

Zeichnen statt Rechnen

Jost Eschenburg
eschenburg@math.uni-augsburg.de

26. Oktober 2025

Vor zweieinhalb Jahrtausenden schrieb der Philosoph Platon in einem seiner Werke, dem Dialog “Theaitetos”, der Mathematiker Theodoros hätte ein bestimmtes Resultat “durch Zeichnungen” bewiesen, aber nur bis zur Zahl 17. Ob Platon die Zeichnungen je gesehen hat ist unbekannt. Vermutlich hat er das Resultat nur ansatzweise verstanden. Andere Quellen dazu sind uns nicht überliefert. Aber 1992 gelang es Benno Artmann (1933 - 2010), diese Zeichnungen vermutlich korrekt zu rekonstruieren und damit auch die Beschränkung auf 17 zu erklären.¹ Sein Mittel war die genaue Kenntnis der damaligen Mathematik. Diese “mathematische Archäologie” finde ich sehr bemerkenswert. Die Zeichnungen sind zudem einfach und hochinteressant.

¹B. Artmann: A proof for Theodoros' theorem by drawing diagrams.
Journal of Geometry 49, 3 - 35 (1994)

Platons Dialog "Theaitetos"

Autor: Platon (ca. 417 - 369 v.Chr.)

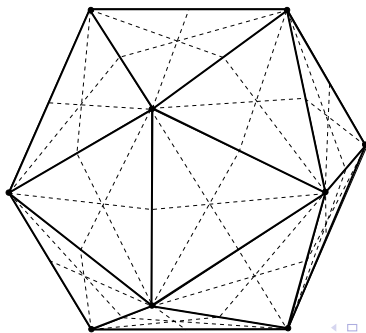
Thema: Was ist Erkenntnis?

Zeit: 399 v.Chr.

Teilnehmer:

1. Sokrates (469 - 399 v.Chr.), Lehrer Platons
2. Theodoros (ca. 460 - 390 v.Chr.), Lehrer von Theaitetos
3. Theaitetos, Mathematiker (ca. 417 - 369 v.Chr.), Freund Platons

Resultate über Quadratwurzeln und über Platonische Körper



Quadratwurzeln

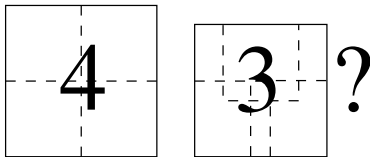
Gesucht eine Zahl x mit $x^2 = x \cdot x = 4$.

Lösung: $x = 2$, denn $2 \cdot 2 = 4$.

Gesucht eine Zahl x mit $x^2 = x \cdot x = 3$.

Lösung? 1 ist zu klein ($1 \cdot 1 = 1 < 3$), 2 ist zu groß ($2 \cdot 2 = 4 > 3$)

Geometrisch: Suche Kantenlänge x des Quadrats mit Fläche $3(\text{m}^2)$



Die Lösung $x = \sqrt{3}$ muss irgendwo zwischen 1 und 2 liegen.

Frage: $x = p/q$ für irgendwelche ganzen Zahlen p, q ?

Theaitetos: Nein!

Wäre $\sqrt{3} = p/q$, also $3 = p^2/q^2$, so wäre $3q^2 = p^2$.

Der Teiler 3 kommt in p^2 und q^2 nur in gerader Anzahl vor, in $3q^2$ daher in ungerader Anzahl. Widerspruch zu $3q^2 = p^2$!

Ergebnis: $\sqrt{3}$ ist *irrational*, kein Verhältnis ganzer Zahlen p, q .

Das Zitat aus dem Dialog “Theaitetos”

Theaitetos: “Über Quadratwurzeln (griech. ‘dynamis’) zeichnete uns Theodoros hier etwas, womit er von den Quadraten von drei und fünf Quadratfuß Flächeninhalt bewies, dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüßige. Und so ging er jede Quadratwurzel einzeln durch bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß; bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel so etwas ein, da der Quadratwurzeln unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchen, sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir die Quadratwurzeln alle behandeln könnten.”

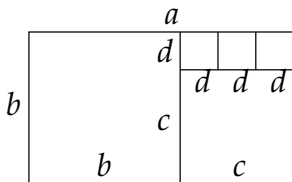
Wie Theaitetos dies gelungen ist, haben wir gerade gesehen; die 3 kann durch jede andere Nicht-Quadratzahl ersetzt werden. Was aber hat Theodoros wohl gezeichnet? Es gibt dazu keine anderen Quellen als diese Stelle bei Platon. Ich möchte berichten, was Benno Artmann herausgefunden hat.

Wechselwegnahme, Messbarkeit, Quadratur des Rechtecks

Bekannt war die von Pythagoras eingeführte “Wechselwegnahme” zur Bestimmung des Verhältnisses von Strecken $a > b$.

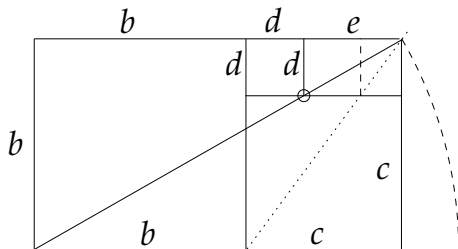
Man sucht eine Strecke, die a und b teilt, ihr *gemeinsames Maß*.

$$\begin{array}{lcl} a & \begin{array}{|c|c|c|} \hline b & & c \\ \hline \end{array} & \\ b & \begin{array}{|c|c|} \hline c & d \\ \hline \end{array} & \\ c & \begin{array}{|c|c|c|} \hline d & d & d \\ \hline \end{array} & \end{array} \quad \begin{array}{l} a = b + c = 7d \\ b = c + d = 4d \\ c = 3d \end{array}$$

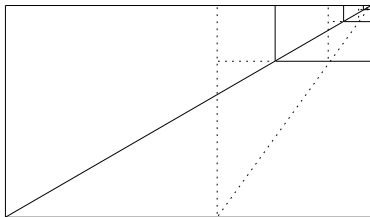


In der unteren Figur wird die gleiche Idee anders realisiert:
Ausfüllen des Rechtecks $R(a, b)$ (Seitenlängen a, b)
durch möglichst große Quadrate, “Quadratur des Rechtecks”

Theodoros Zeichnung für die Wurzel von 3



$$a = \sqrt{3}b$$
$$2b$$



Die Diagonale geht durch den markierten Punkt.

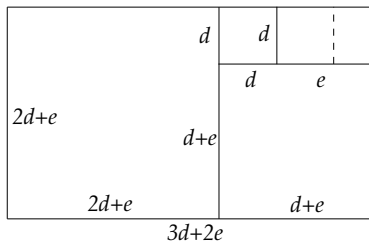
Die Rechtecke $R(a,b)$, $R(e,d)$ haben daher die gleiche Form,

$$a/b = e/d$$

Es bleibt immer ein Rest.

a/b ist irrational.

Die gleiche Rechnung allgemein:



Somit:

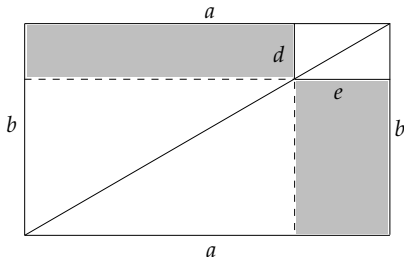
$$\begin{aligned}a &= 2e + 3d, \\ b &= 2d + e.\end{aligned}$$

Vereinfachung: Wegheben der Nenner

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \iff ad = be.$$

Algebraisch: Multipl. beide Seiten der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{e}{d}$ mit bd .

Geometrisch: $R(a, d)$ und $R(b, e)$ haben gleiche Fläche:

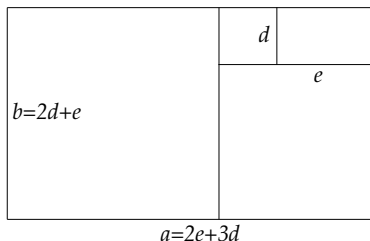


Gleiche Fläche ober- und unterhalb der Diagonale eines Rechtecks.

Theodoros Satz für $\sqrt{3}$

Satz:

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \iff \frac{a}{b} = \sqrt{3}.$$



Beweis:

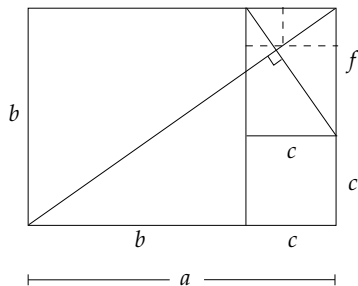
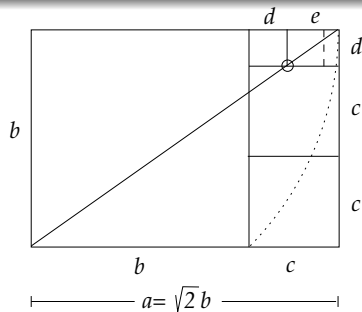
$$\frac{a}{b} = \frac{e}{d} \iff ad = be$$

$$ad = (2e + 3d)d = 2ed + 3d^2$$

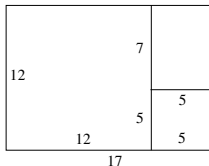
$$be = (2d + e)e = 2ed + e^2$$

$$ad = be \iff 3d^2 = e^2 \iff \underline{e^2/d^2 = 3}.$$

Theodoros Zeichnung für $\sqrt{2}$

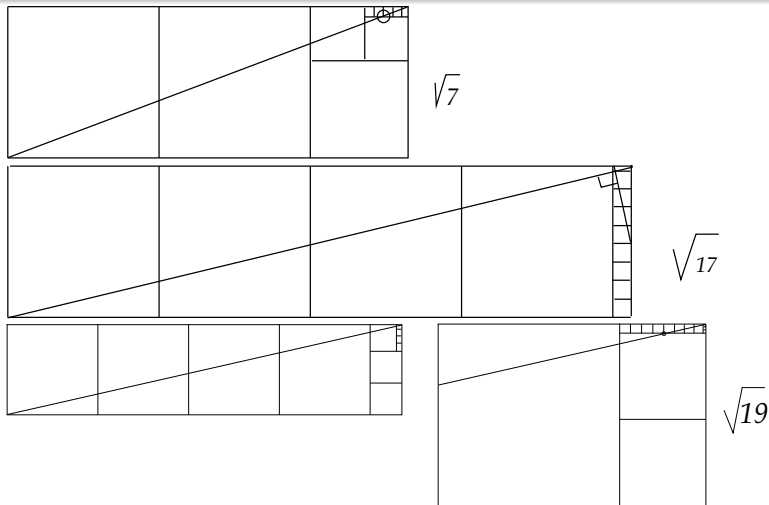


Die linke Figur erinnert an die von $\sqrt{3}$ mit $R(a, b) \sim R(e, d)$,
Aber für $f = c + d$ gilt bereits $R(a, b) \sim R(f, c)$ (rechte Figur).



$$f=7, c=5 \ (f^2=49, 2c^2=50) \Rightarrow a=17, b=12 \ (a^2=289, 2b^2=288)$$

Wurzeln von 7, 17, 19



Das Kästchen der linken Figur oben rechts in der Ecke ist nach ca. 40-facher Vergr. die Fig. rechts. Unerreichbar für Theodoros!
<https://mathworld.wolfram.com/PeriodicContinuedFraction.html>

Was Formeln leisten

J.L.Lagrange (1770): *Theodoros Satz gilt für alle Quadratwurzeln!*

Beweisidee: $x = a/b$ löst eine quadratische Gleichung vom Typ

$$px^2 = qx + r, \quad p, q, r \text{ ganze Zahlen, } p, r > 0. \quad (*)$$

Das Gleiche gilt für $x = b/c, c/d$ usw. mit anderen Zahlen p, q, r .

Übergang von a/b zu $b/c, c/d, \dots$ jeweils in zwei Schritten:

1) Abziehen des ganzzahligen Anteils: $x' = x - [x]$.

2) Kehrwert bilden: $x'' = \frac{1}{x'}$.

Es gibt eine Zahl, die bei beiden Übergängen unverändert bleibt:

$$D = q^2 + 4pr = p^2(x_1 - x_2)^2$$

wobei x_1, x_2 die beiden Lösungen von $(*)$ sind ($x_1 > 0 > x_2$).

D unverändert bei 1), da p und $x_1 - x_2$ unverändert bleiben.

D unverändert bei 2), da $px^2 = qx + r \iff r(\frac{1}{x})^2 = -q(\frac{1}{x}) + p$

Weil $q^2, 4pr \leq D$, gibt es zu D nur endl. viele Zahlentripel (p, q, r) .

Deshalb muss der Prozess sich irgendwann wiederholen.

Abschließende Bemerkungen

Theodoros Satz geht viel weiter als der seines berühmten Schülers: Er beweist die Irrationalität und *berechnet* die Quadratwurzeln. Platons Theaitetos betont die Allgemeinheit der eigenen Methode. Er sieht nicht die größere Tiefe im Ergebnis seines alten Lehrers. Sokrates und Platon stimmen ihm zu; sie suchen das Allgemeine. Das Streben nach Allgemeinheit birgt allerdings die Gefahr, die Besonderheit des Einzelnen gering zu schätzen. Jedoch handelt die Mathematik auch davon, wie die Botanik oder die Chemie.

Die Griechen haben in der Antike die Geometrie entwickelt. Den Umgang mit Formeln entfalteten erst die Muslime ab 825. Sie benutzten griechische, indische und mesopotamische Quellen. Ohne sie wäre die europäische Mathematik (ab 15.Jh.) undenkbar.

Mathematisches Verstehen reift langsam, manchmal in Jahrhunderten. Es wird befruchtet durch die Erfahrungen unterschiedlicher Kulturen.

Und es benötigt *Zeit*.

Die Zeit arbeitet für uns alle, wenn wir sie gewähren lassen bei ihrem Werk des Ausgleichs und der Aufhebung von Gegensätzen zu höherer Einheit, und wenn wir sie, der einzelne und die Völker, erfüllen mit der Arbeit an uns selbst. Die Zeit ist ein kostbares Geschenk, uns gegeben, damit wir in ihr klüger, besser, reifer, vollkommener werden. Sie ist der Friede selbst, und Krieg ist nichts als das wilde Verschmähen der Zeit, der Ausbruch aus ihr in sinnlose Ungeduld.

(Thomas Mann, "Meine Zeit", 1950)