

Mehrere Variable

J.-H. Eschenburg, Universität Augsburg, SS 2006, 2008, 2012, 2014

INHALTSVERZEICHNIS

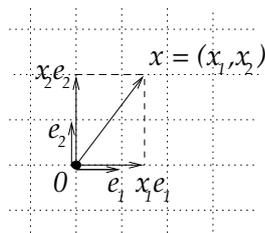
Vorbemerkung	1
1. Variable in der Sprache der Mathematik	6
2. Die Brennpunkte der Ellipse	10
3. Kegelschnitt-Gleichungen	13
4. Vektorräume, lineare Abbildungen, Matrizen	15
5. Determinanten	20
6. Eigenwerte und Eigenvektoren	24
7. Symmetrische Matrizen	26
8. Das Vektorprodukt	33
9. Lineare Differentialgleichungen	35
10. Differentialgleichungen höherer Ordnung	38
11. Inhomogen-lineare Gleichungen	45
12. Differentiation und lineare Algebra	47
13. Extrema	52
14. Zweite partielle Ableitungen	57
15. Flächeninhalt, Volumen und Integral	61
16. Die Substitutionsregel	69
17. Anhang: Die Integralsätze von Gauß und Stokes	72
Index	78

VORBEMERKUNG

In den „Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss“ der Kultusminister (2003) werden die folgenden mathematischen Leitideen genannt: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall. Die Vorlesung nimmt diese Vorgabe auf. Sie ist Teil eines viersemestrigen Zyklus, der die fachlichen Grundlagen für das nichtvertiefte Lehramtsstudium der Mathematik bereitstellen soll. Er besteht aus folgenden Teilen: Variable und Gleichungen (§55(1)2 LPO), Zahl und Funktion (§55(1)1 LPO), Flächen- und Rauminhalt, Integration (§55(1)1 LPO), Linearität (§55(1)2 LPO). Mit normalen Schulkenntnissen sollte man den Zyklus mit jeder dieser Vorlesungen beginnen können.

In diesem Semester geht es um „mehrere Variable“. Die *Variable* (*Veränderliche*) ist ein Grundbegriff der Mathematik. Sie wird mit einem Buchstaben bezeichnet, oft mit x . Eine Variable bezeichnet entweder eine *unbestimmte* oder eine *unbekannte* Größe, je nachdem, ob sie als „Argument“ in einer *Funktion* $x \mapsto f(x)$ (z.B. $x \mapsto x^2 - x - 1$) oder als gesuchte Größe in einer *Gleichung* (z.B. $x^2 - x - 1 = 0$) auftritt. Im einen Fall dient sie als Bezeichnung für ein *beliebiges* Element der Definitionsmenge, im anderen als ein *bestimmtes* Element („Mr. X“), das uns aber noch nicht namentlich bekannt ist.

Natürlich hängen die Prozesse in Natur- und Gesellschaftswissenschaften, die die Mathematik beschreiben möchte, meist nicht nur von einer einzigen veränderlichen Größe ab, sondern von sehr vielen. Wir können uns deshalb nicht mit einer Variablen x zufrieden geben, sondern wir werden Funktionen und Gleichungen in mehreren Variablen x, y, z, t, \dots oder x_1, x_2, \dots, x_n behandeln. Ein wichtiger Schritt zur „Denkökonomie“ ist dabei, diesen Satz von Variablen wieder als eine einzige, aber *vektorwertige* Variable zu behandeln, die wir wieder mit einem Buchstaben, oft sogar wieder mit dem Buchstaben x bezeichnen.¹



Ein *Vektor* x in diesem Sinne ist einfach eine Folge von n Zahlen x_1, \dots, x_n : für $n = 2$ ein *Paar* $x = (x_1, x_2)$, für $n = 3$ ein *Tripel* $x = (x_1, x_2, x_3)$, für $n = 4$ ein *Quartett* oder *Quadrupel* $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ und für beliebige n dann eben ein „*n-Tupel*“ (x_1, \dots, x_n) . Der Definitionsbereich dieser vektorwertigen Variablen ist für $n = 2$ die Menge der Zahlenpaare $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, für $n = 3$ die Menge der Zahlentripel $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ und allgemein die Menge \mathbb{R}^n aller Folgen von je n reellen Zahlen.² In den Fällen $n = 2$ und $n = 3$ können wir diesen Bereichen eine geometrische Bedeutung geben: Jedes Zahlenpaar kann als Punkt

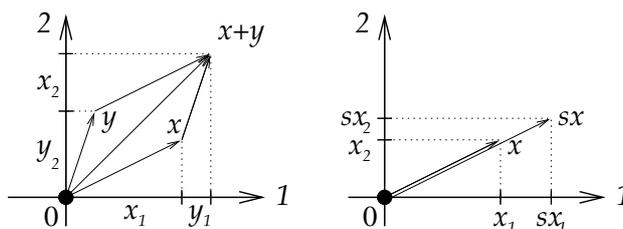
¹Bei zwei oder drei Variablen verwendet man häufig die Buchstaben x, y oder x, y, z für die einzelnen Variablen; in diesem Fall steht der Buchstabe x zur Bezeichnung des Paares (x, y) oder des Tripels (x, y, z) natürlich nicht mehr zur Verfügung.

²Hierbei bezeichnet \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen und $A \times B$ das *kartesische Produkt* von zwei Mengen A, B , die Menge der Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Entsprechend ist $A \times B \times C$ die Menge der Tripel (a, b, c) mit $a \in A, b \in B, c \in C$ usw.

in der *Ebene*, jedes Zahlentripel als Punkt im *Raum* aufgefasst werden, denn Punkte der Ebene oder des Raums werden durch zwei bzw. drei Zahlen (*Koordinaten*) eindeutig festgelegt. In diesem Sinne *ist* die Menge der Zahlenpaare die Ebene, die der Zahlentripel der Raum.

Ein guter Teil der ebenen und räumlichen Geometrie wird durch die *Vektoraddition* und die *Multiplikation mit Skalaren* erfasst. Dazu muss ein Punkt als Ursprung oder Nullpunkt 0 gekennzeichnet worden sein. Für zwei Punkte („Vektoren“) x und y in der Ebene oder im Raum ist $x + y$ dann der vierte Punkt des von $0, x, y$ aufgespannten Parallelogramms, und für jede Zahl („Skalar“) $s \in \mathbb{R}$ entsteht der Punkt sx durch Streckung der Strecke $\overline{0x}$ um den Faktor s . Diese *Vektoroperationen* lassen sich in den Koordinaten (Komponenten) der Vektoren ausdrücken, die dabei einfach addiert bzw. mit der Zahl s multipliziert werden:

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2) &\Rightarrow x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \\ x = (x_1, y_1), \quad s \in \mathbb{R} &\Rightarrow sx = (sx_1, sx_2). \end{aligned}$$



Auf diese Weise kann jede Rechnung in zwei oder drei Variablen in der Ebene oder im Raum geometrisch interpretiert werden, und umgekehrt lässt sich jede Beziehung in Ebene und Raum durch Zahlen ausdrücken, nämlich durch Beziehungen der Koordinaten. Das ist die Idee der *analytischen Geometrie*. Die Geometrie wurde ja in der Antike schon sehr weitgehend entwickelt, aber die Idee der Koordinaten stammt erst aus der frühen Neuzeit; sie geht auf Descartes³ zurück und hat die Mathematik revolutioniert: Geometrie und Algebra, Form und Zahl, wurden zu zwei Sichtweisen derselben Objekte. Heute benutzen die Mathematiker die geometrische Sprache selbst dann noch, wenn die Zahl der Variablen größer ist als 3; auch wir haben dies im vergangenen Semester in der Vorlesung „Linearität“ getan.

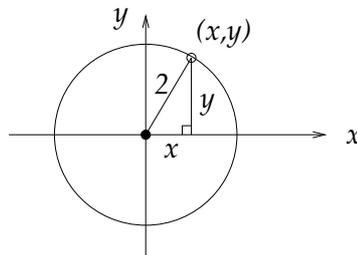
Wir werden im ersten Teil dieser Vorlesung *Gleichungen* in mehreren Variablen studieren, vor allem *quadratische* (die *linearen* wurden bereits im vergangenen Semester behandelt): In zwei Variablen x, y haben sie

³René Descartes, 1596 (La Haye, jetzt Descartes, Touraine, Frankreich) - 1650 (Stockholm)

die Gestalt $f(x, y) = 0$, zum Beispiel $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Die Lösung (x, y) ist meistens keineswegs eindeutig; es gibt sogar unendlich viele Lösungen: Im Beispiel können wir für beliebiges $x \in [-2, 2]$ ein y finden, das mit x zusammen die Gleichung löst, nämlich $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$. Durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 4$ werden die Werte von x und y also nicht bestimmt, sondern nur eingeschränkt; es besteht eine Beziehung zwischen den beiden Zahlen. Da alle Lösungen gleichberechtigt sind, betrachten wir die Gesamtheit aller Lösungen, die *Lösungsmenge*

$$(1) \quad L = \{(x, y); f(x, y) = 0\}.$$

Im Beispiel ist $L = \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$; in der geometrischen Sichtweise ist dies die *Kreislinie* mit Radius 2.⁴



Allgemein nennt man eine Menge der Form (1) eine *ebene Kurve*. In der Schule haben wir unter Kurven meist Graphen von Funktionen in einer Veränderlichen verstanden; Prototyp ist die Parabel

$$(2) \quad P = \{(x, y); y = x^2\}.$$

In unserem jetzigen Kontext ist der Begriff der Kurve etwas weiter gefasst, weil wir die Gleichung $f(x, y) = 0$ nicht so ohne Weiteres nach y auflösen können.

Die Lösungsmenge einer Gleichung in *drei* Variablen

$$(3) \quad L = \{(x, y, z); f(x, y, z) = 0\},$$

z.B. $L = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0\}$, bezeichnen wir als eine *Fläche*; in unserem Beispiel ist es die *Kugelfläche* vom Radius 2.⁵

⁴Für den Abstand r eines Punktes (x, y) vom Nullpunkt gilt nach Pythagoras $r^2 = x^2 + y^2$. Der Kreis vom Radius 2 besteht aus allen Punkten (x, y) mit Abstand 2 vom Ursprung und ist damit die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 4$.

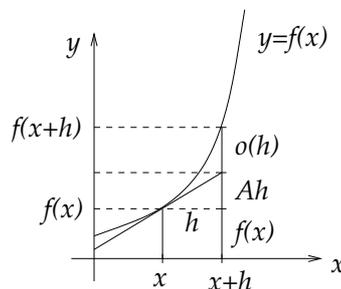
⁵Wenn nicht nur eine, sondern mehrere Gleichungen gegeben sind, dann ist ihre gemeinsame Lösungsmenge der Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen. Sind zum Beispiel zwei Gleichungen in drei Variablen x, y, z gegeben, so ist die Lösungsmenge die Schnittlinie von zwei Flächen, also eine *räumliche Kurve*. Tritt noch eine dritte Gleichung hinzu, so schneidet diese Kurve eine weitere Fläche und die Lösungsmenge besteht aus diesen Schnittpunkten.

Gleichungen gehören in die Algebra, aber Kreise und Kugeln und andere Lösungsmengen von Gleichungen sind Gegenstände der Geometrie. Eine unserer Aufgaben wird sein, aus der Gleichung die Gestalt der Lösungsmenge zu ermitteln. Dazu hilft uns eine altbekannte Methode: die *Variablensubstitution*. Wir denken uns dabei die alten Variablen x, y als Ausdrücke der Form

$$(4) \quad \begin{aligned} x &= au + bv + c \\ y &= du + ev + f \end{aligned}$$

in anderen Variablen u, v , für konstante Zahlen $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Bei richtiger Wahl dieser Zahlen wird die Gleichung in den neuen Variablen einfacher und die Lösungsmenge erkennbar.⁶ Diese Substitution lässt sich geometrisch als *Koordinatentransformation* in der Ebene deuten; diese Deutung wird uns helfen, die richtige Substitution zu finden. Wir werden anschließend dieselben Methoden auch zur Lösung eines anderen Typs von Gleichungen verwenden, nämlich *lineare Differentialgleichungen* in mehreren Variablen.

Ein zweiter Teil der Vorlesung wird sich mit *Funktionen* in mehreren Variablen beschäftigen. Die einfachsten Funktionen sind die linearen. Die Differentialrechnung sagt, dass jede noch so komplizierte (aber *differenzierbare*) Funktion f in der Nähe jedes Punktes x , an dem sie definiert ist, durch eine lineare angenähert (*approximiert*) werden kann:



⁶Auf dieselbe Weise wird eine quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ in einer Variablen x gelöst: Mit der Substitution $x = u - a/2$ erhält man

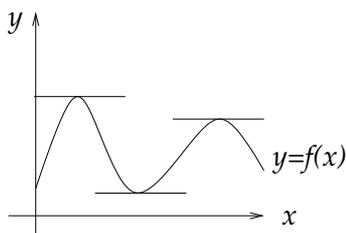
$$\begin{aligned} 0 &= (u - a/2)^2 + a(u - a/2) + b \\ &= u^2 - au + a^2/4 + au - a^2/2 + b \\ &= u^2 - a^2/4 + b, \end{aligned}$$

und diese Gleichung lässt sich sofort lösen: $u = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ und damit $x = u - \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$. Das ist die altbekannte Methode der *quadratischen Ergänzung*, die wir auch bei mehreren Variablen wiederfinden werden. Derselbe Trick vereinfacht die Gleichung n -ten Grades $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$: Nach der Substitution $u = x - \frac{a_1}{n}$ hat die Gleichung in der neuen Variablen u keinen u^{n-1} -Term mehr (*Tschirnhaus-Transformation*).

Der Funktionswert an einer Stelle $x + h$ nahe x wird in drei Teile aufgeteilt: den Funktionswert bei x , einen Anteil Ah , der linear von h abhängt, und einen Rest $o(h)$, der so klein ist, dass er für $h \rightarrow 0$ gegen Null strebt, und zwar selbst dann noch, wenn wir ihn mit $1/|h|$ multiplizieren (obwohl $1/|h| \rightarrow \infty$):

$$(5) \quad f(x + h) = f(x) + Ah + o(h) \quad \text{mit} \quad o(h)/h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Aus der Analysis einer Veränderlichen sind wir gewohnt, dass lokale Extrema durch die Nullstellen der Ableitung entdeckt werden; das ist auch in mehreren Variablen nicht anders.



Schließlich werden wir auch das *Integral* über Funktionen von mehreren Variablen definieren, eine Art gewichteter Flächeninhalt oder gewichtetes Volumen, wobei verschiedenen Teilflächen oder Teilvolumina je nach dem Wert der Funktion unterschiedliches Gewicht bekommen. Die Berechnung solcher Integrale wird auf mehrfache Integrale über Funktionen einer Variablen zurückgeführt.

I. Gleichungen

1. VARIABLE IN DER SPRACHE DER MATHEMATIK

Die Variable ist ein wichtiges Element der mathematischen Sprache. Sie ist zu unterscheiden von der Konstanten. Das sind zum Beispiel Zahlen wie 0, 1, 2, 3 oder 3,14159 oder festgelegte Buchstaben wie π oder e . Variable dagegen werden durch (alle anderen) Buchstaben bezeichnet. Allerdings werden Variable oft als Konstanten behandelt. Zum Beispiel in der "Mitternachtsformel"

$$x^2 - 2ax = b \iff x = a \pm \sqrt{a^2 + b}$$

werden a, b als Konstanten angesehen, x als Variable. Eigentlich sind alle drei Variable, sie haben nur eine unterschiedliche Funktion: a, b sind *Unbestimmte*, für sie lassen sich beliebige Zahlen einsetzen, x dagegen ist eine *Unbekannte*, eine an sich wohlbestimmte Zahl (wenn a und b gegeben sind), die aber nur durch eine Eigenschaft, eine *Gleichung*

bestimmt ist und erst explizit errechnet werden soll. Das sind die zwei Formen, in denen Variable in der mathematischen Sprache vorkommen: als Unbekannte und als Unbestimmte. Wir wollen kurz den Aufbau dieser Sprache und die Rolle der Variablen darin besprechen.

Sprachelemente	Beispiele
Konstante	$0, 1, 2, \pi, e$
Variable	x, y, z, a, b
Operation, Funktion	$+, -, \cdot, /, ()^2, \sqrt{\quad}$
Term	$3 + 5, 2a^2/3, a \pm \sqrt{a^2 + b}$
Relation	$=, <, $ (“ist Teiler von ...”), \in, \subset
Formel	$3 < 4, x^2 - 2ax = b, 3 12$
Aussage	$3 < 4, 4 < 3, \forall_{a,b>0} \exists_x x^2 - 2ax = b$

Terme sind entweder selbst Konstante oder Variable, oder sie entstehen durch Anwenden von Operationen oder Funktionen auf Konstante und Variable. Ein Term für sich alleine ergibt noch keinen Sinn. Erst wenn Terme in *Relationen* (wie Gleichheit, größer und kleiner, Teilbarkeit, Element sein, Teilmenge u.a.m.) eingesetzt werden, entstehen *Formeln* oder *Aussagen*: 3 ist keine Aussage, aber $3 < 4$ schon. Aussagen sind wahr oder falsch. Formeln sind etwas allgemeiner: sie dürfen noch Variable enthalten, z.B. $x^2 - 2ax = b$. Erst wenn wir für die Variablen Konstanten einsetzen (oder vorgeben, wir hätten wir es getan), wird daraus eine Aussage, zum Beispiel für $a = 2, b = 5, x = 5$ die wahre Aussage $5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 = 5$.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, aus einer Formel, die eine Variable x enthält, eine Aussage zu machen: Man fügt “für alle x ” oder “es gibt x ” hinzu, abgekürzt \forall_x (umgekehrtes A wie “Alle”) und \exists_x (umgekehrtes E wie “Es gibt” oder “Existiert”). Wenn a, b gegebene positive Konstanten sind, dann ist die Aussage $\exists_x x^2 - 2ax = b$ wahr: Die Gleichung $x^2 - 2ax = b$ hat eine Lösung, zum Beispiel $x = a + \sqrt{a^2 + b}$. Die Variable x ist also ein *Unbekannte*, eine Größe, die nicht explizit gegeben ist, die man aber (im Prinzip wenigstens) berechnen kann. Die Aussage $\forall_x x^2 - 2ax = b$ wäre natürlich falsch. Aber es gibt Gleichungen, wo das anders ist: Zum Beispiel ist $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ tatsächlich für alle x wahr; das folgt aus den Rechengesetzen, die für alle Zahlen gelten: $(x+2)(x-2) = x(x-2) + 2(x-2) = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4$. Die Aussage $\forall_x x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ist also wahr. In diesem Fall ist x eine *Unbestimmte*, ein Platzhalter für jede nur denkbare Zahl. Die Symbole \forall und \exists nennt man *Quantoren*. Wenn in einer Formel eine *freie Variable* x (oder auch a) vorkommt, d.h. eine Variable, die nicht auch unter einem Quantor steht, dann muss man sich immer eine der

erwähnten drei Möglichkeiten, aus einer Formel eine Aussage zu machen, dazu denken: Entweder x wurde bereits früher zur Konstanten erklärt (“Es sei x gegeben ...”), oder man muss die Formel entweder um “ \forall_x ” oder um “ \exists_x ” erweitern. Damit wird x von einer freien zu einer *gebundenen Variablen*. Zum Beispiel gehört zu der Gleichung $x^2 - 2ax = b$ die Aussage $\forall_{a,b} \exists_x x^2 - 2ax = b$ (“Für alle a, b gibt es x mit der Eigenschaft $x^2 - 2ax = b$ ”). Allerdings ist die Aussage so nur dann wahr, wenn auch Wurzeln aus negativen Zahlen erlaubt sind, wenn wir also auch komplexe Werte für x zulassen. Wenn wir das vermeiden wollen, wenn die Lösung x eine reelle Zahl sein soll ($x \in \mathbb{R}$), dann müssen eine Bedingung an die Zahlen a, b stellen, um die Aussage wahr zu machen, zum Beispiel, dass a und b positiv sind: $\forall_{a,b>0} \exists_{x \in \mathbb{R}} x^2 - 2ax = b$.

Aussagen kann man kombinieren und auch negieren und damit neue Aussagen erzeugen. Die wichtigsten Möglichkeiten dafür sind **und** (\wedge), **oder** (\vee), **impliziert** (\Rightarrow), **äquivalent** (\Leftrightarrow) und **nicht** (\neg). Das “oder” ist nicht ausschließend: Für zwei Aussagen A und B ist $A \vee B$ wahr, wenn A oder B oder beide zugleich wahr sind. Das Wort **impliziert** bedeutet, dass die hintere Aussage eine Folgerung der vorderen ist; wenn die eine gilt, gilt die andere auch, und “**äquivalent**” bedeutet Folgerung in beide Richtungen: $A \Leftrightarrow B$ bedeutet $A \Rightarrow B$ und gleichzeitig $B \Rightarrow A$. Die (uns allen bekannte) Bedeutung dieser Konjunktionen lässt sich übersichtlich in einer *Wahrheitstafel* darstellen: Wir setzen für die Aussagen A und B jeweils **wahr** (w) oder **falsch** (f) voraus⁷ und schreiben jedesmal auf, ob die kombinierten Aussagen wahr oder falsch sind:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A$
w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	w

⁷Wir sind davon überzeugt, dass es für jede Aussage A nur diese beiden Möglichkeiten gibt: Entweder A ist wahr oder A ist falsch, etwas Drittes gibt es nicht (“Tertium non datur”). Diese auf den griechischen Philosophen Aristoteles (384 - 322 v.Chr.) zurückgehende Überzeugung ist bis heute ein Grundgesetz der mathematischen Logik. Leider wissen wir oft nicht, ob eine Aussage wahr oder falsch ist; deshalb hat es immer wieder Versuche gegeben, dieses Prinzip zu modifizieren. In gewisser Weise ist die Wahrscheinlichkeitstheorie eine solche Modifikation: Zwischen wahr (Wahrscheinlichkeit 1) und falsch (Wahrscheinlichkeit 0) gibt es jeden möglichen Wert für die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese. Aber deshalb muss das “Tertium non datur” nicht aufgegeben werden: eine Aussage bleibt wahr oder falsch; wir wissen nur nicht genug.

Damit $A \wedge B$ wahr ist, müssen beide Aussagen A und B wahr sein, für die Wahrheit von $A \vee B$ reicht es schon, dass eine von beiden wahr ist. Klarerweise ist $\neg A$ wahr, wenn A falsch ist und umgekehrt. Etwas erstaunlich ist vielleicht die Spalte zu $A \Rightarrow B$: Kann denn $A \Rightarrow B$ richtig sein, obwohl A und womöglich auch B falsch sind? Das ist ein weiterer alter Grundsatz der Logik: “Ex falso quodlibet”, aus etwas Falschem lässt sich Beliebiges (Richtiges und Falsches) schließen.⁸ Die Quantoren \forall und \exists lassen sich als Verallgemeinerungen von *und* und *oder* verstehen: Die Aussage “Jede natürliche Zahl > 1 ist durch eine Primzahl teilbar”⁹ kann man so verstehen: 2 ist durch eine Primzahl teilbar *und* 3 ist durch eine Primzahl teilbar *und* 4 ist durch eine Primzahl teilbar *und* ... Die Aussage “Es gibt eine ungerade Zahl > 1 , die keine Primzahl ist”¹⁰ kann man hingegen so verstehen: 3 ist keine Primzahl *oder* 5 ist keine Primzahl *oder* 7 ist keine Primzahl *oder* 9 ist keine Primzahl *oder* ...; die Aussage ist wahr, weil (mindestens) eine der mit *oder* verbundenen Aussagen wahr ist: 9 ist ja wirklich keine Primzahl, 15 auch nicht.

Eng verbunden mit den Aussagen sind die grundlegendsten Objekte der Mathematik: die Mengen. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Gegenständen durch eine gemeinsame Eigenschaft. Diese Eigenschaft ist eine Aussage $A(x)$ (eigentlich eine Formel, weil sie die freie Variable x enthält), die auf einen variablen Gegenstand x zutreffen kann oder auch nicht; diejenigen x , für die $A(x)$ zutrifft (wahr ist), sollen gemeinsam die Menge M bilden: $M = \{x; A(x)\}$; die Aussagen $x \in M$ und $A(x)$ sind also äquivalent: $x \in M \iff A(x)$. Zum Beispiel haben die ungeraden Zahlen genau die Eigenschaft gemeinsam, nicht durch 2 teilbar zu sein; die Menge U der ungeraden Zahlen lässt sich also so schreiben: $U = \{n; 2 \nmid n\}$ oder genauer $U = \{n \in \mathbb{N}; 2 \nmid n\}$. Deshalb sind die Mengenoperationen Durchschnitt und Vereinigung mit den Konjunktionen *und* und *oder* verbunden: Sind M und N Mengen, dann ist

$$M \cap N = \{x; x \in M \wedge x \in N\}, \quad M \cup N = \{x; x \in M \vee x \in N\}.$$

⁸Von dem berühmten englischen Logiker Bertrand Russel (1872 - 1970) gibt es dazu folgende Anekdote: Auf die Frage eines Journalisten, ob man denn wirklich aus etwas Falschem alles schließen könne, ob man zum Beispiel aus $2 \cdot 2 = 5$ schließen könne, dass er, Russel, der Papst sei (Russel war bekennender Atheist), soll er geantwortet haben: “Oh, das ist ganz einfach: Aus $2 \cdot 2 = 5$ folgt $1 = 2$. Der Papst und ich sind 2 Personen; wenn aber $1 = 2$ ist, sind der Papst und ich 1 Person, also bin ich der Papst!”

⁹ $\forall_{1 < n \in \mathbb{N}} \exists_{p \in P} p|n$, wobei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \dots$ und P die Menge der Primzahlen bezeichnet.

¹⁰ $\exists_{1 < n \in U} n \notin P$, wobei U die Menge der ungeraden Zahlen bezeichnet.

Jeder mathematische Satz ist formal gesehen eine Folgerung $A \Rightarrow B$. Die Aussage A nennt man *Voraussetzung*, die Aussage B heißt *Behauptung*. Um die Folgerung $A \Rightarrow B$ zu beweisen, nimmt man an, dass A wahr ist, und zeigt, dass dann auch B wahr sein muss. Dazu gibt es grundsätzlich drei Methoden:

- (1) *Direkter Beweis*: Man findet Aussagen B_1, B_2, \dots, B_n und dazu Schlüsse $A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots, B_n \Rightarrow B$. Die Behauptung B wird bewiesen durch die Schlusskette

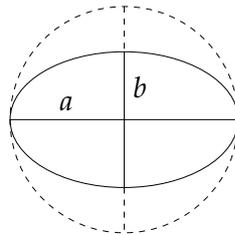
$$A \Rightarrow B_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n \Rightarrow B$$

- (2) *Indirekter Beweis*: Statt $A \Rightarrow B$ beweist man $\neg B \Rightarrow \neg A$,
 (3) *Widerspruchsbeweis*: Statt $A \Rightarrow B$ beweist man $A \wedge \neg B \Rightarrow$ Falsches, genannt *Widerspruch*, etwas wie $C \wedge \neg C$.

Die Schlüsse $A \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots$ muss man wirklich finden; das ist genau die Aufgabe des Mathematikers, durch das Labyrinth der Aussagen einen Weg von A nach B zu finden, ohne Kenntnis, ob überhaupt ein solcher Weg existiert! Die Zwischenaussagen B_1, B_2, \dots sind in keiner Form vorgegeben; sie zu suchen ist eine Arbeit, die manchmal mehrere Jahrhunderte dauert.¹¹ Dass die drei Schlussweisen äquivalent sind, lehrt wieder ein Blick auf die Wahrheitstafeln (Übung).

2. DIE BRENNPUNKTE DER ELLIPSE

Die Mathematik hat die Aufgabe, das Verborgene auf Offensichtliches zurückzuführen. Ein schönes Beispiel für diesen Prozess ist die Geometrie der Ellipse.



Die *Ellipse* ist ein „zusammengedrückter Kreis“: Ausgehend vom Kreis mit Radius a , der Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$, verkürze man die y -Koordinaten aller Kreispunkte im Maßstab $\frac{b}{a}$ mit $b < a$.

¹¹Der französische Jurist und Mathematiker Pierre de Fermat vermutete um 1637, die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ habe für beliebige $n > 2$ keine positiven ganzzahligen Lösungen x, y, z . Diese Behauptung wurde nach zahlreichen Beiträgen durch alle Jahrhunderte hindurch 1995 schließlich von Andrew Wiles und Richard Taylor bewiesen. Der Beweis benutzte Theorien, von denen Fermat nicht einmal träumen konnte.

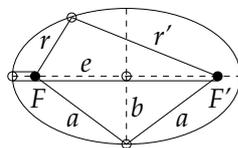
Danach wird die Kreisgleichung nicht mehr von (x, y) , sondern von $(x, \frac{a}{b}y)$ erfüllt. Man gelangt also zu der Gleichung $x^2 + (\frac{a}{b}y)^2 = a^2$ und nach Teilen durch a zu der Standardform der Ellipsengleichung:

$$(6) \quad E = \{(x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

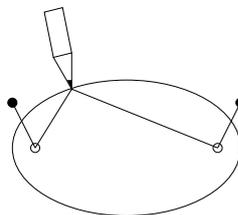
Die (positiven) Zahlen a und b heißen *Hauptachsen* der Ellipse.

Aus dieser Definition nicht einsichtig ist die Bedeutung der beiden *Brennpunkte* oder *Fokalpunkte* F, F' der Ellipse, die sich auf der längeren Achse im Abstand $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ vom Mittelpunkt befinden: Bezeichnen wir mit r und r' die Abstände eines beliebigen Punktes auf der Ellipse E zu F und F' , dann gilt stets¹²

$$(7) \quad r + r' = \text{const} = 2a.$$



Auf diese Weise kann man die Ellipse auch zeichnen: Man hält ein Band von Länge $2a$ an zwei Punkten F, F' fest und zieht es mit einem Stift straff.



Woher kommt diese Eigenschaft? Wir können sie nachrechnen, indem wir den Abstand eines Punktes $(x, y) \in E$ von $F = (-e, 0)$ und $F' = (e, 0)$ berechnen und die Gleichung der Ellipse einsetzen (siehe Fußnote weiter unten) Aber es gibt einen viel schöneren Weg, diese Eigenschaft ganz ohne Rechnung einzusehen. Von dem Mathematiker G. Polya¹³ stammt der Ausspruch:

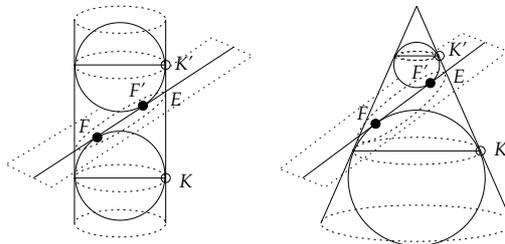
„*Beauty in mathematics is seeing the truth without effort.*“

Wir müssen dazu die Ellipse als Schnitt einer Ebene mit einem Kreiszylinder oder Kreiskegel ansehen. Wenn die Ebene parallel zur Basis

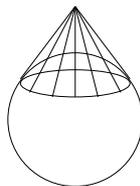
¹²Die Hauptaussage ist, dass $r+r'$ konstant ist; dass diese Konstante gleich $2a$ ist, erkennt man, wenn man den Ellipsenpunkt auf der horizontalen Achse wählt; wählt man ihn auf der vertikalen Achse, so sieht man $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ nach Pythagoras, siehe Figur.

¹³George Pólya, 1887 (Budapest) - 1985 (Palo Alto, Kalifornien)

des Zylinders oder Kegels ist, erhalten wir einen Kreis, wenn sie aber geneigt ist, wird der Schnitt eine Ellipse sein.



Es gibt zwei Kugeln, die genau in den Zylinder oder Kegel hineinpassen und die Ebene der Ellipse von oben oder unten berühren. Wir behaupten, dass diese Berührungspunkte gerade die Fokalfpunkte der Ellipse sind. Die Kugeln berühren den Mantel des Zylinders oder Kegels nämlich in zwei horizontalen Kreisen K' und K . Weil die Verbindungsstrecken von einem Ellipsenpunkt E zu F' und zu K' (längs einer Mantellinie) beides Tangenten an die obere Kugel sind, haben sie die gleiche Länge, denn alle Tangentenabschnitte von einem festen Punkt an eine Kugel sind gleich lang.



Es gilt also $\overline{EF'} = \overline{EK'}$, und ebenso $\overline{EF} = \overline{EK}$ (Tangentenabschnitte an die untere Kugel), also $\overline{EF} + \overline{EF'} = \overline{EK} + \overline{EK'} = \overline{KK'} = \text{const.}$ Dieses schöne Argument stammt von Dandelin,¹⁴ zu dessen Ehren wir von den *Dandelinischen Kugeln* sprechen.¹⁵

Der Kegel hat gegenüber dem Zylinder einen Vorteil: Wenn wir die Schnittebene immer mehr zur Vertikalen hinneigen, dann wird die Ellipse immer mehr gestreckt und mutiert schließlich zur *Parabel*; bei noch

¹⁴Germinal Pierre Dandelin, 1794 (Le Bourget, Frankreich) - 1847 (Brüssel)

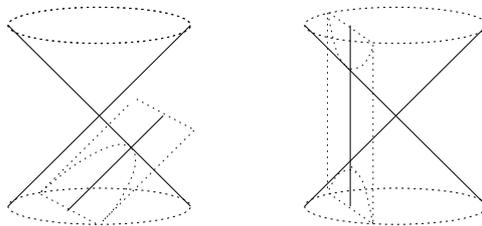
¹⁵Zum Vergleich hier die direkte Rechnung ohne räumliche Geometrie: Mit der Abkürzung $s := x^2 + e^2 + y^2$ ist $r = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} = \sqrt{s+2ex}$ und $r' = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{s-2ex}$ und damit

$$\begin{aligned} (r+r')^2 &= (s+2ex) + (s-2ex) + 2\sqrt{(s+2ex)(s-2ex)} \\ &= 2(s + \sqrt{s^2 - 4e^2x^2}). \end{aligned}$$

Wegen der Ellipsengleichung ist $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$ und damit

$$e^2 + y^2 = a^2 - b^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 = a^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

weiterer Neigung erhalten wir eine *Hyperbel*.¹⁶ Mit dem Lichtkegel einer Lampe kann man das schön beobachten; die Rolle der Schnittebene spielt dabei die beleuchtete Wand.



Ellipse, Parabel und Hyperbel werden deshalb auch als *Kegelschnitte* bezeichnet.

3. KEGELSCHNITT-GLEICHUNGEN

Analytisch bedeutet ein Kegelschnitt den Schnitt des Kreiskegels

$$(8) \quad C = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

mit einer Ebene¹⁷

$$(9) \quad E = \{(x, y, z); z = ax + by + c\}.$$

Der Kegelschnitt $C \cap E$ ist die Lösungsmenge beider Gleichungen gemeinsam. Substituieren wir $z = ax + by + c$ in die Kegelfgleichung, so erhalten wir

$$x^2(1 - a^2) + y^2(1 - b^2) - 2abxy - 2acx - 2bcy - c^2 = 0,$$

und in neuer Bezeichnung:

$$(10) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Also ist $s = x^2 + e^2 + y^2 = a^2 + (1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 = a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2$ und $\sqrt{s^2 - 4e^2x^2} = a^2 - \frac{e^2}{a^2}x^2$ mit der allgemeinen Regel $(u + v)^2 - 4uv = (u - v)^2$. Es folgt

$$(r + r')^2 = 2(s + \sqrt{s^2 - 4e^2x^2}) = 2(a^2 + \frac{e^2}{a^2}x^2 + a^2 - \frac{e^2}{a^2}x^2) = 4a^2.$$

¹⁶Die Konstruktion von Dandelin lässt sich analog auf diese Fälle übertragen: www.math.uni-augsburg.de/diff/lehre/index.html, Geometrie SS 2003, S. 62f

¹⁷Eine noch allgemeinere Form der Ebenengleichung wäre $ax + by + cz + d = 0$. Wenn $c \neq 0$, kommen wir nach Division durch c auf die angegebene Form.

Das ist die allgemeine quadratische Gleichung in zwei Variablen.¹⁸ Mit Hilfe von quadratischen Ergänzungen können wir diese Gleichung soweit vereinfachen, dass wir den Typ des Kegelschnitts erkennen können:

$$(11) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Ellipse})$$

$$(12) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{Hyperbel})$$

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2} - y = 0 \quad (\text{Parabel})$$

Wie man das macht, zeigen wir am besten an einem Beispiel: Wie sieht die Lösungsmenge der Gleichung

$$(14) \quad 6x^2 + 12xy + y^2 + 12x - 18y - 9 = 0$$

aus? Um dies zu sehen, wenden wir zunächst die quadratische Ergänzung auf die ersten zwei Terme an:

$$\begin{aligned} 0 &= 6(x^2 + 2xy) + y^2 + 12x - 18y - 9 \\ &= 6(x^2 + 2xy + y^2) - 5y^2 + 12x - 18y - 9 \\ &= 6(x + y)^2 - 5y^2 + 12x - 18y - 9. \end{aligned}$$

Statt der Variablen x und y benutzen wir nun $w := x + y$ und y . Dann ist $x = w - y$. Wir eliminieren die Variable x aus der obigen Gleichung, indem wir sie überall durch $w - y$ ersetzen:

$$\begin{aligned} 0 &= 6w^2 - 5y^2 + 12(w - y) - 18y - 9 \\ &= 6w^2 - 5y^2 + 12w - 30y - 9. \end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir noch einmal eine quadratische Ergänzung, um die „linearen Terme“ $12w - 30y$ zu beseitigen:

$$\begin{aligned} 0 &= 6(w^2 + 2w) - 5(y^2 + 6y) - 9 \\ &= 6(w^2 + 2w + 1) - 5(y^2 + 6y + 9) - 6 + 45 - 9 \\ &= 6(w + 1)^2 - 5(y + 3)^2 + 30 \\ &= 6v^2 - 5u^2 + 30 \end{aligned}$$

mit $v = w + 1 = x + y + 1$ und $u = y + 3$. Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist eine Hyperbel, weil die beiden Quadrate unterschiedliches Vorzeichen haben; wir können ja die Gleichung $30 = 5u^2 - 6v^2$ auf die Gestalt (12) bringen: $1 = \frac{u^2}{6} - \frac{v^2}{5} = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$ mit $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$.¹⁹

So einfach und effektiv dieses Verfahren ist (es lässt sich ebenso auf drei und mehr Variable anwenden), es hat doch einen großen Nachteil:

¹⁸Es gibt allerdings eine quadratische Gleichung, die nicht als Schnitt einer Ebene mit einem Kegel, sondern nur mit einem Zylinder auftritt: das Geradenpaar $x^2 = 1$.

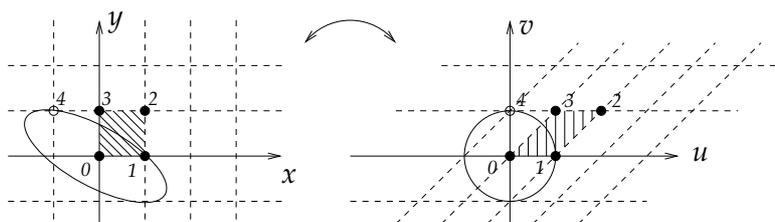
¹⁹Bei anderen Zahlenwerten in (14) wären die y^2 -Terme in (15) positiv oder Null geworden; dann hätten wir eine Ellipse bzw. eine Parabel erhalten.

Es entscheidet nur, von welchem *Typ* der Kegelschnitt ist (Ellipse, Hyperbel oder Parabel), sonst nichts. Die Hauptachsen z.B. lassen sich auf diese Weise nicht ermitteln. Die Zahlen $a = \sqrt{6}$ und $b = \sqrt{5}$ im obigen Beispiel sind ohne jede Bedeutung; es kommt nur auf die Vorzeichen an. Der Grund für diese Schwäche ist, dass die verwendete Koordinatentransformation $u = y + 3$, $v = x + y + 1$ zwar Geraden und Parallelen erhält, aber Winkel und Abstände verzerrt (*affine Transformation*).

Betrachten wir noch ein einfacheres Beispiel: die Lösungsmenge der Gleichung

$$(15) \quad x^2 + 2xy + 2y^2 = 1.$$

Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir $1 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 = (x + y)^2 + y^2 = u^2 + v^2$ mit $u = x + y$, $v = y$, oder umgekehrt $x = u - v$, $y = v$. In uv -Koordinaten ist die Lösungsmenge der Kreis um 0 mit Radius 1, und durch Rücktransformation finden wir die Gestalt der Lösungsmenge in den ursprünglichen xy -Koordinaten (gleich bezeichnete Punkte entsprechen einander); es ist eine Ellipse, keineswegs mehr ein Kreis:



4. VEKTORRÄUME, LINEARE ABBILDUNGEN, MATRIZEN

Wir haben gesehen, dass wir durch eine lineare (allgemeiner: affine) Substitution wie $x = u - v$, $y = v$ die quadratische Gleichung erheblich vereinfachen und die Gestalt der Lösungsmenge grob erkennen können. Aber die genaue Gestalt konnten wir noch nicht ermitteln. Dazu müssen wir erst die Konzepte des letzten Semesters auffrischen und fortführen.

Im letzten Semester haben wir den Begriff *Vektorraum* eingeführt.²⁰ Grob gesprochen ist dies ein Bereich V , dessen Elemente addiert und mit Zahlen („*Skalaren*“) multipliziert werden können. Ein einfaches Beispiel ist der Raum

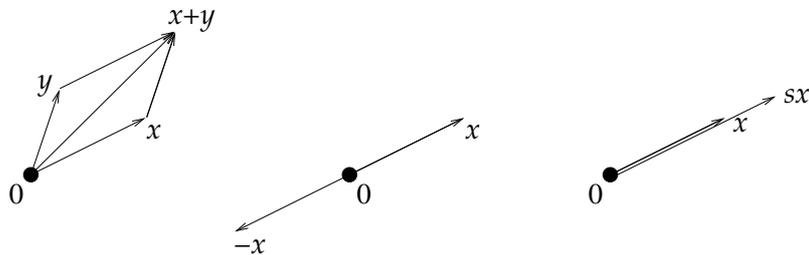
$$(16) \quad \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

²⁰Siehe Skriptum *Linearität*, S. 26,
www.math.uni-augsburg.de/diff/lehre/index.html

mit der „komponentenweisen“ Addition und Multiplikation mit Skalaren $s \in \mathbb{R}$:

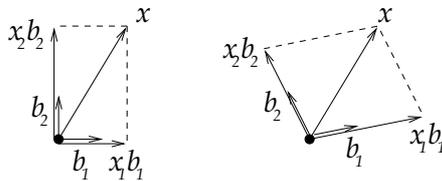
$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ s(x_1, \dots, x_n) &= (sx_1, \dots, sx_n).\end{aligned}$$

Ein anderes, anschaulich-geometrisches Beispiel bilden die Punkte der Ebene (oder des Raums). Einer der Punkte wird dabei als *Ursprung* oder *Nullpunkt* 0 ausgezeichnet; jeder Punkt x definiert dann die gerichtete Strecke (den *Vektor*) von 0 nach x . Die *Summe* $x + y$ von zwei Punkten x, y ist der vierte Punkt des von $0, x, y$ aufgespannten Parallelogramms, die *Multiplikation mit Skalaren* ist die Streckung um den entsprechenden Faktor.



Eine endliche Teilmenge $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eines Vektorraums V heißt *Basis*, wenn sich jedes Element von V in genau einer Weise als Summe von Vielfachen („*Linearkombination*“) der Basisvektoren b_1, \dots, b_n schreiben lässt.²¹ Im \mathbb{R}^n haben wir die *Standardbasis* e_1, \dots, e_n , wobei der Vektor e_i nur an der i -ten Stelle eine Eins und sonst lauter Nullen hat. Statt $x = (x_1, \dots, x_n)$ können wir dann auch $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ schreiben. Aber es gibt viele andere Basen. In der Ebene zum Beispiel besteht eine Basis aus zwei Vektoren b_1, b_2 , die in verschiedene (aber nicht entgegengesetzte) Richtungen zeigen. Zu jedem Vektor x gibt es dann eindeutig bestimmte Zahlen x_1, x_2 mit

$$(17) \quad x = x_1 b_1 + x_2 b_2,$$



²¹Eine Basis hat also zwei Eigenschaften: (1) Jedes Element lässt sich als Linearkombination schreiben, und das (2) nur auf eine Weise, d.h. wenn $\sum_i s_i b_i = \sum_i t_i b_i$, dann ist $s_i = t_i$ für alle i . Diese letztere Eigenschaft nennt man *Lineare Unabhängigkeit*; sie lässt sich auch so ausdrücken: Keins der b_j kann als Linearkombination der übrigen b_i geschrieben werden.

diese Zahlen ändern sich natürlich, wenn man eine andere Basis wählt. Mit Hilfe einer Basis B eines Vektorraums V ordnen wir also jedem Element $x \in V$ Zahlen x_1, \dots, x_n zu, die wir als *Koordinaten* von x bezeichnen, mit

$$(18) \quad x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n = \sum_{i=1}^n x_i b_i.$$

Diese Koordinaten sind mit Summe und Skalarmultiplikation verträglich, denn für $x, y \in V$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$(19) \quad \begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1)b_1 + \dots + (x_n + y_n)b_n, \\ sx &= sx_1 b_1 + \dots + sx_n b_n. \end{aligned}$$

Daher wird ein beliebiger Vektorraum V durch eine Basis B zu dem besonderen Vektorraum \mathbb{R}^n der n -Tupel reeller Zahlen, wie wir gleich noch genauer sehen werden.

Die *lineare Abbildung* war der zweite Grundbegriff des letzten Semesters. Das ist eine Abbildung f eines Vektorraums V in sich oder in einen anderen Vektorraum W mit

$$(20) \quad f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(sa) = sf(a)$$

für alle $a, b \in V$ und $s \in \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist die im letzten Abschnitt benutzte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (u, v)$ mit $u = x + y$, $v = y$.²²

Wenn eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V gegeben ist, brauchen wir von f nur die Bilder der Basisvektoren b_i zu kennen, denn mit (20), erweitert von zwei auf n Summanden,²³ gilt für jeden Vektor $x = \sum_i x_i b_i$:

$$(21) \quad f(x) = f\left(\sum_i x_i b_i\right) = \sum_i x_i f(b_i).$$

(Umgekehrt gibt es zu n beliebigen Vektoren $w_1, \dots, w_n \in W$ genau eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $f(b_i) = w_i$.) In unserem Beispiel $f(x, y) = (u, v)$ mit $u = x + y$, $v = y$ ist $f(e_1) = f(1, 0) = (1, 1) = e_1 + e_2$ und $f(e_2) = f(0, 1) = (0, 1) = e_2$.

Ein besonderer Fall liegt vor, wenn die Vektoren $f(b_1), \dots, f(b_n)$ selbst wieder eine Basis bilden, diesmal natürlich eine Basis von W .

²²In der Tat ist f linear: $f(x, y) + f(x', y') = (x + y, y) + (x' + y', y') = (x + x' + y + y', y + y') = f(x + x', y + y')$ und $f(sx, sy) = (sx + sy, sy) = s(x + y, y) = sf(x, y)$.

²³Der formal korrekte Beweis für diese Erweiterung ist *Induktion nach n* :

Induktionsanfang $n = 1$: $f(x_1 b_1) = x_1 f(b_1)$ nach (20).

Induktionsschritt $n - 1 \rightarrow n$, $n \geq 2$: $f(\sum_{i=1}^n x_i b_i) = f((\sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i) + x_n b_n) \stackrel{20}{=} f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i b_i) + f(x_n b_n) \stackrel{\text{Ind.Vor}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} x_i f(b_i) + x_n f(b_n) = f(\sum_{i=1}^n x_i f(b_i))$.

Eine solche lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ nennt man *Isomorphismus*. Sie besitzt eine lineare Umkehrabbildung $g : W \rightarrow V$, d.h. $g \circ f = \text{id}_V$, $f \circ g = \text{id}_W$ oder mit Variablen geschrieben: $g(f(v)) = v$ und $f(g(w)) = w$ für alle $v \in V$, $w \in W$. Die Abbildung g ist leicht zu finden: Da $f(b_1), \dots, f(b_n)$ eine Basis von W bildet, können wir g durch seine Werte auf dieser Basis definieren und setzen einfach $g(f(b_i)) := b_i$ für $i = 1, \dots, n$.

In unserem Beispiel $f(x, y) = (u, v)$ mit $u = x + y$, $v = y$ ist $(f(e_1), f(e_2)) = (e_1 + e_2, e_2)$ in der Tat wieder eine Basis. Die Umkehrabbildung g bildet also $e_1 + e_2$ auf e_1 und e_2 auf e_2 ab; man berechnet sie besser, indem man die Gleichungen $u = x + y$, $v = y$ nach x und y auflöst: $x = u - y = u - v$, $y = v$ also $g(u, v) = (x, y)$ mit $x = u - v$, $y = v$.

Ein wichtiges Beispiel eines Isomorphismus wird durch eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ eines Vektorraums V gegeben: Wir können B die (auch mit B bezeichnete) lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ zuordnen, die jedem Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i e_i \in \mathbb{R}^n$ den Vektor $Bx = \sum_i x_i b_i \in V$ zuordnet (vgl. (19)). Da die Basis (e_1, \dots, e_n) von \mathbb{R}^n auf die Basis (b_1, \dots, b_n) von V zugeordnet wird, ist B ein Isomorphismus.

Wir wollen nun besonders den Fall $W = V$ betrachten; lineare Abbildungen $f : V \rightarrow V$ nennt man auch *Endomorphismen* von V . Wenn $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis ist, ist f durch die Vektoren $f(b_1), \dots, f(b_n)$ bestimmt, wie wir gesehen haben. Diese Vektoren $f(b_i)$ stellen wir nun wieder in der Basis B dar:

$$(22) \quad f(b_i) = \sum_j a_{ji} b_j$$

mit Koeffizienten $a_{ji} \in \mathbb{R}$ und erhalten damit

$$(23) \quad f(x) = \sum_{ij} a_{ji} x_i b_j.$$

Die n^2 Zahlen a_{ij} beschreiben also die Abbildung f vollständig. Wir fassen sie zu einem quadratischen Zahlenschema (*Matrix*) zusammen

$$(24) \quad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

genannt die *Matrix von f bezüglich der Basis B* .

Wir wollen diese Matrix noch auf eine etwas andere Art beschreiben. Auf dem \mathbb{R}^n wird eine lineare Abbildung direkt als Matrix beschrieben

(die Matrix bezüglich der Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$); vgl. „Linearität“, S. 43 - 47.²⁴ Matrizen sind also dasselbe wie lineare Abbildungen auf \mathbb{R}^n . Wenn jetzt eine lineare Abbildung f auf einem beliebigen Vektorraum V mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ gegeben ist, so wird diese durch Anwenden des Isomorphismus $B : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ aus (19) in eine lineare Abbildung A auf \mathbb{R}^n verwandelt:

$$(25) \quad A = B^{-1}fB.$$

(Wir lassen hier und im Weiteren das Kompositionssymbol \circ weg.) Etwas übersichtlicher lässt sich die Beziehung zwischen f und A in einem *Diagramm* ausdrücken:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ B \downarrow & & \downarrow B \\ V & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

Dieses meint: Es ist egal, ob wir auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ erst A und dann B oder erst B und dann f anwenden, das Ergebnis ist dasselbe: $BA = fB$ oder $A = B^{-1}fB$.

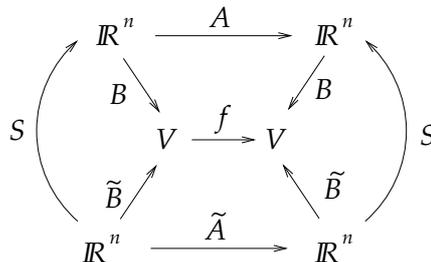
Was passiert, wenn wir zu einer anderen Basis \tilde{B} übergehen? Dazu erweitern wir unser Diagramm:

²⁴Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Folge von n Zahlen x_1, \dots, x_n . Diese schreiben wir nicht mehr nebeneinander, als *Zeile*, sondern untereinander, als *Spalte*:

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; da dies drucktechnisch ungünstig ist, schreiben wir stattdessen oft

$x = (x_1, \dots, x_n)^T$, wobei das Symbol T („*transponiert*“) aus einer Zeile die entsprechende Spalte macht. Die Anwendung einer Matrix A auf den Vektor x geschieht nun so, dass jede einzelne Zeile von A mit der Spalte x „*multipliziert*“ wird: erste Zahl der Zeile mal erste Zahl der Spalte plus zweite Zahl der Zeile mal zweite Zahl der Spalte plus usw.; die Ergebnisse werden wieder als Spalte untereinander geschrieben. Beispiel für $n = 2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \end{pmatrix}$$



Zwei verschiedene Basen $B, \tilde{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ unterscheiden sich durch die invertierbare Matrix $S := B^{-1}\tilde{B} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, denn

$$(26) \quad \tilde{B} = BB^{-1}\tilde{B} = BS.$$

Die Matrix $S = B^{-1}\tilde{B}$ heißt die *Übergangsmatrix* von der Basis B zur Basis \tilde{B} . Für die Matrix \tilde{A} von f bezüglich der Basis \tilde{B} gilt somit:

$$(27) \quad \tilde{A} \stackrel{25}{=} \tilde{B}^{-1}f\tilde{B} = (BS)^{-1}fBS = S^{-1}B^{-1}fBS \stackrel{25}{=} S^{-1}AS.$$

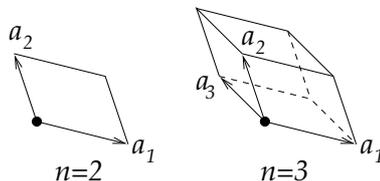
Zwei Matrizen A, \tilde{A} mit $\tilde{A} = S^{-1}AS$ nennt man *konjugiert* unter S . Wir haben also gezeigt:

Satz 4.1. *Ist $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und sind B, \tilde{B} zwei Basen von V , so sind die Matrizen A, \tilde{A} von f bezüglich dieser beiden Basen konjugiert unter der Übergangsmatrix $S = B^{-1}\tilde{B}$,*

$$(28) \quad \tilde{A} = S^{-1}AS.$$

5. DETERMINANTEN

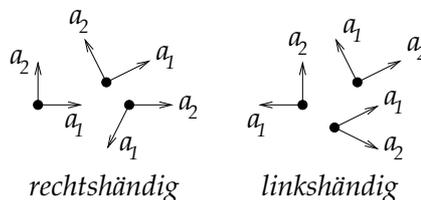
Die *Determinante*²⁵ ordnet n Vektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ eine Zahl $\det(a_1, \dots, a_n)$ zu, die eine mehrfache geometrische Bedeutung hat. Wenn $\{a_1, \dots, a_n\}$ keine Basis bildet, ist sie Null. Wenn $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis bildet, dann ist ihr Absolutbetrag das n -dimensionale *Volumen*,²⁶ das von diesen Vektoren aufgespannt wird.



²⁵„Linearität“, S 65 ff

²⁶Das 2-dimensionale Volumen ist der Flächeninhalt, das 3-dimensionale der Rauminhalt; man kann diesen Begriff aber auf beliebige Dimensionen ausdehnen.

Das Vorzeichen schließlich unterscheidet, ob die Basis (a_1, \dots, a_n) (jetzt aufgefasst als *geordnete Menge* oder *n-Tupel* von Vektoren) eine *rechtshändige* oder eine *linkshändige* Basis bildet.²⁷



Definiert wird eine solche Funktion $\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$ durch drei Grundeigenschaften, die sie eindeutig kennzeichnen und ihre Berechnung gestatten:

D1: Linearität in jedem Argument:²⁸

$$\det(\dots, sa + a', \dots) = s \det(\dots, a, \dots) + \det(\dots, a', \dots),$$

D2: Antisymmetrie:²⁹

$$\det(\dots, b, \dots, a, \dots) = -\det(\dots, a, \dots, b, \dots),$$

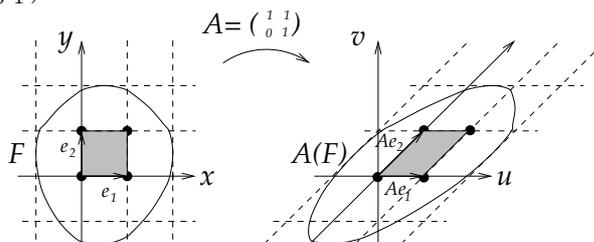
D3: Normiertheit:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Die *Determinante einer Matrix A* definieren wir als Determinante der n Spaltenvektoren, aus denen die Matrix besteht:

$$(29) \quad \det A := \det(Ae_1, \dots, Ae_n).$$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



²⁷Zwei Vektoren a_1, a_2 in der Ebene bilden eine *rechtshändige* Basis, wenn a_1 in Richtung des Daumens, a_2 in Richtung des Zeigefingers der *rechten* Hand zeigt, Handfläche nach innen. Drei Vektoren a_1, a_2, a_3 im Raum bilden eine *rechtshändige* Basis, wenn sie in Richtung von Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger der *rechten* Hand zeigen. Entsprechendes gilt für *linkshändige* Basen.

²⁸Die Punkte \dots bedeuten, dass in den übrigen Argumenten auf der linken und rechten Seite der Gleichung dasselbe steht.

²⁹Äquivalent dazu ist **D2'**: $\det(\dots, a, \dots, a, \dots) = 0$.

Die Figur zeigt die geometrische Bedeutung von $\det A$: Zunächst ist $\det A = \det(Ae_1, Ae_2)$ der Flächeninhalt des von Ae_1 und Ae_2 aufgespannten Parallelogramms (dunkel unterlegt), oder, wenn man so will, das Verhältnis der Flächeninhalte dieses Parallelogramms zu dem des Einheitsquadrat, das von e_1 und e_2 aufgespannt wird. Aber dadurch ist $\det A$ für *jede* Figur F das Verhältnis der Flächeninhalte von $A(F)$ und F : Wie F von (verschobenen) Einheitsquadraten überdeckt wird (etwa 4 ganze und 4 halbe), so wird $A(F)$ von gleich vielen (verschobenen) Parallelogrammen überdeckt, und alle haben den Flächeninhalt $\det A$. Die Zahl $|\det A|$ ist also der Faktor, um den sich ein beliebiger Flächen- oder Rauminhalt bei Anwendung der Transformation A ändert, der *Volumenveränderungsfaktor*. Dieser Gedanke wird in Abschnitt 16 noch eine Rolle spielen.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist die Determinante leicht berechenbar:³⁰

$$\begin{aligned}\det(a, b) &= a_1b_2 - b_1a_2, \\ \det(a, b, c) &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1.\end{aligned}$$

Das letztere ist die *Regel von Sarrus*,³¹ die durch das folgende Schema verdeutlicht wird:

$$\begin{array}{ccccc} & & + & & - \\ & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

Für $n \geq 4$ kann man die Determinante zum Beispiel mit elementaren Zeilen- und Spalten-Transformationen berechnen.³²

Satz 5.1. *Für jede lineare Abbildung (Matrix) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt: A ist umkehrbar (ein Isomorphismus) genau dann, wenn $\det A \neq 0$.*

Beweis. Wenn A invertierbar ist, dann bringen wir A durch elementare Zeilentransformationen (vgl. „Linearität“, S. 51 - 54) auf die Gestalt einer oberen Dreiecksmatrix mit Koeffizienten $\neq 0$ auf der Diagonale;³³ deren Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente und damit ungleich Null, und bei den Transformationen hat sich die Determinante nur um Faktoren $\neq 0$ verändert. Also ist $\det A \neq 0$.

³⁰„Linearität“, S. 69

³¹Pierre Frédéric Sarrus, 1798 - 1861

³²„Linearität“, S. 65ff.

³³Mit elementaren Zeilentransformationen bringen wir A auf Zeilenstufenform, aber die „Breite“ der Stufen muss Eins sein, sonst bliebe unten eine Nullzeile übrig, was der Invertierbarkeit von A widerspräche.

Wenn A nicht invertierbar ist, gibt es Vektoren v, w mit $v \neq w$, aber $Av = Aw$. Dann ist $A(v - w) = Av - Aw = 0$, es gibt also eine Lösung $x = v - w \neq 0$ des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$, ein Element des *Kerns* von A . Damit ist $0 = Ax = \sum_i x_i Ae_i$, und nicht alle x_i sind Null. Also können wir eine der Spalten Ae_i , zum Beispiel Ae_n , als Linearkombination der anderen schreiben, $Ae_n = \sum_{i=1}^{n-1} s_i Ae_i$, und mit D1 und D2' ist

$$\det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \det(Ae_1, \dots, Ae_i, \dots, Ae_{n-1}, Ae_i) = 0.$$

□

Satz 5.2. Für lineare Abbildungen (Matrizen) $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt.³⁴

$$(30) \quad \det(BA) = \det(B) \det(A).$$

Beweis. Fall 1: $\det B = 0$. Dann ist B nach dem vorigen Satz nicht umkehrbar, also ist auch BA nicht umkehrbar und damit $\det BA = 0 = \det B \det A$.

Fall 2: $\det B \neq 0$. Wir definieren dann eine neue Abbildung $\det' : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\det'(a_1, \dots, a_n) := \det(Ba_1, \dots, Ba_n) / \det(B).$$

Diese Abbildung erfüllt D1, D2 und auch D3, denn $\det'(e_1, \dots, e_n) = \det(Be_1, \dots, Be_n) / \det(B) = \det(B) / \det(B) = 1$. Da die Determinante durch diese Eigenschaften eindeutig definiert wird, gilt $\det' = \det$ und insbesondere $\det(BA) / \det(B) = \det(BAe_1, \dots, BAe_n) / \det(B) = \det'(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det(Ae_1, \dots, Ae_n) = \det A$, woraus (30) folgt. □

Damit können wir nun auch die Determinante einer linearen Abbildung f auf einem beliebigen n -dimensionalen Vektorraum V definieren, nämlich als Determinante der Matrix A , die wir f mit Hilfe einer Basis B zuordnen. Wenn wir eine andere Basis \tilde{B} wählen, so ist die zugehörige Matrix \tilde{A} zu A konjugiert, $\tilde{A} = S^{-1}AS$ nach (28) und nach dem vorigen Satz ist $\det \tilde{A} = (1/\det(S)) \det(A) \det(S) = \det A$.³⁵ Die Determinante ist also unabhängig von der Wahl der Basis.

³⁴Bei der Interpretation von $|\det A|$ als Volumenveränderungsfaktor wird diese Formel sehr anschaulich: Bei der Transformation mit A verändert sich das Volumen um den Faktor $|\det A|$; transformieren wir anschließend mit B , so kommt noch ein Faktor $|\det B|$ dazu, insgesamt also der Faktor $|\det A| |\det B|$.

³⁵Es gilt $\det(S^{-1}) = 1/\det(S)$, weil $S^{-1}S = I$ und damit $\det(S^{-1} \det(S)) = \det(I) = 1$.

6. EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN

Wir fragen uns nun, ob wir durch eine geeignete Wahl der Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ die Matrix A einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow V$ vereinfachen können. Unser Ziel ist, aus A eine *Diagonalmatrix* zu machen, eine Matrix, deren Koeffizienten außerhalb der Diagonale alle Null sind:

$$(31) \quad B^{-1}fB = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad fB = BD.$$

Für eine solche Basis müsste gelten:

$$(32) \quad f(b_i) = fBe_i = BDe_i = \lambda_i Be_i = \lambda_i b_i.$$

Jeder Basisvektor b_i würde durch f also einfach nur um den Faktor λ_i gestreckt oder gestaucht werden. Wir sagen dann, dass die Basis B die lineare Abbildung f *diagonalisiert* oder eine *Eigenbasis* von f ist. Wie können wir eine solche Basis finden? Gibt es sie überhaupt immer?

Wir wollen etwas bescheidener anfangen, nicht gleich mit einer ganzen Basis, sondern mit einem einzelnen Vektor $b \neq 0$, der durch f nur mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird:

$$(33) \quad f(b) = \lambda b.$$

Ein solcher Vektor heißt *Eigenvektor* und der zugehörige Faktor λ heißt *Eigenwert* von f . Anders ausgedrückt,

$$(34) \quad (f - \lambda I)(b) = 0,$$

wobei I die *identische Abbildung* $I(x) = x$ bezeichnet. Die lineare Abbildung $f - \lambda I$ ist also nicht injektiv, denn der Vektor $b \neq 0$ wird auf Null abgebildet. Die Menge E_λ der Eigenvektoren wird auch *Eigenraum* zum Eigenwert λ genannt und bildet den *Kern*³⁶ der linearen Abbildung $f - \lambda I$:

$$(35) \quad E_\lambda := \{b \in V; (f - \lambda I)(b) = 0\}$$

Für die meisten Zahlen λ wird die Abbildung $f - \lambda I$ injektiv sein, nur falls λ ein Eigenwert von f ist, besitzt sie einen Kern. Dies lässt sich durch die *Determinante* erfassen:

³⁶Der *Kern* $\ker f$ einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ besteht aus allen $v \in V$, die von f auf den Nullpunkt von W abgebildet werden: $\ker f = \{v \in V; f(v) = 0\}$. Dies ist immer ein *Unterraum* von V („Linartät“, S. 26 und S. 55); insbesondere ist immer $0 \in \ker f$. Wenn wir sagen: „ f besitzt einen Kern“, meinen wir damit, dass der Kern Elemente ungleich 0 enthält.

Satz 6.1. Die Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $f : V \rightarrow V$ genau dann, wenn

$$(36) \quad \det(f - \lambda I) = 0.$$

Beweis. Nach Satz 5.1 ist $\det(f - \lambda I) = 0 \iff f - \lambda I$ ist nicht umkehrbar $\iff \ker(f - \lambda I) \neq 0 \iff$ Es gibt $0 \neq b \in V$ mit $f(b) = \lambda b \iff \lambda$ ist Eigenwert von f . \square

Jetzt ist die Strategie zum Bestimmen der Eigenwerte und Eigenvektoren vorgezeichnet: Wir suchen zunächst alle Lösungen λ der *charakteristischen Gleichung* (36), $\det(f - \lambda I) = 0$. Für die so gefundenen Werte λ lösen wir sodann das lineare Gleichungssystem $(f - \lambda I)x = 0$ für $x \in V$; die Lösungen x bilden den Eigenraum E_λ . Wenn wir so eine ganze Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus Eigenvektoren gefunden haben, $f(b_i) = \lambda_i b_i$, dann ist die *Diagonalisierung* der linearen Abbildung f gelungen.

Beispiel 1: $V = \mathbb{R}^2$, $f = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\det(f - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -3 \\ -3 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 3^2 = 0 \iff \lambda - 5 = \pm 3 \\ \iff \lambda \in \{2, 8\}.$$

Für $\lambda = 2$ ist $f - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x - 3y = 0 \iff y = x$. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ ist also $E_2 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\lambda = 8$ ist $f - \lambda I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ und $-3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \iff y = -x$. Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 8$ ist also $E_8 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Eigenbasis von f .

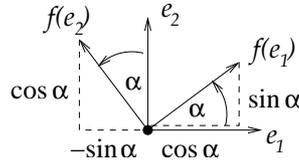
Beispiel 2: $V = \mathbb{R}^2$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\det(f - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 1.$$

Damit ist $f - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0$, der zugehörige Eigenraum ist also $E_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weitere Eigenvektoren gibt

es nicht. Insbesondere gibt es keine Eigenbasis; die lineare Abbildung ist also nicht diagonalisierbar.

Beispiel 3: $V = \mathbb{R}^2$, f sei die Drehung um den Winkel α .



Wie aus der Figur zu ersehen,³⁷ werden die Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Winkel α gedreht auf $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$. Die Matrix von f ist daher $f = (f(e_1), f(e_2)) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$. Die charakteristische Gleichung ist $\det(f - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos \alpha - \lambda)^2 + (\sin \alpha)^2 = 0 \iff (\lambda - \cos \alpha)^2 = -(\sin \alpha)^2$. Wenn $\sin \alpha \neq 0$ (also $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$), dann gibt es keine reelle Zahl λ mit dieser Eigenschaft, denn Quadrate sind niemals negativ.³⁸ Es gibt also überhaupt keinen Eigenvektor in $V = \mathbb{R}^2$. Dies entspricht ja auch der Anschauung: Jeder Vektor wird um den Winkel α gedreht, keiner wird nur mit einem skalaren Faktor multipliziert.

7. SYMMETRISCHE MATRIZEN

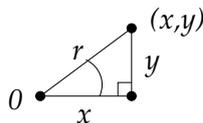
Das *Skalarprodukt* von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist die Zahl

$$(37) \quad x \cdot y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = x^T y$$

(wobei der Ausdruck $x^T y$ das Produkt der Zeile x^T mit der Spalte y bezeichnet, vgl. Fußnote 17). Wir haben im letzten Semester gesehen,

³⁷Erinnerung an die alte Schuldefinition von *Cosinus* und *Sinus*:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse} = x/r, \\ \sin \alpha &= \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse} = y/r. \end{aligned}$$



³⁸Wohl aber gibt es *komplexe* Lösungen: $\lambda = \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i \alpha}$, vgl. „Zahl und Funktion“, (74), S.69. Wenn wir f als \mathbb{C} -lineare Abbildung auf dem \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^2 auffassen, dann ist f diagonalisierbar mit Eigenwerten $e^{\pm i \alpha}$.

dass das Skalarprodukt Abstand und Winkel zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ widerspiegelt.³⁹

$$(38) \quad |x - y| = \sqrt{(x - y) \cdot (x - y)},$$

$$(39) \quad \cos \angle(x, y) = \frac{x \cdot y}{|x||y|},$$

insbesondere ist $x \perp y \iff x \cdot y = 0$.

Wir haben den Begriff „Skalarprodukt“ sodann auf beliebige reelle Vektorräume V ausgedehnt, indem wir ihn durch vier Grundeigenschaften definiert haben:

$$\text{SP1: } x \cdot y = y \cdot x,$$

$$\text{SP2: } (sx) \cdot y = s(x \cdot y) = x \cdot (sy),$$

$$\text{SP3: } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$\text{SP4: } x \cdot x \geq 0 \text{ und } x \cdot x = 0 \iff x = 0$$

für alle $x, y \in V$ und $s \in \mathbb{R}$. Beispiele erhalten wir, wenn wir das durch (37) definierte *Standardskalarprodukt* im \mathbb{R}^n auf einen beliebigen Unterraum $V \subset \mathbb{R}^n$ einschränken. Wir haben dann gesehen, dass wir mit Hilfe einer geeigneten Basis, einer *Orthonormalbasis*, jeden Vektorraum V mit Skalarprodukt wieder auf \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt zurückführen können; eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V heißt *Orthonormalbasis*, wenn

$$(40) \quad b_i \cdot b_j = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Eine solche Orthonormalbasis kann leicht konstruiert werden, z.B. durch das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt.⁴⁰

Wenn nun ein Vektorraum V mit Skalarprodukt gegeben ist, dann heißt eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ *selbstadjungiert*, wenn gilt

$$(41) \quad f(x) \cdot y = x \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in V$. Für die Matrix $A = (a_{ji})$ von f bezüglich einer *Orthonormalbasis* $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ (z.B. $V = \mathbb{R}^n$ und $b_i = e_i$) heißt dies einfach, dass A *symmetrisch* ist, also $a_{ji} = a_{ij}$ für alle i, j oder $A^T = A$,⁴¹ denn

$$(42) \quad f(b_i) \cdot b_j = \sum_k a_{ki} b_k \cdot b_j = \sum_k a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji}$$

³⁹„Linearität“, S. 34f

⁴⁰„Linearität“, S. 38.

⁴¹ A^T ist die Matrix mit vertauschten Zeilen und Spalten: $A^T = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$. Man rechnet leicht nach, dass $(Ax)^T = x^T A^T$ für jede Matrix A und jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

und daher⁴²

$$(43) \quad a_{ji} = f(b_i) \cdot b_j \stackrel{41}{=} b_i \cdot f(b_j) = a_{ij}.$$

Satz 7.1. *Ist A selbstadjungiert und sind λ, μ zwei verschiedene Eigenwerte von A , dann stehen die Eigenräume aufeinander senkrecht, $E_\lambda \perp E_\mu$.*

Beweis. Zu zeigen ist: Für alle $x \in E_\lambda$ und $y \in E_\mu$ gilt $x \cdot y = 0$. Dies ist richtig, denn $\lambda(x \cdot y) = (Ax) \cdot y = x \cdot Ay = \mu(x \cdot y)$, und weil $\lambda \neq \mu$, folgt daraus $x \cdot y = 0$. \square

Wir haben diese Eigenschaft bereits in Beispiel 1, Abschnitt 6 beobachtet: Die Eigenvektoren der symmetrischen Matrix $f = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; sie stehen senkrecht aufeinander: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$. Für die Praxis bedeutet dieser Satz, dass wir zu einer selbstadjungierten linearen Abbildung f eine *Orthonormalbasis* $B = (b_1, \dots, b_n)$ aus Eigenvektoren bekommen können: Wir lösen die charakteristische Gleichung $\det(f - \lambda I) = 0$, erhalten als Lösungen die Eigenwerte λ , wählen in jedem E_λ eine Orthonormalbasis und setzen diese zu einer Orthonormalbasis von V zusammen. Im Fall des obigen Beispiels müssen wir nur noch durch die Länge dividieren: $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthonormalbasis. Man kommt mit dem Verfahren immer zum Ziel:

Satz 7.2. *Jede symmetrische reelle Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*

Beweis. Um dies zu beweisen, reicht Satz 7.1 noch nicht aus. Die Frage steht ja im Raum, ob es immer (genügend viele) Eigenwerte gibt; die charakteristische Gleichung $\det(f - \lambda I) = 0$ hat ja nicht immer (reelle) Lösungen, wie die Beispiele 2 und 3 auf S. 25 gezeigt haben. Aber:

(1) *Ist f selbstadjungiert, dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(f - \lambda I) = 0$.*

Wir werden gleich eine Beweisidee für (1) geben. Aber damit sind wir noch nicht fertig, denn *ein* Eigenwert reicht in der Regel nicht aus; wie finden wir weitere Eigenwerte? Dazu müssen wir Satz 7.1 zu folgender Aussage verschärfen:

(2) *Ist f selbstadjungiert mit Eigenraum E_λ , dann ist $f(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.*

Hierbei bezeichnet E_λ^\perp das *orthogonale Komplement* zum Unterraum E_λ , d.h. $E_\lambda^\perp = \{y \in V; y \cdot x = 0 \forall x \in E_\lambda\}$. Die Aussage (2) ist einfach

⁴²Es gilt auch die Umkehrung, denn es genügt, dass (41) für die Elemente einer Basis ($x = b_i, y = b_j$) gezeigt wird, da sich jeder Vektor aus Vielfachen der Basisvektoren zusammensetzt. Für $V = \mathbb{R}^n$ und $f = A$ kann man das auch so sehen: Ist $A^T = A$, so ist $Ax \cdot y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T A y = x \cdot Ay$.

zu beweisen: Ist $y \in E_\lambda^\perp$ und $x \in E_\lambda$, so ist $f(y) \cdot x = y \cdot f(x) = \lambda(y \cdot x) = 0$, also $f(y) \in E_\lambda^\perp$. Wenn wir f nun auf E_λ^\perp einschränken, wird f eine selbstadjungierte lineare Abbildung auf E_λ^\perp , die wiederum einen Eigenraum $E_\mu \subset E_\lambda^\perp$ besitzen muss, usw.

Um (1) zu zeigen, betrachten wir die lineare Abbildung $f_\lambda = f - \lambda I$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wenn $|\lambda|$ sehr groß ist, dann überwiegt der Anteil $-\lambda I$ von f_λ und $f_\lambda(x) \cdot x > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$, falls $\lambda < 0$, während $f_\lambda(x) \cdot x < 0$ falls $\lambda > 0$. Solche selbstadjungierten linearen Abbildungen nennt man *positiv definit* bzw. *negativ definit*. Wenn wir λ erst sehr stark negativ wählen und dann langsam größer werden lassen, wird es bei irgend einem Wert von λ zum ersten Mal ein $x_o \in V \setminus \{0\}$ geben mit $f_\lambda(x_o) \cdot x_o = 0$, aber weiterhin $f_\lambda(x) \cdot x \geq 0$ für alle $x \in V$ („*positiv semidefinit*“). Daraus folgt $f_\lambda(x_o) = 0$, denn andernfalls gäbe es $y \in V$

$$f_\lambda(x_o) \cdot y < 0, \quad (*)$$

aber für jedes genügend kleine $\epsilon > 0$ müsste gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_\lambda(x_o + \epsilon y) \cdot (x_o + \epsilon y) \\ &= f_\lambda(x_o) \cdot x_o + 2\epsilon f_\lambda(x_o) \cdot y + \epsilon^2 (f_\lambda(y) \cdot y) \\ &= \epsilon [2f_\lambda(x_o) \cdot y + \epsilon f_\lambda(y) \cdot y]. \end{aligned}$$

Wegen (*) ist aber $2f_\lambda(x_o) \cdot y < 0$, also ist für genügend kleines $\epsilon > 0$ die eckige Klammer negativ, ein Widerspruch!

Also ist $\det(f - \lambda I) = 0$ für dieses λ . □

Damit können wir jetzt unser ursprüngliches Problem lösen, einen Kegelschnitt oder eine Quadrik in Achsenlage zu drehen: Gegeben sei eine *Quadrik*, die Lösungsmenge einer allgemeinen quadratischen Gleichung in n Variablen:

$$\begin{aligned} (44) \quad Q &= \{x \in \mathbb{R}^n; \sum a_{ij}x_i x_j + \sum b_i x_i + c = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; (Ax) \cdot x + b \cdot x + c = 0\}. \end{aligned}$$

Dabei dürfen wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen; A ist also symmetrisch (selbstadjungiert).⁴³ Wir bestimmen eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$, die Eigenbasis für A ist, d.h. $Ab_i = \lambda_i b_i$.⁴⁴ Substituiert man nun $x = Bu$, so erhält man mit (31)

$$Ax = ABu = BDu$$

⁴³Für jedes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ kommt in der Summe der Summand $a_{ij}x_i x_j$, aber auch der Summand $a_{ji}x_j x_i$ vor. Damit ist $\sum_{ij} a_{ij}x_i x_j = \sum_{ij} \tilde{a}_{ij}x_i x_j$ mit $\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \tilde{a}_{ji}$.

⁴⁴Die Eigenwerte λ_i müssen nicht alle verschieden sein; die Eigenräume können ja zwei- oder mehrdimensional sein.

und damit

$$(Ax) \cdot x = (BDu) \cdot (Bu) \stackrel{*}{=} (Du) \cdot u = \sum_i \lambda_i u_i^2,$$

wobei wir bei $\stackrel{*}{=}$ benutzt haben, dass B das Skalarprodukt erhält. Oder dasselbe noch einmal in Komponentenschreibweise mit $u = \sum_i u_i e_i$:

$$Ax = ABu = \sum_i u_i AB e_i = \sum_i u_i A b_i = \sum_i u_i \lambda_i b_i$$

und damit

$$\begin{aligned} (Ax) \cdot x &= (ABu) \cdot Bu = \left(\sum_i u_i \lambda_i b_i \right) \cdot \left(\sum_j u_j b_j \right) \\ &= \sum_{ij} u_i u_j \lambda_i (b_i \cdot b_j) = \sum_{ij} u_i u_j \lambda_i \delta_{ij} = \sum_i u_i^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

In den u -Koordinaten gibt es also keine gemischten Terme $u_i u_j$ (mit $i \neq j$) mehr, und diesmal erhält die Transformationsmatrix B das Skalarprodukt und damit Winkel und Abstände.⁴⁵

Wenn wir die Gleichung der Quadrik,

$$(45) \quad Ax \cdot x + b \cdot x + c = 0,$$

in die neuen Koordinaten u umrechnen wollen, müssen wir noch in den linearen Termen $b \cdot x$ das x durch Bu ersetzen:

$$b \cdot x = b^T x = b^T B u = (B^T b)^T u = (B^T b) \cdot u.$$

Aus (45) wird dann in den neuen Koordinaten u :

$$(46) \quad Du \cdot u + (B^T b) \cdot u + c = 0.$$

Durch eine weitere Transformation der Form $u = v + a$ (Verschiebung um einen festen Vektor a) können wir nun lineare Terme beseitigen; dazu verwendet man wieder quadratische Ergänzung (vgl. S. 14). Damit haben wir die *Koordinatentransformation* bestimmt, die die Quadrik in Zentrums- und Achsenlage bringt:⁴⁶

$$(47) \quad x = Bu = Bv + Ba, \quad v = u - a = B^T x - a.$$

⁴⁵Eine Matrix B , die die Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) wieder auf eine Orthonormalbasis (b_1, \dots, b_n) abbildet, nennt man *orthogonal*. Eine solche Matrix B erhält das Skalarprodukt, $(Bx) \cdot (By) = x \cdot y$, denn $Bx = \sum x_i b_i$ und $(Bx) \cdot (By) = \sum_{ij} x_i y_j b_i \cdot b_j = \sum_i x_i y_i = x \cdot y$.

⁴⁶Die Berechnung von B^{-1} ist in diesem Fall einfach, denn wegen $b_i \cdot b_j = \delta_{ij}$ ist $B^T B = I$, also $B^{-1} = B^T$.

Auf diese Weise erhalten wir die *euklidische Normalform* der Quadrik.⁴⁷

Beispiel 1: $6x^2 + 12xy + y^2 + 12x - 18y = 9$ (vgl. (14), S. 14). Diese Gleichung ist von der Form⁴⁸ $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9$ mit $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \end{pmatrix}$. Als erstes bestimmen wir die Eigenwerte von A :

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 6 \\ 6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda - 30$$

$\iff \lambda^2 - 7\lambda + \frac{49}{4} = 30 + \frac{49}{4} = \frac{169}{4} \iff \lambda = \frac{7}{2} \pm \frac{13}{2}$, also $\lambda_+ = 10$, $\lambda_- = -3$. Jetzt bestimmt man die Eigenvektoren als die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_{\pm}I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Das sind eigentlich jedesmal zwei Gleichungen, aber das λ_{\pm} ist gerade so gewählt, dass diese beiden Gleichungen äquivalent sind: Setzen wir λ_+ ein, so erhalten wir $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $-4x + 6y = 0$ und $6x - 9y = 0$; beide Gleichungen sind äquivalent zu $2x = 3y$. Setzen wir λ_- ein, so ergibt sich $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit $9x + 6y = 0$ und $6x + 4y = 0$; diese Gleichungen sind beide äquivalent zu $3x = -2y$. Eigenvektoren sind also $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_+ = 10$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu $\lambda_- = -3$. Diese Vektoren haben Skalarprodukt Null und Länge $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$; die Vektoren $b_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bilden also eine Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2)$ aus Eigenvektoren. Setzt man $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = ub_1 + vb_2$ in die Gleichung $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9$ ein, so ergibt sich mit $Ab_1 = 10b_1$ und $Ab_2 = -3b_2$ sowie $B\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot B^T b$ mit $B^T = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ und $B^T b = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -18 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 0 \\ -78 \end{pmatrix}$:

$$10u^2 - 3v^2 - \frac{78}{\sqrt{13}}v = 9$$

Quadratische Ergänzung von $3(v^2 + \frac{26}{\sqrt{13}}v)$ ist $3\left(\frac{13}{\sqrt{13}}\right)^2 = 3 \cdot 13$, also erhalten wir

$$10u^2 - 3(v + \sqrt{13})^2 = 9 - 39 = -30,$$

und mit $\tilde{v} = v + \sqrt{13}$ ergibt sich die *euklidische Normalform*

$$\frac{\tilde{v}^2}{10} - \frac{u^2}{3} = 1.$$

⁴⁷In drei Dimensionen gibt es neben dem *Ellipsoid* und dem ein- und zweischaligen *Hyperboloid* $\{\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ das *elliptische* und das *hyperbolische* Paraboloid: $\{z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}\}$ (falls ein Eigenwert von A gleich Null ist) sowie die *Kegel* $\{\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0\}$ (falls nach der Transformation der konstante Term Null ist). Wenn eine Koordinate in der Gleichung gar nicht vorkommt, ist ihr Wert beliebig und die Fläche ist ein Zylinder über einem Kegelschnitt.

⁴⁸Wegen $12xy = 6xy + 6yx$ steht 6 in der Antidiagonale von A .

Dies ist eine Hyperbel mit Hauptachsen $a = \sqrt{10}$ und $b = \sqrt{3}$.

Beispiel 2: $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ (vgl. (15), S. 15). Diese Gleichung ist von der Form $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte von A :

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$\iff \lambda^2 - 3\lambda + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} \iff \lambda = \lambda_{\pm} := \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$. Die Eigenvektoren erhält man durch Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, das aus zwei Gleichungen besteht, die aber linear abhängig sind, d.h. dasselbe besagen (genau so wurde λ gewählt); wir brauchen also nur eine der beiden Gleichungen zu lösen: $(1 - \lambda)x + y = 0$, also $y = (\lambda - 1)x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})x$. Eigenvektoren sind also $b_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \end{pmatrix}$. Diese sind bereits senkrecht, denn $b_+ \cdot b_- = 1 + (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})/4 = 1 + (1 - 5)/4 = 0$; sie müssen nur noch auf Einheitslänge gebracht werden. Doch bereits so können wir die Lage und Länge der Halbachsen sehen und die Figur auf S. 15 bestätigen.⁴⁹

Beispiel 3: Typ und Halbachsen des Kegelschnitts mit der Gleichung

$$(48) \quad 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + \sqrt{2}(22x_1 - 10x_2) = 0.$$

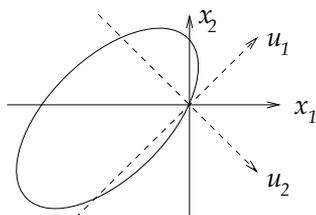
Diese ist von der Form $(Ax) \cdot x + b \cdot x = 0$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $b = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 22 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $c = 0$. Die Matrix A haben wir bereits in Beispiel 1 von Abschnitt 6 behandelt; sie hat die Eigenwerte 2 und 8. Die zugehörigen (bereits auf Einheitslänge normierten) Eigenvektoren sind $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Also ist $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und damit $x = Bu = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, also $x_1 = (u_1 + u_2)/\sqrt{2}$ und $x_2 = (u_1 - u_2)/\sqrt{2}$. Einsetzen in (48) ergibt die Gleichung in den u -Koordinaten (die quadratischen Terme haben wir eigentlich schon vorher berechnet):

$$\begin{aligned} 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 &= (10u_1^2 + 10u_2^2 - 6(u_1^2 - u_2^2))/2 = 2u_1^2 + 8u_2^2, \\ \sqrt{2}(22x_1 - 10x_2) &= 22(u_1 + u_2) - 10(u_1 - u_2) = 12u_1 + 32u_2. \end{aligned}$$

Damit lautet Gleichung (48) in u -Koordinaten:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(u_1^2 + 6u_1) + 8(u_2^2 + 4u_2) \\ &= 2(u_1^2 + 6u_1 + 9) + 8(u_2^2 + 4u_2 + 4) - 18 - 32 \\ &= 2(u_1 + 3)^2 + 8(u_2 + 2)^2 - 50 \\ \iff &\frac{(u_1 + 3)^2}{5^2} + \frac{(u_2 + 2)^2}{(5/2)^2} = 1. \end{aligned}$$

⁴⁹Es gilt $\lambda_{\pm} = (\phi_{\pm})^2$ mit $\phi_{\pm} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} \pm 1)$ (ϕ_+ ist der Goldene Schnitt!), deshalb sind die Halbachsen $\frac{1}{\phi_{\pm}} = 2 \frac{1}{\sqrt{5} \pm 1} = 2 \frac{1}{\sqrt{5} \pm 1} \frac{\sqrt{5} \mp 1}{\sqrt{5} \mp 1} = 2 \frac{\sqrt{5} \mp 1}{5 - 1} = \phi_{\mp}$.



8. DAS VEKTORPRODUKT

Wir beginnen mit einer sehr alten Examensaufgabe (F91,1,5):

(a) Gegeben seien zwei zueinander senkrechte Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$. Man zeige, dass die Menge

$$(49) \quad L = \{x \in \mathbb{R}^3; a \times x = b\}$$

eine *Gerade* ist.

(b) Man zeige, dass *jede* Gerade im Raum \mathbb{R}^3 sich in der Form (49) für geeignete $a, b \in \mathbb{R}^3$ darstellen lässt.

Hier wird eine neue Rechenoperation benutzt: Das *Vektorprodukt*, oder *Kreuzprodukt*. Anders als das *Skalarprodukt*, das aus zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ einen *Skalar* $a \cdot b \in \mathbb{R}$ macht, ordnet das *Vektorprodukt* zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ wieder einen *Vektor* $a \times b \in \mathbb{R}^3$ zu.⁵⁰

Definition: Das Vektorprodukt $a \times b$ von $a, b \in \mathbb{R}^3$ ist der Vektor im \mathbb{R}^3 mit der Eigenschaft

$$(50) \quad (a \times b) \cdot x = \det(a, b, x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

Der Vektor $c := a \times b$ wird also durch die Angabe seiner Skalarprodukte mit beliebigen Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ beschrieben.⁵¹ Die Komponenten c_i von c sind die Skalarprodukte mit den Basisvektoren e_i :

$$\begin{aligned} c_1 = c \cdot e_1 &= \det(a, b, e_1) = a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ c_2 = c \cdot e_2 &= \det(a, b, e_2) = a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ c_3 = c \cdot e_3 &= \det(a, b, e_3) = a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned}$$

⁵⁰Die Dimension 3 ist hier wichtig; im \mathbb{R}^n für $n \neq 3$ gibt es kein Vektorprodukt.

⁵¹Für feste Vektoren a, b ist die Abbildung $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $Cx = \det(a, b, x)$ linear und damit eine 3×1 -Matrix $C = (c_1, c_2, c_3) = c^T$ für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^3$; damit ist $\det(a, b, x) = Cx = c^T x = x \cdot c$.

also erhalten wir

$$(51) \quad a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Satz 8.1. *Eigenschaften des Vektorprodukts: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt:*

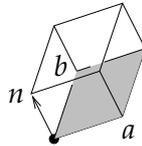
- (1) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ und $a \times (sb) = s(a \times b)$,
- (2) $a \times b = -b \times a$,
- (3) $a \times b \perp a, b$,
- (4) $a \times b = 0 \iff a, b$ sind linear abhängig.
- (5) a, b linear unabhängig $\Rightarrow (a, b, a \times b)$ ist rechtshändige Basis,
- (6) $|a \times b|$ ist der Flächeninhalt des von a, b aufgespannten Parallelogramms $P(a, b)$.



Beweis. (1) folgt aus der Linearität der Determinante im zweiten Argument. (2) ist die Antisymmetrie der Determinante (Vorzeichenwechsel bei Vertauschung von zwei Argumenten), ebenso (3), da $\det(a, b, a) = 0$ und $\det(a, b, b) = 0$. (4) ist eine Folge von (6). Dann folgt auch (5), denn rechtshändige Basen sind (per Definition) solche mit positiver Determinante, und

$$(52) \quad \det(a, b, a \times b) = (a \times b) \cdot (a \times b) = |a \times b|^2 > 0.$$

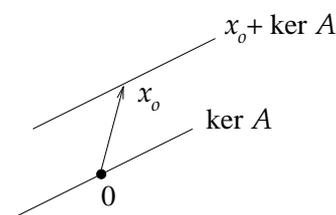
Um (6) zu sehen, müssen wir den Flächeninhalt F des Parallelogramms $P(a, b)$ berechnen. Dieser ist gleich dem Volumen des von a, b, n aufgespannten Spats, wobei n ein Einheitsvektor senkrecht zu a und b ist (*Normalenvektor*).⁵²



Wegen (3) können wir $n = \frac{a \times b}{|a \times b|}$ setzen und erhalten $F = \det(a, b, n) = (a \times b) \cdot n = (a \times b) \cdot \frac{a \times b}{|a \times b|} = |a \times b|$. \square

⁵²Eine Scheibe mit Flächeninhalt F und Dicke Eins hat Volumen $1 \cdot F = F$.

Lösung der Aufgabe (a): Die Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Ax = a \times x$ ist linear, also eine Matrix,⁵³ und wir haben das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen. Dieses besitzt eine Lösung x_o , wenn $b \in \text{Bild } A$, und dann ist $L = x_o + \ker A$ die Menge *aller* Lösungen.⁵⁴ Mit (3) gilt: $Ax = 0 \iff x, a$ linear abhängig $\iff x \in \mathbb{R}a$, mit anderen Worten $\ker A = \mathbb{R}a$. Nach (2) ist $Ax \perp a$ für alle x , also $\text{Bild } A \subset a^\perp$. Mit der Kern-Rang-Formel⁵⁵ $\dim \ker A + \dim \text{Bild } A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ und $\dim \ker A = \dim \mathbb{R}a = 1$ ist $1 + \dim \text{Bild } A = 3$, also $\dim \text{Bild } A = 2 = \dim a^\perp$ und somit ist $\text{Bild } A = a^\perp$. Weil $b \perp a$, ist $b \in a^\perp = \text{Bild } A$, es gibt also eine Lösung x_o mit $Ax_o = b$, und die Menge aller Lösungen ist $L = x_o + \ker A = x_o + \mathbb{R}a$. Weil der Unterraum $\ker A = \mathbb{R}a$ eindimensional ist, ist L eine Gerade.



Lösung der Aufgabe (b): Gegeben sei nun eine beliebige Gerade $G = x_o + \mathbb{R}a$. Für jedes $x = x_o + sa \in G$ (mit $s \in \mathbb{R}$) gilt dann $a \times x = a \times x_o + a \times (sa) = a \times x_o$, denn nach (4) ist $a \times (sa) = 0$, und damit ist G die Lösungsmenge der Gleichung $a \times x = b$ mit $b := a \times x_o$.

9. LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Eine *Differentialgleichung*⁵⁶ ist eine Gleichung zwischen den Werten einer Funktion $y(x)$ und den Werten ihrer Ableitungen $y'(x), y''(x), \dots$, zum Beispiel

$$(53) \quad y' = ay.$$

für eine gegebene Zahl $a \in \mathbb{R}$. Die gesuchte Größe für eine solche Gleichung ist also nicht eine Zahl oder ein Vektor, sondern eine *Funktion*

⁵³Die Spalten der Matrix A erhalten wir wie immer durch Anwenden auf die Basisvektoren: $Ae_1 = a \times e_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ und ebenso $Ae_2 = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ und $Ae_3 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $A = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$.

⁵⁴„Linearität“, Satz 17.1, S.55. Hierbei ist $\ker A$, der *Kern* von A , der Lösungsraum der Gleichung $Ax = 0$, d.h. der Unterraum $\{x \in \mathbb{R}^3; Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, und $x_o + \ker A$ ist eine Kurzschreibweise für die Menge $\{x_o + v; v \in \ker A\} \subset \mathbb{R}^3$.

⁵⁵„Linearität“, Gleichung (76), (77), S. 57, 58; der *Rang* einer Matrix ist die Dimension ihres Bildes.

⁵⁶„Integration“, Abschnitt 13, S. 42 – 45.

$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Im Fall unseres Beispiels (53) ist die Lösung bekannt:⁵⁷ $y = se^{ax}$ ist eine Lösung für jedes $s \in \mathbb{R}$, denn $y' = sae^{ax} = ay$.⁵⁸ Wir sehen, dass es nicht nur eine Lösung gibt, sondern eine ganze Schar, abhängig von dem Parameter s , den wir beliebig wählen können; diese parameterabhängige Lösung nennen wir die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung. Indem wir den Parameter speziell wählen, können wir den Wert der Funktion y an *einer* Stelle vorschreiben, z.B. $y(0) = s$; mit dieser zusätzlichen Forderung ist die Lösung eindeutig und wir sprechen dann von einer *Differentialgleichung mit Anfangsbedingung* oder *Anfangswertaufgabe*. Zum Beispiel hat die Anfangswertaufgabe $y' = ay$, $y(0) = 1$ die eindeutige Lösung $y(x) = e^{ax}$.

Oft hat man es aber nicht nur mit *einer* Differentialgleichung zu tun, sondern gleich mit mehreren für mehrere Funktionen y_1, y_2, \dots , zum Beispiel

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_1. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind miteinander gekoppelt; wir können sie nicht einzeln lösen. In diesem speziellen Beispiel kann man sich aber mit einem Trick helfen: Man addiert und subtrahiert die beiden Gleichungen und erhält

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)' &= y_2 + y_1, \\ (y_1 - y_2)' &= y_2 - y_1. \end{aligned}$$

Summe und Differenz, $u_1 = y_1 + y_2$ und $u_2 = y_1 - y_2$, erfüllen dann die „entkoppelten“ Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1, \\ u_2' &= -u_2. \end{aligned}$$

mit den allgemeinen Lösungen $u_1 = se^x$, $u_2 = te^{-x}$. Damit erhalten wir auch y_1, y_2 , denn $y_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ und $y_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$, und die allgemeine Lösung des ursprünglichen Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} y_1 &= (se^x + te^{-x})/2 \\ y_2 &= (se^x - te^{-x})/2. \end{aligned}$$

⁵⁷Wir benötigen dazu die *Exponentialfunktion* (*e-Funktion*) $y(x) = e^{ax}$; sie hat die Eigenschaft, proportional zu ihrer Ableitung zu sein: $y' = ay$. Damit beschreibt sie Wachstums- oder Zerfallsprozesse: Der Zuwachs oder die Abnahme ist immer proportional zum jeweiligen Bestand (vgl. „Zahl und Funktion“, S. 64f).

⁵⁸Es ist auch nicht schwer zu sehen, dass es keine weiteren Lösungen geben kann: Man multipliziert die unbekannte Lösung y mit e^{-ax} und differenziert:

$$(ye^{-ax})' = y'e^{-ax} - aye^{-ax} = aye^{-ax} - aye^{-ax} = 0,$$

also ist $ye^{-ax} = s = \text{const}$ und damit $y = se^{ax}$.

Mit Hilfe der *Substitution* $y_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $y_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2)$ konnten wir das Gleichungssystem entkoppeln und auf den eindimensionalen Fall zurückführen, für den wir die e -Funktion als Lösung kennen.

Was machen wir aber, wenn uns kein solcher Trick einfällt? Zunächst einmal fassen wir die zwei Funktionen y_1, y_2 zu einer vektorwertigen Funktion $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zusammen. Dann lässt sich unser Gleichungssystem als eine Vektorgleichung schreiben:

$$(54) \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Ay$$

mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Allgemeiner betrachten wir eine *vektorwertige Differentialgleichung*

$$(55) \quad y' = Ay$$

für eine vektorwertige Funktion $y = (y_1, \dots, y_n)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ausgeschrieben lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Wir können wir dieses System entkoppeln? Da hilft uns wieder die Diagonalisierung. Wenn wir eine Eigenbasis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von A finden, $Ab_i = \lambda_i b_i$ oder $AB = BD$ für die Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dann können wir $y = Bu$ substituieren aus der Gleichung $y' = Ay$ wird dann $Bu' = ABu = BDu \iff Bu' = BDu \iff u' = Du$. Dies ist das entkoppelte System

$$\begin{aligned} u_1' &= \lambda_1 u_1 \\ &\vdots \\ u_n' &= \lambda_n u_n \end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$(56) \quad u_1 = s_1 e^{\lambda_1 x}, \dots, u_n = s_n e^{\lambda_n x}.$$

Aus $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ erhalten wir die allgemeine Lösung

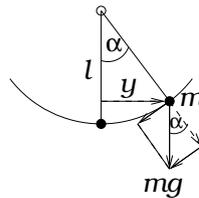
$$(57) \quad y = Bu$$

von (55).

Beispiel: $y_1' = 2y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 + 5y_2$. Dann löst $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ die Gleichung $y' = Ay$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von A wie üblich: $0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 \iff (\lambda - \frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4} - 6 = \frac{25}{4} \iff \lambda = \frac{7}{2} \pm \frac{5}{2} \iff \lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$. Dann finden wir

die zugehörigen Eigenvektoren $b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \end{pmatrix}$ durch Lösung des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda_i I)b_i = 0$. Dabei ist $A - 6I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $(A - 6I)b_1 = 0$ ergibt zweimal die Gleichung $-b_{11} + b_{21} = 0$, also $b_{11} = b_{21}$, zum Beispiel $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für den zweiten Eigenwert erhalten wir $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ und aus $(A - I)b_2 = 0$ zweimal die Gleichung $b_{12} + 4b_{22} = 0$, also zum Beispiel $b_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Mit $y = Bu$ ist $y' = Ay \iff Bu' = ABu = BDu$ mit $D = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\iff u' = Du \iff u'_1 = 6u_1, u'_2 = u_2 \iff u_1 = s_1 e^{6x}, u_2 = s_2 e^x$ für beliebige $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die Gleichung $y = Bu$ ergibt $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 e^{6x} \\ s_2 e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 e^{6x} - 4s_2 e^x \\ s_1 e^{6x} + s_2 e^x \end{pmatrix}$, also $y_1 = s_1 e^{6x} - 4s_2 e^x, y_2 = s_1 e^{6x} + s_2 e^x$. Wenn man zusätzlich Anfangswerte vorgibt, etwa $y_1(0) = -3, y_2(0) = 2$, dann kann man die beiden Konstanten s_1, s_2 errechnen, indem man $x = 0$ einsetzt: $-3 = y_1(0) = s_1 - 4s_2, 2 = y_2(0) = s_1 + s_2$ (man beachte $e^0 = 1$), also $s_1 = 1, s_2 = 1$ und $y_1 = e^{6x} - 4e^x, y_2 = e^{6x} + e^x$.⁵⁹

10. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG



Ein Gewicht der Masse m hängt an einem Faden der Länge l . Wenn das Gewicht senkrecht herunterhängt, wirkt die Schwerkraft mg auf das Gewicht, aber dadurch wird nur der Faden gestrafft. Lenkt man aber das Gewicht um einen kleinen Winkel α zur Seite aus, dann zeigt der Schwerkraftvektor nicht mehr genau in Fadenrichtung. Denkt man sich diesen Vektor zerlegt in eine Komponente in Fadenrichtung und eine dazu senkrechte, so hat die letztere die Länge $mg \sin \alpha$ (siehe Figur) und treibt das Gewicht nach dem Newtonschen Gesetz

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

zurück zum Ausgangspunkt; es gerät also ins *Schwingen*. Die *Beschleunigung* ist die momentane zeitliche Änderung (*Ableitung*) der *Geschwindigkeit*, die Geschwindigkeit die zeitliche Änderung der *Auslenkung* y ,

⁵⁹Das Verfahren ist auch noch im Fall von komplexen Eigenwerten sinnvoll: ist $\lambda = \alpha + i\beta$, so ist $e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$. Dieser Fall tritt z.B. bei *Schwingungsgleichungen* auf, siehe den folgenden Abschnitt.

und diese wiederum hat nach der Figur den Wert $y = l \cdot \sin \alpha$.⁶⁰ Die rücktreibende Kraft ist also $-m \frac{g}{l} y$. Die Newtonsche Gleichung ergibt demnach $-m \frac{g}{l} y = my''$, also

$$(58) \quad y'' = -\frac{g}{l} y.$$

Der Vorgang des Schwingens wird also durch eine Gleichung zwischen der jeweiligen Auslenkung y und seiner zweiten Ableitung y'' beschrieben, eine *Differentialgleichung 2. Ordnung*. Wenn noch die Hemmung der Bewegung durch die *Reibung* berücksichtigt wird, die proportional zur Geschwindigkeit y' ist, dann entsteht eine Differentialgleichung vom Typ

$$(59) \quad y'' + ay' + by = 0.$$

Es gibt einen Trick, mit dem man solche Differentialgleichungen auf vektorwertige Differentialgleichungen *erster* Ordnung zurückführen kann: Man setzt $y_1 = y$ und $y_2 = y'$ und erhält aus (59):

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -by_1 - ay_2, \end{aligned}$$

in Vektorschreibweise: $y' = Ay$ mit $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$. Insbesondere sieht man, dass man als Anfangsbedingung jetzt $y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}$, also Wert *und* Ableitung von y an der Stelle 0 vorschreiben muss; dann erst ist die Lösung y eindeutig bestimmt („*Eindeutigkeitsatz*“).

Aber für die praktische Lösung von (59) ist dieser Trick ganz unnötig. Aus Erfahrung weiß man nämlich, dass solche Gleichungen Lösungen vom Typ $y = e^{\lambda x}$ besitzen,⁶¹ wobei λ aus der Gleichung (59) zu berechnen ist. Dann ist $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, also ist $y'' + ay' + by = (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x}$. Die Funktion $y = e^{\lambda x}$ erfüllt (59) genau dann, wenn dieser Ausdruck Null ist, also wenn

$$(60) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Dies ist die *charakteristische Gleichung* zu unserer Differentialgleichung.

Satz 10.1. *Die Lösungen der Differentialgleichung*

$$(59) \quad y'' + ay' + by = 0$$

⁶⁰Hier haben wir einen kleinen Fehler in Kauf genommen: die rücktreibende Kraft wirkt nicht genau in die Richtung von y , die horizontale Richtung, sondern in Richtung der Kreistangente.

⁶¹Man nennt so etwas einen *Ansatz*: Man hofft, dass die Lösung eine bestimmte Form hat und bestimmt aus der Gleichung nur die freien Parameter.

bilden einen zweidimensionalen Vektorraum L , einen Unterraum des Vektorraums aller Funktionen auf \mathbb{R} . Wenn die Charakteristische Gleichung (60) zwei verschiedene reelle Lösungen λ_1 und λ_2 hat, dann bilden die beiden Funktionen $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$ eine Basis von L , d.h. jede Lösung y von (59) hat die Form

$$(61) \quad y = s_1 e^{\lambda_1 x} + s_2 e^{\lambda_2 x}$$

mit beliebigen Konstanten $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ („allgemeine Lösung“).

Beweis. Sind $y_1, y_2 \in L$, dann auch $y = y_1 + y_2 \in L$, denn $y'' + ay' + by = y_1'' + y_2'' + a(y_1' + y_2') + b(y_1 + y_2) = y_1'' + ay_1' + by_1 + y_2'' + ay_2' + by_2 = 0$. Ebenso ist $sy \in L$ für $y \in L$ und $s \in \mathbb{R}$, denn $(sy)'' + a(sy)' + bsy = s(y'' + ay' + by) = 0$. Deshalb ist L ein Vektorraum. Die Abbildung $w : L \rightarrow \mathbb{R}^2, y \mapsto (y(0), y'(0))$ ist offensichtlich linear, und sie ist injektiv, denn $y \in \ker w \iff y(0) = 0, y'(0) = 0 \iff y = 0$ nach dem Eindeutigkeitsatz. Sie ist auch surjektiv, denn zu jedem $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Lösung y mit $y(0) = u$ und $y'(0) = v$. Damit ist $w : L \rightarrow \mathbb{R}^2$ („Auswertung“) ein Isomorphismus und somit ist $\dim L = 2$. Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene reelle Lösungen der charakteristischen Gleichung (60), so bilden $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ eine Basis von L , denn $W(y_1) = (1, \lambda_1)$ und $W(y_2) = (1, \lambda_2)$ sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis von \mathbb{R}^2 . \square

Beispiel 1: (F06,2,5)

$$(62) \quad y'' + y' - 6y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, mit quadratischer Ergänzung $(\lambda + \frac{1}{2})^2 = 6 + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$ also $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$. Die Lösungen sind also $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -3$. Die allgemeine Lösung lautet daher

$$(63) \quad y = se^{2x} + te^{-3x}$$

für beliebige Konstanten $s, t \in \mathbb{R}$. Gibt man noch Anfangswerte vor, z.B. $y(0) = 3, y'(0) = 1$, so kann man die zugehörigen Werte von s und t durch Lösung eines linearen Gleichungssystems berechnen:

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3 & = y(0) = s + t \\ (2) & 1 & = y'(0) = 2s - 3t \end{array}$$

$$2 \cdot (1) - (2) \quad 5 \quad = 0 + 5t$$

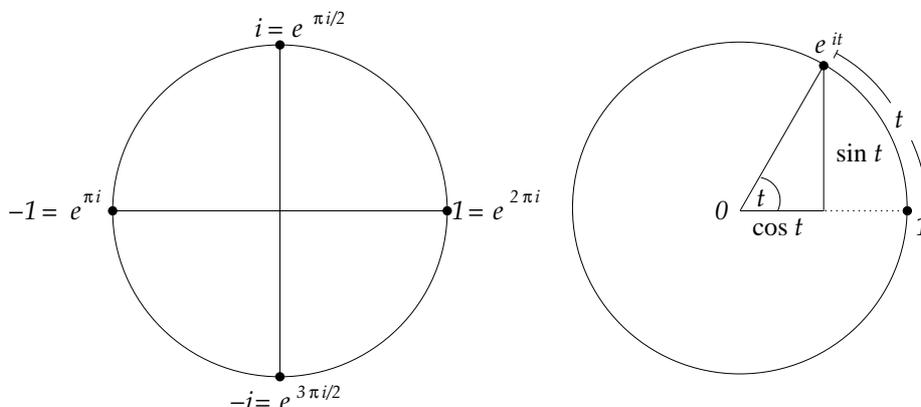
also ist $t = 1$ und $s \stackrel{(1)}{=} 3 - 1 = 2$.

Beispiel 2: (Pendel: Eingangsbeispiel)

$$(64) \quad y'' + \omega^2 y = 0$$

mit $\omega^2 = \frac{g}{l}$. Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, also $\lambda^2 = -\omega^2$. Diese Gleichung hat keine reelle Lösung, denn Quadrate reeller Zahlen sind niemals negativ. Also müssen wir die *komplexen Zahlen* benutzen, genauer die Zahl i mit $i^2 = -1$; damit ist $\lambda = \pm\omega i$ und $y = e^{i\omega x}$ ist eine Lösung. Diese ist allerdings *komplex*, d.h. sie nimmt ihre Werte in \mathbb{C} an, aber auch die Komponenten von y , Realteil und Imaginärteil, sind Lösungen.⁶² In „Zahl und Funktion“ (S.67f) sahen wir, dass e^{it} für jede reelle Zahl t auf der *Einheitskreislinie* in der komplexen Ebene liegt, wobei t der Winkel zur positiven reellen Achse ist, im Bogenmaß gemessen. Insbesondere gilt die grundlegende Beziehung (ebd., Gleichung (70))

$$(65) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t.$$



Demnach sind Real- und Imaginärteil von $e^{i\omega x}$, also $y_1 = \cos \omega x$ und $y_2 = \sin \omega x$ Lösungen der Schwingungsgleichung (64), was wir auch direkt hätten sehen können:

$$\begin{aligned} y_1' &= -\omega \sin \omega x, & y_1'' &= -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 y_1, \\ y_2' &= \omega \cos \omega x, & y_2'' &= -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 y_2. \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen y_1 und y_2 bilden eine *Basis* des Lösungsraums L , denn der Isomorphismus $w : L \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(y) = (y(0), y'(0))$ ergibt $w(y_1) = (1, 0)$ und $w(y_2) = (0, \omega)$, und diese Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 . Jede Lösung y ist also eine Linearkombination dieser Funktionen, $y = a \cos \omega x + b \sin \omega x$, und insbesondere ist y *periodisch*, $y(x + \frac{2\pi}{\omega}) = y(x)$. Die *Schwingungsdauer* (Periode) des Pendels ist demnach $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$. Sie ist vom Gewicht unabhängig und

⁶²Die Funktionen $e^{\lambda_1 x} = e^{i\omega x}$ und $e^{\lambda_2 x} = e^{-i\omega x}$ bilden wieder eine Basis des Raums L aller (jetzt komplexwertigen) Lösungen; Realteil und Imaginärteil sind die Linearkombinationen $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ und $\frac{1}{2i}(y_1 - y_2)$; sie bilden zusammen eine zweite Basis von L .

wächst quadratwurzelartig mit der Pendellänge; ein viermal so langes Pendel hat also die doppelte Schwingungsdauer.

Beispiel 3 (Gedämpfte Schwingung)

$$(66) \quad y'' + 2ky' + \omega^2 y = 0,$$

wobei der *Dämpfungsfaktor* k positiv, aber klein sein soll, genauer: $k^2 < \omega^2$. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$ hat die Lösungen $\lambda = -k \pm i\tilde{\omega}$ mit $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2}$; die komplexen Lösungen von (66) sind also $y = e^{-kx \pm i\tilde{\omega}x} = e^{-kx} e^{\pm i\tilde{\omega}x}$, und die reellen sind Real- und Imaginärteil davon, $y_1 = e^{-kx} \cos \tilde{\omega}x$ und $y_2 = e^{-kx} \sin \tilde{\omega}x$ (was man auch wieder direkt nachrechnen könnte); die allgemeine Lösung besteht aus beliebigen Linearkombinationen dieser Funktionen: $y = e^{-kx}(a \cos \tilde{\omega}x + b \sin \tilde{\omega}x)$. Die Dämpfung hat also zwei Wirkungen: die periodische Bewegung klingt exponentiell ab (Faktor e^{-kx}), und die Schwingung wird langsamer: Die Frequenz ist statt ω nur noch $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - k^2} = \omega \sqrt{1 - \frac{k^2}{\omega^2}}$.

Beispiel 4: (doppelte Nullstellen)

$$(67) \quad y'' - 2ay' + a^2y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist $0 = \lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$ mit der einzigen Lösung $\lambda = a$. Dann ist $y_1 = e^{ax}$ eine Lösung, aber wo bleibt die zweite, zu y_1 linear unabhängige Lösung? Diese ist $y_2 = xe^{ax}$:

$$\begin{array}{rcl} y_2 & = & xe^{ax} \\ y_2' & = & e^{ax} + axe^{ax} \\ y_2'' & = & 2ae^{ax} + a^2xe^{ax} \end{array}$$

$$\begin{aligned} y'' - 2ay' + a^2y &= (2a - 2a)e^{ax} + (a^2 - 2a^2 + a^2)xe^{ax} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wenden wir unseren Auswertungsisomorphismus $w : L \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w(y) = (y(0), y'(0))$ an, so erhalten wir $w(y_1) = (1, a)$, $w(y_2) = (0, 1)$; da diese beiden Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^2 bilden, bilden auch y_1 und y_2 eine Basis des Lösungsraums L , ein *Fundamentalsystem*. Derselbe Trick funktioniert auch bei höherer Ordnung:

Satz 10.2. *Gegeben sei eine Differentialgleichung*

$$(68) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

Wenn ihre charakteristische Gleichung

$$(69) \quad \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

eine k -fache Lösung λ_o besitzt, dann sind $e^{\lambda_o x}, xe^{\lambda_o x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda_o x}$ Lösungen von (68).

Beweis. Die Lösungen der Gleichung (69) sind die Nullstellen des Polynoms

$$(70) \quad p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Wenn die Zahl λ_o eine Nullstelle von p ist, so lässt sich das Polynom p durch $\lambda - \lambda_o$ teilen, d.h. $p(\lambda) = p_1(\lambda)(\lambda - \lambda_o)$ für ein anderes Polynom p_1 . Wenn λ sogar eine k -fache Nullstelle ist, können wir durch $(\lambda - \lambda_o)^k$ teilen, d.h.

$$(71) \quad p(\lambda) = p_k(\lambda)(\lambda - \lambda_o)^k$$

für ein Polynom p_k .

Wir bezeichnen die Ableitung jetzt mit Dy statt mit y' und drücken damit aus, dass D als eine lineare Abbildung auf dem Raum der Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} aufgefasst werden kann; lineare Abbildungen auf Funktionenräumen nennt man auch *lineare Operatoren*. Mit der Notation ist $D^2y := D(Dy) = y''$, $D^3y := D(D(Dy)) = y'''$ usw., und zusätzlich setzen wir $D^0y := y$. Mit dieser Bezeichnung wird (68) zu

$$\begin{aligned} 0 &= D^n y + a_1 D^{n-1} y + \dots + a_n D^0 y \\ &= (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n D^0) y \\ &=: p(D)y. \end{aligned}$$

Weil $p(\lambda) = p_k(\lambda)(\lambda - \lambda_o)^k$, gilt auch

$$(72) \quad p(D) = p_k(D)(D - \lambda_o)^k;$$

in der Umformung (71) kann die Variable λ bei jedem Vorkommen durch D ersetzt werden. Unsere Differentialgleichung (68) lautet daher

$$(73) \quad p_k(D)(D - \lambda_o)^k y = 0.$$

Was macht der lineare Operator $(D - \lambda_o)^k$ mit einer Funktion vom Typ $y = f \cdot e^{\lambda_o x}$ für ein beliebiges Polynom f ? Für $k = 1$ sehen wir

$$\begin{aligned} (D - \lambda_o)(f \cdot e^{\lambda_o x}) &= (f \cdot e^{\lambda_o x})' - \lambda_o f e^{\lambda_o x} \\ &= (f' + \lambda_o f) e^{\lambda_o x} - \lambda_o f e^{\lambda_o x} \\ &= f' e^{\lambda_o x} \\ (74) \quad &= (Df) e^{\lambda_o x}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung können wir mehrfach anwenden, wobei f beim zweiten Mal durch Df , beim dritten Mal durch D^2f usw. ersetzt wird:

$$\begin{aligned} (D - \lambda_o)^2(f \cdot e^{\lambda_o x}) &= (D - \lambda_o)(D - \lambda_o)(f \cdot e^{\lambda_o x}) \\ &\stackrel{74}{=} (D - \lambda_o)(Df) e^{\lambda_o x} \\ &\stackrel{74}{=} (D(Df)) e^{\lambda_o x} \end{aligned}$$

$$(D - \lambda_o)^k (f \cdot e^{\lambda_o x}) = (D^k f) e^{\lambda_o x} \quad \vdots$$

Wenn f ein Polynom vom Grad $\leq k - 1$ ist, dann gilt $D^k f = 0$ und damit ist $f e^{\lambda_o x}$ eine Lösung von (73). Insbesondere sind $1, x, x^2, \dots, x^{k-1}$ Polynome vom Grad $\leq k - 1$, also sind $e^{\lambda_o x}, x e^{\lambda_o x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_o x}$ Lösungen von (73) oder (68).⁶³ \square

Wir wollen noch einmal von einem etwas abstrakteren Standpunkt zusammenfassen, was wir über Differentialgleichung höherer Ordnung, speziell zweiter Ordnung gelernt haben. Die Menge L aller Lösungen der Differentialgleichung

$$(75) \quad y'' + ay' + by = 0$$

bildet einen Vektorraum, einen Unterraum des Raums aller Funktionen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denn für alle $y_1, y_2 \in L$ ist $y = s_1 y_1 + s_2 y_2 \in L$ für beliebige Konstanten s_1, s_2 . Die Dimension dieses Vektorraums ist 2 (oder allgemeiner die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung), denn wir können beliebige Anfangswerte $y(0), y'(0)$ vorgeben. Eine Basis von L wird *Fundamentalsystem* genannt; sie besteht aus zwei linear unabhängigen Lösungen y_1, y_2 . Jedes andere Fundamentalsystem \tilde{y}_1, \tilde{y}_2 lässt sich durch y_1, y_2 ausdrücken und umgekehrt:

$$(76) \quad \begin{aligned} \tilde{y}_1 &= p y_1 + q y_2, & y_1 &= \tilde{p} \tilde{y}_1 + \tilde{q} \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_2 &= r y_1 + s y_2, & y_2 &= \tilde{r} \tilde{y}_1 + \tilde{s} \tilde{y}_2 \end{aligned}$$

mit Konstanten $p, q, r, s, \tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$, wobei $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix ist ($\det \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = ps - qr \neq 0$) mit inverser Matrix $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{p} & \tilde{q} \\ \tilde{r} & \tilde{s} \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem erhalten wir durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$, der bei Einsetzen in (75) auf eine Bedingung für λ führt, die *charakteristische Gleichung*

$$(77) \quad \lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

⁶³Dieser Beweis ist ein gutes Beispiel dafür, was Abstraktion bei Rechnungen zu leisten vermag. Will man den Beweis explizit führen, so hat man bereits bei dreifachen Nullstellen eine längere Rechnung durchzuführen. Wir können aber explizite Rechnungen fast gänzlich vermeiden, indem wir die Polynomgleichung (71) benutzen und dort überall D anstelle von λ einsetzen. Dabei muss das Polynom p_k nie ausgerechnet werden, weil es auf seine genaue Gestalt gar nicht ankommt; es genügt, die einfache Rechnung (74) durchzuführen. Zu explizite Rechnungen machen überflüssige Arbeit.

Wenn diese quadratische Gleichung zwei unterschiedliche Lösungen λ_1 und λ_2 besitzt, dann bildet $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ ein Fundamentalsystem. Wenn nur eine (doppelte) Nullstelle λ existiert, dann ist $y_1 = e^{\lambda x}$ und $y_2 = x e^{\lambda x}$ ein Fundamentalsystem.⁶⁴

Die Lösungen $\lambda_{1,2}$ können komplex sein; dann sind sie von der Form $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Auch in diesem Fall bilden $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$ und $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x)$ ein Fundamentalsystem, aber diese Lösungen sind komplexwertig. Ein zweites, aber nun reellwertiges Fundamentalsystem bilden Real- und Imaginärteil von y_1 oder y_2 , also die Funktionen $\tilde{y}_1 = e^{\alpha x} \cos x$ und $\tilde{y}_2 = e^{\alpha x} \sin x$, denn (76) ist erfüllt mit $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2i}$, $s = \frac{-1}{2i}$.

11. INHOMOGEN-LINEARE GLEICHUNGEN

Neben den eigentlichen *linearen* Differentialgleichung hat man es oft auch mit sog. *inhomogen-linearen* Differentialgleichungen zu tun, wo auf der rechten Seite statt 0 eine vorgegebene Funktion $f = f(x)$ steht.

Beispiel 1:

$$(78) \quad y' - ay = f.$$

Wir lösen zunächst die *homogene* Gleichung $y' - ay = 0$ und erhalten $y = s \cdot e^{ax}$. Diese Lösung nehmen wir nun als *Ansatz* für eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y' - ay = f$, allerdings lassen wir s jetzt eine *Funktion* sein: $s = s(x)$. Dann ist $y' = (se^{ax})' = s'e^{ax} + sae^{ax} = s'e^{ax} + ay$, und damit gilt $y' - ay = s'e^{ax}$. Dies ist gleich f genau dann, wenn $s' = fe^{-ax}$; wir müssen also die Funktion fe^{-ax} integrieren, um s und damit die Lösung $y = se^{ax}$ zu erhalten. Beispiel: $f(x) = 2xe^{ax}$, dann ist $s' = 2x$ und $s = x^2$, also $y = x^2 e^{ax}$.

Damit haben wir eine *spezielle* Lösung y_o der inhomogenen Gleichung gefunden; wie erhalten wir die *allgemeine* Lösung y ? Das ist einfach:

Satz 11.1. *Die Differenz von zwei Lösungen y, y_o der inhomogenen Gleichung ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung.*

Beweis. Ist $u = y - y_o$, so ist $u' = y' - y_o' = ay + f - (ay_o + f) = a(y - y_o) = au$. \square

⁶⁴Wandelt man die Differentialgleichung 2. Ordnung in ein System erster Ordnung um, siehe S. 39, dann ist die zugehörige Matrix in diesem Fall nicht diagonalisierbar; sie kann immer auf die Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ gebracht werden.

In unserem Fall ist $u = be^{ax}$ für eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ und $y = y_o + u = (s+b)e^{ax}$.⁶⁵ Im Beispiel $f = 2xe^{ax}$ ist $s = x^2$ und die allgemeine Lösung ist $y = (x^2 + b)e^{ax}$.

Beispiel 2:

$$(79) \quad y' - ay = f,$$

aber jetzt ist a keine Konstante mehr, sondern eine Funktion: $a = a(x)$. Die homogene Gleichung $y' = ay$ kann immer noch gelöst werden, z.B. mit „Trennung der Variablen“: Entweder ist $y = 0$, oder $y'/y = a$, also $(\ln |y|)' = a$, und wenn $A = \int a$ eine Stammfunktion zu a ist, so erhalten wir: $(\ln |y|)' = A'$ und damit $\ln |y| = A + b$ und $y = se^A$ mit einer Konstanten $s = \pm e^b$. Bei „Variation der Konstanten“ wird s zu einer Funktion, und dann ist $y' = s'e^A + sae^A = s'e^A + ay$. Also ist $y' - ay = f$ genau dann, wenn $s'e^A = f$ oder $s' = fe^{-A}$.

Beispiel hierzu (F05,3,6): $y' = \frac{1}{x-2}y + x^2 - 2x$. Dann ist $a = \frac{1}{x-2}$ und $A = \int a(x)dx = \ln |x-2|$, also $e^A = |x-2|$. Mit $f = x^2 - 2x = x(x-2)$ ist $s' = fe^{-A} = \frac{f}{e^A} = \frac{x(x-2)}{|x-2|} = \pm x$. Also ist $s = \pm \frac{1}{2}x^2$ und $y = (\pm \frac{1}{2}x^2 + b)e^{ax}$.

Beispiel 3: Der Satz 11.1 gilt auch noch bei inhomogen-linearen Gleichungen von höherer Ordnung: Für ihre allgemeine Lösung verschafft man sich zunächst durch irgendeinen Ansatz eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und addiert dazu noch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Beispiel:

$$(80) \quad y'' + \omega^2 y = A \cos(\omega_o x)$$

für Konstanten $\omega, \omega_o, A > 0$. Diese Gleichung beschreibt eine Schwingung mit einem äußeren periodischen Antrieb (mit der Frequenz ω_o). Da $\cos(\omega_o x) = \operatorname{Re} e^{i\omega_o x}$, lösen wir zunächst die komplexe Gleichung

$$(81) \quad y'' + \omega^2 y = Ae^{i\omega_o x}$$

und nehmen anschließend von der Lösung den Realteil. Dazu machen wir den Ansatz⁶⁶

$$(82) \quad y = ce^{i\omega_o x}$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstante $c \in \mathbb{R}$. Dann ist $y'' + \omega^2 y = c(\omega^2 - \omega_o^2)e^{i\omega_o x}$, und aus (81) erhalten wir $c = \frac{A}{\omega^2 - \omega_o^2}$. Die reelle Lösung

⁶⁵Wir wären zum gleichen Ergebnis gekommen, wenn wir zu $s = \int f(x)e^{-ax} dx$ gleich eine Integrationskonstante b addiert hätten.

⁶⁶Die Gleichung $y'' + ay' + by = Ae^{\mu x}$ hat stets eine Lösung der Form $y = ce^{\mu x}$, außer wenn $\mu^2 + a\mu + b = 0$; dann ist $y = cx e^{\mu x}$ der richtige Ansatz. So löst man insbesondere (81) im *Resonanzfall* $\omega_o = \omega$.

ist der Realteil der komplexen Lösung, und die allgemeine Lösung erhalten wir durch Addition der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (Beispiel 2 des vorigen Abschnittes):

$$(83) \quad y = \frac{A}{\omega^2 - \omega_o^2} \cos(\omega_o x) + a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x).$$

Wenn die aufgezwungene Frequenz ω_o sehr nahe bei der „Eigenfrequenz“ ω liegt, mit der das System auch ohne äußere Anregung schwingen würde (*Resonanz*), dann wächst der Faktor $\frac{A}{\omega^2 - \omega_o^2}$ über alle Grenzen; es kommt zur *Resonanzkatastrophe* (vgl. Fußnote 66). Dieser Effekt tritt abgemildert auch bei der *gedämpften* Schwingungsgleichung

$$(84) \quad y'' + 2ky' + \omega^2 y = A \cos(\omega_o x)$$

auf. Zum Beispiel kann eine Brücke zum Einsturz kommen, wenn sie lange genug in ihrer Eigenfrequenz zum Schwingen angeregt wird.

II. Funktionen

12. DIFFERENTIATION UND LINEARE ALGEBRA

In der Analysis („Zahl und Funktion“ und „Integration“) haben wir stetige und differenzierbare Funktionen kennengelernt. Der Stetigkeitsbegriff lässt sich ohne Weiteres auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ heißt *stetig* in $x_o \in \mathbb{R}^n$ (vgl. „Integration“, S. 15), wenn $\lim_{x \rightarrow x_o} f(x) = f(x_o)$, ausführlich

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n [|x - x_o| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_o)| < \epsilon,$$

oder mit Folgen formuliert („Zahl und Funktion“, S. 60): Für jede konvergente Folge $x_k \rightarrow x$ gilt $f(x_k) \rightarrow f(x)$.⁶⁷ Alles überträgt sich unverändert von \mathbb{R} auf \mathbb{R}^n , weil der Betrag in \mathbb{R}^n ebenso wie in \mathbb{R} definiert ist.

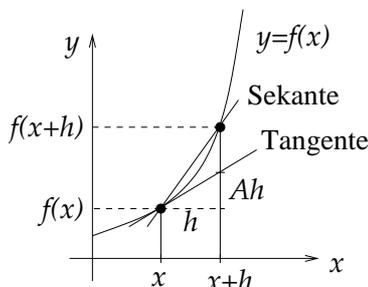
Mit der Differentiation dagegen ist es ein bisschen schwieriger. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist bekanntlich⁶⁸ *differenzierbar* in einem Punkt x , wenn der *Differenzenquotient* $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $h \rightarrow 0$ auf einen Grenzwert (*Limes*) $A =: f'(x)$ zustrebt:

$$(85) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} A.$$

⁶⁷Der Definitionsbereich von f kann auch eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ sein; dann müssen x , x_k und x_o in D liegen.

⁶⁸„Integration“, S. 18

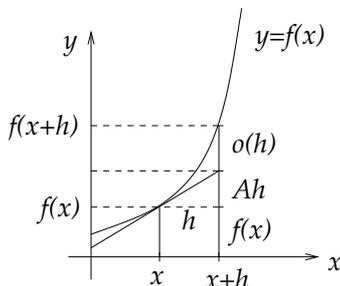
Der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ist die Steigung der *Sekante*, des Graphen⁶⁹ G_f von f , der Verbindungsgeraden der beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ auf G_f , während der Grenzwert A die Steigung der *Tangente* an G_f im Punkt $(x, f(x))$ ist.



Man kann die Gleichung (85) etwas umschreiben zu $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - A = \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und nach Multiplikation mit h ergibt sich mit $o(h) := h\epsilon(h)$

$$(86) \quad f(x+h) = f(x) + Ah + o(h), \quad \frac{|o(h)|}{|h|} = \epsilon(h) \rightarrow 0.$$

Wir haben damit $f(x)$ in drei Anteile zerlegt: einen von h unabhängigen Anteil $f(x)$, einen „linearen“ Anteil Ah und einen Rest $o(h)$, der selbst dann noch gegen Null geht, wenn wir ihn mit der riesengroßen Zahl $\frac{1}{h}$ multiplizieren.



Damit gewinnen wir eine andere Interpretation der Differenzierbarkeit: f ist in x differenzierbar, wenn wir $f(x+h) - f(x)$ durch den linearen Term Ah *approximieren* können. Diese Definition funktioniert auch noch für Funktionen mehrerer Variabler, nur ist der lineare Term jetzt etwas komplizierter: A ist keine Zahl mehr, sondern eine *Matrix*.

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ist im Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (*total*) differenzierbar, wenn sie nahe \mathbf{x} durch eine lineare Abbildung ($p \times n$ -Matrix) $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ im obigen Sinne approximiert werden kann:

$$(87) \quad f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + A\mathbf{h} + o(\mathbf{h})$$

⁶⁹Die Kurve $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$ wird *Graph* von f genannt.

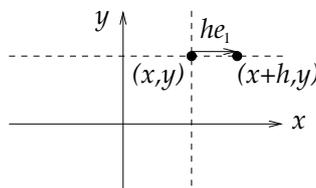
für alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,⁷⁰ wobei $o(\mathbf{h})$ ein Funktion von \mathbf{h} ist mit der Eigenschaft

$$(88) \quad \frac{|o(\mathbf{h})|}{|\mathbf{h}|} \xrightarrow{\mathbf{h} \rightarrow 0} 0.$$

Die Matrix A heißt (*totale*) *Ableitung* oder *Jacobimatrix*⁷¹ von f im Punkt x , geschrieben $A = Df_x$.

Wie können wir die Jacobimatrix berechnen? Wenn wir von den n Variablen x_1, \dots, x_n (die wir zu einer vektorwertigen Variablen \mathbf{x} zusammengefasst haben) nur *eine* verändern, sagen wir x_i , und die andern konstant halten, dann haben wir speziell $\mathbf{h} = h\mathbf{e}_i$ (mit $h \in \mathbb{R}$) gewählt; der lineare Term ist jetzt also $A(h\mathbf{e}_i) = hA\mathbf{e}_i$, und $A\mathbf{e}_i$ ist die gewöhnliche Ableitung dieser Funktion von x_i . Diese Größen heißen *partielle Ableitungen*; „partiell“ deshalb, weil f als Funktion von nur einer Variablen x_i aufgefasst wird; die partielle Ableitung nach der Variablen x_i wird mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ oder kurz f_{x_i} oder noch kürzer f_i bezeichnet. In zwei und drei Dimensionen werden die Variablen oft x, y (oder u, v) und x, y, z (oder u, v, w) statt x_1, x_2, x_3 genannt; dann heißen die partiellen Ableitungen entsprechend $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ oder f_x und f_y usw. Zum Beispiel ist

$$(89) \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = A\mathbf{e}_1, \quad A = Df_{x,y}.$$



Die partiellen Ableitungen lassen sich leicht berechnen: Ist etwa $n = 2$, $p = 1$ und $f(x, y) = 4xy + x^2 + y^3$, so sind die partiellen Ableitungen $f_x = 4y + 2x$ und $f_y = 4x + 3y^2$. Für $A = Df_x$ mit $\mathbf{x} = (x, y)$ ergibt sich also $A\mathbf{e}_1 = 4y + 2x$ und $A\mathbf{e}_2 = 4x + 3y^2$ und somit ist A die einzeilige Matrix $(4y + 2x, 4x + 3y^2)$. Hier noch ein Beispiel mit $n = 2$, $p = 2$: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$, dann ist $f_x = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ und $f_y = \begin{pmatrix} -2y \\ 2x \end{pmatrix}$ und damit $Df_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.⁷²

⁷⁰Natürlich braucht f nicht wirklich auf ganz \mathbb{R}^n definiert zu sein, sondern nur in der Nähe von \mathbf{x} ; dann gilt die Gleichung nur für die \mathbf{h} mit genügend kleinem Betrag $|\mathbf{h}|$, für die $\mathbf{x} + \mathbf{h}$ noch im Definitionsbereich von f liegt.

⁷¹Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 (Potsdam) - 1851 (Berlin)

⁷²Aus „total differenzierbar“ folgt natürlich „partiell differenzierbar“, aber nicht notwendig umgekehrt: Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ für

Die Definition (87) ist wirklich interessant: Die beliebig komplizierte Funktion f kann weitgehend durch eine sehr einfache, nämlich *lineare* Funktion A ersetzt werden. Die Eigenschaften von A spiegeln die von f in der Nähe von \mathbf{x} wieder. Zum Beispiel gilt der folgende Satz, den wir ohne Beweis zitieren:

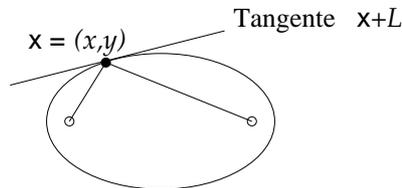
Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig partiell differenzierbar und hat die Ableitung (Jacobimatrix) $A = Df_{\mathbf{x}}$ Rang p , und hat die Gleichung (1) $f(\mathbf{x}) = 0$ eine Lösung \mathbf{x} , dann besitzt sie nahe bei \mathbf{x} "ebenso viele" Lösungen (gleiche Anzahl von Parametern, nämlich $n - p$) wie die lineare Gleichung (2) $Av = 0$, und die Lösungsmenge von (1) wird nahe \mathbf{x} durch $\mathbf{x} + L$ approximiert, wobei $L = \ker A$ der Lösungsraum von (2) ist.

Beispiel: Ellipsengleichung (1) $f(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Die partiellen Ableitungen sind $f_x = \frac{2x}{a^2}$ und $f_y = \frac{2y}{b^2}$, und die Jacobimatrix $A = Df = (f_x, f_y)$. Ist nun $\mathbf{x} = (x, y)$ eine Lösung von (1), also ein Punkt auf der Ellipse, so ist (2) die Gleichung $(f_x, f_y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$, also $f_x u + f_y v = 0$ oder $\frac{2x}{a^2} u + \frac{2y}{b^2} v = 0$. Die Menge

$$\mathbf{x} + L = \{(x, y) + (u, v); \frac{x}{a^2} u + \frac{y}{b^2} v = 0\}$$

für festes (x, y) ist eine Gerade, nämlich die *Tangente* der Ellipse im Punkt (x, y) .



Die Differenzierbarkeit (lineare Approximierbarkeit) überträgt sich auch auf *Verkettungen* von Funktionen:

Satz 12.1. Kettenregel: Gegeben seien differenzierbare Funktionen⁷³ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ und $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar, und die

$(x, y) \neq (0, 0)$ und $f(0, 0) = 0$ ist in $(0, 0)$ partiell differenzierbar mit partiellen Ableitungen Null, aber nicht einmal stetig, erst recht nicht total differenzierbar. Wenn aber zusätzlich die *Stetigkeit* der Ableitungen vorausgesetzt wird, dann stimmen die Begriffe überein: „stetig partiell differenzierbar“ \iff „stetig total differenzierbar“.

⁷³Wieder ist es nicht wirklich nötig, dass f auf ganz \mathbb{R}^n und g auf ganz \mathbb{R}^q definiert ist; die Definitionsbereiche D_f und D_g sollten aber *offen* sein (siehe nächster Abschnitt) und es sollte $g(D_g) \subset D_f$ gelten, damit die Verkettung ausgeführt werden kann.

Jacobimatrix (Ableitung) von $f \circ g$ ist das Produkt der Jacobimatrizen von f und von g : Für jedes $t \in \mathbb{R}^q$ gilt

$$(90) \quad D(f \circ g)_t = Df_{g(t)} Dg_t.$$

Beweis. Die Jacobimatrizen seien $A := Df_{g(t)}$ und $B := Dg_t$. Für beliebiges $h \in \mathbb{R}^q$ setzen wir $k := g(t+h) - g(t) = Bh + o_g(h)$ und erhalten

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t+h) - (f \circ g)(t) &= f(g(t+h)) - f(g(t)) \\ &= f(g(t) + k) - f(g(t)) \\ &= Ak + o_f(k) \\ &= A(Bh + o_g(h)) + o_f(k) \\ &= ABh + Ao_g(h) + o_f(k). \end{aligned}$$

Für den Rest $o_{fg}(h) := Ao_g(h) + o_f(k)$ müssen wir $\frac{|o_{fg}(h)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ zeigen. Für den ersten Term gilt

$$\frac{Ao_g(h)}{|h|} = A\left(\frac{o_g(h)}{|h|}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

weil $\frac{o_g(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ und A stetig ist. Für den zweiten Term benutzen wir $|o_f(k)| = \epsilon(k)|k|$ für eine Funktion $\epsilon(k)$ mit $\epsilon(k) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$. Dann ist

$$\frac{|o_f(k)|}{|h|} = \epsilon_f(k) \frac{|k|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

denn mit $h \rightarrow 0$ folgt $k \rightarrow 0$ und damit $\epsilon_f(k) \rightarrow 0$, und $\frac{|k|}{|h|}$ bleibt beschränkt für $h \rightarrow 0$:

$$\frac{|k|}{|h|} = \frac{|Bh + o_g(h)|}{|h|} \leq |B\left(\frac{h}{|h|}\right)| + \frac{|o_g(h)|}{|h|};$$

der erste Summand bleibt beschränkt,⁷⁴ der zweite geht gegen 0. \square

Beispiel: $q = 1$, d.h. $g = (g_1, \dots, g_n)^T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist $Df = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ und $Dg = g' = (g'_1, \dots, g'_n)^T$ und damit gilt

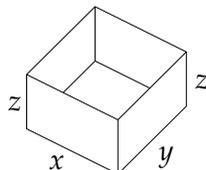
$$(91) \quad (f \circ g)'(t) = D(f \circ g)_t = Df_{g(t)} Dg_t = \sum f_{x_i} g'_i(t),$$

wobei die partiellen Ableitungen f_{x_i} an der Stelle $g(t)$ und die Ableitungen g'_i an der Stelle t auszuwerten sind.

⁷⁴Man beachte, dass $v := \frac{h}{|h|}$ ein Einheitsvektor ist; insbesondere gilt $|v_i| \leq 1$ für alle Komponenten v_i von $v = \sum_i v_i e_i$, und $|Bv| \leq \sum_i |v_i| |Be_i| \leq \sum_i |Be_i|$, und diese Summe ist unabhängig von v .

13. EXTREMA

Eingangsbeispiel: (H99,2,4) Finden Sie Länge, Breite und Höhe einer Schachtel ohne Deckel mit Volumen = 1 und kleinstmöglicher Oberfläche!



Lösung: Wir bezeichnen Länge, Breite und Höhe der (quaderförmigen) Schachtel mit x, y, z . Dann ist das Volumen $xyz = 1$, also $z = \frac{1}{xy}$, und die Oberfläche (Seitenflächen und Boden) ist

$$(92) \quad f = xy + 2xz + 2yz = xy + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$

Die partiellen Ableitungen sind $f_x = y - \frac{2}{x^2}$ und $f_y = x - \frac{2}{y^2}$. Also ist $f_x = 0 \iff y = \frac{2}{x^2}$ und $f_y = 0 \iff x = \frac{2}{y^2}$. Gemeinsame Nullstellen der partiellen Ableitungen sind die Punkte (x, y) , wo $f_x = 0 = f_y$. Dort gilt $y = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{(2/y^2)^2} = \frac{1}{2}y^4$ und damit (da $y > 0$) $y^3 = 2$ und $x = \frac{2}{y^2} = \frac{2y}{y^3} = y$. Wir erhalten also $x = y = \sqrt[3]{2}$ und $z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}^2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

Welche Methode haben wir hier verwendet? Wir suchen das Minimum der Oberfläche f der Schachtel. Allgemein ist das *Minimum* einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ der kleinste Wert von f , also der Wert $f(x)$, $x \in D$, mit der Eigenschaft

$$(93) \quad f(x) \leq f(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in D.$$

Entsprechend ist ein *Maximum* von f definiert: ein Wert $f(x)$, $x \in D$, mit

$$(94) \quad f(x) \geq f(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in D.$$

Das Wort *Extremum* (Plural: Extrema) bezeichnet beides, Minimum oder Maximum. Manchmal bezeichnet man mit dem Wort Minimum oder Maximum auch die Stelle $x \in D$, an der dieses angenommen wird.

Es gibt zwei wichtige Sätze über Minima und Maxima (*Extrema*) von Funktionen; wir formulieren sie nur für Minima; sie gelten aber ebenso für Maxima, denn Maxima von f sind Minima von $-f$.

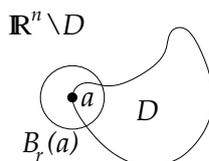
Satz 13.1. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und nimmt f an der Stelle $x \in D$ ein Minimum an, dann ist $Df_x = 0$, d.h. alle partiellen Ableitungen von f verschwinden im Punkt x .*

Satz 13.2. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es einen Punkt $x \in D$, an dem f ein Minimum annimmt.*

Wir müssen zunächst die Begriffe *offen* und *kompakt* erklären. Wir kennen *offene Intervalle* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$; die Randpunkte a, b gehören beim offenen Intervall nicht dazu. Ebenso können wir auch bei Teilmengen des \mathbb{R}^n von Randpunkten reden: Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist ein *Randpunkt* einer Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$, wenn beliebig nahe bei a sowohl Punkte in D als auch solche im Komplement $\mathbb{R}^n \setminus D$ liegen. Das kann man präziser mit Hilfe des *Abstands* ausdrücken; der Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist bekanntlich die Länge oder Norm $|x - y|$ des Differenzvektors $x - y$. Für eine beliebige Zahl $r > 0$ bezeichne

$$(95) \quad B_r(a) := \{x \in \mathbb{R}^n; |x - a| < r\}$$

die *Kugel* oder den *Ball* mit Mittelpunkt a und Radius r . Ein Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von $D \subset \mathbb{R}^n$, wenn jeder Ball um a sowohl D als auch die Komplementmenge $\mathbb{R}^n \setminus D$ schneidet.



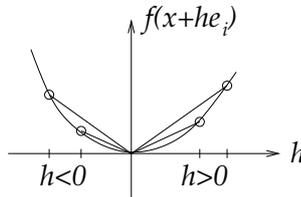
Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn sie *keinen* ihrer Randpunkte enthält, und *abgeschlossen*, wenn sie *jeden* ihrer Randpunkte enthält. Die Menge der Randpunkte (der *Rand*) von D wird oft mit ∂D bezeichnet; mit dieser Bezeichnung ist D *offen*, wenn $D \cap \partial D = \emptyset$ und *abgeschlossen*, wenn $\partial D \subset D$. Natürlich gibt es auch alles Mögliche dazwischen: Einige Randpunkte mögen in D liegen, andere nicht, wie beim halboffenen Intervall $D = [a, b)$; solche Mengen sind weder offen noch abgeschlossen. Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen ist und zusätzlich *beschränkt*, d.h. $D \subset B_R(0)$ für einen genügend großen Radius R .

Beweis von Satz 13.1:⁷⁵ Ist $f(x)$ ein Minimum von f und ist der Definitionsbereich D von f offen, so ist $x \in D$ kein Randpunkt. Also gibt es einen Ball $B_r(x)$, $\mathbb{R}^n \setminus D$ nicht schneidet, also ganz in D liegt. Für jedes $h \in (-r, r)$ und $i = 1, \dots, n$ ist somit $x + he_i \in B_r(x) \subset D$, und damit ist $f(x + he_i) \geq f(x)$ oder $f(x + he_i) - f(x) \geq 0$. Folglich

$$\frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } h > 0, \\ \leq 0 & \text{für } h < 0, \end{cases}$$

⁷⁵Vgl. „Integration“, Satz 8.1, S.24

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = 0$$



□

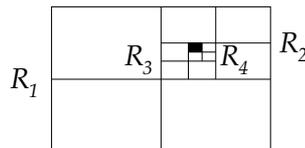
Beweis von Satz 13.2:⁷⁶ Wir suchen das Minimum der unendlichen Menge $W = f(D) \subset \mathbb{R}$. Das muss nicht existieren (nur bei endlich vielen Zahlen muss es eine kleinste geben, nicht bei unendlich vielen), aber es gibt einen Ersatz dafür, das *Infimum* $\inf W$ (vgl. „Zahl und Funktion“, Abschnitt 12, S. 38f),⁷⁷ das auch $-\infty$ sein kann. In jedem Fall gibt es eine Folge w_k in W mit $w_k \rightarrow \inf W$. Da $w_k \in W = f(D)$, ist $w_k = f(x_k)$ mit $x_k \in D$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Weil D beschränkt ist, ist die Folge (x_k) beschränkt und besitzt deshalb nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}) .⁷⁸ Wir haben also $x_{k_j} \rightarrow x$, und weil $x_{k_j} \in D$, folgt $x \in D \cup \partial D$. Aber D ist abgeschlossen, also ist $\partial D \subset D$ und damit $x \in D$. Die Stetigkeit von f besagt:

$$x_{k_j} \rightarrow x \Rightarrow f(x_{k_j}) \rightarrow f(x).$$

⁷⁶Vgl. „Integration“, Satz 8.2, S. 26

⁷⁷Der dem Maximum entsprechende Begriff wäre das *Supremum* $\sup W$.

⁷⁸„Zahl und Funktion“, Satz 11.4, S.39. Dort wird der Satz aber nur für Folgen (x_k) in \mathbb{R} bewiesen. Die Verallgemeinerung für Folgen (x_k) in \mathbb{R}^n sieht man ganz ähnlich; wir erläutern das Prinzip im Fall $n = 2$. Weil die Folge (x_k) beschränkt ist, liegt sie ganz in einem Rechteck $R_1 = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Dieses unterteilen wir durch seine Kantenmittelpunkte in vier Teilrechtecke mit halb so großen Seitenlängen. Die unendlich vielen Folgeelemente verteilen sich auf die vier Teilrechtecke. Mindestens eins davon, sagen wir R_2 , enthält wieder unendlich viele Elemente der Folge. Das Rechteck R_2 unterteilen wir erneut durch seine Mittelpunkte in vier Teilrechtecke, von denen wieder mindestens eins unendlich viele Elemente der Folge enthält; wir nennen es R_3 , usw. Wenn wir als x_{k_j} das Element mit dem kleinsten Index $k_j > k_{j-1}$ wählen, das in R_j liegt, so erhalten wir eine konvergente Teilfolge.

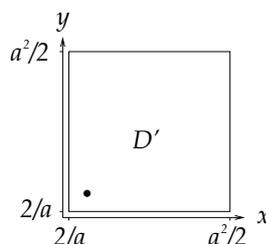


Aber andererseits wissen wir bereits $f(x_k) \rightarrow \inf W$ und damit auch $f(x_{k_j}) \rightarrow \inf W$. Somit ist $\inf W = f(x)$; das Infimum ist also tatsächlich ein Wert von f , ein Element der Menge $W = f(D)$, also ist es ein Minimum (insbesondere ist es nicht $-\infty$).

Sehen wir uns jetzt nochmal unser Eingangsbeispiel an. Wir haben Satz 13.1 angewendet und die einzige gemeinsame Nullstelle der partiellen Ableitungen der zu minimierenden Funktion

$$f(x, y) = xy + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

aufgesucht; das Minimum muss nach diesem Satz also dort angenommen werden, unter der Voraussetzung allerdings, dass es überhaupt ein Minimum gibt. Der Definitionsbereich $D = (0, \infty) \times (0, \infty)$ ist nicht kompakt (weder abgeschlossen noch beschränkt); die Existenz eines Minimums ist also durch Satz 13.2 zunächst nicht gesichert; wieso funktioniert die Methode trotzdem?⁷⁹ Der Punkt ist, dass die Werte der Funktion f zum Rand von D hin groß werden, nämlich für $x \rightarrow 0$ oder $y \rightarrow 0$ und ebenso für $x \rightarrow \infty$ oder $y \rightarrow \infty$. Wir sollten dies etwas genauer sagen. Der Wert von f in dem errechneten Punkt $x = y = \sqrt[3]{2}$ ist $a = 3\sqrt[3]{2}^2 \approx 4,76$. Wo $\frac{2}{x} > a$ oder $\frac{2}{y} > a$, also im Bereich $x < \frac{2}{a}$ oder $y < \frac{2}{a}$, ist offensichtlich $f(x, y) > a$. Dasselbe gilt in den Bereichen $x \geq \frac{2}{a}$ und $y > a^2/2$ sowie $y \geq \frac{2}{a}$ und $x > a^2/2$, denn dort ist bereits $xy > a$.



Übrig bleibt das Quadrat $D' = [\frac{2}{a}, \frac{a^2}{2}] \times [\frac{2}{a}, \frac{a^2}{2}]$; auf seinem Komplement $D \setminus D'$ sind alle Werte von f größer als a . In dem errechneten Punkt $x = y = \sqrt[3]{2}$, der innerhalb von D' liegt, ist der Wert gleich a . Auf der kompakten Menge D' besitzt f nach Satz 13.2 ein Minimum; dieses darf nicht größer sein als der Wert in einem Punkt von D , also nicht größer

⁷⁹Man könnte versucht sein, mit derselben Methode die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ zu „minimieren“: Die Ableitung ist $3x^2$ mit der einzigen Nullstelle 0, das Minimum muss nach Satz 13.1 also bei 0 liegen - ein haarstrebender Unsinn, denn es gibt ja gar kein Minimum! Die Frage, warum die Methode in einen Fall funktioniert, im anderen versagt, stellt sich also schon ernsthaft.

als a . Damit ist es aber das Minimum von f überhaupt, da ja außerhalb von D' ohnehin alle Werte $> a$ sind. So haben wir die Existenz des Minimums gesichert. Satz 13.1 gibt uns die richtige Antwort, wo es liegen muss.

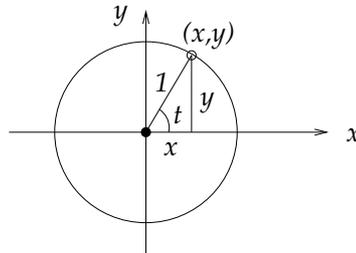
Beispiel 2: (Examensaufgabe F06,2,4) Man bestimme Infimum und Supremum der Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$$

auf der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Lösung: Die Menge M , die *Einheitskreisscheibe*, enthält ihren Rand, die Kreislinie $\partial M = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$; deshalb ist sie abgeschlossen. Da sie offensichtlich auch beschränkt ist ($M \subset B_2(0)$), ist sie *kompakt*, und die stetige Funktion f nimmt nach Satz 13.2 auf M ein Maximum und ein Minimum an. Die Worte „Infimum“ und „Supremum“ können also durch „Maximum“ und „Minimum“ ersetzt werden.

Die partiellen Ableitungen sind $f_x = 2x + 1$ und $f_y = 2y + 1$; diese verschwinden gemeinsam für $x = -\frac{1}{2}$ und $y = -\frac{1}{2}$, also im Punkt $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Der zugehörige Wert ist $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Nach Satz 13.1 ist dies ein Kandidat für Maximum oder Minimum, sofern diese auf dem offenen Inneren der Kreisscheibe und nicht etwa auf dem Rand angenommen wird. Um dies zu überprüfen, müssen wir uns $f(x, y)$ für $(x, y) \in \partial M$ ansehen. Dies ist die Kreislinie, die wir mit Hilfe des Winkels t parametrisieren können: $x = \cos t$, $y = \sin t$.



Um Maximum und Minimum von $f|_{\partial M}$ zu ermitteln suchen wir die Nullstellen der Ableitung der Funktion $\tilde{f}(t) = f(\cos t, \sin t) = 1 + \cos t + \sin t$: Es gilt $\tilde{f}'(t) = -\sin t + \cos t = 0 \iff \sin t = \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Extrema von $f|_{\partial M}$ können also nur an den Punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ liegen; die Werte dort sind $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ und $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$. Damit ist $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \sqrt{2}$ das Maximum und $f(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ das Minimum von $f|_M$, denn $1 - \sqrt{2} > -\frac{1}{2}$ (weil $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ wegen $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} > 2$).

Die Bestimmung der Extrema einer differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für eine kompakte Menge D besteht also stets aus zwei Schritten:

Schritt 1: Im Inneren von D , d.h. auf der offenen Menge $D \setminus \partial D$ ermitteln Sie die gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen, die sogenannten *kritischen Punkte*.⁸⁰ Berechnen Sie nun die Werte der Funktion f in diesen Punkten.

Schritt 2: Nun betrachten Sie die Funktion f auf dem Rand ∂D und ermitteln dort den größten und den kleinsten Wert. Diese Werte vergleichen Sie mit den in Schritt 1 berechneten Werten der kritischen Punkte. Der größte Wert ist das Maximum, der kleinste das Minimum.

Schwieriger wird es, wenn der Definitionsbereich D nicht beschränkt ist, wie in unserem ersten Beispiel. Wenn man z.B. das Maximum sucht, benötigt man einen kompakten Bereich $D' \subset D$ derart, dass alle Werte von f auf dem Rand und außerhalb von D' kleiner sind als ein fester Wert $f(x_o)$ für ein $x_o \in D'$; in dem Fall muss das Maximum von f gleich dem Maximum von $f|_{D'}$ sein und wir finden es nach Satz 13.1 als größter unter den Werten der kritischen Punkte auf $D \setminus \partial D$. Oft muss man D' nicht explizit angeben, sondern es genügt das Verhalten von $f(x, y)$ für $x, y \rightarrow 0$ oder $x, y \rightarrow \pm\infty$ festzustellen.

14. ZWEITE PARTIELLE ABLEITUNGEN

Wir wissen aus der Schule: Wenn die erste Ableitung in einem Punkt x verschwindet, $f'(x) = 0$, dann entscheidet die *zweite Ableitung* über den Typ dieses kritischen Punktes: Ist $f''(x) > 0$, so ist x ein lokales Minimum, wenn $f''(x) < 0$, so ist x ein lokales Maximum⁸¹ und wenn $f''(x) = 0$, dann ist der Typ unbestimmt. Ganz ähnlich ist es in mehreren Variablen, allerdings gibt es jetzt viel mehr Ableitungen. In Dimension 2 zum Beispiel hat eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zwei erste Ableitungen f_x und f_y . Wenn diese selbst wieder differenzierbar sind, können wir sie erneut ableiten und erhalten vier *zweite partielle Ableitungen* $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$.

Beispiel: (Examensaufgabe H05,1,2)

$$f(x, y) = (x^2 - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}$$

⁸⁰Man fasst die partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oft zu einem Vektor zusammen, dem *Gradienten* $\nabla f_x = Df_x^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$. Die kritischen Punkte, d.h. die gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen sind die Nullstellen dieser vektorwertigen Funktion ∇f .

⁸¹Eine gute Merkregel hierfür ist: Vom Maximum aus geht es nur noch „bergab“, was durch $f''(x) < 0$ ausgedrückt wird.

$$\begin{aligned}
f_x &= (2x - 2x^3 + 4xy^2) e^{-(x^2+y^2)} \\
f_y &= (-4y - 2x^2y + 4y^3) e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xx} &= (2 - 6x^2 + 4y^2 - 2x(2x - 2x^3 + 4xy^2)) e^{-(x^2+y^2)} \\
&= (2 - 10x^2 + 4y^2 + 4x^4 - 8x^2y^2) e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{xy} &= (8xy - 2y(2x - 2x^3 + 4xy^2)) e^{-(x^2+y^2)} \\
&= (4xy + 4x^3y - 8xy^3) e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yx} &= (-4xy - 2x(-4y - 2x^2y + 4y^3)) e^{-(x^2+y^2)} \\
&= (4xy + 4x^3y - 8xy^3) e^{-(x^2+y^2)} \\
f_{yy} &= (-4 - 2x^2 + 12y^2 - 2y(-4y - 2yx^2 + 4y^3)) e^{-(x^2+y^2)} \\
&= (-4 - 2x^2 + 20y^2 + 4x^2y^2 - 8y^4) e^{-(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

Es fällt auf, dass $f_{xy} = f_{yx}$. Das ist kein Zufall, sondern gilt allgemein:⁸²

Satz 14.1. *Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung (d.h. auch die zweiten partiellen Ableitungen sind noch stetig), so gilt für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$*

$$(96) \quad f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}.$$

In der obigen Beispielaufgabe sollen zunächst die kritischen Punkte von f bestimmt werden, die gemeinsamen Nullstellen von f_x und f_y . Nun gilt:

$$\begin{aligned}
f_x &= 0 \iff x = 0 \text{ oder } 2 - 2x^2 + 4y^2 = 0 \\
f_y &= 0 \iff y = 0 \text{ oder } -4 - 2x^2 + 4y^2 = 0
\end{aligned}$$

Wenn $x = 0$, dann ist $y = 0$ oder $4y^2 = 4$, also $y = \pm 1$.

Wenn $x \neq 0$, dann muss $y = 0$ gelten, denn der Ausdruck $-2x^2 + 4y^2$ kann nicht gleichzeitig -2 und 4 sein; damit erhalten wir $2 - 2x^2 = 0$,

⁸²Es genügt, diesen Satz für zwei Variable x, y zu beweisen. Die Beweisidee ist folgende: f_x ist der Limes von $(f(x_h, y) - f(x, y))/h$ für $h \rightarrow 0$, wobei $x_h := x + h$. Entsprechend ist f_y der Limes von $(f(x, y_k) - f(x, y))/k$ für $k \rightarrow 0$, wobei $y_k := y + k$. Die zweite Ableitung f_{xy} ist die Ableitung von f_x , also der Limes von $(f_x(x, y_k) - f_x(x, y))/k$ für $k \rightarrow 0$. Damit strebt die *Differenz von Differenzen*

$$(f(x_h, y_k) - f(x_h, y)) - (f(x, y_k) - f(x, y)), \quad (*)$$

nach Division durch hk im Limes $k, k \rightarrow 0$ gegen f_{xy} . Aber der Ausdruck $(*)$ kann auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$(f(x_h, y_k) - f(x, y_k)) - (f(x_h, y) - f(x, y)), \quad (**)$$

und dieser Ausdruck $(**)$ strebt nach Division durch kh im Limes $k, h \rightarrow 0$ gegen f_{yx} . Also ist $f_{xy} = f_{yx}$. Für das vollständige Argument muss man diesen doppelten Grenzübergang genau betrachten und dabei den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwenden, vgl. z.B. O. Forster: Analysis 2

also $x = \pm 1$. Kritische Punkte liegen damit an den folgenden fünf Stellen: $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

Als nächstes sollen Infimum und Supremum der Werte von f berechnet werden. Dazu berechnen wir zunächst die Werte von f in den kritischen Punkten:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0 \\ f(0, \pm 1) &= -2e^{-1} \\ f(\pm 1, 0) &= e^{-1} \end{aligned}$$

Wie verhält sich $f(x, y)$ am „Rand“ von \mathbb{R}^2 , d.h. für $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$? Dann geht der e-Faktor $e^{-(x^2+y^2)}$ gegen 0, aber der Vorfaktor $x^2 - 2y^2$ wird vielleicht riesig groß - wer von beiden siegt? Die Antwort ist klar: Die Exponentialfunktion siegt über jede Potenz! Genauer:

Satz 14.2. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(97) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} t^k e^{-t} = 0.$$

Beweis. Es gilt ja $e^{-t} = 1/e^t$, also $t^k e^{-t} = t^k/e^t$. Wir betrachten den Kehrwert e^t/t^k . Für $t > 0$ gilt

$$e^t/t^k = (\sum_j \frac{1}{j!} t^j)/t^k \leq \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1}/t^k = \frac{1}{(k+1)!} t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty.$$

Da $e^t/t^k \rightarrow \infty$, folgt $t^k/e^t \rightarrow 0$. □

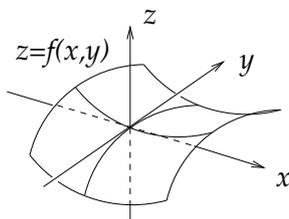
Anwendung: Mit $t := x^2 + y^2$ ist $|x^2 - 2y^2| \leq |x^2 + 2y^2| \leq 2t$, also

$$|x^2 - 2y^2| e^{-(x^2+y^2)} \leq t e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Am „Rand“ ist der Wert von f also Null, dann werden Maximum und Minimum im „Inneren“ angenommen (nämlich in einer genügend großen Kreisscheibe) und befinden sich nach Satz 13.1 unter den kritischen Punkten; somit sind die Minimalstellen die kritischen Punkte mit dem kleinsten Wert, also $(0, \pm 1)$, und die Maximalstellen sind die kritischen Punkte mit dem größten Wert, also $(\pm 1, 0)$. Das Supremum oder Maximum der Werte ist somit $1/e$ und das Infimum (Minimum) ist $-2/e$.

Weiterhin wird in der Aufgabe gefragt, welche (weiteren) lokalen Extrema die Funktion besitzt. Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, so heißt ein Punkt $x \in D$ eine *lokale Maximalstelle*, kurz *lokales Maximum*, wenn $f(x)$ der größte unter allen Werten von f in der Nähe von x ist, d.h. wenn $f(x) \geq f(x')$ für alle $x' \in B_r(x)$ für einen hinreichend kleinen Radius r . Entsprechend ist ein *lokales Minimum* definiert.

Wir wissen bereits, dass $(0, \pm 1)$ Maximalstellen, also erst recht lokale Maxima sind, und $(\pm 1, 0)$ Minimalstellen, also erst recht lokale Minima. Nach Satz 13.1 finden sich die lokalen Maxima und Minima unter den kritischen Punkten. Der einzige kritische Punkt, der noch übrig ist, ist der Punkt $(0, 0)$. Dort berechnen wir die zweiten Ableitungen, d.h. wir setzen $x = 0$ und $y = 0$ in die bereits berechnete Formel für f_{xx} und f_{yy} ein und erhalten $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -4$, $f_{xy} = 0$ im Punkt $(0, 0)$. Das Ergebnis ist also unterschiedlich: Schränken wir f auf die x -Achse ein, so liegt ein lokales Minimum vor (2. Ableitung positiv), aber bei Einschränkung auf die y -Achse liegt ein lokales Maximum vor (2. Ableitung negativ). Eine solche Mischung aus Maximum und Minimum ist weder das eine noch das andere; man nennt einen solchen Punkt einen *Sattel*.



In den anderen kritischen Punkte $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ erhalten wir folgende Werte:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0, \pm 1) &= 2 + 4 = 6 \\ f_{yy}(0, \pm 1) &= -4 + 20 - 8 = 8 \\ f_{xy}(0, \pm 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(\pm 1, 0) &= 2 - 10 + 4 = -4 \\ f_{yy}(\pm 1, 0) &= -4 - 2 - 8 = -14 \\ f_{xy}(\pm 1, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Dies zeigt erneut, dass $(0, \pm 1)$ lokale Minima und $(\pm 1, 0)$ lokale Maxima sind; der folgende Satz kennzeichnet nämlich die kritischen Punkte durch ihre zweiten Ableitungen, ähnlich wie in einer Variablen:

Satz 14.3. *Ist (x, y) ein kritischer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt:*

*(x, y) ist lokales Maximum, falls dort $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ und $f_{xx} < 0$,
 (x, y) ist lokales Minimum, falls dort $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$,
 (x, y) ist Sattel, falls dort $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$.*

Dieser Satz ist der Spezialfall $n = 2$ eines allgemeineren Satzes für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Man fasst alle zweiten Ableitungen $f_{x_i x_j}$ zu einer symmetrischen *Matrix* zusammen, der sogenannten *Hessematrix*⁸³ $D^2 f := (f_{x_i x_j})$. Eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A heißt bekanntlich *positiv definit*, wenn die zugehörige quadratische Form nur positive Werte annimmt, d.h. $v \cdot Av > 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, und A heißt *negativ definit*, falls $-A$ positiv definit ist. Dann lautet der allgemeinere Satz:⁸⁴

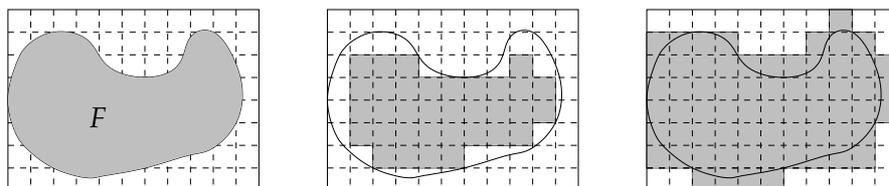
Satz 14.4. *Ist x ein kritischer Punkt einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so gilt:*

x ist lokales Maximum, falls $-D^2 f_x$ positiv definit,

x ist lokales Minimum, falls $D^2 f_x$ positiv definit,

x ist Sattel, falls $D^2 f_x$ regulär, aber nicht definit.

15. FLÄCHENINHALT, VOLUMEN UND INTEGRAL



Wie berechnen wir den *Flächeninhalt* einer krummlinig berandeten Figur F , die in einem Rechteck R liegt? Wir unterteilen dazu das Rechteck in kleine Quadrate und zählen alle Quadrate, die ganz innerhalb der Figur liegen – das gibt eine untere Schranke für den Flächeninhalt – sowie die Quadrate, die Punkte mit F gemeinsam haben – das gibt eine obere Schranke. Natürlich müssen diese Anzahlen noch mit dem Flächeninhalt der kleinen Quadrate multipliziert werden.

Wenn wir ein genaueres Ergebnis erzielen wollen, d.h. näher beieinanderliegende obere und untere Schranken für den Flächeninhalt, dann müssen wir eine feinere Unterteilung wählen, zum Beispiel durch weitere Unterteilung der kleinen Quadrate. eine solche Unterteilung eines Rechtecks R in kleinere Quadrate oder allgemein Rechtecke nennen wir eine *Zerlegung* von R : Eine Zerlegung ist eine endliche Menge Z von

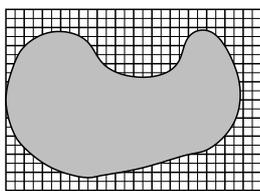
⁸³Ludwig Otto Hesse, 1811 (Königsberg) - 1874 (München)

⁸⁴Beweis z.B. in O.Forster: Analysis 2. Der Satz 14.3 in Dimension 2 folgt daraus, denn eine symmetrische 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist positiv definit genau dann, wenn $\det A = ac - b^2 > 0$ und $a > 0$, wie man leicht nachrechnet: Die zugehörige quadratische Form ist $ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy) + cy^2 =$ (quadratische Ergänzung) $a(x^2 + 2\frac{b}{a}xy + (\frac{b}{a}y)^2) + \frac{1}{a}(ac - b^2)y^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{1}{a}(ac - b^2)y^2$. Dies ist $> 0 \iff a > 0$ und $ac - b^2 > 0$.

Teilrechtecken $S \subset R$, die sich nicht überlappen und gemeinsam R genau ausfüllen.⁸⁵ Wir wollen den Flächeninhalt einer Figur F mit $\mu(F)$ bezeichnen. Für jede Zerlegung Z des Rechtecks R gilt damit:

$$(98) \quad \sum_{S \in Z; S \subset F} \mu(S) \leq \mu(F) \leq \sum_{S \in Z; S \cap F \neq \emptyset} \mu(S).$$

Eine zweite Zerlegung Z' heißt *feiner* als die Zerlegung Z , wenn jedes Rechteck $S' \in Z'$ in einem Rechteck $S \in Z$ enthalten ist: $S' \subset S$. Für eine feinere Zerlegung verbessern sich die unteren und oberen Schranken in (98).⁸⁶

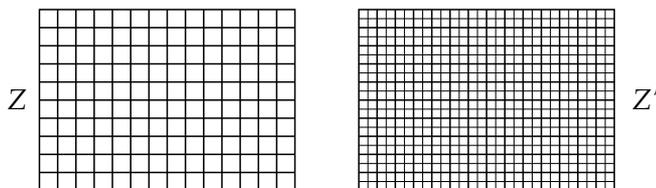


Eine Figur F , d.h. eine Teilmenge $F \subset R$ heißt *messbar*, wenn der Unterschied zwischen unterer und oberer Schranke in (98) durch Wahl einer immer feineren Zerlegung von R beliebig klein gemacht werden kann; diese Eigenschaft ist für alle Ihnen bekannten Figuren erfüllt.

In (98) tragen alle Teile der Fläche gleichberechtigt zum Flächeninhalt bei. Man kann aber auch Gewichtungen einführen: Jeder Teil der Fläche soll einen Beitrag gemäß seinem Gewicht leisten. Die Gewichtung wird durch eine reellwertige Funktion f auf dem Rechteck R gegeben, und den durch f *gewichteten Flächeninhalt* nennt man das *Integral über f* . Wir summieren dabei ebenso wie bisher die Flächeninhalte der Teilrechtecke auf, aber multiplizieren sie vorher noch mit dem Funktionswert an der betreffenden Stelle. Allerdings ist dieser Funktion auch auf einem noch so kleinen Teilrechteck S nicht wirklich konstant; deshalb wählen wir für die untere Schranke das *Minimum*, für die obere das

⁸⁵Genauer soll sowohl das große Rechteck R als auch die kleineren Rechtecke S *abgeschlossen* sein (also ihren Rand ∂S enthalten), und es soll gelten: $\bigcup_{S \in Z} S = R$ und $(S \setminus \partial S) \cap (T \setminus \partial T) = \emptyset$ für alle $S, T \in Z$ mit $S \neq T$.

⁸⁶Jedes Teilrechteck in der Zerlegung Z wird dann seinerseits wieder durch Teilrechtecke aus der feineren Zerlegung Z' unterteilt.



Maximum (ersatzweise das Infimum und Supremum) von $f(S)$:

$$(99) \quad f_-(S) := \min_{x \in S} f(x), \quad f_+(S) := \max_{x \in S} f(x).$$

Das *Integral* von f über R (Schreibweise: $\int_R f$) wird nun ebenso wie der Flächeninhalt durch Schranken von unten und von oben angenähert:

$$(100) \quad \sum_{S \in Z} f_-(S) \mu(S) \leq \int_R f \leq \sum_{S \in Z} f_+(S) \mu(S).$$

Die Ungleichungskette (98) für den Flächeninhalt einer Figur F ist in der Tat ein Spezialfall von (100), nämlich für die Funktion

$$(101) \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in F \\ 0 & \text{für } x \notin F \end{cases}$$

der *charakteristischen* oder *Indikatorfunktion* für die Menge F (sie wird oft mit χ_F oder 1_F bezeichnet). Für diese Funktion gilt nämlich offensichtlich

$$\begin{aligned} f_-(S) &= \begin{cases} 1 & \iff S \subset F \\ 0 & \iff S \not\subset F \end{cases} \\ f_+(S) &= \begin{cases} 1 & \iff S \cap F \neq \emptyset \\ 0 & \iff S \cap F = \emptyset \end{cases} \end{aligned}$$

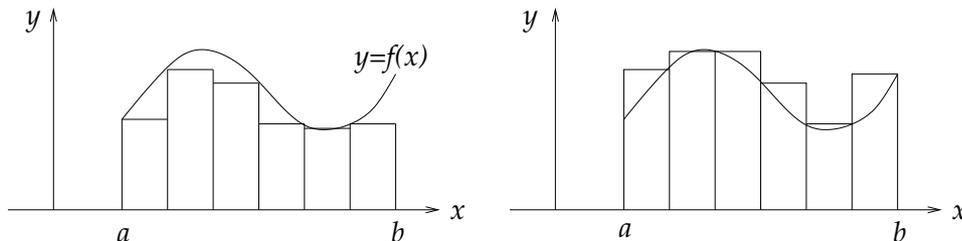
und damit werden die Schranken für $\int_R f$ in (100) zu denen für $\mu(F)$ in (98).

Bei Verfeinerung der Zerlegung wird die Differenz zwischen der oberen Schranke (*Obersumme*) und der unteren Schranke (*Untersumme*) in (100) kleiner, d.h. obere und untere Schranke rutschen aufeinander zu (die untere bewegt sich nach oben, die obere nach unten). Eine Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar*, wenn dieser Unterschied durch Wahl einer genügend feinen Zerlegung Z *beliebig* klein gemacht werden kann. Integrale kann man natürlich nur für integrierbare Funktionen ausrechnen. Wir kennen drei Beispielklassen integrierbarer Funktionen $f : R \rightarrow \mathbb{R}$:

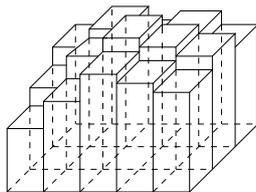
- (1) Indikatorfunktionen (101) von messbaren Mengen $F \subset R$,
- (2) stetige Funktionen; für diese gilt nämlich $f_+(S) - f_-(S) \rightarrow 0$ wenn die Kantenlänge von S gegen 0 geht,
- (3) Produkte der beiden: Statt $\int_R (f \chi_F)$ schreibt man $\int_F f$.

Alles, was wir hier für zwei Dimensionen gesagt haben, trifft ohne Änderung für n Dimensionen zu. Ein „Rechteck“ (bei höherer Dimension besser *Quader* genannt und mit Q statt R bezeichnet) ist ein kartesisches Produkt von n abgeschlossenen Intervallen: $Q = I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ mit $I_j = [a_j, b_j]$. Das *Volumen* oder *Maß* von Q ist das Produkt der

Intervall-Längen: $\mu(Q) = L(I_1) \cdot \dots \cdot L(I_n)$ mit $L(I_j) = b_j - a_j$. Teilquader sind Produkte von Teilintervallen $J_j \subset I_j$, und Zerlegungen sind wie vorher definiert. Für $n = 1$ erhalten wir das gewöhnliche 1-dimensionale Integral zurück, das wir aus der Schule kennen, die „Fläche unter dem Graphen“ einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.



Diese Fläche kann nämlich ebenso gut als „gewichtete Länge“ des Intervalls $[a, b]$ gedeutet werden, wobei der Gewichtungsfaktor die Höhe des Graphen, also der Funktionswert ist. Ebenso kann ein zweidimensionales Integral als Rauminhalt unter dem Grafen einer Funktion $f : I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedeutet werden.



Die folgenden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition des Integrals:

Satz 15.1. *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit einer Zerlegung Z und $f, g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt*

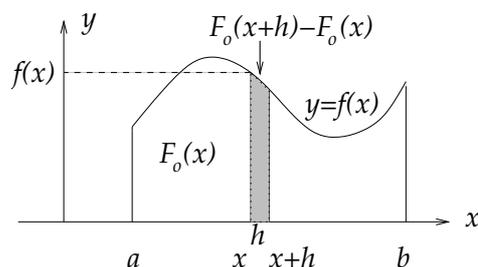
- (1) $\int_Q (f + g) = \int_Q f + \int_Q g$,
- (2) $\int_Q (sf) = s \int_Q f$ für alle $s \in \mathbb{R}$,
- (3) $f \leq g \Rightarrow \int_Q f \leq \int_Q g$,
- (4) $\int_Q f = \sum_{S \in Z} \int_S f$.

Wie berechnen wir nun so ein mehrdimensionales Integral in der Praxis? Für *eindimensionale* Integrale haben wir ja den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Satz 15.2. *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist $F_o : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F_o(x) = \int_a^x f(t)dt$ differenzierbar mit Ableitung $F' = f$, also eine Stammfunktion von f . Für jede Stammfunktion F von f gilt daher*

$$(102) \quad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Beweisskizze:



Für $h \rightarrow 0$ gilt

$$\frac{F_o(x+h) - F_o(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \approx \frac{1}{h} f(x) h = f(x).$$

Die zweite Aussage folgt, weil $(F - F_o)' = f - f = 0$ und deshalb $F - F_o = c = \text{const.}$, also

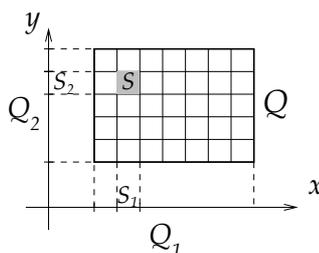
$$F(b) - F(a) = F_o(b) - F_o(a) = F_o(b) = \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

Mehrdimensionale Integrale führt man auf eindimensionale zurück. Das wichtigste Hilfsmittel dazu ist der Satz von *Fubini*.⁸⁷

Satz 15.3. Ist $n = n_1 + n_2$ und sind $Q_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ zwei Quader und ist $Q = Q_1 \times Q_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} = \mathbb{R}^n$, so gilt für jede integrierbare Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$.⁸⁸

$$(103) \quad \int_Q f = \int_{Q_1} \left(\int_{Q_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{Q_2} \left(\int_{Q_1} f(x, y) dx \right) dy$$

Beweisidee:



⁸⁷Guido Fubini, 1879 (Venedig) - 1943 (New York)

⁸⁸Die Funktion $x \mapsto f(x, y) : Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ muss nicht für jedes y integrierbar sein; dieses Problem tritt aber nur für wenige y -Werte auf und macht bei der Integration über y nichts aus. Formal gesehen ersetzt man dann das innere Integral durch das *Oberintegral* oder das *Unterintegral*, d.h. das Supremum der Untersummen oder das Infimum der Obersummen; das Ergebnis ist immer dasselbe. Dasselbe trifft für die Funktionen $y \mapsto f(x, y) : Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

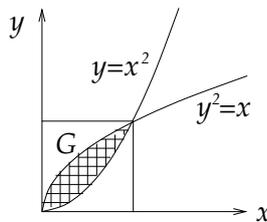
Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von Q_1 und Q_2 , so ist $Z = \{S_1 \times S_2; S_1 \in Z_1, S_2 \in Z_2\}$ eine Zerlegung von Q , und

$$\int_Q f \approx \sum_{S \in Z} f^\pm(S) \mu(S) = \sum_{S_1 \in Z_1} \left(\sum_{S_2 \in Z_2} f^\pm(S_1 \times S_2) \mu(S_2) \right) \mu(S_1).$$

Die innere Summe approximiert das innere Integral (über y), die äußere das äußere Integral (über x). \square

Beispiel 1: Es sei $Q = [1, 3] \times [2, 4]$ und $f(x, y) = xy$. Dann ist $\int_Q f = \int_Q f(x, y) d(x, y) = \int_{x=1}^3 \left(\int_{y=2}^4 xy dy \right) dx = \int_{x=1}^3 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4} dx = \int_1^3 x(8 - 2) dx = 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = 6 \cdot \frac{1}{2}(9 - 1) = 6 \cdot 4 = 24$.

Beispiel 2: Es sei $G \subset Q = [0, 1] \times [0, 1]$ das von den Parabeln $y = x^2$ und $x = y^2$ eingeschlossene Gebiet,



und $f = f_o \chi_G$ mit $f_o(x, y) = xy$. Dann ist

$$G = \{(x, y) \in Q; y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \int_G f_o &= \int_Q (f_o \chi_G) = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 xy \chi_G(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y^2}^{\sqrt{y}} xy dx \right) dy = \int_{y=0}^1 \left(\left[y \frac{x^2}{2} \right]_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} \right) dy \\ &= \int_0^1 y \left(\frac{y}{2} - \frac{y^4}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^5) dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Die Methode dieses Beispiels ist als der Satz von *Cavalieri*⁸⁹ bekannt, der als Korollar des Satzes von Fubini angesehen werden kann, aber viel älter ist: Man kann über einen Körper (analog über ein Flächenstück) integrieren, indem man diesen in horizontale Scheiben schneidet und erst über die Scheiben, dann über die Höhe integriert:

Satz 15.4. *Es sei K eine messbare Teilmenge in einem Quader $Q = Q' \times [a, b] \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Für jedes $t \in [a, b]$ sei*

$$(104) \quad K^t := \{u \in \mathbb{R}^{n-1}; (u, t) \in K\}.$$

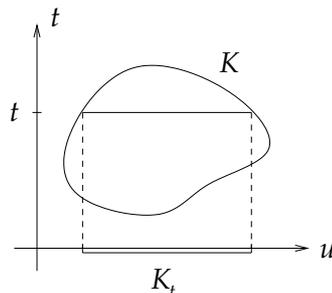
⁸⁹Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 (Mailand) - 1647 (Bologna)

Dann gilt für jede integrierbare Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(105) \quad \int_K f = \int_{t=a}^b \left(\int_{u \in K^t} f(u, t) dx' \right) dt.$$

Speziell für $f = 1$ (Konstante Eins) erhalten wir:

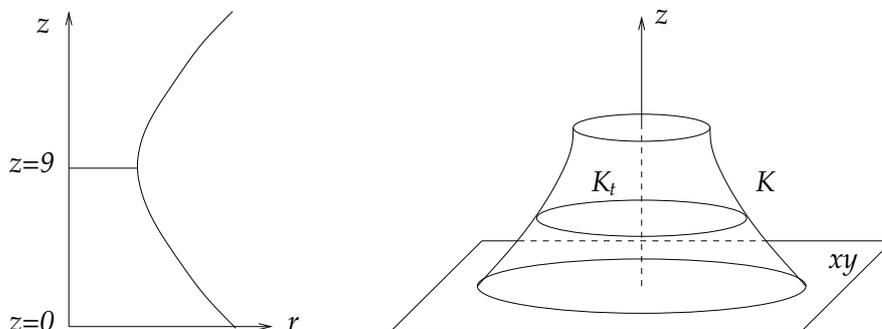
$$(106) \quad \mu(K) = \int_a^b \mu(K^t) dt.$$



Beispiel 3: Berechnung des Volumens des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq 1 + (z - 9)^2, 0 \leq z \leq 9\}.$$

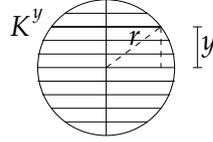
Schneidet man den Körper in der Höhe z horizontal durch, so erhält man für $z \in [0, 9]$ die Scheibe $K^z = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1 + (z - 9)^2\}$. Dies ist eine Kreisscheibe vom Radius r mit $r^2 = 1 + (z - 9)^2$ oder $r^2 - (z - 9)^2 = 1$ (eine Hyperbergleichung). Der Körper K ist also ein Stück eines rotationssymmetrischen einschaligen Hyperboloids.



Wir erhalten $\mu(K) = \int_{z=0}^9 \mu(K^z) dz = \int_0^9 \pi(1 + (z - 9)^2) dz$, denn die Kreisscheibe vom Radius r mit $r^2 = 1 + (z - 9)^2$ hat den Flächeninhalt $\mu(K^z) = \pi r^2 = \pi(1 + (z - 9)^2)$. Mit der Substitution $t = 9 - z$ erhalten wir $\mu(K) = \pi \int_0^9 (1 + t^2) dt = \pi \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^9 = \pi(9 + 81 \cdot \frac{1}{3}) = \pi \cdot 252$.

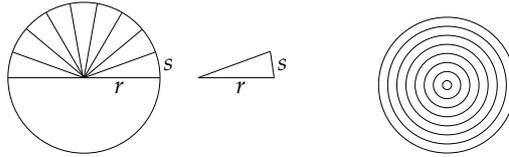
Beispiel 4: Wir wollen mit dem Satz von Cavalieri noch die Kreisfläche berechnen: $K = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r^2\}$. Für jedes $y \in [-r, r]$ ist $K^y =$

$\{x; x^2 = r^2 - y^2\} = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}]$, und $\mu(K^y)$ ist die Länge dieses Intervalls, also $\mu(K^y) = 2\sqrt{r^2 - y^2}$.



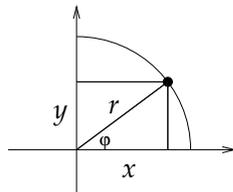
Somit ist $\mu(K) = \int_{-r}^r \mu(K^y) dy = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 2r \int_{-r}^r \sqrt{1 - \frac{y^2}{r^2}} dy = 2r^2 \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt$ mit der Substitution $t = \frac{y}{r}$. Leider bereitet auch dieses Integral noch Mühe: Man substituiert erneut: $t = \sin u$ und damit $dt = \cos u du$. Dann ist $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} [u + \frac{1}{2} \sin 2u]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \pi$ und somit $\mu(K) = \pi r^2$.

Im Vergleich zu dem eleganten Beweis von Archimedes für die Formel Kreisfläche = $\frac{1}{2}$ Radius · Umfang durch Aufsummieren der Flächeninhalte $\frac{1}{2} rs$ der Teildreiecke (vgl. „Integration“, S. 7)



ist diese Rechnung ein Rückschritt! Der Grund ist, dass wir (im Gegensatz zu Archimedes) die Symmetrie des Kreises außer Acht gelassen haben. Durch die Unterteilung des Kreises in horizontale Streifen verlieren wir die Drehsymmetrie und bezahlen mit einer Rechnung voller Umwege. Viel besser wäre es, den Kreis in konzentrische Kreise oder in schmale Sektoren zu zerlegen, wie bereits *Archimedes*.⁹⁰ Aber dafür müssen wir die Punkte der Ebene durch andere Koordinaten beschreiben, die den Kreisen besser angepasst sind, durch *Polarkoordinaten*: der Abstand r vom Ursprung und der Winkel φ zur positiven x -Achse:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi; & \varphi &= \arctan(y/x) \end{aligned}$$



⁹⁰Archimedes von Syrakus, 287 – 212 v.Chr. (Syrakus, Sicilien)

Im nächsten Abschnitt untersuchen wir, wie sich ein solcher Koordinatenwechsel auf die Integration auswirkt.

16. DIE SUBSTITUTIONSREGEL

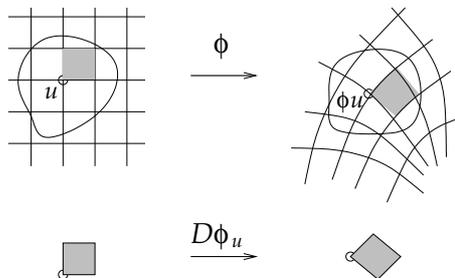
Satz 16.1. Gegeben sei eine stetige Funktion f auf \mathbb{R}^n , eine messbare Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ und eine umkehrbar stetig differenzierbare Abbildung⁹¹ ϕ auf \mathbb{R}^n . Dann gilt:⁹²

$$(107) \quad \int_{u \in K} f(\phi(u)) |\det D\phi_u| du = \int_{x \in \phi(K)} f(x) dx$$

und insbesondere

$$(108) \quad \int_{u \in K} |\det D\phi_u| du = \mu(\phi(K)).$$

Beweisidee:



Es sei Q ein Quader, der K enthält, und Z eine genügend feine Zerlegung von Q . Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(K) &\approx \sum_{S \in Z; S \subset K} \mu(S), \\ \mu(\phi(K)) &\approx \sum_{S \in Z; S \subset K} \mu(\phi(S)). \end{aligned}$$

Wenn die Zerlegung fein genug ist, dann kann ϕ auf jedem der kleinen Quader S durch seine dortige Jacobimatrix approximiert werden; genauer gilt auf S

$$\phi \approx \phi(u) + D\phi_u,$$

⁹¹Die Abbildung ϕ ist also stetig differenzierbar, umkehrbar, und die Umkehrfunktion ϕ^{-1} ist wieder stetig differenzierbar. Eine solche Abbildung nennt man eine *Koordinatentransformation* oder eine *Diffeomorphismus*. Es genügt, wenn ϕ in der Nähe von K , d.h. auf einer offenen Teilmenge, die K enthält, definiert ist.

⁹²Diese Formel heißt *Substitutionsregel* für das mehrdimensionale Integral: Wir substituieren auf der rechten Seite $x = \phi(u)$ und $dx = |\det D\phi_u| du$, bei der eindimensionalen Substitutionsregel hatten wir stattdessen $dx = \frac{du}{dx} dx = \phi'(u) du$; vgl. „Integration“, Satz 12.2, S.41.

wobei $u = u_S \in S$ ein fest gewählter Punkt in S ist. Also gilt

$$\mu(\phi(S)) \approx \mu(D\phi_u(S)) = \det(D\phi_u)\mu(S),$$

denn jede Matrix A vergrößert sämtliche Volumina um den Faktor $|\det A|$.⁹³ Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \mu(\phi(K)) &\approx \sum_{S \in \mathcal{Z}; S \subset K} \mu(\phi(S)) \\ &\approx \sum_{S \in \mathcal{Z}; S \subset K} |\det D\phi_{u_S}| \mu(S) \\ &\approx \int_{\in K} |\det D\phi_u| du. \end{aligned}$$

Dies zeigt die zweite Gleichung (108). Die erste Gleichung (107) folgt ganz ähnlich, nur muss man die Volumina der kleinen Würfel S noch mit dem Faktor $(f \circ \phi)^\pm(S)$ (Maximum und Minimum von $f \circ \phi|_S$) gewichten. \square

Beispiel 1: Ellipse. Der Flächeninhalt der Ellipse E mit Hauptachsen a und b ist $\mu(E) = ab\pi$, denn der Einheitskreis hat Flächeninhalt π (siehe Beispiel 2) und E ist das Bild des Einheitskreises unter der linearen Abbildung $\phi = A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ mit $\det A = ab$, also $\mu(E) = \det(A)\pi = ab\pi$.

Beispiel 2: Kreis. Den Kreis vom Radius R ,

$$K_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < R^2\}$$

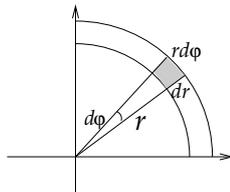
stellen wir in Polarkoordinaten dar, d.h. als Bild unter der Abbildung⁹⁴ $\phi : [0, R] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(109) \quad \phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Dann ist $D\phi = (\phi_r, \phi_\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ und $\det D\phi_{(r, \varphi)} = r$.

⁹³Die Standard-Basisvektoren e_1, \dots, e_n spannen den Einheitswürfel W im \mathbb{R}^n auf; dieser hat Volumen $\mu(W) = 1$. Der Betrag der *Determinante* $\det A = \det(Ae_1, \dots, Ae_n)$ ist gerade das Volumen des Bildes von W unter A , nämlich des von den Spaltenvektoren Ae_1, \dots, Ae_n aufgespannten Spats, vgl. Abschnitt 5, also ist $\mu(A(W)) = |\det A| \mu(W)$. Dieselbe Gleichung gilt auch für jeden kleineren Würfel. Da wir jeden Körper K mit solchen Würfeln überdecken können, gilt entsprechend $\mu(A(K)) = |\det A| \mu(K)$.

⁹⁴Eigentlich zählen wir dabei einen Strahl des Kreises doppelt, nämlich den mit Winkel $\pi = -\pi$. Ein einzelner Strahl trägt aber nicht zum Flächeninhalt bei; daher machen wir keinen Fehler.



Mit $K := (0, r] \times (-\pi, \pi)$ gilt:⁹⁵

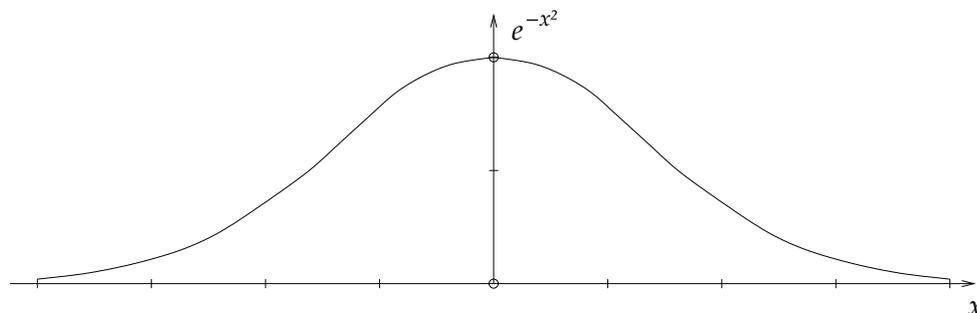
$$\mu(K_r) = \mu(\phi(K)) = \int_K r \, dr d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R r \, dr \right) d\varphi = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2.$$

Beispiel 3: Radiale Funktionen.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *radial*, wenn $f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ für eine Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Für radiale Funktionen ist das Integral über eine Kreisscheibe K_R besonders einfach zu berechnen: Mit $K = [0, R] \times [-\pi, \pi]$ wie oben ist

$$\begin{aligned} \int_{K_R} f(x, y) d(x, y) &= \int_K f(\Phi(r, \varphi)) d(r, \varphi) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R g(r) r \, dr \right) d\varphi \\ (110) \qquad \qquad \qquad &= 2\pi \int_0^R r g(r) dr. \end{aligned}$$

Beispiel 4: Gaußfunktion.



Die *Gaußfunktion*⁹⁶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ tritt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Verteilungsfunktion auf, ein Grenzwert der Binomialverteilung (vgl. „Zahl und Funktion“, S. 15f). Für die Anwendung in der Wahrscheinlichkeitstheorie muss sie allerdings noch mit dem Faktor $c = 1/I$ mit $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ multipliziert werden, damit das Integral

⁹⁵Die Bedeutung des Determinantenfaktors r entnimmt man auch aus der Figur: Das Rechteck mit den Kantenlängen dr und $rd\varphi$ hat den Flächeninhalt $rdrd\varphi$.

⁹⁶Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 (Braunschweig) - 1855 (Göttingen)

Eins wird (das Integral ist die Gesamtwahrscheinlichkeit, die immer gleich Eins = 100 Prozent ist).

Wie berechnet man dieses Integral? Eine Stammfunktion steht nicht zur Verfügung. Der Trick ist, dass man nicht I , sondern I^2 ausrechnet, und zwar mit Hilfe von Polarkoordinaten und Beispiel 3:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\
 &= 2\pi \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \\
 &= 2\pi \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R r e^{-r^2} dr
 \end{aligned}$$

Die Funktion $r \mapsto r e^{-r^2}$ ist viel leichter zu integrieren als e^{r^2} , denn für sie kennen wir eine Stammfunktion: Die Ableitung von e^{-r^2} ist $-2r e^{-r^2}$, also ist

$$\int_0^R r e^{-r^2} dr = \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$

und wir erhalten $I^2 = \pi$ und damit $I = \sqrt{\pi}$, also

$$(111) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Die Bedeutung der Gaußfunktion und dieser Formel in der Wahrscheinlichkeitstheorie wird in "Integration", Abschnitt 16, S. 57ff erläutert.

17. ANHANG: DIE INTEGRALSÄTZE VON GAUSS UND STOKES

Satz:

$$(112) \quad \int_V \operatorname{div} \vec{E} dv = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{a}$$

$$(113) \quad \int_F \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Dabei ist $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)^T$ ein Vektorfeld, d.h. eine differenzierbare Abbildung $\vec{E} : \mathbb{R}_o^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, und

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = D_1 E_1 + D_2 E_2 + D_3 E_3 \\
 \operatorname{rot} \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \vec{E} = (D_2 E_3 - D_3 E_2, D_3 E_1 - D_1 E_3, D_1 E_2 - D_2 E_1)^T
 \end{aligned}$$

2. In kleinen Bereichen wird das Vektorfeld \vec{E} durch eine affine Abbildung (lineare Abbildung + Konstante) angenähert.

Die erste Idee lässt sich leicht auf die linken Seiten der beiden Gleichungen anwenden; das ganze Raumgebiet V bzw. die ganze Fläche F wird in kleine Teile zerlegt, Würfel bei V bzw. ebene Polygone (Dreiecke, Vierecke usw.) bei F . Die Idee kann aber auch auf die rechten Seiten angewandt werden: Wenn wir über die Ränder der kleinen Würfel oder Parallelelogramme integrieren, so kommt abgesehen von den Außenseiten jede Seite in *zwei* benachbarten Würfeln oder Parallelelogrammen vor, über sie wird also zweimal integriert, aber mit unterschiedlichen Vorzeichen, deshalb heben die Integrale über die inneren Seiten sich gegenseitig auf, wenn man alles aufsummiert, und es bleiben nur die Integrale über die Außenseiten übrig.

Die zweite Idee wird in unserer Vorlesung ausgeführt, siehe Seite 38: Wenn $|\vec{h}|$ genügend klein ist, so gilt

$$(114) \quad \vec{E}(\vec{r} + \vec{h}) = \vec{E}(\vec{r}) + A\vec{h} + \vec{o}(\vec{h})$$

wobei $A = Df_{\vec{r}}$ die 3×3 -Matrix ist, deren Spalten die drei partiellen Ableitungen von \vec{E} in \vec{r} sind, und $|\vec{o}(\vec{h})|/|\vec{h}|$ strebt für $\vec{h} \rightarrow 0$ gegen 0.⁹⁹ In den kleinen Teilbereichen können wir $\vec{o}(\vec{h})$ einfach vernachlässigen und $\vec{E}(\vec{r} + \vec{h}) = \vec{E}(\vec{r}) + A\vec{h}$ setzen.¹⁰⁰

Zum Beweis von (1) ersetzen wir also das Raumgebiet V durch einen kleinen Würfel mit unterem Eckpunkt \vec{r}_o und Kantenlänge ϵ ,

$$W = \{\vec{r}_o + \vec{h}; \vec{h} = (h_1, h_2, h_3)^T, 0 \leq h_1, h_2, h_3 \leq \epsilon\}.$$

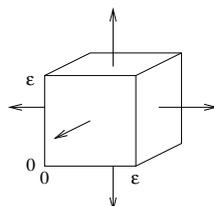
Wir wollen die rechte Seite $\int_{\partial W} \vec{E} \cdot d\vec{a}$ berechnen. Dabei ist

$$\int_{\partial W} \vec{E}(\vec{r}_o + \vec{h}) d\vec{a} \approx \int_{\partial W} (\vec{E}_o + A\vec{h}) d\vec{a}$$

mit $\vec{h} := \vec{r} - \vec{r}_o$. Das Integral über den konstanten Vektor $\vec{E}_o = \vec{E}(\vec{r}_o)$ ist Null, denn die Integrale über die Seitenflächen des Würfels treten immer paarweise mit unterschiedlichem Vorzeichen auf.

⁹⁹Der Rest $\vec{o}(\vec{h})$ ist so klein, dass er selbst nach Multiplikation mit der großen Zahl $1/|\vec{h}|$ noch gegen Null geht für $\vec{h} \rightarrow 0$.

¹⁰⁰Warum können wir die Integranden in den kleinen Teilbereichen nicht einfach als konstant annehmen? Für die linken Seiten wäre das in Ordnung, aber nicht für die rechten Seiten. Im Fall von (1) zerlegt man das Raumgebiet V etwa in Würfel mit Kantenlänge ϵ und Volumen ϵ^3 ; deren Anzahl ist $N \approx \text{vol}(V)/\epsilon^3$. Die Oberfläche jedes einzelnen Würfels ist $6\epsilon^2$, ihre Gesamtoberfläche also $6N\epsilon^2 = C/\epsilon$. Der Gesamtfehler beim Integrieren geht also genau dann gegen Null für $\epsilon \rightarrow 0$, wenn der Fehler des Integranden $o(\epsilon)$ ist mit $o(\epsilon)/\epsilon \rightarrow 0$. Bei (2) ist es ganz analog.



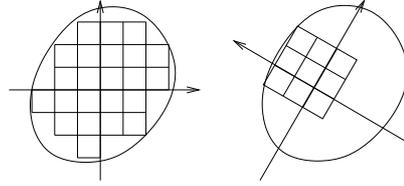
Es bleibt also $A\vec{h}$ über die Seiten des Würfels zu integrieren. Die Koeffizienten von A seien $a_{ij} = A\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i$. An den gegenüberliegenden Seiten $\{h_1 = \epsilon\}$ und $\{h_1 = 0\}$ mit (nach außen weisendem) Normalvektoren $\pm\vec{e}_1$ sind die Integranden $\epsilon a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}$ sowie $-(h_2 a_{12} + h_3 a_{13})$, denn $A\vec{h} \cdot \vec{e}_1 = h_1 A\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + h_2 A\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + h_3 A\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = h_1 a_{11} + h_2 a_{12} + h_3 a_{13}$ mit $h_1 = \epsilon$ bzw. $h_1 = 0$. Die Würfelseiten haben Flächeninhalt ϵ^2 ; die beiden Teilintegrale ergeben also zusammen $\epsilon^3 a_{11}$. Ebenso ergeben die Beiträge der beiden anderen Seitenflächenpaare $\epsilon^3 a_{22}$ und $\epsilon^3 a_{33}$. Also erhalten wir insgesamt

$$\int_{\partial W} \vec{E}(\vec{r}_o + \vec{h}) d\vec{a} \approx \epsilon^3 (a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

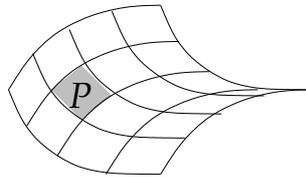
Der Faktor ϵ^3 ist das Volumen von W , der Ausdruck $a_{11} + a_{22} + a_{33}$ (die *Spur* der Matrix $A = (D_1\vec{E}, D_2\vec{E}, D_3\vec{E})$) ist nach Definition die *Divergenz* von \vec{E} im Punkt \vec{r}_o . Wenn wir alle Teilintegrale über die kleinen Würfel, aus denen V zusammengesetzt ist, aufaddieren, erhalten wir das Raumintegral über die Divergenz, d.h. die linke Seite von (1).

Man könnte gegen diesen Beweis einwenden, dass sich das gegebene Raumbereich V in den meisten Fällen gar nicht gut in achsenparallele Würfel zerlegen lässt, weil deren Oberflächen nicht am Rand von V anliegen. Um diesem Einwand zu begegnen, zerlegt man das Vektorfeld \vec{E} in eine endliche Summe von Vektorfeldern \vec{E}_α , die alle am Rand entweder ganz verschwinden oder nur in einem kleinen Teil des Randes, der als eben angesehen werden kann, ungleich Null sind.¹⁰¹ Beide Seiten von (1) ändern sich nicht bei Drehungen des Koordinatensystems, man kann also die Koordinaten für jedes Teilvektorfeld an das betreffende Randstück anpassen.

¹⁰¹Ein Beispiel für die Wahl eines solchen Summanden von \vec{E} ist $\vec{E}_\alpha(\vec{r}) = f_\alpha(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})$, wobei f_α eine Funktion ist, die überall außerhalb einer kleinen offenen Menge verschwindet. Durch Addition mehrerer solcher Vektorfelder, die auf unterschiedlichen Mengen ungleich Null sind, kann man leicht \vec{E} zurückgewinnen.



Um (2) zu beweisen, unterteilen wir die krumme Fläche F annähernd in kleine ebene Polygone P :



Wieder gehen wir von der rechten Seite der gesuchten Gleichung (2) aus und ersetzen die ganze Fläche F durch eines der kleinen Parallelogramme P , wir wollen also $\int_{\partial P} \vec{E} \cdot d\vec{r}$ berechnen. Einer der Eckpunkte von P möge \vec{r}_o sein, und weil P klein ist, können wir dort $\vec{E}(\vec{r}_o + \vec{h}) \approx \vec{E}_o + A\vec{h}$ annehmen. Das Integral über den konstanten Vektor $\vec{E}_o = \vec{E}(\vec{r}_o)$ verschwindet, weil dieser ein Gradient ist, nämlich $\vec{E}_o = \vec{\nabla} f$ mit $f(\vec{r}) = \vec{E}_o \cdot \vec{r}$.

Allgemein ist der Gradient $\vec{\nabla} f$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der Vektor der partiellen Ableitungen, $\vec{\nabla} f = (D_1 f, D_2 f, D_3 f)^T$. Für jede Kurve $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist $(f \circ \vec{c})'(t) = \vec{\nabla} f_{\vec{c}(t)} \cdot \vec{c}'(t)$ nach Kettenregel: äußere mal innere Ableitung. Damit ist $\int_a^b \vec{\nabla} f_{\vec{c}(t)} \cdot \vec{c}'(t) dt = \int_a^b (f \circ \vec{c})'(t) dt = f(\vec{c}(b)) - f(\vec{c}(a))$, und wenn die Kurve \vec{c} sich schließt, $\vec{c}(b) = \vec{c}(a)$, dann ist diese Differenz Null. Insbesondere ist $\int_{\partial P} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = 0$. In unserem Fall $f(\vec{r}) = \vec{E}_o \cdot \vec{r}$ ist $D_k f = \vec{E}_o \cdot \vec{e}_k$ und somit $\vec{\nabla} f = \vec{E}_o$.

Es bleibt $\int_{\partial P} A\vec{h} \cdot d\vec{r}$ mit $h = \vec{r} - \vec{r}_o$ zu berechnen. Jede Matrix A lässt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegen: Wir setzen $A_+ = A + A^T$ und $A_- = A - A^T$; offensichtlich gilt $A_+^T = A_+$ und $A_-^T = -A_-$ und $A = \frac{1}{2}(A_+ + A_-)$. Wir bemerken zunächst, dass der symmetrische Anteil beim Integrieren verschwindet:

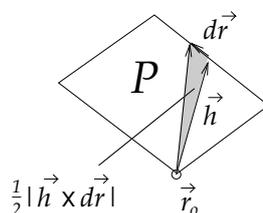
$$\int_{\partial P} A_+ \vec{h} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Der Grund dafür ist wieder, dass das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x}) = A_+\vec{x}$ ein *Gradientenfeld* ist, der Gradient der Funktion $f(\vec{x}) = A\vec{x} \cdot \vec{x} = \sum_{ij} a_{ij}x_ix_j$, denn $D_k f = \sum_j a_{kj}x_j + \sum_i a_{ik}x_i = \sum_j (a_{kj} + a_{jk})x_j$ und $\vec{\nabla} f = A_+\vec{x}$.¹⁰²

Es bleibt also nur der A_- -Anteil, und dieser ist nach Definition das Kreuzprodukt mit der Rotation von \vec{E} an der Stelle \vec{r}_o ,¹⁰³

$$A_-\vec{h} \cdot d\vec{r} = (\text{rot } \vec{E} \times \vec{h}) \cdot d\vec{r} = \text{rot } \vec{E} \cdot (\vec{h} \times d\vec{r}) = |\vec{h} \times \partial\vec{r}| \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N},$$

wobei \vec{N} der Einheitsnormalenvektor auf dem ebenen Flächenstück P ist. Das Skalarprodukt $\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{N}$ ist konstant auf P und $\int_{\partial P} |\vec{h} \times \partial\vec{r}|$ ist der doppelte Flächeninhalt $2A(P)$ (siehe Figur).



Der antisymmetrisch Anteil von A ist $\frac{1}{2}A_-$, daher ist

$$\int_{\partial P} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_{\partial P} A_-\vec{h} \cdot d\vec{r} = A(P) \text{rot } \vec{E}(\vec{r}_o) \cdot \vec{N}.$$

Aufaddieren dieser Werte über alle kleinen Polygone, aus denen die Fläche F zusammengesetzt ist, ergibt die linke Seite von (2).

¹⁰²Alternative: $f(\vec{x} + \vec{h}) = A(\vec{x} + \vec{h}) \cdot (\vec{x} + \vec{h}) = (A\vec{x} + A\vec{h}) \cdot (\vec{x} + \vec{h}) = A\vec{x} \cdot \vec{x} + A\vec{x} \cdot \vec{h} + A\vec{h} \cdot \vec{x} + A\vec{h} \cdot \vec{h} = f(\vec{x}) + B\vec{h} + o(\vec{h})$ mit dem linearen Anteil $B\vec{h} = A\vec{x} \cdot \vec{h} + A\vec{h} \cdot \vec{x} = A\vec{x} \cdot \vec{h} + \vec{h} \cdot A^T \vec{x} = (A + A^T)\vec{x} \cdot \vec{h} = A_+\vec{x} \cdot \vec{h}$ sowie dem Rest $o(\vec{h}) = A\vec{h} \cdot \vec{h}$. Da $\vec{\nabla} f = Df^T = B^T$, folgt $\vec{\nabla} f \cdot \vec{h} = B\vec{h} = A_+\vec{x} \cdot \vec{h}$ und daher $\vec{\nabla} f = A_+\vec{x}$.

¹⁰³Das Kreuzprodukt mit einem Vektor $\vec{v} = (a, b, c)^T$, d.h. die lineare Abbildung $\vec{h} \mapsto \vec{v} \times \vec{h}$ hat die Matrix mit den Spalten $\vec{v} \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix}$, $\vec{v} \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ und $\vec{v} \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$; die Matrix ist also $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, aber *jede* antisymmetrische 3×3 -Matrix ($a_{ji} = -a_{ij}$) ist von dieser Form.

INDEX

- abgeschlossen, 53, 62
- Ableitung, 38, 49, 57
- Abstand, 53
- Affine Transformation, 15
- Allgemeine Lösung, 36, 40, 45
- Analytische Geometrie, 3
- Anfangswertaufgabe, 36
- Ansatz, 39, 45
- Approximierung, 48
- Archimedes, 68
- Auslenkung, 38
- Auswertung, 40, 42

- Ball, 53
- Basis, 16, 21, 41
- Behauptung, 10
- Beschleunigung, 38
- beschränkt, 53
- Brennpunkte, 11

- Cavalieri, B.F., 66
- Charakteristische Gleichung, 25, 39, 42, 44
- Cosinus, 26

- Dämpfung, 47
- Dämpfungsfaktor, 42
- Dandelin, G.P., 12
- definit, 61
- Determinante, 20–22, 24, 70
- Diagonalisierung, 24, 25
- Diagonalmatrix, 24
- Diffeomorphismus, 69
- Differentialgleichung, 5, 35, 37, 39
- differenzierbar, 5
- Differenzierbarkeit, 47, 48
- Divergenz, 73, 75

- Ebene, 3
- Eigenbasis, 24
- Eigenfrequenz, 47
- Eigenraum, 24
- Eigenvektor, 24
- Eigenwert, 24
- Eindeutigkeitssatz, 39
- Einheitskreislinie, 41
- Einheitskreisscheibe, 56

- Ellipse, 10
- Ellipsoid, 31
- Endomorphismus, 18
- es gibt, \exists , 7
- Euklidische Normalform, 31
- euklidische Normalform, 31
- Exponentialfunktion, 36
- Extremum, 52

- Flächeninhalt, 61–63
- Formel, 7
- freie Variable, 7
- Fubini, G., 65, 66
- Fundamentalsystem, 42, 44
- Funktion, 5, 35
- für alle, \forall , 7

- Gaußfunktion, 71
- gebundene Variable, 8
- Geschwindigkeit, 38
- Gleichung, 2, 6
- Gradient, 57, 76, 77
- Graph, 48

- Hauptachsen, 11
- Hesse, L.O., 61
- Hessematrix, 61
- Homogene Gleichung, 45
- Homogenes Gleichungssystem, 23
- Hyperbel, 13, 14
- Hyperboloid, 31

- Indikatorfunktion, 63
- Indirekter Beweis, 10
- Induktion, 17
- Infimum, 54
- inhomogen-linear, 45
- Integral, 6, 62, 63
- Integrierbarkeit, 63
- Isomorphismus, 18

- Jacobi, C.G.J., 49
- Jacobimatrix, 49

- kartesisches Produkt, 2
- Kegel, 31
- Kegelschnitt, 13–15, 29
- Kern, 23, 24, 35

- Kettenregel, 50
 kompakt, 53, 56
 komplexe Lösung, 26, 41
 konjugiert, 20
 Konstante, 6
 Koordinaten, 3, 17
 Koordinatentransformation, 5
 Koordinatentransformation, 30, 69
 Kreislinie, 4
 Kreuzprodukt, 33
 kritischer Punkt, 57
 Kugel, 53
 Kugelfläche, 4
 Kurve, 4
- Längenelement, 73
 Lineare Abbildung, 17
 Lineare Unabhängigkeit, 16
 Linearer Operator, 43
 Linearkombination, 16
 lokales Maximum, 59–61
 lokales Minimum, 59–61
 Lösungsmenge, 4, 10, 13
- Maß, 63
 Matrix, 18
 Maximum, 52, 63
 messbar, 62
 Minimum, 52, 62
- Normalenvektor, 34, 73
- Oberintegral, 65
 Obersumme, 63
 offen, 50, 52, 53
 Orthogonale Matrix, 30
 Orthogonales Komplement, 28
 Orthonormalbasis, 27, 28
- Parabel, 12
 Paraboloid, 31
 Partielle Ableitung, 49
 Periode, 41
 Polarkoordinaten, 68
 positiv definit, 29
- Quader, 63
 quadratische Ergänzung, 5, 14, 30
 Quadrik, 29–31
 Quantor, 7
- Radiale Funktion, 71
 Rand, 53
 Randpunkt, 53
 Rang, 35
 Raum, 3
 Reibung, 39
 Relation, 7
 Resonanz, 47
 Rotation, 73
 Russel, B., 9
- Sarrus, P.F., 22
 Sattel, 60, 61
 Sattel, 60
 Schwingen, 38
 Schwingungsdauer, 41
 Schwingungsgleichung, 38
 Sekante, 48
 selbstadjungiert, 27
 Sinus, 26
 Skalar, 3, 15, 16, 33
 Skalarprodukt, 26, 27, 33
 Spalte, 19
 Spezielle Lösung, 45
 Spur, 75
 Stammfunktion, 64
 Standardbasis, 16
 Standardskalarprodukt, 27
 Stetigkeit, 47, 50
 Streckung, 16
 Substitution, 5, 37, 69
 Substitutionsregel, 69
 Supremum, 54
 Symmetrische Matrix, 27
- Tangente, 48
 transponiert, 19
 Trennung der Variablen, 46
 Tschirnhaus-Transformation, 5
- Übergangsmatrix, 20
 Unbekannte, 2, 6
 Unbestimmte, 2, 6
 Unterintegral, 65
 Unterraum, 24
 Untersumme, 63
- Variable, 2, 3, 5, 6, 14, 49
 Vektor, 2, 16
 Vektorprodukt, 33

80

Vektorraum, 15

Vektorsumme, 16

Verkettung, 50

Volumen, 20, 22, 63, 67

Volumenelement, 73

Voraussetzung, 10

Wahrheitstafel, 8

Widerspruch, 10

Widerspruchsbeweis, 10

Zeile, 19

Zerlegung, 61