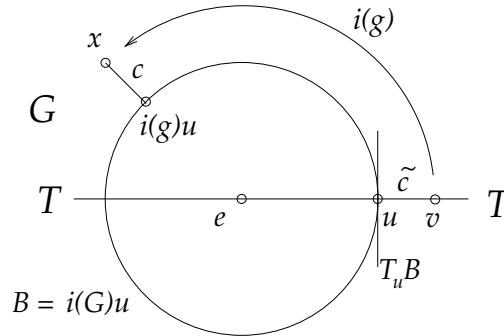
Beweis. Indem wir unser $\text{Ad}(G)$ -invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g} = T_e G$ in jeden Tangentialraum $T_g G$ mit Hilfe der Linkstranslation $DL_g : T_e G \rightarrow T_g G$ verschieben, definieren wir eine *Riemannsche Metrik* auf G , d.h. ein Skalarprodukt in jedem Tangentialraum, differenzierbar vom Punkt abhängig:

$$(44) \quad \langle (DL_g)_e X, (DL_g)_e Y \rangle := \langle X, Y \rangle$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Die Linkstranslationen sind *Isometrien* dieser Riemannschen Metrik, d.h. für jedes $x \in G$ ist $(DL_g)_x : T_x G \rightarrow T_{gx} G$ orthogonal bezüglich der gewählten Skalarprodukte auf $T_x G$ und $T_{gx} G$: Es genügt, die Erhaltung der Norm nachzuprüfen: Für $X \in \mathfrak{g}$ ist $(DL_x)_e X \in T_x G$ und $|(DL_x)_e X| = |X|$, und ebenso $|(DL_g)_x (DL_x)_e X| = |(DL_{gx})_e X| = |X|$. Außerdem sind die Konjugationen $i(g)$ Isometrien: Aus $ghxg^{-1} = \tilde{h}gxg^{-1}$ mit $\tilde{h} = ghg^{-1}$ folgt $i(g)L_h = L_{\tilde{h}}i(g)$ und somit $Di(g)_h(DL_h)_e = (DL_{\tilde{h}})_e Di(g)_e$, und da $(DL_h)_e$ und $(DL_{\tilde{h}})_e$ und auch $Di(g)_e = \text{Ad}(g)$ orthogonal sind, folgt die Orthogonalität auch für $Di(g)_h$. Eine solche Metrik, für die L_g und $i(g)$ eine Isometrie ist für alle $g \in G$ (und damit auch die Rechtstranslation $R_g = i(g^{-1}) \circ L_g$), nennt man *biiinvariant*.

Mit einer Riemannschen Metrik können wir auf G Geometrie treiben. Insbesondere ist die *Länge* einer Kurve $c : I \rightarrow G$ auf die übliche Weise

definiert: $L(c) = \int_I |c'(t)| dt$. Als *Abstand* von zwei Punkten $x, y \in G$ werden wir die Länge der kürzesten Kurve von x nach y definieren; wir schreiben dafür $|x, y|$. Eine Kurve c heißt *Geodäte*, wenn sie lokal kürzeste Kurve ist, d.h. für $s, t \in I$ mit $|t - s|$ genügend klein gibt es keine kürzere Kurve von $c(s)$ nach $c(t)$ als $c|_{[s,t]}$, also $|c(s), c(t)| = L(c|_{[s,t]})$.



Nun sei ein beliebiger Punkt $x \in G$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass es ein zu x konjugiertes Element in T gibt. Wir wählen ein reguläres Element $u \in T$ und betrachten die Bahn $B = i(G)u$ von u . Weil G kompakt ist, ist auch B kompakt. Deshalb gibt es einen Punkt $i(g)u \in B$, der von x minimalen Abstand hat; die stetige Funktion $|x, \cdot|$ nimmt auf der kompakten Menge B ein Minimum an. Daher gibt es eine kürzeste Kurve $c : [0, 1] \rightarrow G$ von x nach $i(g)u$, sagen wir $c(0) = i(g)u$ und $c(1) = x$.³⁸ Dies muss eine Geodäte sein, und sie muss auf B senkrecht stehen, denn sonst könnten wir noch kürzere Kurven von x nach B finden. Die Isometrie $i(g^{-1})$ bildet c ab auf eine Geodäte $\tilde{c} = i(g^{-1}) \circ c$ mit $\tilde{c}(0) = u \in T$, die immer noch senkrecht auf B steht, $\tilde{c}'(0) \in (T_u B)^\perp = T_u T$. Nach dem folgenden Lemma liegt \tilde{c} ganz in T . Somit ist x unter $i(g^{-1})$ konjugiert zu $v = \tilde{c}(1) \in T$, und T schneidet deshalb jeden Orbit.

Um noch die Konjugiertheit zu sehen, betrachten wir einen zweiten maximalen Torus T' . Dieser schneidet auch den eben betrachteten Orbit $B = i(G)u$ (jeder Torus schneidet jeden Orbit), etwa in einem Punkt $u' = i(g)u$, und der Schnitt ist senkrecht.³⁹

Es gibt aber bereits einen maximalen Torus durch u' , nämlich $T'' = i(g)T$, und auch T'' schneidet B senkrecht, genauer ist $T_{u'} T'' = T_{u'} B^\perp$,

³⁸Die Existenz von kürzesten Kurven zwischen zwei Punkten einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit folgt aus dem Satz von Arzelá und Ascoli über gleichgradig stetige Funktionen.

³⁹Wie wir sahen, ist der Schnitt mit regulären Bahnen senkrecht, aber diese liegen dicht, also wird jede Bahn senkrecht geschnitten.

deshalb ist $T_u T' \subset T_u T''$. Da beide totalgeodätisch sind, ist $T' \subset T''$, und weil T' maximaler Torus ist, folgt $T' = T''$. \square

Lemma 14.3. *Es sei G kompakte Liegruppe mit biinvarianter Metrik und $T \subset G$ maximaler Torus. Dann ist T totalgeodätisch, d.h. jede Geodäte $c : [0, 1] \rightarrow G$ mit $c(0) \in T$ und $c'(0) \in T_{c(0)}T$ liegt ganz in T .⁴⁰*

Beweis. Wenn $c(t) \notin T$ für ein $t \in (0, 1]$, dann gibt es $u \in T$ mit $i(u)c(t) \neq c(t)$, denn T ist maximal abelsch. Aber $\tilde{c} = i(u) \circ c$ ist eine Geodäte mit denselben Anfangsbedingungen $\tilde{c}(0) = c(0)$ und $\tilde{c}'(0) = c'(0)$. Da Geodäten durch Anfangspunkt und Anfangsvektor eindeutig bestimmt sind (sie lösen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung), gilt $\tilde{c} = c$, Widerspruch! \square

15. DIE WEYLGRUPPE

Wir haben gesehen, dass die Konjugationsklassen in G den maximalen Torus T senkrecht treffen. Um über G zu integrieren (was wir tun müssen, um das Irreduzibilitätskriterium $\frac{1}{\text{vol}G} \int_G |\chi_\rho|^2 = 1$ für eine Darstellung ρ zu überprüfen), werden wir nach Fubini über T und dann über die Konjugationsklassen in T integrieren; Zum Beispiel sollte demnach $\text{vol}G = \int_{u \in T} \text{vol}i(G)u \, du$ gelten. Aber das stimmt nicht ganz, weil jede Konjugationsklasse den Torus T nicht nur einmal, sondern mehrmals schneidet; wir haben sie also mehrfach gezählt, wenn wir über T integrieren. Das haben wir schon in $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ gesehen: Der maximale Torus ist der Großkreis $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, und die Konjugationsklasse von $\cos \theta + i \sin \theta \in \mathbb{S}^1$, die Kleinsphäre $\mathbb{S}_\theta^2 = \{\cos \theta + v \sin \theta : v \in \mathbb{S}^2\}$, schneidet den Großkreis \mathbb{S}^1 zweimal. Um das Volumen richtig zu berechnen, müssen wir durch die Anzahl der Schnittpunkte pro Konjugationsklasse teilen, wie wir es im Abschnitt 8 auch getan haben. Diese Anzahl müssen wir also ermitteln. Dazu betrachten wir eine Konjugationsklasse $i(G)u$ für ein reguläres $u \in T$ und ein $v \in T \cap i(G)u$, also $i(g)u = v$. Dann gilt auch $i(g)T = T$, denn sonst läge u in zwei verschiedenen Tori T und $i(g)T$, was nicht möglich ist:

Lemma 15.1. *Ist $T \subset G$ maximaler Torus und $u \in T$ regulär, so liegt u nur in einem einzigen maximalen Torus.*

⁴⁰In Wahrheit gilt viel mehr: Jede Geodäte ist Nebenklasse einer Einparameter-Untergruppe. Insbesondere ist jede Untergruppe totalgeodätisch.

Beweis. Es sei T' ein weiterer maximaler Torus durch u und $X \in \mathfrak{t}' = T_e T'$. Dann ist $\text{Ad}(u)X = X$. Mit der Aufspaltung (43) sehen wir $X = X_o + \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha X_\alpha$ für gewisse $c_\alpha \in \mathbb{C}$ und $X_o \in \mathfrak{t}$; demnach ist

$$0 = \text{Ad}(u)X - X = \sum_{\alpha} c_\alpha (\alpha(u) - 1) X_\alpha.$$

Da die X_α linear unabhängig sind und $\alpha(u) \neq 1$ für alle $\alpha \in \Delta$ wegen der Regularität von u , müssen alle c_α verschwinden, also $X = X_o \in \mathfrak{t}$. Somit ist $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{t}$ und wegen der Maximalität des Torus T' ist $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t}$ und damit $T' = T$, denn beide Tori sind totalgeodätisch. \square

Wir halten also fest: Wenn $i(g)u \in T$ für ein $g \in G$, dann gilt sogar $i(g)T = T$, d.h. g liegt im *Normalisator* N_T des maximalen Torus T ,

$$(45) \quad N_T := \{g \in G : i(g)T = T\}.$$

Die Menge der Schnittpunkte $i(G)u \cap T$ besteht also aus der Bahn $i(N_T)u$. Die Wirkung von N_T auf T durch Konjugation ist aber nicht "effektiv", d.h. die Wirkung als Gruppenhomomorphismus aufgefasst hat einen nichttrivialen Kern, nämlich den *Centralisator* von T ,

$$(46) \quad C_T := \{g \in G : i(g)v = v \forall v \in T\}.$$

Dies ist ein Normalteiler von N_T , und die Quotientengruppe $W = N_T/C_T$, die effektiv operiert, heißt die *Weylgruppe*⁴¹ der kompakten Liegruppe G . Weil T abelsch ist, folgt $T \subset C_T$, und weil T maximaler Torus, muss T die Zusammenhangskomponente der Eins von C_T sein: Gäbe es eine Einparameter-Untergruppe in C_T , die nicht schon in T läge, so könnten wir T damit zu einer größeren zusammenhängenden abelschen Untergruppe erweitern, was ja nicht möglich ist. Es gilt aber noch mehr: C_T ist zusammenhängend und damit ist $C_T = T$. Das folgt aus dem folgenden allgemeineren Satz für beliebige (nicht notwendig maximale) Tori:

Satz 15.1. *Ist $S \subset G$ ein Torus, so ist der Centralisator C_S zusammenhängend, genauer ist C_S die Vereinigung aller maximalen Tori, die S enthalten.*

Beweis. Sicher enthält C_S die Vereinigung aller maximalen Tori T mit $T \supset S$. Wir müssen nur noch für ein beliebiges Element $c \in C_S$ zeigen, dass c in so einem maximalen Torus liegt. Wir betrachten den Abschluss A der Untergruppe von G , die von S und c erzeugt wird. Diese ist abelsch, und wenn sie zusammenhängend ist, lässt sie sich zu einem maximalen Torus erweitern und wir sind fertig. Wir nehmen

⁴¹Hermann Weyl, 1885 (Elmshorn) - 1955 (Zürich)

also an, dass A nicht zusammenhängend ist. Die Zusammenhangskomponente der Eins sei A_o ; dies ist eine kompakte abelsche und zusammenhängende Gruppe, also ein Torus. In jedem Torus $A_o \cong \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ finden wir ein Element a mit $A_o = \overline{\langle a \rangle}$; man muss nur dafür sorgen, dass alle Koordinaten von a irrational sind. Weil A kompakt ist (als abgeschlossene Untergruppe einer kompakten Gruppe), ist die Gruppe A/A_o endlich.⁴² Sie wird erzeugt von $cA_o \in A/A_o$, ist also zyklisch von endlicher Ordnung k . Somit ist $c^k \in A_o$. Es sei $\tilde{a} \in A_o$ mit $\tilde{a}^k = a$ und $b = \tilde{a}c^{-k} \in A_o$. Dann ist $\overline{\langle bc \rangle} = A$, denn $(bc)^k = \tilde{a}^k = a$ erzeugt A_o . Das einzelne Element $bc \in G$ liegt aber in einem maximalen Torus von G , der notwendig $A = \overline{\langle bc \rangle}$ und damit auch S enthält. \square

16. WEYLGRUPPE UND WURZELN

Die Weylgruppe $W = N_T/T$ eines maximalen Torus $T \subset G$ operiert auf T durch Konjugation und lässt dabei das Neutralelement $e \in T$ fix; damit operiert W linear auf dem Tangentialraum $\mathfrak{t} = T_e T$ von T , und die Exponentialabbildung $\exp|_{\mathfrak{t}}$ konjugiert die Operationen von W auf \mathfrak{t} und T . Insbesondere lässt W das Einheitsgitter $L = (\exp|_{\mathfrak{t}})^{-1}(e) \subset \mathfrak{t}$ invariant.

Beispiel: $G = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$. Dann ist $T = \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^3 \cap \mathbb{C}$ mit Liealgebra $\mathfrak{t} = i\mathbb{R} \subset \mathfrak{g} = \text{Im } \mathbb{H}$. Die Weylgruppe kann nur aus den zwei Elementen $\pm I$ bestehen, da \mathfrak{t} eindimensional ist ($O_1 = \{\pm I\}$), und der Tat ist $-I$ ein Element der Weylgruppe, nämlich $\text{Ad}(j)$. Diese Abbildung erhält den Torus T , denn $jzj^{-1} = \bar{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und insbesondere $ji j^{-1} = -i j j^{-1} = -i$. Ganz Entsprechendes gilt für $G = SO_3$ und $T = \{\text{diag}(D_t, 1) : D_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\}$ mit Liealgebra $\mathfrak{t} = \{\text{diag}(tJ, 0) : t \in \mathbb{R}\}$, wobei $J = D_{\pi/2} = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. Die Konjugation mit der Matrix $\text{diag}(1, -1, -1)$ erhält T und bildet $\text{diag}(J, 0)$ auf $-\text{diag}(J, 0)$ ab. Klar: Die Liealgebra und die Wirkung der Gruppe $\text{Ad}(G)$ darauf sind ja gleich für $G = \mathbb{S}^3$ und $G = SO_3$.

Wir werden dieses Beispiel gleich auch für den allgemeinen Fall heranziehen. Da die Weylgruppe durch Konjugation operiert und den Torus T erhält, bleibt auch das System der *Wurzeln* erhalten. Erinnerung wir uns: Die Wurzeln waren die simultanen Eigenwerte von $\text{Ad}(u)$, $u \in T$; es sind Homomorphismen $\alpha : T \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ mit $\text{Ad}(u)X_\alpha = \alpha(u)X_\alpha$ für gewisse $X_\alpha \in \mathfrak{g}^c$, die zugehörigen Eigenvektoren. Den ganzen Eigenraum hatten wir \mathfrak{g}_α genannt. Konjugation mit einem Weyl-Element

⁴²In jeder topologischen Gruppe G ist die Wegzusammenhangskomponente der Eins, G_o , ein Normalteiler denn gxg^{-1} ist mit e verbindbar, wenn x mit e verbindbar ist. Also bildet die Menge der Wegzusammenhangskomponenten die Gruppe G/G_o .

$w = \text{Ad}(n)$, $n \in N_T$, ergibt $\text{Ad}(nun^{-1}) \text{Ad}(n)X_\alpha = \alpha(u) \text{Ad}(n)X_\alpha$,
oder besser

$$\text{Ad}(u) \text{Ad}(n)X_\alpha = \alpha(n^{-1}un) \text{Ad}(n)X_\alpha.$$

Somit ist $\text{Ad}(n)X_\alpha$ auch wieder ein Eigenvektor, und zwar für den Eigenwert (die Wurzel) $\beta = \alpha \circ w^{-1}$.

Statt der Wurzeln $\alpha : T \rightarrow \mathbb{S}^1$ betrachten wir lieber ihre Ableitungen im Einselement $\alpha_* : \mathfrak{t} \rightarrow T_1\mathbb{S}^1 = i\mathbb{R}$. Die reellen Linearformen α_*/i werden wir wieder mit demselben Buchstaben α bezeichnen;⁴³ diesmal ist $\alpha \in \mathfrak{t}^* = \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{R})$. Das sind die simultanen Eigenwerte von $\text{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{t}$; die Eigenvektoren sind noch die gleichen (sie sind ja unabhängig von $u \in T$ und verhalten sich deshalb beim Differenzieren als Konstante); es gilt daher für alle $H \in \mathfrak{t}$:

$$(47) \quad \text{ad}(H)X_\alpha = i\alpha(H)X_\alpha.$$

Da $\hat{\alpha}(e) = 1$ und andererseits $\hat{\alpha}(e) = e^{i\alpha(H)}$ für alle $H \in L := (\exp_T)^{-1}(e)$, muss $\alpha(H) \in 2\pi\mathbb{Z}$ liegen für alle $H \in L$; solche Linearformen, die auf dem Einheitsgitter L ganzzahlige Werte mal 2π annehmen, nennen wir *ganzzahlige Linearformen*.

Lemma 16.1. *Für alle $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ gilt*

$$(48) \quad [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$$

(mit $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = 0$ falls $\alpha + \beta \notin \Delta$). Insbesondere folgt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{t}^c$.

Beweis. Das folgt direkt aus der Jacobi-Identität: Für alle $H \in \mathfrak{t}$ ist

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)[X_\alpha, X_\beta] &= [\text{ad}(H)X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, \text{ad}(H)X_\beta] \\ &= i(\alpha(H) + \beta(H))[X_\alpha, X_\beta]. \end{aligned}$$

□

Zu jedem Eigenvektor $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}^c$ gibt es einen zugehörigen Eigenvektor $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, nämlich $X_{-\alpha} = \overline{X_\alpha}$, denn weil $H \in \mathfrak{t}$ reell ist, $\overline{H} = H$, gilt

$$\text{ad}(H)\overline{X_\alpha} = \overline{\text{ad}(H)X_\alpha} = \overline{i\alpha(H)X_\alpha} = -i\alpha(H)\overline{X_\alpha}.$$

Die Wurzeln treten also immer in Paaren $\pm\alpha$ auf. Das Element $[X_\alpha, \overline{X_\alpha}] \in \mathfrak{t}^c$ hat zwei besondere Eigenschaften: Es ist rein imaginär, denn

$$\overline{[X_\alpha, \overline{X_\alpha}]} = [\overline{X_\alpha}, X_\alpha] = -[X_\alpha, \overline{X_\alpha}],$$

⁴³Zur Unterscheidung werden wir nötigenfalls die Eigenwerte von $\text{Ad}(u)$ ab jetzt mit $\hat{\alpha}$ bezeichnen: $\hat{\alpha} : T \rightarrow \mathbb{S}^1$ und $\hat{\alpha}_* = i\alpha$. Da die Exponentialabbildung $\exp_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \rightarrow T$ den Torus T mit \mathfrak{t}/L identifiziert, $L = (\exp_{\mathfrak{t}})^{-1}(e)$, und da $\hat{\alpha} \circ \exp = \exp \circ \hat{\alpha}_*$ für jeden Liegruppen-Homomorphismus, gilt $\hat{\alpha}(\exp H) = e^{i\alpha(H)}$ für jedes $H \in \mathfrak{t}$.

also $[X_\alpha, \overline{X_\alpha}] = iH_\alpha$ für ein $H_\alpha \in \mathfrak{t}$, und dieser Vektor H_α steht senkrecht auf der Hyperebene $\ker \alpha$, denn für jedes $H \in \mathfrak{t}$ gilt (mit dem komplex bilinear auf \mathfrak{g}^c fortgesetzten Skalarprodukt)⁴⁴

$$\begin{aligned} i\langle H, H_\alpha \rangle &= \langle H, [X_\alpha, \overline{X_\alpha}] \rangle \\ &= \langle [H, X_\alpha], \overline{X_\alpha} \rangle \\ &= i\alpha(H)\langle X_\alpha, \overline{X_\alpha} \rangle = i\alpha(H)|X_\alpha|^2, \end{aligned}$$

insbesondere ist $\langle H, H_\alpha \rangle = 0 \iff H \in \ker \alpha$.

Die Kerne der Wurzeln, $\ker \alpha$ mit $\alpha \in \Delta$, bilden ein System von Hyperebenen in \mathfrak{t} ; die Zusammenhangskomponenten ihres Komplements $\mathfrak{t} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \ker \alpha$ heißen *Weylkammern*. Wie wir sahen, permutiert die Weylgruppe die Wurzeln $\alpha \in \Delta$, also auch die Hyperebenen $\ker \alpha$ und die Weylkammern.

Satz 16.1. *Die Weylgruppe wird erzeugt von den Spiegelungen s_α an den Hyperebenen $\ker \alpha$, $\alpha \in \Delta$.*

Beweis. Zunächst müssen wir zeigen, dass die Spiegelungen s_α wirklich in der Weylgruppe liegen. Der von $\operatorname{Re} X_\alpha$, $\operatorname{Im} X_\alpha$ und \mathfrak{t} aufgespannte Unterraum $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{g}$ bildet offensichtlich eine Unter-Liealgebra, denn $[X_\alpha, \overline{X_\alpha}] \in \mathfrak{t}$ und $[\mathfrak{t}, X_\alpha] \subset \mathbb{C}X_\alpha$, wobei $[\ker \alpha, X_\alpha] = 0$. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} [X_\alpha + \overline{X_\alpha}, X_\alpha - \overline{X_\alpha}] &= -2[X_\alpha, \overline{X_\alpha}] = -2iH_\alpha, \\ [H_\alpha, X_\alpha + \overline{X_\alpha}] &= i\alpha(H_\alpha)(X_\alpha - \overline{X_\alpha}), \\ [H_\alpha, X_\alpha - \overline{X_\alpha}] &= i\alpha(H_\alpha)(X_\alpha + \overline{X_\alpha}). \end{aligned}$$

Bis auf Normierungsfaktoren⁴⁵ verhalten sich diese drei Elemente wie die Erzeugenden i, j, k der Liealgebra von \mathbb{S}^3 . Damit ist $\mathfrak{g}^\alpha \cong \mathfrak{su}_2 \oplus \ker \alpha$ als Liealgebra, wobei die Liestruktur auf $\ker \alpha \subset \mathfrak{t}$ trivial ist. Die zugehörige Liegruppe $G^\alpha \subset G$ ist also bis auf Überlagerungen ein direktes Produkt $G_\alpha \times T_\alpha$, wobei G_α zu SU_2 oder SO_3 isomorph⁴⁶ und T_α der

⁴⁴In der zweiten Zeile der folgenden Rechnung nutzen wir die Identität $\langle H, [X, Y] \rangle = \langle [H, X], Y \rangle$ für alle $H, X, Y \in \mathfrak{g}^c$. Das ist die Schiefsymmetrie von $\operatorname{ad}(X)$, nämlich $\langle H, \operatorname{ad}(X)Y \rangle = -\langle \operatorname{ad}(X)H, Y \rangle$; diese wiederum kommt durch Ableiten von $\langle \operatorname{Ad}(g)H, \operatorname{Ad}(g)Y \rangle = \langle H, Y \rangle$ für alle $g \in G$.

⁴⁵ $R_\alpha = 2 \operatorname{Re} X_\alpha$ und $I_\alpha = 2 \operatorname{Im} X_\alpha$ erfüllen die Relationen $[R_\alpha, I_\alpha] = -2H_\alpha$, $[H_\alpha, R_\alpha] = -2\lambda^2 I_\alpha$, $[H_\alpha, I_\alpha] = 2\lambda^2 R_\alpha$ mit $\lambda^2 = \alpha(H_\alpha)$. Die Elemente $\tilde{R}_\alpha = \lambda R_\alpha$, $\tilde{I}_\alpha = \lambda I_\alpha$ und $\tilde{H}_\alpha = \lambda^2 H_\alpha$, erfüllen dann die gleichen Kommutator-Relationen wie $k, j, i \in \mathbb{H}$, die die Liealgebra von \mathbb{S}^3 aufspannen.

⁴⁶Weitere Gruppen mit Liealgebra \mathfrak{su}_2 kann es nicht geben, weil $SU_2 = \mathbb{S}^3$ einfach zusammenhängend und $SO_3 = SU_2/\{\pm I\}$ ohne Zentrum ist: Wäre SO_3/Γ noch eine Gruppe für einen diskreten Normalteiler $\Gamma \subset SO_3$, so müsste dieser im Zentrum liegen; das gilt allgemein für Normalteiler von zusammenhängenden topologischen Gruppen (Übung).

Kern des Gruppenhomomorphismus $\alpha : T \rightarrow \mathbb{S}^1$ ist. Unser Eingangsbeispiel zeigt, dass es in G_α ein Element $g_\alpha = \exp t_o \operatorname{Re} X_\alpha$ gibt (für geeignetes t_o) derart, dass $\operatorname{Ad}(g_\alpha)H_\alpha = -H_\alpha$, während $\operatorname{Ad}(g_\alpha)|_{\ker \alpha} = I$; damit folgt $\operatorname{Ad}(g_\alpha) = s_\alpha$ auf \mathfrak{t} .

Wir betrachten nun die Untergruppe $W' \subset W$, die von allen s_α erzeugt wird. Sie operiert bereits transitiv auf der Menge der Weylkammern, weil sie die Spiegelungen an allen Weylkammer-Wänden enthält. Wir wollen $W = W'$ zeigen. Dafür genügt es zu zeigen, dass kein Element $w \in W \setminus \{I\}$ eine Weylkammer C invariant lässt. Wenn $w = \operatorname{Ad}(g)$ so ein Element ist mit $wC = C$, dann gibt es einen Vektor $v \in C$, der fix bleibt, $w(v) = v$, zum Beispiel der Schwerpunkt von $C \cap S$, wobei S die Einheitskugel in \mathfrak{t} ist, oder noch einfacher der Mittelpunkt der größten Kugel in S , die noch ganz im Abschluss von C liegt. Somit liegt g im Centralisator des Abschlusses von $\exp \mathbb{R}v$. Dies ist ein Torus $T' \subset T$, also ist $g \in C(T')$. Nach Satz 15.1 ist $C(T')$ zusammenhängend, und weil $v \in C$ regulär ist, folgt $C(T) = T$. Damit ist $g \in T$ und $\operatorname{Ad}(g)_T = I$. \square

Dieser Satz bestimmt nicht nur die Struktur der Weylgruppe als Spiegelungsgruppe (*Coxetergruppe*),⁴⁷ sondern hat auch starke Konsequenzen für die Struktur des Wurzelsystems:

Satz 16.2.

- (a) Der Eigenraum \mathfrak{g}_α zu jeder Wurzel $\alpha \in \Delta$ ist eindimensional.
- (b) Ist $\alpha \in \Delta$ und $\lambda\alpha \in \Delta$, so ist $\lambda = \pm 1$.

Beweis. Andernfalls könnte man die Spiegelung s_α auf verschiedene Weisen als $\operatorname{Ad}(g_1)$ und $\operatorname{Ad}(g_2)$ darstellen, wobei sich g_1 und g_2 nicht nur durch ein Element von T unterscheiden; dann wäre $\operatorname{Ad}(g_1 g_2^{-1}) = I$ auf ganz \mathfrak{t} , aber wir haben im Beweis von Satz 16.1 bereits gesehen, dass ein solches Element in T liegen muss. Damit wird (a) und (b) gezeigt. \square

Bemerkung: Ein endliche Menge Δ von Vektoren in $\mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ heißt *Wurzelsystem*, wenn gilt:

- (1) Δ spannt \mathbb{R}^r auf,
- (2) Für jedes $\alpha \in \Delta$ ist $\mathbb{R}\alpha \cap \Delta = \pm\alpha$,
- (3) Δ ist invariant unter allen Spiegelungen s_α , $\alpha \in \Delta$,

⁴⁷ Eine *Coxetergruppe* ist eine Gruppe mit einem endlichen Erzeugendensystem $S = \{s_1, \dots, s_p\}$ aus Elementen der Ordnung 2. Endliche Coxetergruppen lassen sich als lineare Spiegelungsgruppen auf einem euklidischen Raum \mathbb{R}^r realisieren. Wenn eine Coxetergruppe zusätzlich ein Gitter $\mathbb{Z}^r \cong L \subset \mathbb{R}^r$ invariant lässt, nennt man sie (abstrakte) *Weylgruppe*.

- (4) Für alle $\alpha, \beta \in \Delta$ ist die orthogonale Projektion $\pi_\alpha(\beta)$ von β auf $\langle \alpha \rangle = \mathbb{R}\alpha$ in der Menge $\frac{1}{2}\mathbb{Z}\alpha$ enthalten, d.h. $2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$.

Da $s_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$, kann man (4) auch so ausdrücken: $\beta - s_\alpha(\beta)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von α . Man kann zeigen, dass zu jedem Wurzelsystem genau eine einfach zusammenhängende kompakte Liegruppe gehört. Die Klassifikation dieser Gruppen ist daher durch die Klassifikation der Wurzelsysteme möglich.

17. DIE WEYLSCHE INTEGRATIONSFORMEL

Gegeben sei eine Klassenfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, also eine Funktion, die auf allen Konjugationsklassen konstant ist: $f(gug^{-1}) = f(u)$ für alle $g, h \in G$. Wir wollen $\int_G f(g)dg$ berechnen, wobei das Maß dg so normiert ist, dass $\text{vol}(G) = \int_G dg = 1$. Wir wissen bereits:

- (1) $G = \bigcup_{u \in T} i(G)u$, genauer: die Abbildung $\phi : G/T \times T \rightarrow G : (gT, u) \mapsto gug^{-1}$ ist surjektiv,
- (2) $i(G)u \perp T$,
- (3) $i(G)u \cap T = Wu$.

Wir wollen für die Integration die Abbildung ϕ und den Satz von Fubini benutzen und zuerst über G/T integrieren (inneres Integral) und dann über T (äußeres Integral). Wegen (3) schneidet jeder Orbit $\phi(G/T \times \{u\}) = i(G)u$ den Torus mehrmals; um Doppelzählung zu vermeiden, dürfen wir daher nicht über ganz T integrieren, sondern nur über ein Repräsentantensystem der Bahnen der Weylgruppe W , einen sogenannten Fundamentalbereich F . In \mathfrak{t} kennen wir bereits Fundamentalbereiche für W , die abgeschlossenen Weylkammern \bar{C} , und in T erhalten wir Fundamentalbereiche $F = \exp \bar{C}$. Weil die Weylgruppe auf der Menge der Weylkammern einfach transitiv wirkt, gibt es $|W|$ solche Fundamentalbereiche, alle natürlich kongruent zueinander. Deshalb gilt:⁴⁸

$$\begin{aligned} \int_G f(g)dg &= \int_{u \in F} \left(\int_{x \in i(G)u} f(x)dx \right) du \\ &= \int_{u \in F} f(u)v(u) du = \frac{1}{|W|} \int_{u \in T} f(u)v(u) du \end{aligned}$$

⁴⁸Wir benutzen hier den Transformationssatz für die Abbildung ϕ in der Form $\int_G f(g)dg = \int_{\phi(M \times F)} f(g)dg = \int_{M \times F} f(\phi(x, u)) |\det D\phi_{(x, u)}| dx du$ mit $M = G/T$, und $|\det D\phi_{(x, u)}| = \text{vol}(i(G)u)/\text{vol}(X)$; weil M homogen und ϕ_u äquivariant ist, hängt $|\det D\phi_{(x, u)}|$ nicht von x , sondern nur von u ab.

mit $v(u) = \text{vol}(i(G)u)$; die letzte Gleichheit gilt, weil $\int_F f(u)du = \int_{wF} f(u)du$ für alle $w \in W$ und $T = \bigcup_{w \in W} wF$, wobei sich F und wF höchstens am Rand schneiden; der Schnitt ist also eine Nullmenge.

Es bleibt die Volumenfunktion

$$v(u) = \text{vol}(i(G)u)$$

zu berechnen. Im Beispiel $G = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ auf Seite 17 war der maximale Torus T die Kreislinie $\mathbb{S}^3 \cap \mathbb{C}$ und die Konjugationsklasse $i(G)u$ durch $u = e^{i\theta} \in T$ die zu dieser Kreislinie senkrechte Kleinsphäre S_θ^2 mit Radius $\sin \theta$, somit $v(e^{i\theta}) = 4\pi \sin^2 \theta$, siehe Seite 17 (dabei war das Volumen von $G = \mathbb{S}^3$ noch nicht auf Eins normiert). Es gab allerdings zwei Ausnahmen: Für $u = \pm 1 \in T$ war $i(G)u$ keine Sphäre, sondern ein Punkt, $i(G)u = \{u\}$.

Wenn G nun beliebig ist, stellen wir uns ganz ähnliche Fragen:

- (1) Was entspricht dem Volumen 4π der Standardsphäre?
- (2) Was entspricht dem Volumen-Änderungsfaktor $\sin^2 \theta$?
- (3) Welche Ausnahmen gibt es für $i(G)u$?

Wir fangen mit der dritten Frage an. Für jedes $u \in T$ haben wir die surjektive G -äquivalente Abbildung

$$\phi_u : G/T \rightarrow i(G)u, \quad \phi_u(gT) = \phi(gT, u) = gug^{-1}.$$

Die Standgruppe von u unter der Wirkung von $i(G)$ ist der *Centralisator* von u , die Untergruppe $C_u = \{g \in G : gug^{-1} = u\} \supset T$. Wenn u *nicht regulär* ist, $\alpha(u) = 1$ für ein $\alpha \in \Delta$, dann liegt $(\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$ in der Liealgebra \mathfrak{c}_u von C_u , diese ist also echt größer als \mathfrak{t} und $i(G)u \cong G/C_u$ hat kleinere Dimension als G/T . Solche Orbits nennen wir *singuläre Orbits*. Wenn u dagegen *regulär* ist, dann gilt $\text{Ad}(u)X = X$ nur für $X \in \mathfrak{t}$.⁴⁹ Damit ist $i(u) \exp(tX) = \exp(tX)$ ($\iff i(\exp(tX)u) = u$) für alle $t \in \mathbb{R}$ genau für $X \in \mathfrak{t}$, also ist $\mathfrak{c}_u = \mathfrak{t}$ (wobei \mathfrak{c}_u die Liealgebra von C_u bezeichnet). Das bedeutet aber noch nicht $C_u = T$, denn C_u kann mehrere Zusammenhangskomponenten haben (anders als der Centralisator eines Torus, vgl. Satz 15.1). Weil aber u regulär ist, liegt es in nur einem maximalen Torus, somit lässt C_u den ganzen Torus T invariant, $C_u \subset N_T$. Also kann C_u nur eine Erweiterung von T durch eine Untergruppe der Weylgruppe W sein, nämlich durch die Standgruppe $W_u = \{w \in W : wu = u\}$ für die Wirkung der Weylgruppe auf T . Für solche $u \in T$ hat $i(G)u \cong G/C_u = (G/T)/W_u$ zwar die gleiche Dimension wie G/T , aber das Volumen beim Annähern an solche u

⁴⁹Für $X = X_o + \sum_\alpha \lambda_\alpha X_\alpha$ mit $X_o \in \mathfrak{t}$ ist $\text{Ad}(u)X - X = \sum_\alpha \lambda_\alpha (\alpha(u) - 1) X_\alpha = 0 \iff \lambda_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \Delta$, da $\alpha(u) \neq 1$, also $X = X_o \in \mathfrak{t}$.

wird “plötzlich” (unstetig) durch den Faktor $|W_u|$ geteilt; wir nennen solche Orbiten *Ausnahmeorbiten*.

Die Fixmengen von Untergruppen von W sind abgeschlossene Untergruppen von T ; ihre Zusammenhangskomponenten sind echte Untertori.⁵⁰ Alle Elemente $u \in T$, die außerhalb dieser Untertori sowie der Untertori $\ker \alpha$, $\alpha \in \Delta$ liegen, haben daher Standgruppe T . Deren Bahnen sind diffeomorph zu G/T ; sie heißen *reguläre Orbits*. Da wir das Wort “regulär” für Elemente $u \in T$ schon anderweitig verbraucht haben, wollen wir die $u \in T$ mit $C_u = T$ *stark regulär* nennen.

Eine Standardmetrik auf G/T (Punkt (1)) erhalten wir aus der bi-invarianten Metrik auf G , denn

$$T_{eT}(G/T) = T_e G / T_e T = \mathfrak{g} / \mathfrak{t} \cong \mathfrak{m},$$

wobei \mathfrak{m} das orthogonale Komplement von \mathfrak{t} in \mathfrak{g} ist, $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{m}$ (vgl. Lemma 14.1). Wir geben also $T_{eT}(G/T)$ das Skalarprodukt von $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ und verschieben dieses mit den Linkstranslationen überall hin: Der Tangentialraum

$$T_g(G/T) = DL_g \mathfrak{g} / DL_g \mathfrak{t} \cong DL_g \mathfrak{m} \subset DL_g \mathfrak{g} = T_g G$$

wird dabei zu einem Unterraum von $T_g G$ und erbt dessen Skalarprodukt.⁵¹ Damit haben wir eine Riemannsche Metrik auf $M = G/T$ definiert, die *normalhomogene* Metrik, für die die Restklassenabbildung $\pi : G \rightarrow G/T$ eine *Riemannsche Submersion* ist, d.h. $D\pi_g$ erhält die Länge aller Vektoren senkrecht zu der Untermannigfaltigkeit $\pi^{-1}\pi(g) = gT \subset G$, der *Faser* durch g . Hier gibt es noch die weitere Besonderheit, dass alle Fasern zueinander isometrisch sind. Damit verhält sich G bezüglich der Integration wie ein Produkt $(G/T) \times T$, und insbesondere gilt (mit $\text{vol } G = 1$)

$$(49) \quad \text{vol}(G/T) = \text{vol}(G) / \text{vol}(T) = 1 / \text{vol}(T).$$

Bezüglich dieser Metrik müssen wir nun die Volumenänderung durch die Abbildung

$$\phi_u : G/T \rightarrow i(G)u, \quad \phi_u(g) = gug^{-1}$$

berechnen. Wegen der Homogenität von G/T und der Äquivarianz von ϕ_u brauchen wir das nur an der einen Stelle $eT \in G/T$ zu tun.

⁵⁰Die Fixpunktmenge von Weylelementen kennen wir aus der linearen Wirkung von W auf \mathfrak{t} , denn vermöge $\exp_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \rightarrow T$ ist $T = \mathfrak{t}/L$ mit $L = \ker \exp_{\mathfrak{t}} = \exp_{\mathfrak{t}}^{-1}(e)$, und $\exp_{\mathfrak{t}}$ konjugiert die W -Wirkungen auf \mathfrak{t} und T . Für $u = \exp H$ und $w \in W$ gilt also $wu = u \iff \exp(wH) = \exp(H) \iff wH - H \in L$.

⁵¹Das g ist durch gT nicht eindeutig bestimmt, aber $DL_g \mathfrak{m}$ merkt nichts von dieser Uneindeutigkeit: Ist $g'T = gT$, so ist $g'g^{-1} \in T$, also $g' = gu$ mit $u \in T$, und $DL_{g'} \mathfrak{m} = DL_{gu} \mathfrak{m} = DL_g \mathfrak{m}$.

Lemma 17.1. *Für alle $H \in \mathfrak{t}$ und $u = \exp H$ gilt:*

$$(50) \quad \text{vol } i(G)u = \text{vol}(G/T) \prod_{\alpha \in \Delta} (1 - e^{i\alpha(H)}).$$

Beweis. Wir müssen die Ableitung von ϕ_u im Punkte $eT \in G/T$ berechnen, wobei wir den Tangentialraum $T_{eT}(G/T)$ mit $\mathfrak{m} = \mathfrak{t}^\perp \subset \mathfrak{g}$ identifizieren. Zu bestimmen ist also die lineare Abbildung $(D\phi_u)_{eT} : \mathfrak{m} \rightarrow T_u(i(G)u) \subset T_u G$. Für jedes $X \in \mathfrak{m}$ sei $x_t = \exp(tX) \in G$. Dann

$$D\phi_u \cdot X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x_t u x_{-t} = DR_u \cdot X - DL_u \cdot X = DR_u(X - \text{Ad}(u)X),$$

denn $DR_u^{-1}DL_u = \text{Ad}(u)$. Da DR_u eine Isometrie ist, folgt

$$|\det D\phi_u| = |\det(I - \text{Ad}(u))_{\mathfrak{m}}| = \left| \prod_{\alpha \in \Delta} \det(I - \text{Ad}(u))_{\mathfrak{g}_\alpha} \right| = \prod_{\alpha \in \Delta} |1 - e^{i\alpha(H)}|.$$

Da die Wurzeln in konjugierten Paaren $e^{i\alpha(H)}$ und $e^{-i\alpha(H)}$ auftreten, können wir die Betragsstriche auf der rechten Seite weglassen. \square

Der Ausdruck für $|\det D\phi_u|$ ist also von der Form $d\bar{d}$ für eine komplexe Zahl d . Um diese Zahl d , die nur die Hälfte der Faktoren berücksichtigt, zu berechnen, müssen wir die Wurzeln in zwei Hälften aufteilen: positive und negative. Dazu wählen wir eine Weylkammer $C \subset \mathfrak{t}$. Keine Wurzel $\alpha \in \Delta$ kann innerhalb von C ihr Vorzeichen wechseln, denn die Nullstellenmengen (die Wurzelkerne) liegen außerhalb von C , somit

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_+ \dot{\cup} (-\Delta_+), \\ \Delta_+ &:= \{\alpha \in \Delta : \alpha|_C > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $|\det D\phi_u| = d\bar{d}$ mit

$$d = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{i\alpha(H)}) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} e^{-i\frac{\alpha(H)}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha(H)}{2}} - e^{-i\frac{\alpha(H)}{2}} \right) = e^{i\rho(H)} \delta$$

mit

$$(51) \quad \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha, \\ \delta &= \prod_{\alpha \in \Delta_+} \left(e^{i\frac{\alpha(H)}{2}} - e^{-i\frac{\alpha(H)}{2}} \right) \\ &= \sum_{\epsilon: \Delta_+ \rightarrow \{\pm 1\}} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \epsilon(\alpha) e^{i\epsilon(\alpha)\frac{\alpha(H)}{2}} \\ &= \sum_{\epsilon} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \epsilon(\alpha) \right) e^{\frac{i}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\epsilon(\alpha)\alpha(H))}. \end{aligned}$$

Also

$$(52) \quad \delta = \sum_{\epsilon} \operatorname{sgn}(\epsilon) e^{i\rho_{\epsilon}(H)}$$

mit

$$\operatorname{sgn}(\epsilon) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \epsilon(\alpha), \quad \rho_{\epsilon} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \epsilon(\alpha) \alpha.$$

Satz 17.1. Weylsche Integrationsformel:

Für jede Klassenfunktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$(53) \quad \int_G f(g) dg = \frac{1}{|W|} \frac{1}{\operatorname{vol} T} \int_T f(u) |\delta(u)|^2 du$$

mit δ wie in (52).

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_G f(g) dg &= \frac{1}{|W|} \int_T f(u) \operatorname{vol}(i(G)u) du \\ &= \frac{1}{|W|} \int_T f(u) \operatorname{vol}(\phi_u(G/T)) du \\ &= \frac{1}{|W|} \int_T f(u) |\det D\phi_u| \operatorname{vol}(G/T) du \\ &= \frac{1}{|W|} \frac{1}{\operatorname{vol} T} \int_T f(u) |\det D\phi_u| du \\ &= \frac{1}{|W|} \frac{1}{\operatorname{vol} T} \int_T f(u) |\delta(u)|^2 du. \end{aligned}$$

□

18. GEWICHTE UND WURZELN

Jetzt sei eine unitäre Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n = U(V)$ gegeben, und $\chi = \chi_{\phi} : G \rightarrow \mathbb{C}$ sei der zugehörige Charakter, $\chi(g) = \operatorname{Spur} \phi(g)$. Wir wollen das Irreduzibilitätskriterium $\int_G |\chi(g)|^2 dg = 1$ ausnutzen. Dafür müssen wir dieses Integral berechnen. Charaktere sind Klassenfunktionen $\chi(gug^{-1}) = \chi(u)$, deshalb können wir die Weylsche Integrationsformel in Satz 17.1 benutzen. Insbesondere brauchen wir χ nur auf T zu kennen, die Spur von $\phi|_T$. Aber $\phi|_T$ ist unitäre Darstellung einer abelschen Gruppe, nämlich T , und zerfällt daher in eindimensionale irreduzible Teildarstellungen. Genau wie im Spezialfall der Adjungierten Darstellung gibt es also eine endliche Familie $\hat{\Lambda} \subset \operatorname{Hom}(T, \mathbb{S}^1)$ und für jedes $\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$ einen $\phi(G)$ -invarianten Unterraum $V_{\hat{\lambda}} \subset V$ derart, dass

$$\phi(u)v_{\hat{\lambda}} = \hat{\lambda}(u)v_{\hat{\lambda}} \quad \forall v_{\hat{\lambda}} \in V_{\hat{\lambda}},$$

und V zerfällt als direkte Summe $V = \sum_{\lambda \in \hat{\Lambda}} V_\lambda$. Diese Homomorphismen

$\hat{\lambda} \in \hat{\Lambda}$ heißen *Gewichte* (engl. *weights*), die $v_\lambda \in V_\lambda$ heißen *Gewichtsvektoren*. Ein Beispiel haben wir schon gesehen: die Wurzeln (einschließlich Null) sind die Gewichte der Adjungierten Darstellung. Wie in diesem Beispiel betrachten wir lieber die Ableitungen $\hat{\lambda}_* : \mathfrak{t} \rightarrow T_1\mathbb{S}^1 = i\mathbb{R}$ und setzen

$$\hat{\lambda}_* = i\lambda, \quad \hat{\lambda} \circ \exp = e^{i\lambda}$$

mit $\lambda \in \mathfrak{t}^* = \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{R})$. Wie die Wurzeln sind die Gewichte *ganzzahlige Linearformen*, vgl. S. 40.

Die Wurzeln spielen aber nicht nur für die Adjungierte, sondern für *jede* unitäre Darstellung von G eine Rolle:

Satz 18.1. *Für alle $\alpha \in \Delta$ (Wurzelsystem) und $\lambda \in \Lambda$ (Gewichtssystem einer Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n$) gilt:*

$$(54) \quad \phi_*(\mathfrak{g}_\alpha)V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha}.$$

Beweis. Wir benutzen, dass $\phi_* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{u}_n$ ein Liealgebren-Homomorphismus ist: $\phi_*(X)\phi_*(Y) - \phi_*(Y)\phi_*(X) = \phi_*[X, Y]$. Wir wollen für alle $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $v_\lambda \in V_\lambda$ zeigen, dass $\phi_*(X_\alpha)v_\lambda$ in $V_{\lambda+\alpha}$, also im Eigenraum von $\phi_*(H)$ zum Eigenwert $(\lambda + \alpha)(H)$ liegt für jedes $H \in \mathfrak{t}$. Dazu müssen wir also $\phi_*(H)$ auf $\phi_*(X_\alpha)v_\lambda$ anwenden:

$$\begin{aligned} \phi_*(H)\phi_*(X_\alpha)v_\lambda &= \phi_*(X_\alpha)\phi_*(H)v_\lambda + \phi_*[H, X_\alpha]v_\lambda \\ &= \lambda(H)\phi_*(X_\alpha)v_\lambda + \alpha(H)\phi_*(X_\alpha)v_\lambda \\ &= (\lambda + \alpha)(H)\phi_*(X_\alpha)v_\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

Das Gewichtssystem Λ ist also in gewisser Weise invariant unter Addition von Wurzeln. Allerdings ist auch $V_{\lambda+\alpha} = 0$ möglich; in dem Fall ist $\lambda + \alpha \notin \Lambda$. Auch die Weylgruppe W verhält sich gutartig:

Satz 18.2. *Das Gewichtssystem Λ ist invariant unter der Weylgruppe.*

Beweis. Für $v_\lambda \in V_\lambda$ und $w = \text{Ad}(n)|_{\mathfrak{t}} \in W$ mit $n \in N_T$ und $H \in \mathfrak{t}$ ist

$$\phi_*(w^{-1}H)v_\lambda = i\lambda(w^{-1}H)v_\lambda = i(w\lambda)(H)v_\lambda$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \phi_*(w^{-1}H) &= \phi_*(\text{Ad}(n^{-1}H)) \\ &= (d/dt)_{t=0} \phi(n^{-1} \exp(tH)n) \\ &= (d/dt)_{t=0} \phi(n^{-1})\phi(\exp(tH))\phi(n) \\ &= \phi(n)^{-1}\phi_*(H)\phi(n). \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$(55) \quad \begin{aligned} \phi(n)^{-1}\phi_*(H)\phi(n)v_\lambda &= i(w\lambda)(H)v_\lambda, \\ \phi_*(H)\phi(n)v_\lambda &= i(w\lambda)(H)\phi(n)v_\lambda. \end{aligned}$$

Also ist $\phi(n)v_\lambda$ Eigenvektor der Matrix $\phi_*(H)$ zum Eigenwert $(w\lambda)(H)$, und somit ist $w\lambda \in \Lambda$ mit Gewichtsvektor $v_{w\lambda} = \phi(n)v_\lambda$. \square

Satz 18.3. Für jedes Gewicht $\lambda \in \Lambda$ und jede Wurzel $\alpha \in \Delta$ gilt

$$(56) \quad 2 \frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}.$$

Beweis. Weil $\hat{\lambda} \circ \exp = e^{i\lambda}$ jedes $H \in L = (\exp_{\mathfrak{t}})^{-1}(e)$ auf 1 abbildet, ist $\lambda(L) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ und ebenso $\alpha(L) \subset 2\pi\mathbb{Z}$. Wir suchen uns ein $H_o \in L$ mit $\alpha(H_o) = 2\pi$. Weil W das Einheitsgitter L invariant lässt, ist mit H_o auch $wH_o \in L$ und $H_o - wH_o \in L$ für alle $w \in W$. Dies wenden wir an auf $w = s_\alpha$, die Spiegelung an der Hyperebene α^\perp . Somit ist $H_o - s_\alpha(H_o) \in L$ und folglich

$$\lambda(H_o - s_\alpha H_o) \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (*)$$

Andererseits ist

$$\lambda(H_o - s_\alpha H_o) = \langle \lambda, (I - s_\alpha)H_o \rangle = \langle (I - s_\alpha)\lambda, H_o \rangle, \quad (**)$$

denn s_α ist eine orthogonale Spiegelung, also selbstadjungiert.⁵² Da $s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$, folgt $(I - s_\alpha)\lambda = 2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha$, und mit $\langle \alpha, H_o \rangle = 2\pi$ ergibt sich

$$\langle (I - s_\alpha)\lambda, H_o \rangle = 2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot 2\pi. \quad (***)$$

Nach (**) und (*) ist dieser Ausdruck ein ganzzahliges Vielfaches von 2π , somit muss der Faktor $2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ auf der rechten Seite von (***) eine ganze Zahl sein, was zu zeigen war. \square

Korrektur: Dieser Beweis aus [Adams] ist nicht ganz in Ordnung, denn ein solches $H_o \in L$ mit $\langle \alpha, H_o \rangle = 2\pi$ existiert nicht immer.⁵³ Man kann aber H_o spezieller wählen: $H_o = t\alpha \in L$ mit kleinstmöglichem $t > 0$. Weil α in der Liealgebra einer Untergruppe isomorph zu SO_3 oder SU_2 liegt, finden wir $\alpha(H_o) = 2\pi$ oder $\alpha(H_o) = 4\pi$. Weil aber H_o in Richtung von α zeigt, ist $s_\alpha(H_o) = -H_o$ und deshalb $H_o - s_\alpha(H_o) = 2H_o$. Daraus folgt $\langle (I - s_\alpha)\lambda, H_o \rangle = \lambda(H_o - s_\alpha(H_o)) = 2\lambda(H_o) \in 4\pi\mathbb{Z}$. Somit folgt die Behauptung auch dann, wenn 2π in (***) durch 4π ersetzt werden muss.

⁵² $s^T = s^{-1}$ und $s^{-1} = s \Rightarrow s^T = s$.

⁵³Ein Gegenbeispiel ist Sp_n : Das Gitter L wird durch $2\pi e_1, \dots, 2\pi e_n$ aufgespannt, und das Wurzelsystem ist $\pm\{2e_i, e_i \pm e_j : i < j \leq n\}$. Das Skalarprodukt der Wurzel $\alpha = 2e_i$ mit jedem Element von L ist ein ganzes Vielfaches von 4π .

19. DIE WEYLSCHE CHARAKTERFORMEL

Jetzt können wir den Charakter $\chi = \chi_\phi$ einer unitären Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n$ leicht berechnen. Wir brauchen das nur auf dem maximalen Torus T zu tun (χ ist eine Klassenfunktion), und dort kennen wir die Matrix $\phi(u)$, $u = \exp H \in T$: Sie zerlegt $V = \mathbb{C}^n$ in Eigenräume, $V = \sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ mit $\phi(u)|_{V_\lambda} = e^{i\lambda(H)} I_{V_\lambda}$. Deshalb ergibt sich

$$(57) \quad \chi(u) = \text{Spur } \phi(u) = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda e^{i\lambda(H)}$$

mit $m_\lambda = \dim V_\lambda$ (*Multiplizität* des Gewichts λ). Das Betragsquadrat dieses Ausdrucks setzen wir als Funktion f in die Weylsche Integrationsformel (53) ein und erhalten

$$\int_G |\chi(g)|^2 dg = \frac{1}{|W|} \frac{1}{\text{vol } T} \int_T |\chi(u)\delta(u)|^2 du,$$

wobei⁵⁴

$$(58) \quad \begin{aligned} \chi\delta &= \sum_{\epsilon, \lambda} m_\lambda \text{sgn}(\epsilon) e^{i(\lambda + \rho_\epsilon)}, \\ |\chi\delta|^2 &= \sum_{\epsilon, \epsilon', \lambda, \lambda'} m_\lambda m_{\lambda'} \text{sgn}(\epsilon) \text{sgn}(\epsilon') e^{i(\lambda - \lambda')} e^{-i(\rho_\epsilon - \rho_{\epsilon'})}. \end{aligned}$$

Somit

$$\int_G |\chi(g)|^2 dg = \frac{1}{|W|} \sum_{\epsilon, \epsilon', \lambda, \lambda'} m_\lambda m_{\lambda'} \text{sgn}(\epsilon) \text{sgn}(\epsilon') I_{\epsilon, \epsilon', \lambda, \lambda'} \quad (*)$$

mit

$$I_{\epsilon, \epsilon', \lambda, \lambda'} = \frac{1}{\text{vol } T} \int_T e^{i(\lambda - \lambda')} \overline{e^{i(\rho_\epsilon - \rho_{\epsilon'})}} du = \begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda - \lambda' \neq \rho_{\epsilon'} - \rho_\epsilon \\ 1 & \text{falls } \lambda - \lambda' = \rho_{\epsilon'} - \rho_\epsilon \end{cases}$$

nach Satz 6.1: Die Rolle der kompakten Gruppe G in Satz 6.1 spielt hier der Torus T , und die irreduziblen Darstellungen $\rho, \tilde{\rho}$ dort sind hier die Gruppenhomomorphismen⁵⁵ $e^{i(\lambda - \lambda')}$ und $e^{i(\rho_\epsilon - \rho_{\epsilon'})}$ von T nach U_1 . Die meisten der mit $(\lambda, \lambda', \epsilon, \epsilon')$ parametrisierten Terme auf der rechten Seite von (*) verschwinden, nämlich alle, für die $\lambda - \lambda' \neq \rho_{\epsilon'} - \rho_\epsilon$. Übrig bleiben diejenigen $(\lambda, \lambda', \epsilon, \epsilon')$, für die $\lambda + \rho_\epsilon = \lambda' + \rho_{\epsilon'} =: \omega$, und für

⁵⁴Genau genommen müsste links $(\chi\delta) \circ \exp_t$ statt $\chi\delta$ stehen. Diese verkürzte Schreibweise benutzen wir öfters: Wenn Abbildungen $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ gleichgesetzt werden, dann ist $f \circ \exp = g$ gemeint.

⁵⁵Die Linearformen ρ_ϵ und $\rho_{\epsilon'}$ definieren einzeln genommen keine Gruppenhomomorphismen von T , weil sie halbzahlilig sind, aber ihre Differenz ist ganzzahlilig.

diese ist das Integral gleich Eins. Wir summieren daher zuerst über alle $\omega \in \Omega$ mit

$$\Omega := \{\lambda + \rho_\epsilon : \lambda \in \Lambda, \epsilon : \Delta_+ \rightarrow \{\pm 1\}\}$$

und danach über alle Quartetts $(\lambda, \lambda', \epsilon, \epsilon')$ mit $\lambda + \rho_\epsilon = \omega = \lambda' + \rho_{\epsilon'}$. Die innere Summe für festes ω ist

$$\sum_{\lambda + \rho_\epsilon = \omega} \sum_{\lambda' + \rho_{\epsilon'} = \omega} m_\lambda m_{\lambda'} \operatorname{sgn}(\epsilon) \operatorname{sgn}(\epsilon') = \left(\sum_{\lambda + \rho_\epsilon = \omega} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) \right)^2 \geq 0.$$

Insgesamt erhalten wir damit aus (*) für den Charakter χ einer beliebigen Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n$:

$$(59) \quad \int_G |\chi(g)|^2 dg = \frac{1}{|W|} \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{\lambda + \rho_\epsilon = \omega} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) \right)^2.$$

Unter den Gewichten $\lambda \in \Lambda$ zeichnen wir eines aus als *maximales* oder *höchstes* Gewicht λ_o . Dazu benötigen wir eine Halbordnung auf der Menge der Linearformen auf \mathfrak{t} : Wir nennen eine Linearform $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ *positiv*, wenn $\lambda|_C > 0$ für eine (fest gewählte) Weylkammer $C \subset \mathfrak{t}$, und wir sagen $\lambda > \mu$ für $\lambda, \mu \in \mathfrak{t}^*$, falls $\lambda - \mu$ positiv ist. Unter den endlich vielen Gewichten $\lambda \in \Lambda$ gibt es sicher (mindestens) ein Gewicht λ_o derart, dass $\lambda > \lambda_o$ für kein $\lambda \in \Lambda$ mehr gilt; dieses soll *höchstes Gewicht* genannt werden. Unter den Vorzeichenfunktionen ϵ gibt es ebenfalls eine ausgezeichnete ϵ_o , die jedem $\alpha \in \Delta_+$ den Wert +1 zuordnet. Die Summe

$$\omega_o = \lambda_o + \epsilon_o$$

ist ein ausgezeichnetes Element von Ω .

Lemma 19.1. *Außer $(\lambda_o, \rho_{\epsilon_o})$ gibt es kein zweites Paar (λ, ρ_ϵ) mit $\lambda + \rho_\epsilon = \omega_o$. Insbesondere ist $w\omega_o \neq \omega_o$ für alle $w \in W \setminus \{I\}$.*

Beweis. Andernfalls wäre $\lambda + \rho_\epsilon = \lambda_o + \rho_{\epsilon_o}$ und damit

$$\lambda - \lambda_o = \rho_{\epsilon_o} - \rho_\epsilon.$$

Wäre nun $\epsilon \neq \epsilon_o$, so wäre $\rho_{\epsilon_o} - \rho_\epsilon$ gleich der Summe aller $\alpha \in \Delta_+$ mit $\epsilon(\alpha) = -1$, und alle Summanden wären positiv. Das ist aber unmöglich, weil λ_o höchstes Gewicht ist. Somit ist $\epsilon = \epsilon_o$ und damit auch $\lambda = \lambda_o$. Wäre aber $w\omega_o = \omega_o$ für ein Weylelement $w \neq I$, dann hätten wir doch ein zweites Paar (λ, ρ_ϵ) mit $\lambda + \rho_\epsilon = \omega_o$ gefunden, nämlich $(w\lambda_o, w\rho_{\epsilon_o})$. \square

Der zu $\omega = \omega_o$ gehörige Summand auf der rechten Seite von (59) ist also nur noch $(m_{\lambda_o})^2$, und das Gleiche gilt für die Elemente des Orbits von ω_o unter der Weylgruppe. Nach dem vorstehenden Lemma hat der

Orbit $W\omega_o$ die maximale Anzahl von Elementen, nämlich $|W|$, denn kein Element von $W \setminus \{I\}$ hält ω_o fest. Wenn wir in (59) die Summe über Ω in die Teilsummen über den Orbit $W\omega_o \subset \Omega$ und über den Rest $\Omega' = \Omega \setminus W\omega_o$ aufspalten, so erhalten wir

$$(60) \quad \int_G |\chi(g)|^2 dg = (m_{\lambda_o})^2 + \frac{1}{|W|} \sum_{\omega \in \Omega'} \left(\sum_{\lambda + \rho_\epsilon = \omega} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) \right)^2.$$

Satz 19.1. Weylsche Charakterformel: *Für jede irreduzible Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n$ gibt es genau ein höchstes Gewicht λ_o , sein Gewichtsraum V_{λ_o} hat Dimension Eins, und der Charakter $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ von ϕ ist auf dem maximalen Torus $T \subset G$ gegeben durch*

$$(61) \quad \chi = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{iw(\lambda_o + \rho)}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{iw\rho}}$$

mit $\rho = \rho_{\epsilon_o} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$.

Beweis. Weil ϕ irreduzibel ist, ist $\int_G |\chi|^2 = 1$. Der Vergleich mit (60) zeigt, dass $m_{\lambda_o} = 1$ und die Summe über Ω' verschwinden muss. Damit müssen alle Summanden verschwinden, da sie ≥ 0 sind, also

$$(62) \quad \sum_{\lambda + \rho_\epsilon = \omega} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) = 0 \quad \forall \omega \notin W\omega_o.$$

Insbesondere kann es nur ein höchstes Gewicht λ_o geben. Nach (58) haben wir also

$$\begin{aligned} \chi\delta &= \sum_{\epsilon, \lambda} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) e^{i(\lambda + \rho_\epsilon)} \\ &= \sum_{\omega} \sum_{\rho_\epsilon + \lambda = \omega} m_\lambda \operatorname{sgn}(\epsilon) e^{i\omega} \\ &\stackrel{(62)}{=} \sum_{w \in W} m_{w\lambda_o} \operatorname{sgn}(\epsilon_w) e^{iw\omega_o} \\ &= \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(\epsilon_w) e^{iw(\lambda_o + \rho)}, \end{aligned}$$

denn $m_{w\lambda_o} = m_{\lambda_o} = 1$. Die Vorzeichenfunktion ϵ_w ist durch die Vorzeichen der Summanden von $w\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} w\alpha$ gegeben: Da wird immer noch über alle Wurzeln $\alpha \in \Delta_+$ summiert, abgesehen vom Vorzeichen, und deshalb können wir $w\rho$ wieder als Summe über alle $\alpha \in \Delta_+$ mit gewissen Vorzeichen $\epsilon_w(\alpha)$ schreiben: $w\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} \epsilon_w(\alpha) \alpha$ mit

$$\epsilon_w(\alpha) = \begin{cases} +1 & \text{falls } w\alpha \in \Delta_+, \\ -1 & \text{falls } w\alpha \in -\Delta_+. \end{cases}$$

Das Vorzeichen $\text{sgn}(\epsilon_w)$ zählt also, wieviele Wurzeln in Δ_+ durch w nach $-\Delta_+$ geschickt werden. Wir werden im nachfolgenden Lemma sehen, dass $\epsilon_w = \det w$, womit wir gezeigt haben:

$$(63) \quad \chi\delta = \sum_{w \in W} \det(w) e^{iw(\lambda_o + \rho)}.$$

Diese Formel gilt für alle irreduziblen Darstellungen, speziell auch für die eindimensionale triviale Darstellung $\phi_o : G \rightarrow U_1$, $\phi_o(g) = 1$ für alle g . Diese hat den Charakter $\chi_o = 1$ und höchstes Gewicht 0 und daher

$$(64) \quad \delta = \chi_o \delta = \sum_{w \in W} \det(w) e^{iw\rho}.$$

Damit erhalten wir (61) für $\chi = \frac{\chi\delta}{\delta}$. □

Lemma 19.2. *Es sei $w \in W$ und $\epsilon_w = (-1)^k$, wobei $k = \#\{\alpha \in \Delta_+ : w\alpha \in -\Delta_+\}$. Dann gilt*

$$\epsilon_w = \det w.$$

Beweis. Wenn w selbst eine Spiegelung an einer Wand α_o^\perp der ausgezeichneten Weylkammer C ist, $w = s_{\alpha_o}$, dann wechselt nur $\alpha_o \in \Delta_+$ bei Anwenden von w sein Vorzeichen, für alle anderen $\alpha \in \Delta_+$ dagegen gilt $w\alpha \in \Delta_+$. Also ist $\epsilon_w(\alpha_o) = -1$ und $\epsilon_w(\alpha) = 1$ für alle $\alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_o\}$ und damit $\epsilon_w = -1 = \det w$. Da jedes $w \in W$ ein Produkt von Spiegelungen an Wänden von C ist, von sog. *n Spiegelungen*,⁵⁶ $w = s_1 \dots s_p$, wird durch w insgesamt p -mal eine positive Wurzel $\alpha \in \Delta_+$ nach $-\Delta_+$ abgebildet und damit ist $\epsilon_w = (-1)^p = \det w$. □

Satz 19.2. (Dimensionsformel) *Die Dimension n einer irreduziblen Darstellung $\phi : G \rightarrow U_n$ mit höchstem Gewicht λ_o ist*

$$(65) \quad n = n_{\lambda_o} := \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha, \lambda_o + \rho \rangle}{\langle \alpha, \rho \rangle}.$$

⁵⁶Dies sieht man geometrisch so ein: Die Weylkammer C wird durch w auf eine andere Weylkammer wC abgebildet, und es gibt eine "Galerie" von Weylkammern $C = C_0, C_1, \dots, C_p = wC$ derart, dass C_{i-1} und C_i jeweils benachbart sind, also genau eine "Wand" α_i^\perp gemeinsam haben. Das Weylelement $w' = s_{\alpha_p} \dots s_{\alpha_1}$ überführt ebenfalls C nach C_p , also ist $w = w'$. Wir nennen p die *Länge* von w , falls es keine kürzere Galerie zwischen C und wC gibt. Durch Induktion über p sehen wir nun, dass jedes $w \in W$ eine Verkettung von fundamentalen Spiegelungen ist. Für $p = 1$ ist dies klar. Wenn w eine Länge $p > 1$ hat, dann ist $w = s_{\alpha_p} \bar{w}$, und $\bar{w} \in W$ hat Länge $p - 1$, ist also nach Induktionsvoraussetzung bereits Produkt von fundamentalen Spiegelungen. Aber α_p^\perp ist Wand zwischen den Weylkammern $C_{p-1} = \bar{w}C$ und C_p , also ist $\bar{w}^{-1} \alpha_p^\perp =: \alpha^\perp$ eine Wand von C , da $\bar{w}^{-1} C_{p-1} = C$. Damit ist s_α eine fundamentale Spiegelung und $s_{\alpha_p} = \bar{w} s_\alpha \bar{w}^{-1}$ ein Produkt fundamentaler Spiegelungen.

Beweis. Es ist $n = \chi(e) = \lim_{t \rightarrow 0} \chi(e^{t\rho})$. Nach der Weylschen Charakterformel (61) ist

$$\chi(e^{t\rho}) = \frac{\sum_{w \in W} \det(w) e^{it\langle w(\lambda_o + \rho), \rho \rangle}}{\sum_{w \in W} \det(w) e^{it\langle w(\rho), \rho \rangle}} \stackrel{(64)}{=} \frac{\delta(t(\lambda_o + \rho))}{\delta(t\rho)}.$$

Für δ setzen wir nun die ursprüngliche Formel (51) ein und ersetzen die Differenzen der Exponentialterme durch Sinus-Terme:

$$\delta(v) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2i \sin\left(\frac{1}{2}\alpha(v)\right)$$

also

$$\frac{\delta(t(\lambda_o + \rho))}{\delta(t\rho)} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\sin(t\langle \lambda_o + \rho, \alpha \rangle / 2)}{\sin(t\langle \rho, \alpha \rangle / 2)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{\langle \alpha, \lambda_o + \rho \rangle}{\langle \alpha, \rho \rangle}. \quad \square$$

20. DIE IRREDUZIBLEN DARSTELLUNGEN VON G

Wir betrachten ganzzahlige Linearformen $\mu \in \mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}$, die im Abschluss unserer Weylkammer \bar{C} liegen; das ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil $\mathfrak{t} = \bigcup_{w \in W} w\bar{C}$. Beispiele sind die Höchstgewichte von irreduziblen Darstellungen. Aber unabhängig davon können wir jeder solchen Linearform μ die Funktion aus der Weylschen Charakterformel (61) zuordnen:

$$\chi_\mu = \frac{a(\mu)}{\delta}, \quad a(\mu) = \sum_{w \in W} \det(w) e^{iw(\mu + \rho)}, \quad \delta = \sum_{w \in W} \det(w) e^{iw(\rho)}$$

mit $\rho = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha)$. Dies ist eine Funktion auf T , die invariant unter der Weylgruppe W ist und sich daher eindeutig zu einer stetigen Klassenfunktion auf G fortsetzen lässt, die wir ebenfalls χ_μ nennen wollen. Wenn μ das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung ϕ ist, dann ist $\chi_\mu = \chi_\phi$ nach der Charakterformel Satz 19.1 der Charakter dieser Darstellung.

Lemma 20.1. *Für je zwei ganzzahlige Linearformen $\lambda, \mu \in \bar{C}$ gilt:*

$$(66) \quad \int_G \chi_\lambda \overline{\chi_\mu} dg = \delta_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda = \mu, \\ 0 & \text{falls } \lambda \neq \mu. \end{cases}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |W| \int_G \chi_\lambda \overline{\chi_\mu} dg &= \frac{1}{\text{vol } T} \int_T \chi_\lambda \overline{\chi_\mu} \delta \overline{\delta} du = \frac{1}{\text{vol } T} \int_T a(\lambda) \overline{a(\mu)} du \\ &= \sum_{w, \tilde{w} \in W} \det(w\tilde{w}) \frac{1}{\text{vol } T} \int_T e^{i(w\lambda - \tilde{w}\mu)} \overline{e^{i(\tilde{w}\rho - w\rho)}} du. \end{aligned}$$

Wie schon früher wenden wir den Orthogonalitätssatz 6.1 auf den Torus an. Die ganzzahligen (!) Linearformen $w\lambda - \tilde{w}\mu$ und $\tilde{w}\rho - w\rho$ definieren eindimensionale irreduzible Darstellungen von T , und es bleiben nur die Terme übrig mit

$$w\lambda - \tilde{w}\mu = \tilde{w}\rho - w\rho,$$

also $\lambda + \rho = w^{-1}\tilde{w}(\mu + \rho)$; für diese ist das Integral gleich Eins. Da $\lambda + \rho, \mu + \rho \in C$, ist $w^{-1}\tilde{w} = I$ und $\lambda = \mu$. Dann ist $\det(w\tilde{w}) = \det(w)^2 = 1$, und wir erhalten $|W|$ -mal den Summanden Eins und damit die Behauptung. \square

Die Funktionenmenge $F = \{\chi_\mu : \mu \in \bar{C}, \mu \text{ ganzzahlig}\}$ auf G bildet also ein Orthonormalsystem im Vektorraum $C(G)^{i(G)}$ aller stetigen \mathbb{C} -wertigen Klassenfunktionen⁵⁷ auf G mit dem hermiteschen Skalarprodukt

$$\langle f_1 | f_2 \rangle := \int_G f_1(g) \overline{f_2(g)} dg.$$

Andererseits zeigt der Satz von Peter und Weyl, den wir im nächsten Abschnitt beweisen, dass die Teilmenge $\{\chi_\phi : \phi \text{ irreduzibel}\} \subset F$ sogar eine Orthonormalbasis von $C(G)^{i(G)}$ bildet. Also sind die Mengen identisch und wir haben gezeigt:

Satz 20.1. *Die folgenden Objektklassen stehen in 1-1-Beziehung zueinander:*

- (1) Irreduzible unitäre Darstellungen ϕ von G ,
- (2) Klassenfunktionen χ mit $\langle \chi | \chi \rangle = 1$,
- (3) ganzzahlige Linearformen λ_o , bis auf Weyl-Transformationen.

Jede irreduzible Darstellung definiert eine ganzzahlige Linearform, nämlich ihr Höchstgewicht, und jede ganzzahlige Linearform $\lambda_o \in \bar{C}$ definiert mit der Weylschen Charakterformel (61) den Charakter genau einer irreduziblen Darstellung.

Die unitären Darstellungen einer kompakten Liegruppe G bilden einen Halbring mit der Addition \oplus und der Multiplikation \otimes . Man kann ihn zu einem Ring $R(G)$ ergänzen, dessen Elemente Differenzen von Darstellungen sind. Das Tensorprodukt von Darstellungen entspricht dem Produkt der Charaktere; die Höchstgewichte addieren sich dabei:

⁵⁷Wenn eine Gruppe G auf einem Raum V operiert, dann bezeichnet man mit V^G oft die Menge der Fixpunkte von G auf V . Hier ist $V = C(G)$, der Vektorraum der stetigen Funktionen auf G , auf dem $i(G)$ operiert: $gf(x) = f(g^{-1}xg)$. Die Fixpunkte $gf = f$ für alle $g \in G$ sind genau die Klassenfunktionen.

Lemma 20.2. *Sind ϕ, ψ irreduzible Darstellungen mit Höchstgewichten λ und μ , dann enthält $\phi \otimes \psi$ eine irreduzible Darstellung mit Höchstgewicht $\lambda + \mu$ (ist aber selbst i.A. nicht irreduzibel).*

Beweis. Die Darstellungsmoduln seien V und W mit Höchstgewichtsvektoren v_λ und w_μ . Für jedes $u \in T$ gilt dann

$$(\phi \otimes \psi)(u)(v_\lambda \otimes w_\mu) = \phi(u)v_\lambda \otimes \psi(u)w_\mu = \hat{\lambda}\hat{\mu} \cdot v_\lambda \otimes w_\mu,$$

also ist $\hat{\lambda}\hat{\mu} = e^{i(\lambda+\mu)}$ Gewicht von $\phi \otimes \psi$, in der Tat ein höchstes Gewicht, denn alle Gewichte sind ebenso Summen von Gewichten von ϕ und ψ . \square

Wir brauchen also nur eine Basis von solchen ganzzahligen Linearformen zu kennen; man nimmt die duale Basis einer Wurzelbasis, die zu einer Weylkammer C gehört (die Wurzeln, die auf den Wänden von C senkrecht stehen und auf C positiv sind). Die zugehörigen irreduziblen Darstellungen heißen *Fundamentaldarstellungen*; sie erzeugen nach dem vorstehenden Lemma den Darstellungsring $R(G)$.

III. Der Satz von Peter und Weyl

21. MATRIXKOEFFIZIENTEN VON DARSTELLUNGEN

In Abschnitt 6, Gleichungen (12) und (15) haben wir gesehen, dass die *Matrixkoeffizienten* der irreduziblen Darstellungen einer kompakten Gruppe G ein Orthogonalsystem im Raum $C(G)$ der stetigen Funktionen auf G mit dem Skalarprodukt $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}dg$ bilden. Der Satz von Peter und Weyl⁵⁸ sagt, dass dieses Orthogonalsystem sogar eine Basis ist, d.h. jede stetige Funktion lässt sich durch Linearkombinationen von Matrixelementen approximieren. Ebenso bilden die Charaktere, die ja gewisse Linearkombinationen von Matrixelementen sind, eine Orthonormalbasis des Raums der stetigen Klassenfunktionen auf G .

Was sind Matrixkoeffizienten von Darstellungen? Ist V endlichdimensional mit Basis b_1, \dots, b_n und dualer Basis β_1, \dots, β_n und $A : V \rightarrow V$ linear, dann können wir jede lineare Abbildung $A : V \rightarrow V$ bezüglich dieser Basis als Matrix darstellen: $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = \beta_i(Ab_j)$. Etwas allgemeiner nennen wir auch $a = \beta(Ab)$ für beliebige

⁵⁸F. Peter, H. Weyl: Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. 97 (1927), 737 - 755.
Fritz Peter (1899 - 1949) war Student von Hermann Weyl (1885 - 1955).

$b \in V$ und $\beta \in V^*$ einen Matrixkoeffizienten von A ; wenn $b = \sum_i \lambda_i b_i$ und $\beta = \sum_j \mu_j \beta_j$, so ist

$$(67) \quad a = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j a_{ij}$$

eine Linearkombination der Basis-Matrixkoeffizienten a_{ij} . Ist nun $A = \phi(g)$ für eine Darstellung $\phi : G \rightarrow GL(V)$, so ist jeder Matrixkoeffizient $\beta(\phi(g)b)$ von $\phi(g)$ noch von g abhängig, also eine stetige (sogar eine differenzierbare) Funktion auf G . Wegen der Beziehung (67) bilden die Matrixkoeffizienten von ϕ einen Unterraum von $C(G)$ der Dimension n^2 für $n = \dim V$. Wie können wir diese besonderen Funktionen unter den Elementen von $C(G)$ kennzeichnen?

Dazu betrachten wir die Operation von G auf $C(G)$ durch Rechts-translation des Arguments: Für jede Funktion $f \in C(G)$ definieren wir die Funktion $\rho(g)f = gf \in C(G)$ durch $gf = f \circ R_g$ oder $gf(x) = f(xg)$. Dies ist eine Wirkung, denn $hgf(x) = gf(xh) = f(xhg)$, und die Wirkung ρ ist linear, also eine (unendlich-dimensionale) Darstellung von G auf dem Vektorraum $C(G)$; wir nennen sie die *rechtsreguläre Darstellung*.⁵⁹

Lemma 21.1. *Eine Funktion $f \in C(G)$ ist Matrixkoeffizient einer endlich-dimensionalen Darstellung von G genau dann, wenn f in einem endlich-dimensionalen G -Teilmodul bezüglich ρ liegt, wenn also die Funktionenmenge $\{gf : g \in G\}$ einen endlich-dimensionalen Teilraum von $C(G)$ aufspannt.*

Beweis. “ \Rightarrow ”: Ist f Matrixkoeffizient einer Darstellung $\phi : G \rightarrow GL(V)$, also $f(x) = \beta\phi(x)b$ für $b \in V$, $\beta \in V^*$, dann ist $\rho(g)f$ ein anderer Matrixkoeffizient derselben Darstellung:

$$\rho(g)f(x) = f(xg) = \beta\phi(xg)b = \beta\phi(x)\phi(g)b = \beta\phi(x)\tilde{b}$$

mit $\tilde{b} = \phi(g)b \in V$. Da die Matrixkoeffizienten von ϕ einen endlich-dimensionalen Unterraum von $C(G)$ (mit Basis $\phi_{ij}(g) = \beta_i\phi(g)b_j$) aufspannen, liegt f in einem endlich-dimensionalen Teilmodul.⁶⁰

“ \Leftarrow ” Wenn f in einem endlich-dimensionalen Teilmodul $V \subset C(G)$ liegt, betrachten wir eine Basis f_1, \dots, f_n von V . In dieser Basis

⁵⁹Ebenso könnten wir auf $C(G)$ die *linksreguläre Darstellung* $(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$ betrachten; auf $C(G)$ operiert somit nicht nur G , sondern $G \times G$ durch $\lambda \times \rho$.

⁶⁰Dieser Teilmodul hat die Dimension $n^2 = \dim \text{Hom}(V, V)$; es ist sogar ein $G \times G$ -Modul mit der Darstellung $\phi^* \otimes \phi$ auf $V^* \otimes V = \text{Hom}(V, V)$.

wird $\phi := \rho|_V$ zu einer Matrixdarstellung von G auf \mathbb{C}^n .⁶¹ Dann ist $f = \sum_j \beta_j f_j$. Setzen wir $b = (f_1(e), \dots, f_n(e))^T \in \mathbb{C}^n$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in (\mathbb{C}^n)^*$, dann ist $\phi(g)b = (f_1(g), \dots, f_n(g))^T$ und $f(g) = \sum_j \beta_j f_j(g) = \beta(\phi(g)b)$ ist ein Matrixkoeffizient der Darstellung ϕ . \square

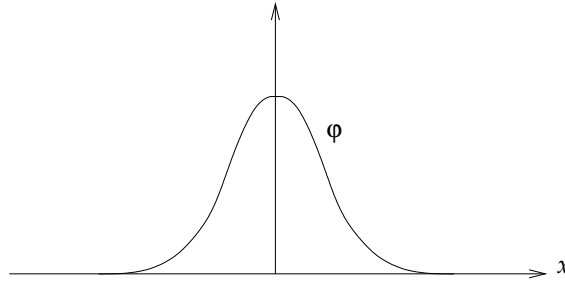
Korollar 21.1. *Jede Darstellung von G kommt als Teildarstellung der rechtsregulären Darstellung ρ von G auf $C(G)$ vor.*

Beweis. Die Matrixkoeffizienten einer Darstellung bilden eine äquivalente Teildarstellung in $C(G)$. \square

Um zu zeigen, dass die Matrixkoeffizienten von Darstellungen den ganzen Raum $C(G)$ aufspannen, müssen wir nachweisen, dass die endlich-dimensionalen Teildarstellungen von ρ alles aufspannen. Dazu stellen wir diese Teilräume als Eigenräume gewisser $\rho(G)$ -invarianter Operatoren (Glättungsoperatoren) auf $C(G)$ dar und zeigen, dass deren Eigenräume den ganzen Raum $C(G)$ aufspannen. Wir folgen dabei im Wesentlichen der Darstellung von [Bröcker/Tom Dieck], 129 - 136.

22. GLÄTTUNGSOPERATOREN

Jede stetige Funktion f auf \mathbb{R}^n lässt sich *glätten*, d.h. durch eine glatte Funktion \tilde{f} gleichmäßig approximieren. Dazu brauchen wir eine C^∞ -Funktion $\varphi \geq 0$ auf \mathbb{R}^n , die nur in einer ϵ -Umgebung des Ursprungs Werte ungleich Null hat, mit $\int \varphi = 1$.



⁶¹Eigentlich müssen wir noch zeigen, dass diese Darstellung differenzierbar ist. Sie ist sicher stetig: Wenn f_1, \dots, f_n eine unitäre Basis von V ist bezüglich des L^2 -Skalarprodukts und $\rho(g)f_j = \sum_i a_{ij}(g)f_i$, dann ist $\langle \rho(g)f_j, f_k \rangle = \sum_i a_{ij}(g)\langle f_i, f_k \rangle = a_{kj}(g)$, und die linke Seite $\langle \rho(g)f_j, f_k \rangle = \int_{x \in G} f_j(xg)\overline{f_k(x)} dx$ hängt stetig von $g \in G$ ab, also sind die Matrixkoeffizienten a_{ij} stetig von g abhängig. Somit ist $\rho|_V$ konjugiert zu einem stetigen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi} : G \rightarrow U_n$. Nach einem allgemeinen Satz [Hochschild] ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus in eine (endlich-dimensionale) Liegruppe bereits differenzierbar. Wir werden in Kürze sehen, dass die Funktionen f_i selbst differenzierbar (C^∞) sind.

Dann setzen wir

$$\tilde{f}(x) = \int_{u \in \mathbb{R}^n} f(x+u)\varphi(u)du \stackrel{\left(\begin{smallmatrix} y = x+u \\ dy = du \end{smallmatrix}\right)}{=} \int_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)\varphi(y-x)dy.$$

Die erste Darstellung ist anschaulicher: Um $\tilde{f}(x)$ zu ermitteln, mittelt man über die Werte $f(x+u)$ für kleine u mit dem Gewichtungsfaktor $\varphi(u)$. Aus der zweiten Darstellung sieht man, dass \tilde{f} glatt ist, denn das Argument x steht nur in der glatten Funktion φ , und man differenziert unter dem Integral. Wenn f gleichmäßig stetig ist (was auf einer kompakten Menge für jede stetige Funktion gilt), also $|f(x+u) - f(x)| < \epsilon$ für $|u| < \delta$, dann gilt $\tilde{f}(x) - f(x) = \int_u (f(x+u) - f(x))\varphi(u)du$ und somit $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \int_u |f(x+u) - f(x)|\varphi(u)du \leq \epsilon \int \varphi(u)du = \epsilon$.

Wenn wir uns auf periodische Funktionen f einschränken, solche, die auf dem Torus $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ definiert sind, dann haben wir hier ein Beispiel von Glättungsoperatoren auf kompakten Liegruppen. Dieses lässt sich auf eine beliebige kompakte Liegruppe G übertragen; wir müssen nur die Operationen $+$ und $-$ durch die entsprechenden Gruppenoperationen ersetzen. Wir definieren daher für jedes $f \in C(G)$

$$(68) \quad \tilde{f}(x) = (Kf)(x) := \int_{u \in G} f(ux)\varphi(u)du \stackrel{y=ux}{=} \int_{y \in G} f(y)\varphi(yx^{-1})dy,$$

wobei wir verwenden, dass das Maß auf G rechtsinvariant ist: $dy = du$ für $y = ux$. Dabei ist die C^∞ -Funktion $\varphi \geq 0$ auf G definiert und nur auf einer ϵ -Umgebung des Einselements $e \in G$ (gemessen in einer biinvarianten Metrik auf G) ungleich Null. Im nächsten Abschnitt werden wir zusätzlich noch $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)$ für alle $g \in G$ voraussetzen. Wie vorher ist \tilde{f} eine gleichmäßige Approximation von f , denn für alle $x \in G$ ist

$$(69) \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int_G |f(ux) - f(x)|\varphi(u)du \leq \epsilon$$

wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f , da $|ux, x| = |ux, ex| = |u, e| < \delta$ (die Linkstranslation L_u ist eine Isometrie, also $|L_u(x), L_u(e)| = |x, e|$).

Lemma 22.1. *Die lineare Abbildung $K : C(G) \rightarrow C(G)$, $Kf = \tilde{f}$ wie in (68) ist äquivariant unter der rechtsinvarianten Darstellung ρ auf $C(G)$,*

$$(70) \quad K(\rho(g)f) = \rho(g)(Kf).$$

Beweis.

$$K(\rho(g)f)(x) = \tilde{gf}(x) = \int_G (gf)(ux)\varphi(u)du = \int_G f(uxg)\varphi(u)du,$$

$$(\rho(g)(Kf))(x) = \tilde{f}(xg) = \int_G f(uxg)\varphi(u)du.$$

□

Für $f \in C(G)$ haben wir verschiedene *Normen*, die L^2 -Norm $\|f\| = \sqrt{\int_G |f|^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$, die L_1 -Norm $\|f\|_1 = \int_G |f|$ und die Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_x |f(x)|$. Sie stehen zueinander in folgender Beziehung:

Lemma 22.2. *Für jedes $f \in C(G)$ gilt*

$$(71) \quad \|f\|_1 \leq \|f\| \leq \|f\|_\infty.$$

Beweis. $\|f\|_1 = \int |f| = \langle |f|, 1 \rangle \leq \|f\| \|1\| = \|f\|$ nach Cauchy-Schwarz und wegen $\int_G 1 = \text{vol } G = 1$. Ferner $\|f\|^2 = \int |f|^2 \leq \sup |f|^2 = \|f\|_\infty^2$. □

Aus der Topologie des \mathbb{R}^n sind wir gewohnt, dass eine beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Das ist in einem unendlich-dimensionalen Vektorraum nicht mehr richtig, zum Beispiel könnten wir ein unendliches Orthonormalsystem $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $C(G)$ nehmen, also $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$. Dann gilt $\|f_i - f_j\|^2 = \|f_i\|^2 + \|f_j\|^2 - 2\langle f_i, f_j \rangle = 2$ für $i \neq j$, also haben je zwei Folgenglieder f_i, f_j den Abstand $\sqrt{2}$ bezüglich der L^2 -Norm; damit kann die Folge (f_j) keine konvergente Teilfolge besitzen.

Eine lineare Abbildung $K : C(G) \rightarrow C(G)$ heißt *kompakter Operator*, wenn jedenfalls die Folge $(Kf_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge besitzt, für jede beschränkte Folge (f_j) . Ein Beispiel ist unser Glättungsoperator K :

Satz 22.1. *Der Operator $K : f \mapsto \tilde{f}$ auf $C(G)$ ist ein kompakter Operator; genauer gilt: Ist (f_j) eine bezüglich der L^2 -Norm $\|\cdot\|$ beschränkte Folge in $C(G)$, so besitzt $(Kf)_j$ eine bezüglich der Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_1$ konvergente Teilfolge.*

Beweis. Für jedes $f \in C(G)$ und $x, x_o \in G$ mit genügend kleinem Abstand $|x, x_o| < \delta$ gilt

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_o)| \leq \int |f(y)| |\varphi(yx^{-1}) - \varphi(yx_o^{-1})| dy,$$

und weil $|yx^{-1}, yx_o^{-1}| = |x^{-1}, x_o^{-1}| = |x, x_o| < \delta$ (die Linkstranslation L_y und die Inversion $x \mapsto x^{-1}$ sind ja Isometrien auf G), folgt mit der gleichmäßigen Stetigkeit von φ , dass $|\varphi(yx^{-1}) - \varphi(yx_o^{-1})| < \epsilon$ und damit

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_o)| < \epsilon \|f\|_1.$$

Wenn also eine Folge (f_j) gegeben ist mit $\|f_j\|_1 \leq \|f_j\| \leq 1$ für alle j , dann sind die $\tilde{f}_j = Kf_j$ gleichgradig stetig mit Stetigkeitsmodul δ unabhängig von j , und nach dem Satz von Ascoli gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, also ein $f \in C(G)$ mit $\|f_{j_i} - f\| \leq \|f_{j_i} - f\|_\infty \rightarrow 0$. \square

23. EIGENRÄUME DES GLÄTTUNGSOPERATORS

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass K selbstadjungiert ist und Bild K in endlich-dimensionale Eigenräume zerfällt; diese sind G -Moduln.

Lemma 23.1. *Wenn $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)$ für alle $g \in G$, dann ist $K : f \mapsto \tilde{f}$ (wie in (68) definiert) selbstadjungiert, d.h. $\langle Kf_1, f_2 \rangle = \langle f_1, Kf_2 \rangle$ für alle $f_1, f_2 \in C(G)$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \langle Kf_1, f_2 \rangle &= \int_x \int_y f_1(y) \overline{f_2(x)} \varphi(yx^{-1}) dy dx, \\ \langle f_1, Kf_2 \rangle &= \int_x \int_y f_1(x) \overline{f_2(y)} \varphi(yx^{-1}) dy dx. \end{aligned}$$

Vertauscht man die Rollen der Variablen x and y in der zweiten Zeile und benutzt $\varphi(xy^{-1}) = \varphi((xy^{-1})^{-1}) = \varphi(yx^{-1})$, so werden die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite identisch. \square

Wie bei selbstadjungierten Matrizen in endlichen Dimensionen können wir also erwarten, dass es reelle Eigenwerte gibt. Aber das charakteristische Polynom $\det(K - \lambda I)$ steht hier nicht mehr ohne weiteres zur Verfügung; wir müssen also die Eigenwerte auf anderem Wege finden. Dazu bietet sich die *Norm* des Operators K an; wie in endlichen Dimensionen sollte der Eigenwert mit dem größten Betrag die Norm der linearen Abbildung sein. Die Norm von K ist nicht anders als in endlichen Dimensionen definiert:

$$\|K\| = \sup_{\|f\|=1} \|Kf\|.$$

Aber wir können diese Norm auch anders berechnen:

Lemma 23.2.

$$(72) \quad \|K\| = \sup_{\|f\|=1} |\langle Kf, f \rangle| =: \|K\|_o.$$

Beweis. “ $\|K\|_o \leq \|K\|$ ”, denn für jedes $f \in C(G)$ mit $\|f\| = 1$ gilt nach Cauchy-Schwarz: $|\langle Kf, f \rangle| \leq \|Kf\| \|f\| = \|Kf\|$.

“ $\|K\|_o \geq \|K\|$ ”: Trivialerweise gilt $\|Kf\| = \langle Kf, k \rangle$ mit $k = \frac{Kf}{\|Kf\|}$. Wegen der Selbstadjungiertheit von K gilt

$$\langle K(f \pm k), f \pm k \rangle = \langle Kf, f \rangle + \langle Kk, k \rangle \pm 2\|Kf\|,$$

denn $\langle Kf, k \rangle = \|Kf\| = \langle Kk, f \rangle$. Die Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt auf der rechten Seite $4\|Kf\|$ und auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \langle K(f+k), f+k \rangle - \langle K(f-k), f-k \rangle & \leq \|K\|_o \|f+k\|^2 + \|K\|_o \|f-k\|^2 \\ & \leq 4\|K\|_o \end{aligned}$$

denn wegen $\|f\| = \|k\| = 1$ ist $\|f \pm k\| \leq 2$. Damit ergibt sich

$$4\|K\| \leq 4\|K\|_o. \quad \square$$

Satz 23.1. $\|K\|$ oder $-\|K\|$ ist Eigenwert von K .

Beweis. Es gibt eine Folge (f_n) in $C(G)$ mit $\|f_n\| = 1$ und $|\langle Kf_n, f_n \rangle| \rightarrow \|K\|$. Es sei $\lambda = \lim \langle Kf_n, f_n \rangle$ (vielleicht muss man zu einer Teilfolge übergehen). Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 & \leq \|Kf_n - \lambda f_n\| \\ & = \langle Kf_n - \lambda f_n, Kf_n - \lambda f_n \rangle \\ & = \|Kf_n\|^2 - 2\lambda \langle Kf_n, f_n \rangle + \lambda^2 \\ & \leq \lambda^2 - 2\lambda \langle Kf_n, f_n \rangle + \lambda^2 \\ & \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\langle Kf_n, f_n \rangle \rightarrow \lambda$. Insbesondere folgt $\|Kf_n - \lambda f_n\| \rightarrow 0$. Weil K ein kompakter Operator ist, konvergiert Kf_n (nach Übergang zu einer Teilfolge) gleichmäßig gegen eine Funktion \tilde{f} , also konvergiert λf_n gegen dieselbe Funktion \tilde{f} und damit $f_n \rightarrow f := \tilde{f}/\lambda$ mit $\|f\| = 1$. Somit ist

$$Kf = \lim Kf_n = \lim \lambda f_n = \lambda f. \quad \square$$

Dieselbe Überlegung trifft für jeden K -invarianten Teilraum $W \subset C(G)$ zu, und die Norm $\|K_W\|$ ist bis auf das Vorzeichen ein Eigenwert von W_K . Insbesondere gilt dies für das orthogonale Komplement aller Eigenräume E_λ , also für den Raum $W = \left(\sum_{\lambda \in \text{EW}(K)} E_\lambda \right)^\perp$, wobei $\text{EW}(K)$ die Menge der Eigenwerte von K bezeichnet; wäre dieser Raum $\neq 0$, müsste er einen Eigenvektor von K enthalten, aber das ist unmöglich, weil alle Eigenvektoren schon in seinem orthogonalem Komplement liegen! Also erhalten wir als Folgerung:

Korollar 23.1. $C(G)$ wird von den Eigenvektoren von K aufgespannt (im topologischen Sinn: $C(G)$ ist der topologische Abschluss des Raums aller Linearkombinationen von Eigenvektoren).

Jetzt fehlt nur noch der Nachweis, dass alle Eigenräume mit Ausnahme des Kerns von K endlich-dimensional sind. Dies folgt aus dem nächsten Satz:

Satz 23.2. *Für jedes $\epsilon > 0$ ist der Raum $W_\epsilon = \sum_{|\lambda| \geq \epsilon} E_\lambda$ endlich-dimensional.*

Beweis. Andernfalls gäbe es eine Orthonormalbasis aus Eigenfunktionen f_j mit $Kf_j = \lambda_j f_j$ und $|\lambda_j| \geq \epsilon$. Wegen der Kompaktheit von K müsste eine Teilfolge der Folge (Kf_j) konvergieren, aber für $i \neq j$ gilt $\|Kf_i - Kf_j\| = \|\lambda_i f_i - \lambda_j f_j\| \geq \sqrt{2}\epsilon$, denn $\lambda_i f_i \perp \lambda_j f_j$ und $\|\lambda_i f_i\|, \|\lambda_j f_j\| \geq \epsilon$. Das ist ein Widerspruch! \square

24. DER SATZ VON PETER-WEYL

Satz 24.1. *Jede Funktion $f \in C(G)$ lässt sich (bezüglich der L^2 -Norm $\|\cdot\|$) durch Matrixkoeffizienten von Darstellungen approximieren.*

Beweis. Nach (69) gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Gewichtsfunktion φ und den zugehörigen Glättungsoperator K gemäß (68) mit $|Kf - f| \leq \epsilon$. Da nach Korollar 23.1 der ganze Raum $C(G)$ in Eigenräume von K zerfällt, ist⁶² $\text{Bild}(K) = (\ker K)^\perp$ die Summe der Eigenräume E_λ mit $\lambda \neq 0$. Nach Satz 23.2 ist jedes solche E_λ endlich-dimensional und zudem ein $\rho(G)$ -Modul, denn K vertauscht mit $\rho(g)$ für jedes $g \in G$ (Lemma 22.1).⁶³ Nach Lemma 21.1 besteht jedes E_λ aus Matrixkoeffizienten von Darstellungen. Also wird f durch Linearkombinationen von Matrixkoeffizienten von Darstellungen approximiert. \square

Bemerkung: Die Approximation ist sogar gleichmäßig.

Satz 24.2. *Jede Klassenfunktion $f \in C(G)$ (d.h. $f(gxg^{-1}) = f(x)$ für alle $x, g \in G$) lässt sich bezüglich der L^2 -Norm $\|\cdot\|$ durch Charaktere von Darstellungen von G approximieren.*

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $f = \sum_k a_k f_k$ für Darstellungsmatrixkoeffizienten f_k . Weil $f(gxg^{-1}) = f(x)$, gilt auch $f(x) = \int_G f(gxg^{-1})dg$, und diese Funktion lässt sich durch $\sum_k a_k \bar{f}_k$ mit $\bar{f}_k = \int_G f_k(gxg^{-1})dg$ approximieren. Da f_k ein Matrixkoeffizient einer Darstellung $\phi : G \rightarrow U(V)$ ist, gibt es Vektoren $b_k \in V$ und Linearformen $\beta_k \in V^*$ mit $f_k(x) = \beta_k \phi(x) b_k$ und damit $\bar{f}_k(x) = \beta_k \left(\int_G \phi(gxg^{-1})dg \right) b_k$. Nach (13) ist $\int_G \phi(g)\phi(x)\phi(g)^{-1}dg = \frac{1}{n} \text{Spur}(\phi(x)) \cdot I = \frac{1}{n} \chi_\phi(x) \cdot I$, und somit ist $\bar{f}_k = c_k \chi_\phi$ mit $c_k = \frac{1}{n} \beta_k(b_k)$. \square

⁶² $f_o \in \ker K \iff \forall f \in C(G) \ 0 = \langle Kf_o, f \rangle = \langle f_o, Kf \rangle \iff f_o \in (\text{Bild } K)^\perp$.

⁶³ $f \in E_\lambda \Rightarrow K(\rho(g)f) = \rho(g)Kf = \lambda\rho(g)f \Rightarrow \rho(g)f \in E_\lambda$.

LITERATUR

- [Adams] F.A. Adams: Lectures on Lie Groups. Benjamin 1969
- [Bröcker/Tom-Dieck] Th. Bröcker, T. tom Dieck: Representations of Compact Lie Groups. Springer 1985
- [Fulton-Harris] W. Fulton, J. Harris: Representation Theory. A First Course. Springer 1991
- [Hochschild] G.P. Hochschild: The Structure of Lie Groups. Holden-Day, 1965
- [Hsiang] W.Y. Hsiang: Lectures on Lie Groups. World Scientific 2000

INDEX

- Abstand, 36
- Adjungierte Darstellung, 15, 29
- Algebra, 24
- antilinear, 19
- äquivalent, 6
- äquivariant, 33
- Ausnahmeorbit, 45

- Bahn, 8
- biinvariant, 35

- Centralisator, 34, 38, 44
- Charakter, 8
- Coxetergruppe, 42

- Darstellung, 4
- Derivation, 29, 30
- Diffeomorphismus, 4
- Dimensionsformel, 53
- Direkte Summe, 5
- Distribution, 25
- Drehstreckung, 14
- Dualraum, 16

- effektiv, 38
- einfach zusammenhängend, 28
- Exponentialabbildung, 22
- Exponentialgesetz, 22, 29

- Faser, 45
- Fixpunkt, 8
- fundamentale Spiegelung, 53

- G -Homomorphismus, 6
- Galerie, 53
- ganzzahlige Linearform, 40, 48
- Geodäte, 36
- Gewichte, 48
- Gewichtsvektor, 48
- Gitter, 31
- glätten, 58
- gleichmäßig stetig, 9
- GL_n , 3

- Haarmaß, 9
- Hamilton, R.J., 15
- höchstes Gewicht, 51

- innerer Automorphismus, 29

- integrabel, 25
- Integralkurve, 21
- irreduzibel, 6
- Irreduzibilitätskriterium, 13
- Isometrie, 35
- Isotropiedarstellung, 5, 34
- Isotropiegruppe, 5

- Jacobi-Identität, 24

- Klassenfunktion, 17
- kompakter Operator, 60
- komplexe Darstellung, 11
- komplexe Struktur, 11
- Konjugation, 15

- Länge, 35
- Lie, S., 2
- Liealgebra, 24
- Liegruppe, 2
- Lieprodukt, 24
- linksinvariant, 20
- Linkstranslation, 20

- Mannigfaltigkeit, 2
- Matrixgruppe, 3, 22
- Matrixkoeffizienten, 56
- maximaler Torus, 31
- Multiplizität, 50

- Norm, 60, 61
- normale Matrix, 32
- normalhomogen, 45
- Normalisator, 38

- O_n , 4
- Operation, 4
- Orbit, 8
- orthogonale Matrix, 4

- partielle Ableitung, 23
- Peter-Weyl-Theorem, 55
- positiv, 51

- quaternionale Struktur, 19
- Quaternionen, 15

- rechtsreguläre Darstellung, 57
- Rechtstranslation, 20

reelle Struktur, 19
regulär, 33, 44, 45
Richtungsableitung, 23
Riemannsche Metrik, 35
Riemannsche Submersion, 45

Schur, I., 6
 SL_n , 4
 SO_n , 4

Topologische Gruppe, 3
Topologischer Raum, 2
Torus, 31
totalgeodätisch, 37

Überlagerung, 27
unitäre Darstellung, 11
unitäre Gruppe, 11
Untergruppe, 26
unzerlegbar, 6

Vektorfeld, 20
verwandt, 23
Volumen, 9

Weyl, H., 38, 47
Weylgruppe, 38, 42
Weylkammer, 41, 51
Weylsche Charakterformel, 52
Wirkung, 4
Würfel, 2
Wurzel, 39
Wurzeln, 33, 48
Wurzelsystem, 42

zerlegbar, 6

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung	1
1. Liegruppen und ihre Wirkungen	2
2. Lineare Wirkungen oder Darstellungen	4
3. Irreduzible Darstellungen und Charaktere	6
4. Kompakte Gruppen und Mittelung	8
5. Existenz eines invarianten Skalarprodukts	11
6. Orthogonalität der Charaktere	11
7. Quaternionen und SU_2	14
8. Darstellungen von SO_2 und SU_2	15
9. Reelle, komplexe und quaternionale Darstellungen	19
10. Einparameter-Untergruppen	20
11. Richtungsableitung, Lieprodukt und Liealgebra	23
12. Der Satz von Frobenius	25
13. Adjungierte Darstellung und Lieprodukt	29
14. Maximale Tori in kompakten Liegruppen	31
15. Die Weylgruppe	37
16. Weylgruppe und Wurzeln	39
17. Die Weylsche Integrationsformel	43
18. Gewichte und Wurzeln	47
19. Die Weylsche Charakterformel	50
20. Die irreduziblen Darstellungen von G	54
21. Matrixkoeffizienten von Darstellungen	56
22. Glättungsoperatoren	58
23. Eigenräume des Glättungsoperators	61
24. Der Satz von Peter-Weyl	63
Literatur	64
Index	65