

RIEMANNSCHE GEOMETRIE

SS 2011

J.-H. ESCHENBURG

1. EINFÜHRUNG

Nicht jede mathematische Disziplin hat einen Geburtstag, die Riemannsche Geometrie aber schon: Sie erblickte am 10. Juni 1854 in Göttingen das Licht der Welt. An diesem Tag hielt Bernhard Riemann vor der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen seinen Habilitationsvortrag mit dem Titel “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”.¹ Unter “Geometrie” verstanden die meisten seiner Zuhörer noch, was Euklid vor über 2000 Jahren aufgeschrieben hatte, auch wenn die “nichteuclidische” Geometrie von Lobatschewsky und Bolyai bereits entdeckt war. Der Begriff des *Abstandes* zweier Punkte in Ebene oder Raum war dabei ebenso selbstverständlich gegeben wie der eines Punktes oder einer Gerade. Was Riemann seinen Hörern in diesem Vortrag zumutete, war nicht nur die Beschreibung einer viel weiter gefassten Geometrie, die sowohl die euklidische als auch die nichteuclidische als einfache Spezialfälle enthält, sondern es ist die *Trennung des zugrundeliegenden Raumes von der auf ihm definierten Geometrie, die Trennung von Topologie und Geometrie*.

Er entwickelt daher zunächst den Begriff einer “ n -fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit”, in der jeder Punkt durch n Zahlen festgelegt wird, in dem aber noch kein “portabler Maßstab” definiert ist, der es möglich machen würde, den Abstand von zwei Punktpaaren an verschiedenen Orten miteinander zu vergleichen. Ein solcher Maßstab ist eine zusätzliche Größe, die durch die Mannigfaltigkeit selbst noch nicht gegeben ist. In moderner Bezeichnung ist das einfach ein Skalarprodukt in jedem Tangentialraum, heute “Riemannsche Metrik” genannt und seit Einstein meist mit dem Buchstaben g (für “Gravitation”) bezeichnet. Eine Riemannsche Metrik definiert zunächst nur die Länge von Tangentialvektoren und damit den Abstand von beliebig nahe (“infinitesimal”) benachbarten Punkten, aber daraus ergibt sich auch der Abstand von weit voneinander entfernten Punkten, nämlich

Date: 27. September 2011.

¹www.emis.de/classics/Riemann/Geom.pdf

durch Einstreuen von Zwischenpunkten und Aufsummieren (Integration). Im “infinitesimal Kleinen”, d.h. bei Approximation erster Ordnung, erfüllt dieser Abstandsbegriff die Gesetze der euklidischen Geometrie, insbesondere den Satz von Pythagoras. Wie Hermann Weyl in einem Kommentar zu Riemanns Vorlesung bemerkt, hat Riemann damit für die Geometrie einen Schritt getan, der für die Physik bereits vollzogen war (besonders durch Faraday und Maxwell): der Übergang von der Fernwirkungs- zu einer Nahwirkungstheorie. Elektrische Ladungen oder Massen an verschiedenen Orten ziehen sich an, aber es gibt etwas dazwischen, das diese Anziehung vermittelt, das Elektrische Feld oder das Gravitationsfeld. Ebenso gibt es etwas, das den Abstand weit entfernter Punkte vermittelt: die Riemannsche Metrik.

Erst durch diese Trennung von zugrundeliegender Mannigfaltigkeit und darauf definierter Metrik wurde es möglich, Geometrie und Physik auf eine neue Weise zu verbinden: Die Geometrie stellt nicht nur die Bühne, auf der sich die Physik abspielt, wie Newton und Kant es noch gesehen haben, sondern die Geometrie wird durch die Physik selbst verändert und bestimmt. Dieser Schritt wurde allerdings erst 60 Jahre später durch Albert Einstein in seiner Allgemeinen Relativitätstheorie vollzogen: Die Gravitationskraft bestimmt die Krümmung und damit die Geometrie von Raum und Zeit. Soweit hat Riemann nicht gedacht, aber die letzten Worte seines Vortrags weisen in diese Richtung: “Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden [wo man Messen durch Zählen ersetzen kann, J.E.] oder der Grund der Maßverhältnisse außerhalb, in darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden. . . . Es führt dies hinüber in das Gebiet einer anderen Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welches wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt.” Wir werden diese Grenze nicht respektieren und auch über die Einsteinsche Gravitationstheorie berichten. Aber zuerst müssen wir die Grundlagen bereit stellen: kovariante Ableitung und Krümmung.

Lange vor Riemann war die Geometrie von krummen Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum bekannt. Diese tragen auch schon eine “Riemannsche Metrik”, nämlich das Skalarprodukt des umgebenden Raums, eingeschränkt auf die Tangentialebenen der Fläche. Ebenso können wir Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d betrachten. Das Neue an Riemanns Theorie war, dass auf eine solche “Einbettung” in einen Raum höherer Dimension verzichtet werden konnte; in welchem anderen Raum sollte auch unser 3-dimensionaler physikalischer Raum oder gar das 4-dimensionale Raum-Zeit-Kontinuum (“Raum-Zeit”) enthalten sein? Doch die

Untermannigfaltigkeiten liefern uns eine Klasse von Beispielen, an Hand derer sich die Riemannsche Geometrie studieren lässt und allgemeine Problemstellungen und Begriffsbildungen erklärt werden können. In der Tat lässt sich zeigen (Satz von John Nash, der aus dem Film “A beautiful mind” bekannt ist), dass jede Riemannsche Mannigfaltigkeit “isometrisch eingebettet” werden kann, dass es also eine Abstandserhaltende bijektive Abbildung auf eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d gibt. Allerdings gibt es viele solche Untermannigfaltigkeiten, und es bleibt die Frage, welche Eigenschaften einer Riemannschen Mannigfaltigkeit unabhängig von der gewählten Einbettung sind; solche Eigenschaften gehören zur “inneren Geometrie”, im Gegensatz zur “äußeren Geometrie”, der Geometrie der Einbettung. Auch sollte sich der Nachweis solcher Eigenschaften nicht auf den schwierigen Satz von Nash stützen müssen.

Eine Herausforderung bietet bereits die Differentialrechnung auf einer Mannigfaltigkeit. Bei Funktionen gibt es keine Probleme, auch nicht bei Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, aber bei Vektorfeldern. Auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ können wir Vektorfelder, Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, partiell differenzieren und erhalten neue Vektorfelder. Auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^d$ ist das schon nicht mehr so einfach, wenn wir mit “Vektorfeldern” genauer “tangentiale Vektorfelder” meinen, Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}^d$, deren Wert an jedem Punkt $x \in M$ im Tangentialraum $T_x M$ liegt. Die partiellen Ableitungen tangentialer Vektorfelder sind nämlich gewöhnlich keineswegs mehr tangential; warum sollten sie das sein? Bei Untermannigfaltigkeiten sehen wir aber auch ein einfaches Rezept, dies zu ändern: Wir lassen die zu M senkrechte Komponente der Ableitung einfach weg, d.h. wir projizieren alles auf den Tangentialraum zurück. Diese “tangentialen” partiellen Ableitungen, die wir ∇_i statt ∂_i nennen wollen, hängen nur von der inneren Geometrie, d.h. von der Riemannschen Metrik ab – ein Wunder, dem wir auf den Grund gehen wollen – und sie lassen sich deshalb mit der gleichen Formel auch auf abstrakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren, ein Schritt, den der italienische Mathematiker Tullio Levi-Civita (1873 - 1941) um die Jahrhundertwende vollzog.

Wo liegt eigentlich das Problem bei Vektorfeldern auf Mannigfaltigkeiten? Lokal ist eine Mannigfaltigkeit doch gleich (diffeomorph zu) einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$; der Diffeomorphismus heißt *Karte* oder *Parametrisierung*. Warum können wir nicht ein Vektorfeld lokal als Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ auffassen und wie üblich differenzieren? Das Problem tritt erst in Erscheinung, wenn wir eine zweite Karte betrachten; dann lässt sich dieselbe offene Teilmenge von M auf zwei Weisen mit offenen

Teilmengen $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ identifizieren, und in U und \tilde{U} hat dasselbe Vektorfeld unterschiedliche Darstellungen, die durch die Ableitung des Kartenwechsels miteinander verbunden sind (“Kovarianz”). Aber die Ableitungen von zwei Darstellungen desselben Vektorfelds erfüllen diese Beziehung nicht mehr, weil dabei die Ableitung des Kartenwechsels noch einmal differenziert wird; die Ableitungen sind also nicht mehr “kovariant”. Die eben beschriebene Levi-Civita-Ableitung behebt dieses Problem und wird deshalb auch als *kovariante Ableitung* bezeichnet.

Die kovariante Ableitung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten erfüllt die gleichen Rechenregeln wie die gewöhnliche Ableitung in \mathbb{R}^n , mit einer Ausnahme: Die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$, gilt nicht mehr. Der entsprechende Ausdruck für die kovariante Ableitung ∇_i ,

$$R_{ij} = \nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i$$

ist nicht Null, aber er ist auch kein Differentialoperator, wie seine Form vermuten ließe, sondern ein algebraischer Ausdruck, eine Matrix oder lineare Abbildung auf jedem Tangentialraum, ein *Tensor*. Dieser Ausdruck R_{ij} ist genau für den Unterschied zwischen euklidischer und Riemannscher Geometrie verantwortlich. Er wird als *Riemannscher Krümmungstensor* bezeichnet, weil er bei Flächen im Raum eng mit der anschaulichen Gaußschen Krümmung der Fläche zusammenhängt. Aber R_{ij} ist ebenso wie ∇_i nur von der inneren Geometrie, nur von der Metrik g und ihren Ableitungen abhängig. Das erklärt einen Sachverhalt, den Gauß gefunden hatte und den er so bemerkenswert fand, dass er ihn in seiner lateinisch geschriebenen Abhandlung “Disquisitiones generales circa superficies curvas”² (Allgemeine Abhandlungen über krumme Flächen) von 1828 als “egregium theorema” (erlesener Satz) bezeichnet hat: Die Gaußsche Krümmung, das Produkt der beiden Hauptkrümmungen einer Fläche, ist entgegen dem Augenschein eine Größe der inneren Geometrie! Sie ändert sich insbesondere nicht unter Biegungen, wie man beispielhaft sieht, wenn man ein Stück ebenes Papier zu einem Zylinder oder Kegel zusammenrollt: Eine der beiden Hauptkrümmungen verändert sich dabei zwar, aber die andere bleibt Null, womit auch ihr Produkt Null bleibt. Wegen dieses Zusammenhangs werden vom Krümmungstensor abgeleitete Größen oft als “Krümmungen” bezeichnet.

Mit der kovarianten Ableitung können wir einen weiteren Begriff der euklidischen Geometrie in die Riemannsche Geometrie übertragen: die

²Eine Übersetzung ins Englische mit Kommentar findet sich im zweiten Band des Buches von M. Spivak: “A Comprehensive Introduction to Differential Geometry”.

Parallelverschiebung. Ein Vektorfeld längs eines Weges in der Mannigfaltigkeit heißt *parallel*, wenn seine kovariante Ableitung Null ist; ein solches Vektorfeld wird auch “kovariant konstant” genannt. Wir können damit einen Vektor vom Anfangs- bis zum Endpunkt eines Weges transportieren (*parallelverschieben*). Aber anders als im euklidischen Raum hängt diese Parallelverschiebung vom Weg ab, nicht nur von seinen Endpunkten; zwei verschiedene Wege von p nach q geben unterschiedliche Parallelverschiebungen. Ihre Differenz hängt von der Krümmung und der Größe der Fläche ab, die zwischen den Wegen eingespannt werden kann. Ist der Krümmungstensor Null, so wird die Parallelverschiebung mindestens lokal wieder wegunabhängig, und mit Hilfe von parallelen Vektorfeldern können wir eine lokale Isometrie zum euklidischen Raum herstellen.

Der Riemannsche Krümmungstensor und seine kovariante Ableitung erfüllen eine Reihe von algebraischen Bedingungen (*Krümmungsidentitäten*), die für Einsteins Gravitationstheorie von entscheidender Bedeutung geworden sind. Sie implizieren nämlich, dass eine aus dem Krümmungstensor gebildete Bilinearform auf jedem Tangentialraum der Mannigfaltigkeit, der *Einsteintensor* G , symmetrisch und divergenzfrei ist. Einsteins Idee war, Geometrie und Physik durch eine Gleichung der Form

$$\text{“Krümmung} = \text{Materieverteilung”}$$

zu verbinden. Die Materieverteilung wird aber durch eine divergenzfreie symmetrische Bilinearform beschrieben, den *Massetensor* T ; seine Divergenzfreiheit entspricht dem Erhaltungsgesetz von Materie und Energie. Einstein suchte lange, bis er auf der geometrischen Seite ein Äquivalent gefunden hatte. In der Endphase dieser Suche im November 1915 hält er jeden Donnerstag einen Vortrag vor der Preußischen Akademie der Wissenschaften, in der er jedesmal die Version der Vorwoche teilweise widerruft und überarbeitet. Am 25. November 1915 hat er es schließlich geschafft:³ Er hat das richtige geometrische Äquivalent des Massetensors gefunden, eben den Einsteintensor G , und damit erblickt die verblüffend einfache Grundformel der neuen Gravitationstheorie, die Einsteinsche Feldgleichung, das Licht der Welt:

$$G = 8\pi T.$$

Der Kalkül mit partiellen Ableitungen nach Koordinaten, den wir bisher beschrieben haben, verschafft uns einen einfachen Zugang zu den Grundbegriffen der Riemannschen Geometrie, wird aber bald zu eng.

³Jürgen Neffe: Einstein - eine Biographie. Rowohlt 2009

Da eine Riemannsche Mannigfaltigkeit meistens nicht von einer einzigen Karte, einem einzigen Koordinatensystem überdeckt werden kann, müssten wir uns stets auch mit den Übergangsformeln in andere Koordinatensysteme befassen und könnten außerdem nur schwer Aussagen über die gesamte Mannigfaltigkeit treffen. Deshalb benutzen wir statt partieller Ableitungen Richtungsableitungen nach Vektorfeldern. Vektorfelder ordnen jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Vektor im Tangentialraum an diesem Punkt zu; sie sind unabhängig von Koordinatensystemen. Es ist nicht schwer, die bisherigen Formeln in diese neue Sprache zu übersetzen.

Nun erst werden globale Aussagen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M zugänglich. Eine davon ist der folgende Satz von H. Hopf und W. Rinow (1931). Eine Riemannsche Metrik, die wir nun als positiv definit voraussetzen wollen, definiert einen *Abstand* d zwischen beliebigen Punkten p und q von M , nämlich das Infimum der Längen aller Kurven zwischen p und q . Wann ist dieses Infimum ein Minimum, wann gibt es wirklich eine "Kürzeste" zwischen p und q , wie die "Strecke" im euklidischen Raum? Durch Variationsrechnung können wir zeigen, dass dies für nahe beieinanderliegende Punktepaare p, q immer der Fall ist. Aber wie ist es im Großen, für beliebig weit entfernte Punkte p, q ? Ganz allgemein kann das nicht richtig sein; das zeigt schon eine nicht-konvexe offen Teilmenge der euklidischen Ebene: Wenn ich von p nach q um eine Ecke laufen muss, kann es keine Kürzeste geben, weil ich der Ecke ja beliebig nahe kommen kann. Der Satz von Hopf und Rinow beantwortet die Frage positiv, wenn der Abstand auf M *vollständig* ist, d.h. wenn jede d -Cauchyfolge in M konvergiert. Das ist z.B. für jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit erfüllt.

Aber wir sehen schon bei Betrachtung der Kugelfläche, dass Wege, die im Kleinen Kürzeste sind (*Geodäten*), im Großen diese Eigenschaft verlieren können: Die Meridiane (Großkreisbögen) sind vom Nordpol bis zum Südpol Kürzeste, aber wenn sie über den Südpol hinweg weiterverfolgt werden, lassen sie sich verkürzen. Dieses Phänomen hat mit der Krümmung zu tun, und damit werden wir uns am Ende der Vorlesung beschäftigen: Wie weit ist eine Geodäte Kürzeste? Die Antwort auf diese Frage wird zeigen, dass bei vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein Zusammenhang zwischen Krümmung und Topologie besteht.⁴ Zum Beispiel muss eine vollständige Mannigfaltigkeit, die stärker als die Sphäre gekrümmt ist, kompakt sein. Ist die Krümmung

⁴Kürzlich wurde die berühmte Poincarésche Vermutung mit Hilfe von Riemannschen Geometrie bewiesen (Perelman 2002). Diese 1904 formulierte rein topologischen Vermutung von Henri Poincaré (1854 - 1912) besagt, dass eine kompakte

dagegen negativ oder null und M zusätzlich einfach zusammenhängend (jede Schleife lässt sich in M zu einem Punkt zusammenziehen), dann ist M bereits diffeomorph zum \mathbb{R}^n .

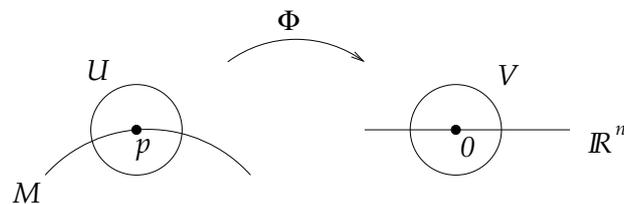
Ein klassischer Zusammenhang zwischen Krümmung und Topologie wird durch die Formel von Gauß und Bonnet gegeben, die wir vielleicht am Ende noch beweisen werden. Für kompakte Flächen mit Riemannscher Metrik lautet sie:

$$\int_M K = 2\pi\chi(M),$$

wobei K die Gaußsche Krümmung ist und $\chi(M)$ die Eulerzahl, eine rein topologische Invariante.

2. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^d$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* ($n \leq d$), wenn sie lokal diffeomorph zu dem Unterraum $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^d$ ist, d.h. in einem geeigneten lokalen Koordinatensystem des \mathbb{R}^d wird M zu \mathbb{R}^n . Noch präziser: Zu jedem Punkt $x \in M$ gibt es offene Mengen $V, W \subset \mathbb{R}^d$ mit $x \in V$ und $0 \in W$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \rightarrow W$ mit $\Phi(V \cap M) = W \cap \mathbb{R}^n$.



Die Einschränkung von Φ auf $V \cap M$ heißt *lokale Karte*, ihre Umkehrabbildung (die Einschränkung von Φ^{-1} auf $U = W \cap \mathbb{R}^n$) *lokale Parametrisierung* von M .

Untermannigfaltigkeiten sind lokal also so gut wie lineare Unterräume, weil in der Analysis die Diffeomorphismen ja die Rolle der Isomorphismen spielen. Der Unterschied zur Algebra ist nur durch das Wort

dreidimensionale Mannigfaltigkeit M , in der jede Schleife auf einen Punkt zusammengezogen werden kann ("einfach zusammenhängend"), diffeomorph zur 3-Sphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ sein muss. Im Beweis wird eine beliebige Riemannsche Metrik auf M solange deformiert, bis sie schließlich konstante positive Krümmung hat; dann muss es die Sphäre sein. Die Deformation geschieht durch eine Differentialgleichung für die Riemannsche Metrik. Sie ist der Wärmeleitungsgleichung verwandt und wird mit einem Verwandten des Einsteintensors gebildet. Die Idee ist nicht neu, stößt aber auf große Schwierigkeiten, weil die Deformation Singularitäten entwickelt. Es ist Perelmans Verdienst, diese Singularitäten verstanden und überwunden zu haben.

“lokal” gegeben (das in der Algebra in ganz anderer Bedeutung vorkommt); die Analysis ist viel flexibler als die Algebra, und der lokale Diffeomorphismus sagt über die globale Struktur noch gar nichts aus. Deshalb ist die Klasse der Untermannigfaltigkeiten ungeheuer reich, ganz anders als die Klasse der linearen Unterräume.

Aber lokal gibt es eben keine wesentlichen Unterschiede zwischen Unterräumen und Untermannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^d . So wie Unterräume werden auch Untermannigfaltigkeiten oft als Lösungsmengen von Gleichungen gegeben, eben von nicht-linearen Gleichungen. Bei linearen Unterräumen sind es lineare Gleichungen, und zwar ist ein n -dimensionaler Unterraum im \mathbb{R}^d genau der Kern (die Lösungsmenge der homogenen Gleichung) einer linearen Abbildung mit Rang $d - n$, d.h. einer surjektiven linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-n}$ (Kern-Rang-Formel). Genauso ist es bei nichtlinearen Gleichungen:

Die Lösungsmenge einer Gleichung $F(x) = a$ ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d-n}$ und DF_x surjektiv ist (Rang $d - n$) für jedes $x \in M$.

Das ist eine Form des Satzes über implizite Funktionen.⁵ Ein Wert a von F , für den die Voraussetzung “ DF_x surjektiv $\forall x \in F^{-1}(a)$ ” zutrifft, heißt *regulärer Wert* und $M = F^{-1}(a)$ *reguläres Urbild*.

Im Hyperflächenfall $d - n = 1$ ist $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und die Regularität besagt, dass ihr Gradient längs $M = \{x; F(x) = a\}$ nicht verschwindet. Zum Beispiel ist die Sphäre $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$ ein reguläres Urbild, denn der Gradient $2x$ der Funktion $F(x) = \langle x, x \rangle$ verschwindet nur in $x = 0 \notin \mathbb{S}^n$.

Wir wollen ein etwas komplizierteres Beispiel betrachten: die *Orthogonale Gruppe*

$$M = O_m = \{x \in \mathbb{R}^{m \times m}; x^*x = I\},$$

wobei x^* die transponierte Matrix zu x bezeichnet. Hier ist $F(x) = x^*x \in S_m = \{y \in \mathbb{R}^{m \times m}; y^* = y\}$ und damit $F : \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow S_m$. Die

⁵Man könnte man durch lineare Approximation von F zu beweisen versuchen: $F(x + h) = a + Ah + o(h)$; vernachlässigt man $o(h)$, so ist $F(x + h) = a \iff Ah = 0$. Aber das ist nicht ganz in Ordnung. Stattdessen erweitert man F zu einem lokalen Diffeomorphismus Φ wie folgt. Da Rang $DF_x = d - n$, sind $d - n$ Spalten der Matrix DF_x linear unabhängig, ohne Einschränkung die letzten $d - n$ Spalten. Nun addiert man die Projektion $\pi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ hinzu: $\Phi(x) = \pi(x) \oplus F(x) \in \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^{d-n}$. Damit wird $D\Phi_x$ invertierbar, also ist Φ nach dem inversen Funktionensatz ein Diffeomorphismus nahe x , und $\Phi(x) \in \mathbb{R}^n \iff F(x) = 0 \iff x \in M$ (o.E. sei $a = 0$).

Ableitung von F berechnen wir mit der Kettenregel:

$$DF_x v = (F \circ x)'(0),$$

wobei $x(t)$ Kurve in $\mathbb{R}^{m \times m}$ mit $x(0) = x$, $x'(0) = v$, zum Beispiel $x(t) = x + tv$. Damit ist

$$DF_x v = (x^* x)'(0) = v^* x + x^* v.$$

Wir müssen zeigen, dass diese Abbildung surjektiv ist: Zu jeder symmetrischen Matrix s suchen wir eine Matrix v mit $s = v^* x + x^* v = w^* + w$ für $w = x^* v$. Wir können leicht ein solches w finden, z.B. $w = \frac{1}{2}s$, und dann können wir $v = xw$ setzen (man beachte $xx^* = I$). Die Orthogonale Gruppe ist also eine Untermannigfaltigkeit, wobei $d = m^2$ und $d - n = \dim S_m = \frac{1}{2}m(m+1)$. Also hat O_m die Dimension $n = d - (d - n) = m^2 - \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}m(m-1)$.⁶

3. INNERE UND ÄUSSERE GEOMETRIE

Gegeben sei eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^d$ und eine lokale Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d$. Dabei ist U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n und ϕ eine injektive *Immersion*, d.h. auch Df_u ist injektiv für jedes $u \in U$, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial u_i} = \partial_i \phi = \phi_i$ sind also an jeder Stelle $u \in U$ linear unabhängig. Wir dürfen annehmen, dass $U = W \cap \mathbb{R}^n$ und $\phi = \Phi^{-1}|_U$ ist. Der *Tangentialraum* von M an einer Stelle $x \in M$ besteht aus allen Anfangsvektoren differenzierbarer Kurven $c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d$ mit $c(0) = x$:

$$T_x M = \{A \in \mathbb{R}^d; \exists c : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M : c(0) = x, c'(0) = A\}$$

Wenn $x = \phi(u)$, gilt $T_x M = \text{Bild } D\phi_x$, weil $\phi = \Phi^{-1}|_U$ ist und weil Φ^{-1} die Kurven in $U = W \cap \mathbb{R}^n$ durch u auf die Kurven in M durch x abbildet.

Als Unterraum erbt jeder Tangentialraum $T_x M$ das Skalarprodukt von \mathbb{R}^d , das wir mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnen wollen. Da die partiellen Ableitungen ϕ_i der Parametrisierung ϕ an jeder Stelle $u \in U$ eine Basis von $T_{\phi(u)} M$ bilden, genügt es, deren Skalarprodukte zu kennen; diese bezeichnen wir mit g_{ij} :

$$(1) \quad g_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle.$$

⁶Wir können die Dimension auch direkt ermitteln, denn der Tangentialraum von $M = F^{-1}(a)$ im Punkt x ist der Kern von DF_x (Übung). Es gilt $v \in \ker DF_x \iff DF_x v = 0 \iff (x^* v)^* + x^* v = 0 \iff a := x^* v$ ist antisymmetrisch. Also ist $T_x M = \{xa; a^* = -a\}$ mit Dimension $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Mit Hilfe dieser Funktionen können wir zum Beispiel Bogenlängen auf M berechnen. Ist $x = \phi(u)$ und $A = D\phi_u a = \sum_{i=1}^n a^i \phi_i \in T_x M$,⁷ dann ist

$$\langle A, A \rangle = a^i a^j g_{ij},$$

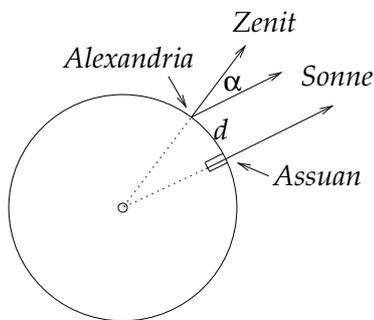
wobei wir bereits die *Einsteinsche Summenkonvention* benutzt haben, siehe voranstehende Fußnote 7. Damit haben wir ein neues, von $u \in U$ abhängiges Skalarprodukt g_u auf \mathbb{R}^n erklärt, genannt *Erste Fundamentalform* der Parametrisierung ϕ : Für $a, b \in \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$(2) \quad g_u(a, b) = \langle D\phi_u a, D\phi_u b \rangle = a^i b^j g_{ij}(u).$$

Wenn wir eine Kurve $x(t)$ auf M in Koordinaten kennen, $x(t) = \phi(u(t))$ für eine uns bekannte Kurve $u(t) = (u^i(t)) = (u^1(t), \dots, u^n(t)) \in U$, so gilt $x' = (\phi \circ u)' = (u^i)' \phi_i$ und damit $\langle x', x' \rangle = g_u(u', u')$. Für die Länge $L(x) = \int_I |x'(t)| dt$ der Kurve $x : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}^d$ ergibt sich daher

$$(3) \quad L(x) = \int_I g_{u(t)}(u'(t), u'(t))^{1/2} dt.$$

Alle geometrischen Größen, die sich allein mit Hilfe der Funktionen g_{ij} und ihren Ableitungen berechnen lassen, gehören zur *inneren Geometrie* der Untermannigfaltigkeit. Dazu gehören Längen, Winkel, Flächeninhalte, Volumina und einiges mehr, wie wir noch sehen werden. Der Gegenbegriff ist die *äußere Geometrie*, die explizit von der Lage von M im umgebenden Raum \mathbb{R}^d Gebrauch macht.



Als Eratosthenes von Kyrene um 200 v.Chr. den Erdumfang berechnete, benutzte er innere und äußere Geometrie gleichermaßen. Es war bekannt, dass zur Sommersonnenwende an einem Ort nahe Assuan am nördlichen Wendekreis die Sonne am Mittag genau senkrecht in einen

⁷Das i in a^i ist natürlich keine Potenz, sondern ein Index, den wir oben statt unten geschrieben haben. Eine von Einstein stammende Konvention besagt, dass über jeden Index summiert wird, der sowohl oben als auch unten vorkommt; statt $\sum_i a^i \phi_i$ können wir also vereinfacht $a^i \phi_i$ schreiben.

Brunnen fiel und den Wasserspiegel tief unten erglänzen ließ. Eratosthenes maß zur gleichen Stunde den Sonnenstand (Schattenlänge eines senkrecht stehenden Stabes) in Alexandria ca. 900 km nördlich von Assuan. Die Entfernung d von Alexandria nach Assuan war ihm ungefähr bekannt – das ist innere Geometrie der Erdoberfläche. Die Messung des Sonnenstandes dagegen gehört zur äußeren Geometrie.

4. DIE TANGENTIALE ABLEITUNG

Ein (*tangentiales*) Vektorfeld auf M ist eine (C^∞ -)differenzierbare Abbildung $A : M \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $A(x) \in T_x M$ für alle $x \in M$. Mit unserer Parametrisierung ϕ können wir A auch als Abbildung auf U betrachten (eigentlich reden wir dann von der Abbildung $A \circ \phi$, werden diese aber immer noch A nennen). Da die partiellen Ableitungen der Parametrisierung, $\partial_i \phi = \phi_i$ ($i = 1, \dots, n$), in jedem Punkt $u \in U$ eine Basis des Tangentialraums $T_{\phi(u)} M$ bilden, lässt sich jedes Vektorfeld A in dieser Basis darstellen:

$$(4) \quad A = \sum_{i=1}^n a^i \phi_i = a^i \phi_i$$

(Summenkonvention!) mit differenzierbaren Koeffizientenfunktionen $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Als Funktion von U nach \mathbb{R}^d kann ein Vektorfeld A natürlich differenziert werden. Die partiellen Ableitungen $A_j = \partial_j A$ sind immer noch Abbildungen $U \rightarrow \mathbb{R}^d$, aber nicht mehr Vektorfelder: Sie sind nicht mehr notwendig tangential, denn $A_j(u)$ muss nicht in $T_{\phi(u)} M$ liegen. Wir können diesen Mangel beheben, indem wir $A_j(u)$ orthogonal auf $T_{\phi(u)} M$ projizieren, also nur die tangentielle Komponente von A_j betrachten. Diese werden wir mit V_j^T bezeichnen, d.h. $A_j^T(u) = \tau_u(A_j)$, wobei $\tau_u : \mathbb{R}^d \rightarrow T_{\phi(u)} M$ die orthogonale Projektion auf $T_{\phi(u)} M$ bezeichnet. Um diese *tangentiale Ableitung* für jedes Vektorfeld V zu berechnen, genügt es wegen (4), die tangentialen Ableitungen von ϕ_i zu bestimmen, denn

$$A_j^T = (a^i \phi_i)_j^T = a_j^i \phi_i + a^i (\phi_{ij})^T.$$

Satz 4.1. *Die tangentialen Ableitungen $(\phi_{ij})^T$ sind Größen der inneren Geometrie; genauer gilt*

$$(5) \quad 2\langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}.$$

Beweis. ⁸ Der Grund liegt in der Symmetrie des Ausdruck $\langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle$ in den drei Indizes i, j, k . Einerseits gilt wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

$$\langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle = \langle \phi_{ji}, \phi_k \rangle$$

es gilt also Symmetrie in den ersten beiden Argumenten. Andererseits können wir mit der Produktregel die Differentiation vom ersten auf den zweiten Faktor wälzen:

$$(6) \quad \langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle = -\langle \phi_i, \phi_{kj} \rangle + \partial_j g_{ik},$$

es gilt also eine Art Antisymmetrie im ersten und dritten Argument. Ein oft verwendetes Lemma analysiert diese Situation:

Lemma 4.1. *Ein Ausdruck A_{ijk} , der symmetrisch in den ersten beiden Indizes i, j und antisymmetrisch im ersten und dritten Index i, k ist, ist gleich Null.*

Beweis des Lemmas: Wir schreiben kurz ijk statt A_{ijk} . Drei Indizes erlauben drei verschiedene Vertauschungen (Transpositionen). Die dritte (23) lässt sich auf zwei Weisen aus den beiden anderen (12), (13) zusammensetzen:

$$(23) = (12)(13)(12) \quad \text{sowie} \quad (23) = (13)(12)(13)$$

Da (12) symmetrisch und (13) antisymmetrisch auf ijk wirkt, ergeben die beiden Verfahren unterschiedliche Vorzeichen:

$$(7) \quad \begin{aligned} ikj &= kij = -jik = -ijk, \\ ikj &= -jki = -kji = ijk. \end{aligned}$$

Die Differenz von unterer und oberer Gleichung ergibt $2ijk = 0$. \square

Der Beweis von Satz 4.1 ist eine Modifikation dieses Arguments, weil die Antisymmetrie modifiziert ist (6):

$$ijk = -kji + g_{ik,j}$$

mit $g_{ik,j} = \partial_j g_{ik}$; es ist das Indexpaar ik in $g_{ik,j}$, das vertauscht wird. Dann ergibt sich anstelle von (7):

$$\begin{aligned} ikj &= kij = -jik + g_{kj,i} = -ijk + g_{kj,i}, \\ ikj &= -jki + g_{ij,k} = -kji + g_{ij,k} = ijk - g_{ki,j} + g_{ij,k}. \end{aligned}$$

Die Differenz von unterer und oberer Gleichung ergibt (5):

$$2ijk - g_{ki,j} + g_{ij,k} - g_{kj,i} = 0.$$

⁸Ein kurzes, aber wenig einsichtiges Argument ist das folgende: Man schreibe die Gleichung $\partial_i g_{jk} = \langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle + \langle \phi_i, \phi_{kj} \rangle$ dreimal mit zyklisch vertauschten Indizes untereinander, addiere die ersten beiden Gleichungen und ziehe die dritte ab, dann ergibt sich (5).

Da die ϕ_k eine Basis des Tangentialraums bilden, können wir den Vektor $(\phi_{ij})^T$ aus seinen Skalarprodukten mit allen ϕ_k berechnen; diese Skalarprodukte sind nach (5) durch die innere Geometrie bestimmt.

Bemerkung: Es bleibt die Frage, wie man $(\phi_{ij})^T$ aus den Skalarprodukten $\langle \phi_{ij}, \phi_k \rangle$ tatsächlich berechnet. Wir können diese Frage für jeden Vektor $A \in T_x M$ stellen: Wie berechnet man A aus seinen Skalarprodukten $\langle A, \phi_k \rangle$? Dazu brauchen wir die Umkehrmatrix der Matrix (g_{ij}) ; wir bezeichnen diese mit (g^{ij}) . Es gilt also

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases}$$

Dann gilt

$$(8) \quad A = \langle A, \phi_k \rangle g^{kl} \phi_l$$

denn das Skalarprodukt der rechten Seite mit ϕ_i ergibt $\langle A, \phi_i \rangle$:

$$\langle \langle A, \phi_k \rangle g^{kl} \phi_l, \phi_i \rangle = \langle A, \phi_k \rangle g^{kl} g_{li} = \langle A, \phi_k \rangle \delta_i^k = \langle A, \phi_i \rangle,$$

womit die beiden Seiten von (8) das gleiche Skalarprodukt mit allen Basiselementen ϕ_i haben und daher gleich sind. Insbesondere sehen wir also:

$$(9) \quad \begin{aligned} (\phi_{ij})^T &= \Gamma_{ij}^l \phi_l, \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

5. AXIOME FÜR DIE TANGENTIALE ABLEITUNG

In Hinblick auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten werden wir für die tangentielle Ableitung $(\phi_{ij})^T$ von ϕ_i eine neue Bezeichnung einführen:

$$(10) \quad \nabla_j \phi_i := (\phi_{ij})^T.$$

Für den Satz, dass dies eine Größe der inneren Geometrie ist und mit (9) berechnet werden kann, haben wir nur die folgenden zwei Eigenschaften verwendet:

$$(11) \quad \nabla_j \phi_i = \nabla_i \phi_j,$$

$$(12) \quad \partial_k g_{ij} = \langle \nabla_k \phi_i, \phi_j \rangle + \langle \phi_i, \nabla_k \phi_j \rangle.$$

Lemma 5.1. *Diese Gleichungen sind sogar äquivalent zu (9) oder zu (5), d.h. zu*

$$(13) \quad 2\langle \nabla_i \phi_j, \phi_k \rangle = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Beweis. Die rechte Seite von (13) zeigt (11), d.h. die Symmetrie in i, j , und

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_k \phi_i, \phi_j \rangle + 2\langle \nabla_k \phi_j, \phi_i \rangle &= \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki} \\ &\quad + \partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj} \\ &= 2\partial_k g_{ij}, \end{aligned}$$

womit auch (12) gezeigt ist.

Die Beschreibung der tangentialen Ableitung durch (11) und (12) hat allerdings den Schönheitsfehler, auf den Bereich einer lokalen Parametrisierung beschränkt zu sein. Wir können das ändern, indem wir von den Basisvektorfeldern ϕ_i zu beliebigen Vektorfeldern A übergehen. Diese sind zwar lokal mit Hilfe der Basis darstellbar, $A = a^i \phi_i$, aber sie sind unabhängig vom Koordinatensystem definiert. Wir setzen dann für zwei Vektorfelder A und B auf M

$$\begin{aligned} \nabla_A B &:= (\partial_A B)^T = a^i \nabla_i B = a^i \nabla_i (b^j \phi_j) \\ (14) \quad &= a^i (\partial_i b^j) \phi_j + a^i b^j \nabla_i \phi_j, \end{aligned}$$

wobei $\partial_A = a^i \partial_i$ die *Richtungsableitung* in Richtung von A bezeichnet. Wir müssen nun die beiden Eigenschaften (11) und (12) in diese neue Sprache übersetzen. Für die zweite Eigenschaft (12) ist das einfach:

$$(15) \quad \partial_A \langle B, C \rangle = \langle \nabla_A B, C \rangle + \langle B, \nabla_A C \rangle.$$

Mit (11) haben wir etwas mehr Mühe: Aus der Symmetrie von $\nabla_i \phi_j$ folgt nicht einfach die Symmetrie von $\nabla_A B$, denn nur der zweite Term in (14) ist symmetrisch. Vielmehr erhalten wir

$$\nabla_A B - \nabla_B A = (a^i (\partial_i b^j) - b^i (\partial_i a^j)) \phi_j.$$

Die rechte Seite ist der Koordinatenausdruck eines neuen Vektorfeldes, der *Lieklammer* $[A, B]$, das wir gleich näher betrachten wollen. Wir erhalten also

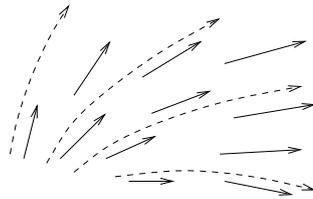
$$(16) \quad \nabla_A B - \nabla_B A = [A, B].$$

6. LIEKLAMMERN UND FLÜSSE

Um die Lieklammer von Vektorfeldern geometrisch⁹ zu verstehen, benötigen wir den Begriff des *Flusses* eines Vektorfeldes. Es genügt, Vektorfelder A auf $U \subset \mathbb{R}^n$ zu betrachten.¹⁰ Jedes Vektorfeld $A : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert eine autonome gewöhnliche Differentialgleichung

$$(17) \quad u' = A(u),$$

deren Lösungskurven $u(t)$ überall den Pfeilen des Vektorfeldes A folgen.



Sie definieren insgesamt eine lokal definierte Schar von Diffeomorphismen α^t auf U : Ist $u(t)$ die Lösungskurve von (17) mit Anfangswert $u(0) = u_o$, so setzen wir $\alpha^t(u_o) = u(t)$. Die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten sagt, dass die Abbildung α^t differenzierbar ist, und die Autonomie der Differentialgleichung (rechte Seite nicht explizit von t abhängig) impliziert

$$(18) \quad \alpha^t \circ \alpha^s = \alpha^{t+s}, \quad (\alpha^t)^{-1} = \alpha^{-t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wo immer beide Seiten der Gleichung definiert sind.

⁹Man kann die Differentialgeometrie auch ganz algebraisch auffassen: Eine Mannigfaltigkeit ist ein "geringter Raum", ein topologischer Raum M zusammen mit einem Ring \mathcal{F} , dem Ring der C^∞ -Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Eine *Derivation* des Ringes \mathcal{F} ist eine Abbildung $\delta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ mit $\delta(f+g) = \delta f + \delta g$ und $\delta(fg) = (\delta f)g + f\delta g$ wie bei der Produktregel der Differentiation. Jedes Vektorfeld A auf M definiert deshalb eine Derivation $\delta = \partial_A$, die Richtungsableitung in Richtung A , und man kann zeigen, dass jede Derivation so entsteht; Vektorfelder und Derivationen des Ringes \mathcal{F} sind also dasselbe. Statt $\partial_A f$ schreibt man daher oft einfach Af , womit man das Vektorfeld A direkt als Derivation auffasst. Es ist nun leicht zu sehen, dass der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ von zwei Derivationen A, B wieder eine Derivation ist, denn $AB(fg) = A((Bf)g + f(Bg)) = (ABf)g + (Bf)(Ag) + (Af)(Bg) + f(ABg)$, und die beiden mittleren Terme heben sich in der Differenz $AB(fg) - BA(fg)$ offensichtlich auf. Die Lieklammer ist in dieser Auffassung einfach der Kommutator der Derivationen. – Man kann den kommutativen Ring \mathcal{F} durch einen nichtkommutativen ersetzen; das ist "nichtkommutative Differentialgeometrie".

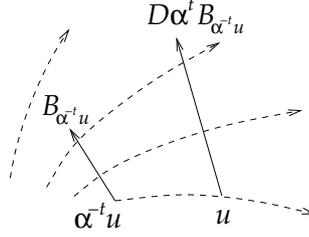
¹⁰Konsequenterweise müssten wir das Vektorfeld auf dem Parameterbereich U mit a statt A bezeichnen, verzichten aber im Interesse der Deutlichkeit der Notation darauf. Aus ähnlichen Gründen schreiben wir A_u statt $A(u)$. In Zukunft werden wir eher die Vektorfelder mit Großbuchstaben, die Vektoren mit Kleinbuchstaben bezeichnen.

Ist nun A ein Vektorfeld auf U , so überträgt ein Diffeomorphismus $\alpha : U \rightarrow \tilde{U}$ das Vektorfeld A auf ein Vektorfeld $\tilde{A} = \alpha_* A$, das auf \tilde{U} definiert ist, nämlich

$$\tilde{A}_{\alpha(u)} = D\alpha_u A_u, \quad \tilde{A} \circ \alpha = D\alpha \circ A.$$

Satz 6.1.

$$(19) \quad [B, A] =: -L_A B = \left. \frac{d}{dt} \alpha_*^t B \right|_{t=0}.$$



Beweis. Die Flüsse von A und B seien α^t und β^s . Wir setzen $\delta_t := \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0}$ und entsprechend $\delta_s := \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} -(L_A B)_u &= \delta_t (\alpha_*^t B)_u \\ &= \delta_t D\alpha^t \cdot B_{\alpha^{-t}u} \\ &= \delta_t \delta_s \alpha^t \beta^s \alpha^{-t} u \\ &= \delta_s A_{\beta^s u} + \delta_s \delta_t \beta^s \alpha^{-t} u \\ &= (\partial_B A)_u + \delta_t B_{\alpha^{-t}u} \\ &= (\partial_B A - \partial_A B)_u \\ &= [B, A]_u \end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir für B die Ableitung seiner Integralkurve eingesetzt und die Kettenregel angewandt. In der vierten Zeile haben wir δ_t und δ_s vertauscht; weil t an zwei Stellen vorkommt, erhalten wir zwei Terme. In der fünften Zeile wurden die Ableitungen im zweiten Term zurückgetauscht; die Anwendung von δ_s ergibt $B_{\alpha^{-t}u}$. \square

Der Operator L_A heißt *Lie-Ableitung* in Richtung von A . Der Satz zeigt, welchen Vektor $[A, B]_u$ darstellt. Er zeigt aber noch mehr: Ein Diffeomorphismus $\rho : U \rightarrow \tilde{U}$ bildet die Integralkurven von A auf die Integralkurven von $\tilde{A} = \alpha_* A$ ab, also den Fluss von A auf den Fluss von \tilde{A} :

$$\rho \circ \alpha^t = \tilde{\alpha}^t \circ \rho.$$

Damit werden nach dem voranstehenden Satz auch die Lieableitungen aufeinander abgebildet, es gilt also für zwei Vektorfelder A, B auf U :

$$[\rho_* A, \rho_* B] = \rho_* [A, B].$$

Insbesondere hängt die Lieklammer für Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit nicht von der Wahl der lokalen Parametrisierung ab, denn zwei Parametrisierungen von $M \cap V$ unterscheiden sich um einen Diffeomorphismus der Definitionsbereiche.

Es ist nützlich, diese Aussagen in einem etwas allgemeineren Rahmen zu beweisen. Es seien A, \tilde{A} Vektorfelder auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^d$ für beliebige n, d , und $\rho : U \rightarrow V$ sei eine differenzierbare Abbildung. Die beiden Vektorfelder A und \tilde{A} nennen wir ρ -*verwandt*, wenn gilt:

$$(20) \quad D\rho \circ A = \tilde{A} \circ \rho.$$

Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn ρ ein Diffeomorphismus ist ($d = n$) und $\tilde{A} = \rho_* A$, aber jetzt ist die Situation allgemeiner: ρ braucht nicht mehr invertierbar zu sein. Auch in diesem Fall bildet ρ die Integralkurven von A auf die von \tilde{A} ab: Ist $u(t)$ die Lösung von $u' = A_u$ mit $u(0) = u_o$ dann ist $\tilde{u}(t) = \rho(u(t))$ die Lösung von $\tilde{u}' = \tilde{A}_{\tilde{u}}$ mit $\tilde{u}(0) = \rho(u_o)$, denn

$$\tilde{u}' = (\rho \circ u)' = D\rho_u u' = D\rho_u A_u \stackrel{(20)}{=} \tilde{A}_{\rho(u)} = \tilde{A}_{\tilde{u}}.$$

Mit den Bezeichnungen α^t und $\tilde{\alpha}^t$ für die Flüsse von A und \tilde{A} ist $u(t) = \alpha^t(u_o)$ und $\tilde{u}(t) = \tilde{\alpha}^t(\rho(u_o))$, somit $\rho(\alpha^t(u_o)) = \tilde{\alpha}^t(\rho(u_o))$, und damit

$$(21) \quad \rho \circ \alpha^t = \tilde{\alpha}^t \circ \rho.$$

Da die Lieklammer von zwei Vektorfeldern durch die Flüsse beschrieben werden können, vererbt sich die ρ -Verwandtschaft auf die Lieklammer:

Satz 6.2. *Es sei $\rho : U \rightarrow V$ eine differenzierbare Abbildung. Sind Vektorfelder A, B auf U ρ -verwandt zu Vektorfeldern \tilde{A}, \tilde{B} auf W , so ist auch $[A, B]$ ρ -verwandt zu $[\tilde{A}, \tilde{B}]$.*

Beweis. Im Beweis von Satz 6.1 haben wir folgende Gleichung erhalten:

$$(22) \quad [A, B]_u = -\delta_t \delta_s \alpha^t \beta^s \alpha^{-t} u.$$

Für jedes t betrachten wir die Kurve $u_t(s) = \alpha^t \beta^s \alpha^{-t} u$ mit $u_t(0) = u$ für alle t und setzen $u'_t(0) = \delta_s u_t(s) =: b_t$. Die Matrix $D\rho_u$ ist nicht von t abhängig und vertauscht deshalb mit δ_t . Andererseits ist b_t für festes t der Anfangsvektor der Kurve $s \mapsto u_t(s)$, deshalb gilt $D\rho_u b_t = (\rho \circ u_t)'(0) = \delta^s \rho(u_t(s))$, insgesamt also

$$D\rho_u \delta_t b_t = \delta_t D\rho_u b_t = \delta_t D\rho_u \delta_s u_t(s) = \delta_t \delta_s \rho(u_t(s)).$$

Wenden wir (21) auf α^t und β^s an, so erhalten wir

$$\rho(u^t(s)) = \rho \alpha^t \beta^s \alpha^{-t} u = \tilde{\alpha}^t \rho \beta^s \alpha^{-t} u = \tilde{\alpha}^t \tilde{\beta}^s \rho \alpha^{-t} u = \tilde{\alpha}^t \tilde{\beta}^s \tilde{\alpha}^{-t} \rho u.$$

Setzen wir beides zusammen, folgt mit (22) die Behauptung:

$$D\rho_u[A, B]_u = -\delta_t\delta_s\tilde{\alpha}^t\tilde{\beta}^s\tilde{\alpha}^{-t}\rho u = [\tilde{A}, \tilde{B}]_{\rho(u)}. \quad \square$$

Als Anwendung erhalten wir, dass die Lieklammer von tangentialen Vektorfeldern auf einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^d$ gleichermaßen durch die Lieklammer der Fortsetzungen auf einer offene Menge des \mathbb{R}^d als auch durch die entsprechenden Vektorfelder in einer Parametrisierung gewonnen werden kann:

Satz 6.3. *Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit und A, B (tangente) Vektorfelder auf M . In einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^d$ gebe es differenzierbare Fortsetzungen $\tilde{A}, \tilde{B} : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ von A, B , d.h. $\tilde{A} = A$ und $\tilde{B} = B$ auf $M \cap V$. Mit einer Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M \cap V$ werden A, B zu Vektorfeldern A°, B° auf U , d.h. $A_{\phi(u)} = D\phi_u A_u^\circ$ und $B_{\phi(u)} = D\phi_u B_u^\circ$. Dann gilt für alle $u \in U$:*

$$(23) \quad [\tilde{A}, \tilde{B}]_{\phi(u)} = D\phi_u[A^\circ, B^\circ]_u.$$

Insbesondere ist $[\tilde{A}, \tilde{B}]$ auf $M \cap V$ eingeschränkt ein tangentes Vektorfeld.

Beweis. Die Vektorfelder \tilde{A} und \tilde{B} sind ϕ -verwandt zu A° und B° . \square

7. RIEMANNSCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Nun sei M eine (abstrakte) n -dimensionale *Mannigfaltigkeit*.¹¹ Wir werden uns darunter weiterhin eine Untermannigfaltigkeit vorstellen, denn nach einem einfach zu beweisenden Satz von Whitney lässt sich jede Mannigfaltigkeit als Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^d darstellen; wir vergessen aber den umliegenden Raum und machen keinen Gebrauch davon.¹²

¹¹“Offiziell” ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit ein parakompakter Topologischer Raum mit Hausdorff-Eigenschaft, der lokal zum \mathbb{R}^n homöomorph ist, und je zwei dieser lokalen Homöomorphismen, eingeschränkt auf den Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche, unterscheiden sich um einen Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen des \mathbb{R}^n .

¹²Eigentlich hat der Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit eine andere Quelle: es sind maximale Definitionsbereiche. Eine holomorphe Funktion zum Beispiel ist als Potenzreihe zunächst auf einem Kreis definiert, aber wie weit lässt sich fortsetzen, was ist ihr maximaler Definitionsbereich? Stellt man diese Frage z.B. für die Funktion $f(z) = \sqrt{z}$, so muss man entweder die Ebene aufschlitzen – aber das ist rein künstlich – oder aber erweitern: Um die Mehrdeutigkeit der Wurzelfunktion ($\pm\sqrt{z}$) aufzuheben, verklebt man zwei geschlitzte Ebenen miteinander; erst nach zwei Umläufen erreicht man wieder den Ausgangspunkt. Diese erweiterte Ebene ist eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, eine *Riemannsche Fläche*. Es ist typisch, dass sich analytische Objekte ihren Definitionsbereich selbst suchen. Minimalflächen sind

Eine *Riemannsche Metrik* auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Skalarprodukt¹³ $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ auf jedem Tangentialraum $T_x M$, das in folgendem Sinn differenzierbar von x abhängt: Ist $\phi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung von M , so sind die Funktionen

$$(24) \quad u \mapsto g_{ij}(u) = \langle \phi_i(u), \phi_j(u) \rangle_{\phi(u)}$$

differenzierbar auf U . Eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer Riemannschen Metrik g heißt *Riemannsche Mannigfaltigkeit*. Zwar stellen wir uns die Mannigfaltigkeit M weiterhin als Untermannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^d vor, aber ist die Riemannsche Metrik g ist gewöhnlich nicht mehr das vom umgebenden Raum \mathbb{R}^d induzierte Skalarprodukt, sondern ein neues, das nur auf den Tangentialräumen von M definiertes ist. Im einfachsten Fall ist $M = U$ eine zusammenhängende offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und $g_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$ eine Familie von differenzierbaren Funktionen, die an jeder Stelle $u \in U$ eine symmetrische positiv definite Matrix $g(u) = (g_{ij}(u))$ bilden. Lokal sieht jede Riemannsche Mannigfaltigkeit so aus, im folgenden Sinn.

Eine *Isometrie* zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) und (\tilde{M}, \tilde{g}) ist ein Diffeomorphismus $\alpha : M \rightarrow \tilde{M}$ mit

$$(25) \quad \tilde{g}_{\alpha(x)}(D\alpha_x a, D\alpha_x b) = g_x(a, b)$$

für alle $a, b \in T_x M$ und alle $x \in M$. Isometrien sind sozusagen die Isomorphismen in der Theorie Riemannscher Mannigfaltigkeiten; sie erhalten alles, was durch die Riemannsche Metrik und ihre Ableitungen ausgedrückt wird; das ist die gesamte Riemannsche Geometrie. Jede lokale Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M_o = M \cap V$ ist eine Isometrie, wobei wir auf U nicht das gewöhnliche Skalarprodukt des \mathbb{R}^n , sondern das variable Skalarprodukt (24) wählen. Deshalb ist $(U, (g_{ij}))$ lokal das universelle Beispiel Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Wir können uns

ein anderes Beispiel (sie haben im Kleinen minimalen Flächeninhalt bei gegebener Randkurve); wie ihre globale Struktur aussieht, wird von ihnen selbst bestimmt, und jedes kleinste Stück der Fläche trägt den "genetischen Code" für die globale Fläche in sich. Ein drittes Beispiel sind die analytischen Raum-Zeit-Metriken der Allgemeinen Relativitätstheorie: Sie können zunächst auf einem kleinen offenen Gebiet des \mathbb{R}^4 definiert sein, aber bei maximaler analytischer Fortsetzung zwingen sie die zugrundeliegende Raum-Zeit dazu, eine Mannigfaltigkeit zu werden, die keine offene Teilmenge der \mathbb{R}^4 mehr ist.

¹³Ein *Skalarprodukt* auf einem Vektorraum V ist eine symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$. "Nicht ausgeartet" (engl. non-degenerate) bedeutet [$\langle a, b \rangle = 0 \forall b \in V \Rightarrow a = 0$]. Meist werden wir die stärkere Eigenschaft "positiv definit" voraussetzen: d.h. $\langle a, a \rangle > 0$ für alle $a \neq 0$, aber gerade in der Relativitätstheorie gilt diese nicht: Das Skalarprodukt dort ist isomorph zum Lorentz-Minkowski-Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_L = \sum_{i=1}^3 x_i y_i - x_4 y_4$

ganz M aus solchen offenen Teilmengen U mit Metrik g zusammengeklebt denken, wobei die Klebefunktionen $\alpha : U \rightarrow \tilde{U}$ Isometrien bezüglich g und \tilde{g} sind.

8. KOVARIANTE ABLEITUNGEN

Wie können wir ein Vektorfeld A auf einer Mannigfaltigkeit M differenzieren? Lokal können wir $A = a^i \phi_i$ schreiben; wir könnten einfach die Koeffizientenfunktionen a^i differenzieren. Aber dann müssten wir die ϕ_i als “konstant” ansehen, was ziemlich willkürlich ist und in einer anderen Parametrisierung $A = \tilde{a}^j \tilde{\phi}_j$ nicht beibehalten werden kann, denn falls $\tilde{\phi} = \alpha \circ \phi$, so ist

$$(26) \quad \tilde{\phi}_j = \partial_j \alpha^i \phi_i.$$

Selbst wenn ϕ_i konstant wäre, könnte es doch $\tilde{\phi}_j$ nicht sein, weil $\partial_j \alpha^i$ nicht konstant ist. Es ist also keine gute Idee, einfach nur die Koeffizienten zu differenzieren; eine solche Regel kann nicht auf alle Parametrisierungen angewandt werden, sie ist nicht *kovariant*. Wir wünschen uns eine Differentiation, die Vektorfelder in Vektorfelder überführt, eine *kovariante* Differentiation:

Definition: Mit \mathcal{V} bezeichnen wir die Menge der Vektorfelder auf M . Eine *kovariante Ableitung* oder ein *Zusammenhang*¹⁴ auf M ist eine \mathbb{R} -bilineare Abbildung $\nabla : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$(Z) \quad \begin{aligned} \nabla_{fA} B &= f \nabla_A B \\ \nabla_A f B &= (\partial_A f) B + f \nabla_A B \end{aligned}$$

für alle $A, B \in \mathcal{V}$ und $f \in \mathcal{F} = C^\infty(M)$.

Dies ist eine kurze Definition, aber sie benutzt global definierte Vektorfelder. Ableitungen sollten jedoch “lokal” sein, d.h. $(\nabla_A B)_x$ sollte nur von den Werten von A und B in einer beliebig kleinen Umgebung V von x abhängig sein, unabhängig davon, ob und wie A und B auf $M \setminus V$ definiert sind. Dies folgt tatsächlich. Wir benötigen dazu eine C^∞ -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = 0$ auf $M \setminus V$ und $f = 1$ auf einer noch kleineren Umgebung $V_o \subset V$.¹⁵ Setzen wir nun $\tilde{A} = fA$ und $\tilde{B} = fB$,

¹⁴Das Wort “Zusammenhang” (engl. “connection”) meint, dass die Tangentialräume in verschiedenen Punkten nicht mehr von einander isoliert sind, sondern verbunden; die Differentiation von Vektorfeldern benutzt ja Differenzen von Vektoren in verschiedenen Tangentialräumen. Vgl. *Parallelverschiebung* weiter unten.

¹⁵Wir können eine solche Funktion in Koordinaten angeben: $f(u) = \rho(|u|)$. Dabei ist $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ -Funktion mit $\rho(t) = 1$ für $t \leq \epsilon$ und $\rho(t) = 0$ für $t \geq 2\epsilon$. Eine solche Funktion baut man wie folgt: Es sei $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die C^∞ -Funktion mit $\alpha(t) = 0$ für $t \leq 0$ und $\alpha(t) = e^{-1/t}$ für $t > 0$. Dann ist die Funktion $\beta(t) = \alpha(t^2 - t)$ positiv auf dem Intervall $(0, 1)$ und sonst gleich Null. Ihre Stammfunktion $B(t) =$

dann folgt mit (Z):

$$\nabla_A B = \nabla_{\tilde{A}} B = \nabla_A \tilde{B} = \nabla_{\tilde{A}} \tilde{B} \quad \text{auf } V_o$$

weil $f = 1$ und $\partial_A f = 0$ auf V_o . Selbst wenn A und B nur auf V definiert sind, können wir $\tilde{A} = fA$ und $\tilde{B} = fB$ zu C^∞ -Vektorfeldern auf ganz M fortsetzen, indem wir sie auf $M \setminus V$ gleich Null setzen. Damit können wir auch für solche Vektorfelder die kovariante Ableitung erklären: $\nabla_A B := \nabla_{\tilde{A}} \tilde{B}$ on V_o . Damit können wir jede kovariante Ableitung auch lokal in Koordinaten ausdrücken.

Kovariante Ableitungen sind nicht eindeutig bestimmt. Die Differenz von zwei kovarianten Ableitungen $S = \tilde{\nabla} - \nabla$ ist ebenfalls eine \mathbb{R} -bilineare Abbildung $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, die im ersten Argument immer noch \mathcal{F} -linear ist, aber nun auch im zweiten Argument: Da

$$S_A(fB) = \tilde{\nabla}_A(fB) - \nabla_A(fB) = f\tilde{\nabla}_A B - f\nabla_A B = fS_A B,$$

denn der erste Term in der zweiten Gleichung von (Z) ist für $\tilde{\nabla}$ und ∇ derselbe und hebt sich daher weg. Umgekehrt können wir zu ∇ eine beliebige derartige Abbildung S addieren und erhalten eine zweite kovariante Ableitung $\tilde{\nabla} = \nabla + S$. Eine solche Abbildung S nennt man einen *Tensor*; zwei kovariante Ableitungen unterscheiden sich also um einen Tensor, ihren *Differenztensor*.

Allgemeiner ist ein *Tensor* eine \mathcal{F} -multilineare Abbildung von $\mathcal{V} \times \dots \times \mathcal{V}$ nach \mathcal{V} oder nach \mathcal{F} . Tensoren sind die einfachsten Objekte der Differentialgeometrie, denn sie sind "punktweise bestimmt": Ist z.B. $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ein Tensor, also \mathcal{F} -linear, dann hängt $T(A)_x$ nur von A_x und nicht von den sonstigen Werten von A ab. Ist nämlich $A = a^i \phi_i$ in lokalen Parametern, dann ist $T(A) = a^i T \phi_i$, und wenn zwei Vektorfelder $A = a^i \phi_i$ und $\tilde{A} = \tilde{a}^i \phi_i$ an einer Stelle x übereinstimmen, dann ist $a^i(x) = \tilde{a}^i(x)$ und damit $T(\tilde{A})_x = T(A)_x$. Ein solcher Tensor kann also einfach als eine lineare (oder multilineare) Abbildung auf jedem Tangentialraum angesehen werden. Auch eine Riemannsche Metrik ist ein Tensor $g : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$; eine kovariante Ableitung ∇ dagegen ist kein Tensor, wie das zweite Gesetz in (Z) zeigt.

Für *Riemannsche* Mannigfaltigkeiten gibt es unter den kovarianten Ableitungen eine ausgezeichnete, die der tangentialen Ableitung bei Untermannigfaltigkeiten entspricht, vgl. (15), (16). Sie wurde von

$\int_0^t \beta(\tau) d\tau$ ist also Null auf $(-\infty, 0]$, streng monoton steigend auf $[0, 1]$ und dann konstant: $B = B(1)$ auf $[1, \infty)$. Wir setzen $\gamma = B/B(1)$. Dann hat $\rho(t) = \gamma(2 - \frac{t}{\epsilon})$ die gewünschte Eigenschaft.

Tullio Levi-Civita eingeführt¹⁶ und wird zu seinen Ehren *Levi-Civita-Ableitung* benannt:

Satz 8.1. *Auf jeder Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik $g = \langle , \rangle$ gibt es genau eine kovariante Ableitung ∇ mit*

$$(L) \quad \begin{aligned} \nabla_A B - \nabla_B A &= [A, B], \\ \partial_A \langle B, C \rangle &= \langle \nabla_A B, C \rangle + \langle B, \nabla_A C \rangle. \end{aligned}$$

Eine Zusammenhang ∇ , der die erste Gleichung in (L) erfüllt, heißt *torsionsfrei*,¹⁷ und wenn er die zweite Gleichung erfüllt, nennt man ihn *metrisch*.

Beweis. Den Beweis dieses Satzes haben wir weitgehend bereits in Lemma 5.1 erbracht: In einer Parametrisierung geschrieben lautet (L) ja

$$(L_\phi) \quad \begin{aligned} \nabla_i \phi_j &= \nabla_j \phi_i, \\ \partial_i g_{jk} &= \langle \nabla_i \phi_j, \phi_k \rangle + \langle \phi_j, \nabla_i \phi_k \rangle, \end{aligned}$$

was nach Lemma 5.1 äquivalent ist zu

$$(27) \quad \begin{aligned} \nabla_i \phi_j &= \Gamma_{ij}^l \phi_l, \\ \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}). \end{aligned}$$

Für $A = a^i \phi_i$ und $B = b^j \phi_j$ gilt nach (Z):

$$(28) \quad \nabla_A B = a^i ((\partial_i b^j) \phi_j + b^j \nabla_i \phi_j),$$

womit die lokale Existenz und Eindeutigkeit von $\nabla_A B$ gezeigt ist. Weil wir die definierende Gleichung (L) nicht in lokalen Parametern formuliert haben, gewinnen wir aus der Eindeutigkeit, dass die Formeln (28), (27) in jeder Parametrisierung das gleiche Objekt beschreiben. \square

9. DER KRÜMMUNGSTENSOR

Die Axiome (Z) einer kovarianten Ableitungen drücken einfach die Grundeigenschaften der Richtungsableitung aus, die wir auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ kennen. Wenn dort eine kovariante Ableitung ∇ gegeben ist, dann können wir diese mit der gewöhnlichen Richtungsableitung ∂ vergleichen; die Differenz ist bekanntlich ein Tensor, den wir hier Γ nennen:

$$(29) \quad \nabla = \partial + \Gamma, \quad \nabla_i = \partial_i + \Gamma_i$$

¹⁶Levi-Civita, Tullio, "Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana", Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917), 73 - 205

¹⁷Die Abbildung $T : (A, B) \mapsto \nabla_A B - \nabla_B A - [A, B]$ heißt auch *Torsion* eines Zusammenhang ∇ . Da in lokalen Koordinaten $[A, B] = \partial_A B - \partial_B A$, ist T die Antisymmetrisierung des Tensors $\Gamma = \nabla - \partial$, d.h. $T(A, B) = \Gamma_A B - \Gamma_B A$; insbesondere ist T ein Tensor.

wobei jedes Γ_i eine (noch von $u \in U$ abhängige) Matrix $((\Gamma_i^k_j)) = (\Gamma_{ij}^k)$ ist. Das ist eine andere Interpretation von (28), die wir ja auch als eine Formel auf U interpretieren können, wenn wir die ϕ_j durch die kanonischen Einheitsvektoren e_j ersetzen:

$$(30) \quad \nabla_A B = a^i \partial_i b^j e_j + a^i b^j \nabla_i e_j = \partial_A B + \Gamma_A B$$

mit $\Gamma_A = a^i \Gamma_i$.

Es gibt aber einen wichtigen Unterschied zwischen der speziellen Richtungsableitung ∂ und einer anderen kovarianten Ableitung $\nabla = \partial + \Gamma$: Die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ überträgt sich nicht auf ∇ , d.h. $[\nabla_i, \nabla_j] = \nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i$ ist nicht Null:

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j A &= (\partial_i + \Gamma_i)(\partial_j + \Gamma_j)A \\ &= \partial_i \partial_j A + \partial_i \Gamma_j A + \Gamma_i \partial_j A + \Gamma_i \Gamma_j A \\ &= \partial_i \partial_j A + (\partial_i \Gamma_j)A + \Gamma_j \partial_i A + \Gamma_i \partial_j A + \Gamma_i \Gamma_j A \\ [\nabla_i, \nabla_j]A &= (\partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + [\Gamma_i, \Gamma_j])A \end{aligned}$$

In der vorletzten Zeile kommen noch zweite und erste Ableitungen von A vor, $\partial_i \partial_j A$ und $\Gamma_j \partial_i A + \Gamma_i \partial_j A$. Da diese Ausdrücke aber symmetrisch in i, j sind, entfallen sie beim Antisymmetrisieren; die letzte Zeile enthält daher keine Ableitung von A . Somit bleibt etwas von der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen übrig: $[\nabla_i, \nabla_j]$ ist zwar nicht Null, aber ein *Tensor*, eine differenzierbar von $u \in U$ abhängige Matrix. Dies ist der *Krümmungstensor* des Zusammenhangs $\nabla = \partial + \Gamma$ auf U :

$$(31) \quad R_{ij} := [\nabla_i, \nabla_j] = \partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i + [\Gamma_i, \Gamma_j].$$

Entsprechend definiert man für beliebige Vektorfelder $A = a^i \phi_i$ und $B = b^j \phi_j$:

$$R_{AB} = a^i b^j R_{ij}.$$

Das ist beinahe der Kommutator von ∇_A und ∇_B , aber es fehlt ein Lieklammer-Term:

$$\begin{aligned} \nabla_A \nabla_B &= a^i \nabla_i (b^j \nabla_j) \\ &= a^i (\partial_i b^j) \nabla_j + a^i b^j \nabla_i \nabla_j \\ [\nabla_A, \nabla_B] &= \nabla_{[A, B]} + R_{AB} \end{aligned}$$

und damit

$$(32) \quad R_{AB} = [\nabla_A, \nabla_B] - \nabla_{[A, B]}.$$

Für feste Vektorfelder A, B ist R_{AB} eine \mathcal{F} -lineare Abbildung $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ und definiert damit einen Tensor $R : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, eine Art von *Tripelprodukt*¹⁸ auf jedem Tangentialraum $T_x M$.

10. KRÜMMUNGSIDENTITÄTEN

Der Krümmungstensor einer kovarianten Ableitung auf M ist ein kompliziertes algebraisches Objekt, aber es erfüllt einige Identitäten, die einem das Leben erleichtern. Zunächst sieht man sofort aus der Definition als Kommutator

$$(33) \quad R_{ij} = -R_{ji}.$$

Die beiden Zusatzeigenschaften (L) der Levi-Civita-Ableitung haben weitere Identitäten zur Folge:

Lemma 10.1. *Ist ∇ torsionsfrei, d.h. $\nabla_i \phi_j = \nabla_j \phi_i$, dann gilt für $R_{ijk} := R_{ij} \phi_k$ die sog. Bianchi-Identität¹⁹*

$$(34) \quad R_{ijk} + R_{jki} + R_{kij} = 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R_{ijk} + R_{jki} + R_{kij} &= \nabla_i \nabla_j \phi_k - \nabla_j \nabla_i \phi_k \\ &\quad + \nabla_j \nabla_k \phi_i - \nabla_k \nabla_j \phi_i \\ &\quad + \nabla_k \nabla_i \phi_j - \nabla_i \nabla_k \phi_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lemma 10.2. *Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ metrisch, d.h. $\partial_i \langle A, B \rangle = \langle \nabla_i A, B \rangle + \langle A, \nabla_i B \rangle$, dann gilt*

$$(35) \quad \langle R_{ij} A, B \rangle = -\langle R_{ij} B, A \rangle$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial_j \langle A, B \rangle &= \langle \nabla_j A, B \rangle + \langle A, \nabla_j B \rangle \\ \partial_i \partial_j \langle A, B \rangle &= \langle \nabla_i \nabla_j A, B \rangle + \langle \nabla_i A, \nabla_j B \rangle \\ &\quad + \langle \nabla_j A, \nabla_i B \rangle + \langle A, \nabla_i \nabla_j B \rangle \\ 0 = (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \langle A, B \rangle &= \langle R_{ij} A, B \rangle + \langle A, R_{ij} B \rangle, \end{aligned}$$

denn die unterschlängelten Terme entfallen beim Antisymmetrisieren.

¹⁸Ein *Produkt* auf einem Vektorraum V ist eine bilineare Abbildung $V \times V \rightarrow V$. Ein *Tripelprodukt* auf V ist eine trilineare Abbildung $V \times V \times V \rightarrow V$.

¹⁹Luigi Bianchi, 1856 (Parma) - 1928 (Pisa)

Lemma 10.3. *Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ die Levi-Civita-Ableitung (torsionsfrei und metrisch), so gilt für $R_{ijkl} := \langle R_{ij}\phi_k, \phi_l \rangle$ die blockweise Vertauschung*

$$(36) \quad R_{ijkl} = R_{klij}$$

Beweis. Wir schreiben kurz $ij|kl$ für R_{ijkl} . Wir wissen schon, dass dieser Ausdruck in beiden Blöcken antisymmetrisch ist, insbesondere gilt $ij|kl = ji|lk$. Um $ij|kl = kl|ij$ zu zeigen, bilden wir die Differenz dieser Terme und auch der umgestellten, $ji|lk - lk|ji$, und wenden jedesmal die Bianchi-Identität (34) an:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{array}{cccc} ij|kl & ji|lk & kl|ij & lk|ji \\ + (jk|il) & + \langle il|jk \rangle & + \langle li|kj \rangle & + (kj|li) \\ + [ki|jl] & + \{lj|ik\} & + [ik|lj] & + \{jl|ki\} \end{array} \\ &= 2(ij|kl - kl|ij) \end{aligned}$$

□

Schließlich gibt es noch eine *Zweite Bianchi-Identität*, die für Einstein eine große Rolle gespielt hat. Sie betrifft aber nicht R selbst, sondern seine Ableitung ∇R . Dazu müssen wir zunächst die kovariante Ableitung eines Tensorfeldes $R : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ einführen. Die Idee dabei ist, dass die Anwendung von R auf seine Argumente wie ein Produkt behandelt wird:

$$\nabla_i R_{A,B}C = (\nabla_i R)_{A,B}C + R_{\nabla_i A, B}C + R_{A, \nabla_i B}C + R_{A, B} \nabla_i C,$$

woraus sich $\nabla_i R$ ergibt:

$$(37) \quad (\nabla_i R)_{A,B}C = \nabla_i R_{A,B}C - R_{\nabla_i A, B}C - R_{A, \nabla_i B}C - R_{A, B} \nabla_i C.$$

Lemma 10.4.

$$(38) \quad (\nabla_i R)_{jk} + (\nabla_j R)_{ki} + (\nabla_k R)_{ij} = 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (\nabla_i R)_{jk}A &= \nabla_i R_{jk}A - R_{jk} \nabla_i A - (R_{\nabla_i \phi_j, \phi_k} - R_{\phi_j, \nabla_i \phi_k}) A \\ (\nabla_i R)_{jk} &= [\nabla_i, R_{jk}] - (R_{\nabla_i \phi_j, \phi_k} + R_{\phi_j, \nabla_i \phi_k}) \end{aligned}$$

Der erste Term rechts, $[\nabla_i, R_{jk}] = [\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]]$, hat bereits die gewünschte Eigenschaft, da Kommutatoren die Jacobi-Identität erfüllen:

$$[\nabla_i, [\nabla_j, \nabla_k]] + [\nabla_j, [\nabla_k, \nabla_i]] + [\nabla_k, [\nabla_i, \nabla_j]] = 0.$$

Wir müssen das gleiche für den zweiten Term $(R_{\nabla_i \phi_j, \phi_k} + R_{\phi_j, \nabla_i \phi_k})$ zeigen. Mit der Abkürzung $ij|k := R_{\nabla_i \phi_j, \phi_k}$ gilt

$$R_{\nabla_i \phi_j, \phi_k} + R_{\phi_j, \nabla_i \phi_k} = ij|k - ik|j,$$

und die zyklische Summe dieser Terme verschwindet wegen der Symmetrie von $ij|k$ in ij ,

$$ij|k - ik|j + jk|i - ji|k + ki|j - kj|i = 0. \quad \square$$

11. SPURBILDUNGEN: RICCI- UND EINSTEINTENSOR, SKALARKRÜMMUNG

Der Riemannsche Krümmungstensor $R : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lässt sich durch Spurbildungen vereinfachen: Wenn zwei der drei Argumente fest eingesetzt werden, erhält man einen Tensor $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, d.h. eine lineare Abbildung auf jedem Tangentialraum, von dem man die Spur bilden kann (Summe der Diagonalelemente). Aber welche zwei der drei Argumente soll man einsetzen? Nicht die ersten beiden, denn R_{AB} ist antisymmetrisch, $\langle R_{AB}C, D \rangle = -\langle R_{AB}D, C \rangle$, und deshalb sind alle Diagonalelemente dieser Matrix Null. Also wird das zweite und dritte Argument eingesetzt (oder das erste und dritte, aber das macht wegen $R_{AB} = -R_{BA}$ nur ein Vorzeichen aus). Das ist der *Ricci-Tensor*:²⁰

$$(39) \quad Ric(A, B) = \text{Spur}(C \mapsto R_{CA}B), \quad Ric_{ij} = R_{kij}^k = R_{kijl}g^{kl}$$

Lemma 11.1. *Ric ist symmetrisch, $Ric(A, B) = Ric(B, A)$.*

Beweis. Blockvertauschung und Antisymmetrie innerhalb der Blöcke kehrt die Reihenfolge um:

$$Ric_{ij} = R_{kijl}g^{kl} = R_{ljik}g^{kl} = R_{ljjk}g^{lk} = Ric_{ji}. \quad \square$$

Der Ricci-Tensor, die Spur des Krümmungstensors, ist also eine symmetrische Bilinearform, ebenso so wie die Metrik g . Das wird für Einsteins Gleichungen eine große Rolle spielen. Im Spezialfall kann der Riccitenor proportional zur Metrik sein; solche Metriken nennt man heute *Einstein-Metriken*.

Wir können auch vom Riccitenor noch einmal die Spur bilden. Allerdings ist der Riccitenor eine Bilinearform auf jedem Tangentialraum, und Spuren kann man eigentlich nur von linearen Abbildungen (Endomorphismen) bilden. Eine Bilinearform ρ auf einem Vektorraum $V = T_xM$ kann aber auch als lineare Abbildung $V \rightarrow V^*$ aufgefasst werden, wobei $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ der Dualraum ist, der Raum der Linearformen; man setzt $\rho(v) = (w \mapsto \rho(v, w)) \in V^*$. Wenn wir V^* mit V identifizieren können, haben wir einen Endomorphismus von V . Eine solche Identifizierung wird durch eine zweite Bilinearform gegeben, die *nicht-entartet*, also ein Isomorphismus von V nach V^* sein soll; eine solche Bilinearform ist die Riemannsche Metrik $g : V \rightarrow V^*$. Als *Spur der*

²⁰Gregorio Ricci-Curbastro, 1853 Lugo (Ravenna) - 1925 (Bologna)

Bilinearform ρ bezüglich der Metrik g definieren wir die Spur des Endomorphismus $g^{-1}\rho : V \rightarrow V$, oder in Komponenten: $\text{Spur}_g \rho = g^{ij} \rho_{ij}$. Wenn man dies für den Riccitenor durchführt, erhält man eine Funktion auf M , die *Skalarkrümmung* s :

$$(40) \quad s = \text{Spur}_g(\text{Ric}) = \text{Ric}_{ij} g^{ij} = R_{kijl} g^{kl} g^{ij}$$

Die Skalarkrümmung ist eine sehr interessante Größe, weil sie eine klare topologische Bedeutung hat: kompakte Mannigfaltigkeiten, die eine Metrik mit durchweg positiver Skalarkrümmung tragen können, lassen sich rein topologisch kennzeichnen.

Als Einstein 1915 seine Allgemeine Relativitätstheorie formulierte, hatte er ein Problem. Die Grundidee “Massenverteilung = Krümmung” stand schon lange fest. Die Massenverteilung wurde von den Physikern durch eine symmetrischen Bilinearform T auf der Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit M beschreiben, den *Massetensor*. Was lag näher als auf der geometrischen Seite (“Krümmung”) den Riccitenor zu nehmen, der ja ebenfalls symmetrisch ist? Somit lautete Einsteins Gleichung zunächst $\text{Ric} = T$. Aber der Massetensor hat noch eine weitere Eigenschaft: Er ist divergenzfrei, ein Ausdruck der Erhaltung von Masse und Energie. Doch der Riccitenor hat nicht diese Eigenschaft, und deshalb konnte diese Gleichung noch nicht das letzte Wort sein!

Die *Divergenz eines Tensorfeldes* T ist die Spur von ∇T ,

$$(41) \quad (\text{Div } T)_j = (\nabla_m T)_{ij} g^{mi}$$

Also gilt insbesondere für $\text{Ric}_{ij} = R_{kijl} g^{kl}$:

$$\begin{aligned} (\text{Div } \text{Ric})_j &= \frac{(\nabla_m R)_{kijl} g^{kl} g^{mi}}{(\nabla_m R)_{j l k i} g^{kl} g^{mi}} \\ &\stackrel{(38)}{=} -(\nabla_j R)_{lmki} g^{kl} g^{mi} - (\nabla_l R)_{mjki} g^{kl} g^{mi} \\ &= \underline{(\nabla_j R)_{kiml} g^{kl} g^{mi}} - \underline{(\nabla_l R)_{ikjm} g^{im} g^{lk}} \end{aligned}$$

Die beiden unterstrichenen Ausdrücke sind bis auf das Vorzeichen identisch: Wenn wir die Indizes von ∇R mit 0, 1, 2, 3, 4 nummerieren, dann wird in beiden Ausdrücken die Spur über die Indexpaare 1, 4 sowie 0, 2 gebildet, während der freie Index j auf Platz 3 steht. Wir erhalten

deshalb²¹

$$\begin{aligned} 2(\operatorname{Div} Ric)_j &= (\nabla_j R)_{kiml} g^{kl} g^{mi} \\ &= \partial_j R_{kiml} g^{kl} g^{mi} \\ &= \partial_j s. \end{aligned}$$

Wenn die Skalar­krümmung nicht konstant ist, ist die Divergenz von Ric also ungleich Null. Aber Einstein wusste schließlich Rat: Es gibt ja noch eine symmetrische Bilinearform auf M , die Metrik g ; für sie gilt $\nabla_k g = 0$ (das ist die zweite Gleichung der Levi-Civita-Bedingung (L)). Deshalb erhalten wir

$$\operatorname{Div}(sg)_j = \nabla_k (sg)_{ij} g^{ik} = (\partial_k s) g_{ij} g^{ki} = (\partial_k s) \delta_j^k = \partial_j s.$$

Also ist der Tensor

$$G = Ric - \frac{1}{2} sg$$

von selbst divergenzfrei, und deshalb wählte Einstein ihn als geometrisches Pendant zum Massentensor T :

$$(42) \quad G = 8\pi T.$$

Zu seinen Ehren wird G *Einstein-Tensor* genannt.

12. KOVARIANTE ABLEITUNG LÄNGS KURVEN, PARALLELTRANSPORT

Manchmal sind Vektorfelder nicht auf der ganzen Mannigfaltigkeit, sondern nur entlang einer Kurve $c : I \rightarrow M$ definiert. Ein *Vektorfeld längs c* ist eine differenzierbare Abbildung $A : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $A(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$. Ein Beispiel ist das Tangentialvektorfeld c' der Kurve. Den Raum der Vektorfelder längs c bezeichnen wir mit \mathcal{V}_c . Solche Vektorfelder können natürlich nur in einer Richtung differenziert

²¹Wir benutzen dabei $\partial_j \operatorname{Spur} T = \operatorname{Spur} \nabla_j T$ für jeden Tensor $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Hier ist ein formales Argument: Der Vektorraum $V = T_x M$ hat die Basis $\phi_i, i = 1, \dots, n$. Die zugehörige duale Basis von $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ sei α^j , d.h. $\alpha^j \phi_i = \delta_i^j$. Damit kann man die Komponenten von T ausrechnen: $T\phi_i = T_i^j \phi_j$, also $\alpha^i T\phi_i = T_i^j \alpha^i \phi_j = T_i^j \delta_j^i = T_i^i = \operatorname{Spur} T$. Somit

$$(*) \quad \partial_k \operatorname{Spur} T = \partial_k \alpha^i T\phi_i = (\nabla_k \alpha^i) T\phi_i + \alpha^i (\nabla^k T)\phi_i + \alpha^i T \nabla_k \phi_i.$$

Andererseits ist $0 = \partial_k \alpha^i \phi_j = (\nabla_k \alpha^i) \phi_j + \alpha^i \nabla_k \phi_j$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} (\nabla_k \alpha^i) T\phi_i &= (\nabla_k \alpha^i) \phi_j \alpha^j T\phi_i \\ &= -\alpha^i (\nabla_k \phi_j) \alpha^j T\phi_i, \\ \alpha^i T \nabla_k \phi_i &= \alpha^i T \phi_j \alpha^j \nabla_k \phi_i \\ &= \alpha^j (\nabla_k \phi_i) \alpha^i T\phi_j. \end{aligned}$$

Daher heben sich die äußeren Terme auf der rechten Seite von (*) weg und wir erhalten $\partial_k \operatorname{Spur} T = \operatorname{Spur} \nabla_k T$.

werden, in Richtung der Kurve c . Eine *kovariante Ableitung längs c* ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\nabla^c = \nabla_t = \frac{D}{dt} : \mathcal{V}_c \rightarrow \mathcal{V}_c$ mit

$$(43) \quad \nabla^c(fA) = f'A + f\nabla^c A$$

für jedes $A \in \mathcal{V}_c$ und jede C^∞ -Funktion $f \in \mathcal{F}_I = \{f : I \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}\}$. Natürlich kann ein Vektorfeld längs c auch einfach die Einschränkung eines auf ganz M definierten Vektorfeldes auf die Kurve c sein, $A = \hat{A} \circ c$ für eine $\hat{A} \in \mathcal{V}$.

Lemma 12.1. *Ist eine kovariante Ableitung ∇ auf M gegeben und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, so gibt es genau eine kovariante Ableitung ∇^c mit*

$$(44) \quad \nabla^c(A \circ c) = \nabla_{c'} A$$

für jedes $A \in \mathcal{V}$, wobei $(\nabla_{c'} A)(t) := \nabla_{c'(t)} A$.

Beweis. Zwar ist nicht jedes $A \in \mathcal{V}_c$ vom Typ $\hat{A} \circ c$, aber A lässt sich in lokalen Parametern auf solche Vektorfelder zurückführen: $A = a^i(\phi_i \circ c)$ mit $a_i \in \mathcal{F}_I$.²² Ist $c = \phi \circ u$ und $c' = D\phi_u u' = (u^j)'(\phi_j \circ c)$ Nach (43), (44) ist dann

$$(45) \quad \nabla^c A = (a^i)'(\phi_i \circ c) + a^i \nabla_{c'} \phi_i = ((a^k)' + a^i (u^j)' \Gamma_{ij}^k(u)) (\phi_k \circ c)$$

Das zeigt die Eindeutigkeit, aber auch die Existenz, denn durch (45) wird eine kovariante Ableitung längs c mit (44) definiert. \square

Mit Hilfe der kovarianten Ableitung längs Kurven können wir zwei wichtige Begriffe der euklidischen Geometrie in die Riemannsche Geometrie übertragen: Parallelverschiebung und Geraden. Ein Vektorfeld A längs $c : I \rightarrow M$ heißt *parallel*, wenn

$$(46) \quad \nabla^c A = 0.$$

Mit (45) können wir sagen, was diese Gleichung in lokalen Parametern bedeutet: Ein Vektorfeld $A = a^i(\phi_i \circ c) \in \mathcal{V}_c$ ist parallel \iff

$$(47) \quad \dot{a}^k + a^i \dot{u}^j \Gamma_{ji}^k(u) = 0$$

für $k = 1, \dots, n$, wobei wir zum Einsparen von lästigen und missverständlichen Klammern die Ableitung nach t mit einem Punkt statt einem Strich bezeichnen. Diese Gleichung (47) ist eine *lineare* Differentialgleichung, d.h. die Komponenten a^i des gesuchten Vektorfeldes A und seine Ableitungen \dot{a}^i treten nur linear auf. Lineare Differentialgleichungen sind sehr angenehm, weil ihre Lösungen auf ganz I definiert

²²Wir fassen hier ϕ_i als lokales Vektorfeld auf M auf; eigentlich müsste es $\phi_i \circ \phi^{-1}$ heißen.

sind²³ und einen Vektorraum bilden: Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Sind $t_o, t_1 \in I$ beliebig, dann ist damit jedes parallele Vektorfeld A , also jede Lösung von (47) durch seinen Anfangswert $A(t_o)$ bei t_o eindeutig bestimmt und definiert eine lineare Abbildung $A(t_o) \mapsto A(t_1) : T_{c(t_o)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M$, genannt *Parallelverschiebung längs c* . Diese Abbildung schafft also eine Verbindung, eine “Zusammenhang” zwischen den Tangentialräumen in den Punkten $c(t_o)$ und $c(t_1)$, was die Bezeichnung “*Zusammenhang*” für die kovariante Ableitung erklärt.

Lemma 12.2. *Wenn M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ metrisch ist (vgl. 22) dann gilt $|A(t)| = \text{const}$ für jedes parallele Vektorfeld $A(t)$ längs einer Kurve c . Insbesondere ist die Parallelverschiebung $T_{c(t_o)}M \rightarrow T_{c(t_1)}M$ eine lineare Isometrie.*

Beweis. $\langle A, A \rangle' = 2\langle \nabla^c A, A \rangle = 0$. □

Speziell können wir fragen, wann das Tangentialvektorfeld $c' = \dot{c}$ einer Kurve $c = \phi \circ u$ parallel ist, wann die Kurve also “geradeaus” läuft:

$$(48) \quad \nabla^c \dot{c} = 0.$$

Solche Kurven heißen *geodätische Linien* oder kurz *Geodäten*. Ihre Parameterkurven $u(t) = u^i(t)e_i$ sind Lösungen einer Differentialgleichung, die man aus (47) bekommen, wenn man $c' = \dot{c} = \dot{u}^i \phi_i$ für $A = a^i \phi_i$ setzt, also \dot{u}^i anstelle von \dot{a}^i einsetzt:

$$(49) \quad \ddot{u}^k + \dot{u}^i \dot{u}^j \Gamma_{ji}^k(u) = 0.$$

Beispiel: Ist $M \subset \mathbb{R}^d$ eine Untermannigfaltigkeit mit induzierter Metrik $g_x = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_x M}$ und ∇ die Levi-Civita-Ableitung, also die tangentielle Ableitung $\nabla_A B = (\partial_A B)^T$, dann ist (48) $\iff (\ddot{c})^T = 0 \iff \ddot{c} \in (T_c M)^\perp$. Eine Geodäte auf einer Untermannigfaltigkeit mit induzierter Metrik ist also eine Kurve $c : I \rightarrow M$, deren zweite Ableitung (“Beschleunigung”) \ddot{c} überall senkrecht auf M steht.

13. EINSTEINS GRAVITATIONSTHEORIE (ART)

Die Relativitätstheorie handelt von der Relativität der zur Beschreibung physikalischer Situationen verwandten Bezugssysteme. Sie unterscheidet also zwischen den “objektiven” physikalischen Gegebenheiten

²³Das ist für nichtlineare Differentialgleichungen keineswegs immer der Fall. Einfachstes Beispiel: die Differentialgleichung $\dot{a} = -a^2$ (mit $I = \mathbb{R}$) hat die Lösungen $a = 1/(t - c)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ sowie $a = 0$. Die Lösungen $a = 1/(t - c)$ haben bei $t = c$ einen Pol, sind also nur in den Intervallen $(-\infty, c)$ sowie (c, ∞) definiert. Das maximale Definitionsintervall einer Lösung einer Differentialgleichung zu finden kann eine schwierige Aufgabe sein.

und solchen, die nur durch die Wahl des Bezugssystems bedingt sind. Diese Unterscheidung ist ein zentrales Problem der Geistesgeschichte. Seit über 4000 Jahren haben die Menschen die Himmelskörper beobachtet, Sonne, Mond, Planeten, Kometen und Fixsterne. Sie nahmen die unterschiedlichen Bewegungen und Konstellationen wahr und ordneten ihnen Bedeutung für das menschliche Schicksal zu. Den Griechen gelang es, diese Bewegungen auch theoretisch zu beschreiben und damit vorhersagbar zu machen (Ptolemäisches Weltbild). Das Bezugssystem für die Beschreibung dieser Bewegungen war dabei ganz selbstverständlich die Erde; diese erschien fest, die Himmelskörper dagegen bewegten sich. Das gesamte Mittelalter hielt an dieser Vorstellung fest, erst die Renaissance war in der Lage, sie aufzugeben. Im kopernikanischen Weltbild, später durch Kepler verfeinert, wurde die Sonne zum Zentrum und Ruhepol des Bezugssystems, die Erde aber den Planeten gleichgeordnet. Die komplizierten Planetenbewegungen ließen sich jetzt viel einfacher erklären, nämlich als Relativbewegungen, die aus den Bewegungen von Erde und Planet resultierten. Die Aufgabe der Vorstellung, die Erde und damit der Mensch stünde im Mittelpunkt des Weltsystems, kam einer Revolution gleich ("kopernikanische Wende") und führte zu den bekannten Auseinandersetzungen mit der Kirche, die sich den Menschen zu groß und die übrige Schöpfung zu klein vorgestellt hatte.

Noch einen Schritt weiter ging Newton: Auch die Sonne selbst bewegte sich; das eigentlich in Ruhe befindliche Bezugssystem war überhaupt nicht an irgendwelchen Himmelskörpern festzumachen, es war vielmehr der von der Materie losgelöste "absolute" Raum selbst. Er war die Bühne, auf der sich die Physik abspielte; die Erde und alle Himmelskörper bewegten sich in ihm. Aber warum gab es überhaupt ein solches "absolut ruhendes" Bezugssystem? Konnte es nicht sein, dass Ruhe und Bewegung nur relative Begriffe waren, auf ein zufällig gewähltes Koordinatensystem bezogen? Newton gab eine physikalische Begründung für die Berechtigung, absolut von Ruhe oder Bewegung zu reden: Dreht man einen Eimer mit Wasser um seine Achse, so wird nach einer Weile (durch die Reibung) das Wasser im Eimer genauso schnell rotieren wie der Eimer, sich also gegenüber dem Eimer in relativer Ruhe befinden. Aber die Wasseroberfläche wird (durch die Zentrifugalkraft) gewölbt sein, anders als in der "absoluten" Ruhesituation. Kant hat Newtons Ansatz auch philosophisch gerechtfertigt: Die Wahrnehmung des Raums mit allen seinen Gesetzen (denen der euklidischen Geometrie) ist nicht Ergebnis unserer Erfahrung, sondern "a priori", vor aller Erfahrung gegeben; sie ist eine Bedingung der Möglichkeit von Erfahrung, denn wir weisen allen Erscheinungen der physikalischen Erfahrung bereits Plätze in diesem Raum zu.

Eigentlich war aber Newtons Ansatz schon bei seinem Entstehen nicht ganz konsistent, denn bereits Galilei hatte festgestellt, dass die Physik (damals im Wesentlichen die Mechanik) in zwei zueinander gleichförmig-geradlinig bewegten Bezugssystemen genau gleich beschrieben wird. Mit anderen Worten, in einem zum “absoluten Raum” gleichförmig-geradlinig bewegten Bezugssystem herrscht dieselbe Physik, und wir könnten dieses bewegte System ebensogut als den ruhenden “absoluten Raum” ansehen und den ruhenden als (in umgekehrter Richtung) bewegt. Solche Systeme, in denen dieselbe Physik herrscht wie im absoluten Raum, wurden *Inertialsysteme* genannt. Statt des absoluten Raums gab es also eigentlich bereits bei Newton eine Familie gleichberechtigter Bezugssysteme, die untereinander durch eine Gruppe von linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, den *Galileitransformationen* $(x, t) \mapsto (x', t')$ mit

$$x' = x - tv, \quad t' = t$$

verbunden waren (bei entsprechender Wahl des Ursprungs), wobei v die Geschwindigkeit des x' -Systems gegenüber dem x -System bezeichnet. Wirklich “absolut” war nur die Zeitkoordinate t , die (bis auf Wahl des Ursprungs) von den Galileitransformationen invariant gelassen wird.

Die Theorie des absoluten Raums hatte allerdings im 19. Jahrhundert eine kurze Renaissance, als man die elektrodynamischen Erscheinungen zu untersuchen begann, insbesondere die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen (Licht). Diese schienen doch einen Unterschied in der Physik der verschiedenen Inertialsysteme zu begründen, da die Lichtgeschwindigkeit in einem auf die Lichtquelle zurasenden Bezugssystem größer sein müsste als in einem, das sich von der Quelle entfernt. Man postulierte ein Medium, in dem sich die Wellen ausbreiteten, den sogenannten *Äther*. Das Koordinatensystem, in dem der Äther ruhte, war also gegenüber allen anderen Systemen zu bevorzugen. Aber die Versuche, Ende des 19. Jahrhunderts mit dem Michelson-Interferometer die Bewegung des erdgebundenen Bezugssystem gegenüber dem Äther nachzuweisen, brachten ein negatives Ergebnis: Die Lichtgeschwindigkeit war in allen Richtungen dieselbe. Das Galilei’sche Relativitätsprinzip war auch für die Elektrodynamik gültig.

Aber damit geriet man in einen Widerspruch zu bisherigen Grundregeln der Physik: Die Lichtgeschwindigkeit ließ sich offenbar nicht zur Geschwindigkeit eines Bezugssystem addieren. Einstein löste in seiner Speziellen Relativitätstheorie (1905) diesen Widerspruch, indem er die absolute Zeit der absoluten Lichtgeschwindigkeit opferte: Die Transformationen zwischen den Inertialsystemen mussten das Ausbreitungsgesetz der (zur Zeit 0 vom Ursprung ausgehenden) Lichtwellen

$|x|^2 = (ct)^2$ erhalten, also die quadratische Form $q(x, t) = |x|^2 - (ct)^2$; die Galileitransformationen waren somit durch die Lorentztransformationen

$$x' = \gamma(x - tv), \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

mit $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ zu ersetzen, die den Zeitmaßstab und auch den Raummaßstab in dem neuen System um den Faktor $\gamma > 1$ änderten.

So bedeutsam dieser Schritt war, so brachte er doch keinen Fortschritt für das Problem der Inertialsysteme. Genau wie bei Newton gab es immer noch eine ausgezeichnete Klasse von zueinander geradlinig gleichförmig bewegten Bezugssystemen. Warum waren nicht alle Koordinatensysteme, also auch die krummlinigen und beschleunigten, gleichberechtigt? Mit anderen Worten, es gab immer noch eine a-priori-Geometrie in der vierdimensionalen Raumzeit, die es gestattete, zwischen gerade und krumm zu unterscheiden und in der die quadratische Form q , das Lorentz-Skalarprodukt, eine besondere Rolle spielte. Für diese Geometrie eine physikalische Quelle zu finden war die größte Leistung Einsteins: die Allgemeine Relativitätstheorie. Völlig überraschend löste er damit nicht nur das Problem der Relativität aller Bezugssysteme, sondern eröffnete auch ein ganz neues Verständnis für die im Großen wichtigste physikalische Grundkraft, die Gravitation. Er griff dabei einen Gedanken von E. Mach auf, die in gewissem Sinn an den historischen Ausgangspunkt zurückführte: Die "guten" Koordinatensysteme sind vielleicht doch (wie das früher selbstverständlich benutzte erdfeste System) an den physikalischen Massen festgemacht, aber nicht lokal, sondern im Großen. Der Unterschied zwischen "absoluter" Ruhe und Bewegung in dem Newton'schen Eimerversuch wäre einfach so zu erklären, dass im einen Fall der Eimer gegenüber dem Fixsternhimmel rotiert, im anderen aber nicht. Einstein geht viel weiter und postuliert, dass die raumzeitliche Geometrie selbst durch die Massenverteilung erst erzeugt wird. Der Ausgangspunkt seiner Überlegung ist, dass Inertialsysteme am genauesten in frei fallenden, also nur unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegten Systemen realisiert werden.

Wir wollen uns zunächst die Gravitationstheorie Newtons ins Gedächtnis zurückrufen. Sie beruht auf zwei Gesetzen:

(1) Newtonsche Bewegungsgleichung: Die Bahn $x(t)$ eines Teilchens der Masse m in einem Kraftfeld $F(x)$ ist gegeben durch die Differentialgleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x).$$

(2) Newtonsches Gravitationsgesetz: Eine große Masse M am Ort O wirkt auf ein Teilchen der Masse m am Ort x mit der Kraft

$$F(x) = -\frac{Mm}{|x|^2} \frac{x}{|x|}.$$

Auffällig ist, dass derselbe Faktor m in (1) und (2) eigentlich völlig unterschiedlicher Bedeutung hat: In (1) ist es die *träge Masse*, der Widerstand, die ein Körper einer Beschleunigung entgegensetzt, in (2) dagegen die *schwere Masse*, das Maß, in dem die Gravitationskraft ihre Wirkung auf einen Körper entfaltet. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ist bei Newton lediglich eine empirische Tatsache, bei Einstein wird sie zu einem Eckpfeiler seiner Theorie. Verbindet man die beiden Gesetze, so lässt sich die Masse m kürzen, und es entsteht die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) := \frac{M}{|x|^2} \frac{x}{|x|}.$$

Für das Vektorfeld f (das Gravitationsfeld einer punktförmigen Masse in O) gilt $f = -\nabla\phi$ mit $\phi(x) = -\frac{M}{|x|}$. Ersetzt man die eine Masse M durch eine beliebige Massenverteilung $\rho(x)$ (die wir uns aus lauter Punktmassen zusammengesetzt denken können), so ergibt sich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \quad (1)$$

$$f = -\nabla\phi, \quad (2)$$

$$\Delta\phi = 4\pi\rho. \quad (3)$$

Die erste Gleichung gibt an, wie Massen durch das Gravitationsfeld bewegt werden (*Bewegungsgleichung*), die anderen beiden, wie Massen das Gravitationsfeld erzeugen (*Feldgleichung*): (2) und (3) zusammen ergeben die Gleichung

$$\operatorname{div} f = 4\pi\rho,$$

d.h. die Massendichte ρ ist die "Quelle" für das Gravitationsfeld f . Die Gleichung (3) heißt *Poissongleichung*; sie verallgemeinert die Gleichung $\Delta\frac{M}{|x|} = 0$, die im Fall der in O konzentrierten Masse ($\rho = \delta$ -Funktion) außerhalb von O galt.

In Einsteins Gravitationstheorie wird daraus folgendes: Die Raumzeit ist nicht mehr $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, sondern eine beliebige 4-dimensionale Mannigfaltigkeit M mit einer semi-Riemannschen Metrik g , genauer einer *Lorentzmetrik*, d.h. für jedes $p \in M$ ist g_p äquivalent zu dem *Minkowski-Skalarprodukt* $\langle x, y \rangle_- = \sum_{i=1}^3 x_i y_i - x_4 y_4$ im \mathbb{R}^4 . Aber anders als in der Speziellen Relativitätstheorie ist diese Lorentzmetrik nicht a-priori gegeben, sondern physikalisch bestimmt, wie wir gleich

sehen werden. Schwere Teilchen, die keinen anderen als Gravitationskräften ausgesetzt sind, bewegen sich auf *zeitartigen* Geodätischen²⁴ in dieser Lorentz-Mannigfaltigkeit, Licht dagegen auf Nullgeodätischen. Die Bewegungsgleichung wird also zur Geodätengleichung $\frac{D}{d\tau} \frac{dx}{d\tau} = 0$ oder in Koordinaten

$$\frac{d^2 x_k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx_j}{d\tau}. \quad (1)_E$$

Der Vergleich mit (1) suggeriert, dass die rechte Seite, also i.w. die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k , dem Newtonschen Gravitationsfeld f entsprechen muss. Genau wie dieses aus ersten Ableitungen des Potentials ϕ besteht (Gleichung (2)), entstehen auch die Γ_{ij}^k durch Differentiation einer anderen Größe, nämlich der Komponenten der Metrik g_{ij} gemäß der Levi-Civita-Gleichung:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} (-g_{ij,k} + g_{jk,i} + g_{ki,j}) \quad (2)_E$$

Die Rolle des Gravitationspotentials ϕ wird also bei Einstein von der Lorentzmetrik g übernommen. Was aber ist das Analogon der Feldgleichung (3)? Dazu muss man zuvor bedenken, dass bereits in der Speziellen Relativitätstheorie die Massendichte ρ keine unter Lorentztransformationen invariante Funktion ist und deshalb durch einen symmetrischen (2,0)-Tensor T ersetzt wird, den *Massetensor* oder *Energie-Impuls-Tensor*, der alle vorhandenen Massen und Energien (z.B. auch die von Elektromagnetischen Feldern) zusammenfasst. Die Energie-Impuls-Erhaltung drückt sich durch die Divergenzfreiheit dieses Tensors aus. Auf der linken Seite muss wie in (3) ein Ausdruck stehen, der Ableitungen zweiter Ordnung der Größe enthält, die die Rolle des Potentials übernommen hat, also der Metrik g . Dies trifft für den Krümmungstensor zu:

$$R_{ijk}^m = \partial_i \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^m + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^m - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^m$$

Aber der gesuchte Ausdruck muss wie der Massentensor auch ein symmetrischer divergenzfreier (2,0)-Tensor sein. Es gibt bis auf Vielfache nur einen solchen Tensor, nämlich den Einsteintensor $G = Ric - \frac{1}{2} s g$ mit den Komponenten

$$G_{ij} = R_{ijk}^k - \frac{1}{2} R_{klm}^m g^{kl} g_{ij}.$$

²⁴Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ in einer Mannigfaltigkeit mit Lorentz-Metrik g (*Lorentz-Mannigfaltigkeit*) heißt *zeitartig*, wenn $g(c'(t), c'(t)) < 0$ für alle t ; sie heißt *Nullkurve*, wenn $g(c', c') = 0$.

Tatsächlich lauten die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G = 8\pi T. \quad (3)_E$$

Damit ist das Programm der Relativitätstheorie erfüllt. Die Geometrie der Raum-Zeit ist nicht mehr a-priori, sondern physikalisch bestimmt: Die Massen- und Energieverteilung, die ihren Ausdruck in dem Tensor T findet, bestimmt den Einsteintensor der Metrik g , ein Differentialausdruck zweiter Ordnung in den Komponenten g_{ij} . Die Metrik g ist Lösung der Differentialgleichung $(3)_E$ und somit durch die Massenverteilung bestimmt. Wie in der Newtonschen Theorie beschreibt $(1)_E$ die Bewegung der Massen durch das Gravitationsfeld (“geometry tells matter how to move”²⁵) und $(3)_E$ die Erzeugung des Gravitationsfeldes durch die Massen (“matter tells geometry how to curve”), aber ebenso wie dort ist der Unterschied zwischen felderzeugenden und vom Feld bewegten Massen künstlich; in Wirklichkeit handelt es sich um ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem für Feld und Massen. Eine etwas genauere Analyse zeigt sogar, dass $(1)_E$ eine Konsequenz von $(3)_E$ ist; die Einsteinsche Feldgleichung $(3)_E$ ist also *das* Gesetz der Gravitation.

Das erste Beispiel ist natürlich wieder das Gravitationspotential des sphärisch symmetrischen Sterns, das in der Newtonschen Theorie $\phi = \frac{M}{r}$ lautete; der entsprechende Ausdruck in der Einsteinschen Theorie wurde 1916 von Karl Schwarzschild gefunden (*Schwarzschild-Metrik*):

$$g = -(1 - 2\phi)dt^2 + (1 - 2\phi)^{-1}dr^2 + r^2g_o$$

wobei wieder $\phi = \frac{M}{r}$ und g_o die Standardmetrik der Einheitssphäre S^2 bezeichnet. Bei der Sonnenfinsternis von 1919 wurde Einsteins Theorie zum ersten Mal getestet. Sie sagte nämlich eine Gravitationswirkung auf das Licht voraus, das sich ja auf Nullgeodätischen in der Metrik g bewegte; das Licht eines hinter der Sonne stehenden Sterns musste demnach durch die Sonne abgelenkt werden, ein Effekt, der bei einer totalen Sonnenfinsternis beobachtbar wurde. Bereits in der speziellen Relativitätstheorie war allerdings ein solcher Effekt zu erwarten gewesen, denn wegen der Gleichheit von Masse und Energie musste auch das Photon eine Gravitationswirkung zeigen, aber der durch die Schwarzschild-Metrik vorausgesagte Effekt war (auf Grund des Faktors 2 vor ϕ) doppelt so groß. Bei zwei Messungen in Brasilien und Afrika wurde dieser Wert bestätigt, was der Einsteinschen Gravitationstheorie zum Durchbruch verhalf.

Manchmal wird behauptet, philosophische Probleme würden niemals gelöst. Das Beispiel Einsteins zeigt, dass diese Behauptung falsch ist:

²⁵Zitate nach Misner, Thorne und Wheeler: Gravitation

Er hat ein altes philosophisches Problem gelöst, nämlich das der Relativität der raumzeitlichen Bezugssysteme.

14. UNTERMANNIGFALTIGKEITEN UND GAUSSGLEICHUNG

Wir wollen jetzt wieder in die Riemannsche Geometrie zurückkehren und als Beispiel den Krümmungstensor einer *Untermannigfaltigkeit* $M \subset \mathbb{R}^d$ mit induzierter Metrik berechnen. Für eine lokale Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$ mit partiellen Ableitungen ϕ_i (bekanntlich eine Basis des Tangentialraums) gilt also

$$(50) \quad \nabla_i \phi_j = (\phi_{ji})^T = \phi_{ji} - \phi_{ji}^\perp$$

wobei $\phi_{ji}^\perp(u)$ die Komponente des Vektors $\phi_{ji}(u) \in \mathbb{R}^d$ im *Normalenraum* $N_x M = (T_x M)^\perp$ ist für $x = \phi(u)$. Mit dieser Normalkomponente der zweiten Ableitung wollen wir uns jetzt beschäftigen; sie heißt *Zweite Fundamentalform*:

$$(51) \quad \alpha_{ij} = \phi_{ij}^\perp, \quad \alpha_{AB} = (\partial_A B)^\perp = a^i b^j \alpha_{ij}.$$

Der Term mit der Ableitung $\partial_A b^j$ in der letzten Gleichung entfällt, weil er tangential ist: $((\partial_A b^j) \phi_j)^\perp = 0$. Die Zweite Fundamentalform ist symmetrisch und tensoriell in beiden Argumenten, mit Werten im jeweiligen Normalenraum. Wir haben also:

$$(52) \quad \partial_j \phi_k = \nabla_j \phi_k + \alpha_{jk}.$$

Zur Berechnung des Krümmungstensor benötigen wir eine weitere Ableitung:

$$\begin{aligned} \langle \partial_i \partial_j \phi_k, \phi_l \rangle &= \langle \partial_i \nabla_j \phi_k, \phi_l \rangle + \langle \partial_i \alpha_{jk}, \phi_l \rangle \\ &= \langle \nabla_i \nabla_j \phi_k, \phi_l \rangle - \langle \alpha_{jk}, \alpha_{il} \rangle, \end{aligned}$$

denn wegen $\alpha_{jk} \perp \phi_l$ ist

$$\langle \partial_i \alpha_{jk}, \phi_l \rangle = -\langle \alpha_{jk}, \partial_i \phi_l \rangle = -\langle \alpha_{jk}, \alpha_{il} \rangle.$$

Antisymmetrisierung ergibt

$$(53) \quad 0 = \langle [\partial_i, \partial_j] \phi_k, \phi_l \rangle = R_{ijkl} - \langle \alpha_{jk}, \alpha_{il} \rangle + \langle \alpha_{ik}, \alpha_{jl} \rangle.$$

oder

$$(54) \quad R_{ijkl} = \langle \alpha_{jk}, \alpha_{il} \rangle - \langle \alpha_{ik}, \alpha_{jl} \rangle.$$

Das ist die *Gauß-Gleichung*, die den zur *inneren* Geometrie gehörigen Krümmungstensor mit der zur *äußeren* Geometrie gehörigen Zweiten Fundamentalform verbindet.

Ist M eine Hyperfläche, also $d = n + 1$, dann ist der Normalraum eindimensional und wird durch einen Einheitsnormalenvektor N aufgespannt. Dann ist die Zweite Fundamentalform praktisch reellwertig, denn

$$(55) \quad \alpha_{ij} = h_{ij}N \quad \text{mit} \quad h_{ij} = \langle \alpha_{ij}, N \rangle = \langle \phi_{ij}, N \rangle,$$

und wir erhalten

$$(56) \quad R_{ijkl} = h_{jk}h_{il} - h_{ik}h_{jl}.$$

Für die *Sphäre* $M = \mathbb{S}^n$ zum Beispiel ist $N = \phi$, denn $\phi_i \perp \phi$ wegen $\langle \phi, \phi \rangle = 0$. Dann ist

$$h_{ij} = \langle \phi_{ij}, \phi \rangle = -\langle \phi_i, \phi_j \rangle = -g_{ij}$$

und damit gilt für die Sphäre:

$$(57) \quad R_{ijkl}^{\mathbb{S}} = g_{jk}g_{il} - g_{ik}g_{jl} =: R_{ijkl}^o$$

Insbesondere ist dieser Ausdruck R_{ijkl}^o ein Krümmungstensor, d.h. er erfüllt die Krümmungsidentitäten aus Abschnitt 10.

Im Fall von Flächen ($n = 2$) ist der Krümmungstensor durch nur eine Komponente schon bestimmt, durch $R_{1221} = -R_{1212}$, denn wegen der Antisymmetrie in den beiden Blöcken kann man dort keine gleichen Indizes einsetzen. Der Raum der Krümmungstensoren ist somit eindimensional, d.h. R ist skalares Vielfaches von R^o , und

$$(58) \quad R_{1221}^o = g_{22}g_{11} - g_{12}g_{21} = \det g.$$

Das Vielfache nennen wir die *Krümmung* K :

$$(59) \quad R_{1221} = K \cdot R_{1221}^o = K \cdot \det g.$$

Andererseits gilt nach (56):

$$R_{1221} = \det h,$$

also folgt

$$(60) \quad K = \frac{\det h}{\det g}.$$

Damit ist K mit der *Gaußschen Krümmung* identisch. Das ist die bedeutende Erkenntnis, das *Theorema Egregium* von C.F. Gauß²⁶ in seinen "Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas" von 1828: Die wichtigste Krümmungsgröße einer Fläche, heute Gaußsche Krümmung genannt, ist nach (59) eine Größe der *inneren* Geometrie, obwohl die

²⁶1777 (Braunschweig) - 1855 (Göttingen)

Definition (60) die äußere Geometrie benutzt.²⁷ Insbesondere sehen wir, dass die 2-Sphäre \mathbb{S}^2 die Gaußsche Krümmung $K = 1$ hat.

Allgemeiner ist für jede Riemannsche Mannigfaltigkeit $M, \langle \cdot, \cdot \rangle$ und linear unabhängige Vektoren $a, b \in T_x M$ der Ausdruck

$$(61) \quad K(a, b) := R_{abba}/R_{abba}^o = R_{abba}/(|a|^2|b|^2 - \langle a, b \rangle^2)$$

(mit $R_{abba} = \langle R_{abb}, a \rangle$) nur von der von a, b aufgespannten Ebene in $T_x M$ abhängig; dieser Ausdruck (definiert auf der Menge aller zweidimensionalen Unterräume aller Tangentialräume) wird *Schnittkrümmung* genannt; sie bestimmt den ganzen Krümmungstensor. Die n -Sphäre \mathbb{S}^n hat nach (57) also konstante Schnittkrümmung Eins.

15. HYPERBOLISCHE GEOMETRIE

Es gibt ein Gegenstück zur Sphäre, eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung -1 statt 1 : den *Hyperbolischen Raum* (zweidimensional: *Hyperbolische Ebene*) $\mathbf{H} = \mathbf{H}^n$. Man bekommt ihn ganz analog zur Sphäre, wenn man den \mathbb{R}^{n+1} nicht mit dem euklidischen, sondern mit dem (indefiniten) *Minkowski-Skalarprodukt* versieht:

$$\langle x, y \rangle_- = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

So wie \mathbb{S} die Lösungsmenge der Gleichung $\langle x, x \rangle = 1$ ist, so ist \mathbf{H} die Lösungsmenge der Gleichung $\langle x, x \rangle_- = -1$. Die letztere ist ein zweischaliges Hyperboloid, von dem wir allerdings nur eine Schale (eine Zusammenhangskomponente) betrachten, die, welche den Einheitsvektor e_{n+1} enthält. Wie bei der Sphäre ist $x \perp T_x M$ (im Sinne des Minkowski-Skalarprodukts), denn für jede Kurve $x(t)$ in \mathbf{H} mit $x(0) = x$ und $x'(0) = v$ ist $0 = \frac{d}{dt} \langle x(t), x(t) \rangle_- \Big|_{t=0} = 2 \langle x'(0), x(0) \rangle_- = 2 \langle x, v \rangle_-$. Da $\langle x, x \rangle_- < 0$, ist das Skalarprodukt auf $x^\perp = T_x \mathbf{H}$ positiv definit. Wie vorher berechnen wir den Krümmungstensor mit Hilfe der Gaußgleichung (54), nur dass die Zweite Fundamentalform α jetzt mit dem

²⁷Die Definition (60) wird etwas suggestiver durch Einführung der *Gaußabbildung* $N : M \rightarrow \mathbb{S}^n$, die jedem Punkt x einer Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einen der beiden Einheitsnormalvektoren senkrecht zu $T_x M$ zuordnet und damit die Änderung des Tangentialraums auf M beschreibt. Die Ableitung $DN_x : T_x M \rightarrow T_{N_x} \mathbb{S} = (N_x)^\perp = T_x M$ wird auch *Weingartenabbildung* genannt (meist noch mit Vorzeichen), und die Gaußkrümmung an der Stelle x ist deren Determinante, also das Produkt ihrer Eigenwerte, die auch *Hauptkrümmungen* genannt werden: $K(x) = \det DN_x$. Daher beschreibt $K(x)$ die Verzerrung des Flächeninhalts durch die Gaußabbildung $N : M \rightarrow \mathbb{S}$. Der Zusammenhang mit (60) ist der folgende: Es gilt $h_{ij} = \langle \phi_{ij}, N \rangle = -\langle \phi_i, N_j \rangle$, also ist $DN \cdot \phi_j = N_j = \langle N_j, \phi_i \rangle g^{ik} \phi_k = -h_{ij} g^{ik} \phi_k$ und damit $\det DN = \det(-hg^{-1}) = (-1)^n \det(hg^{-1}) = (-1)^n \det h / \det g$.

Minkowski-Skalarprodukt berechnet wird. Für jede Parametrisierung $\phi : U \rightarrow \mathbf{H}$ ist also ϕ selbst ein Normalenvektor, und es gilt

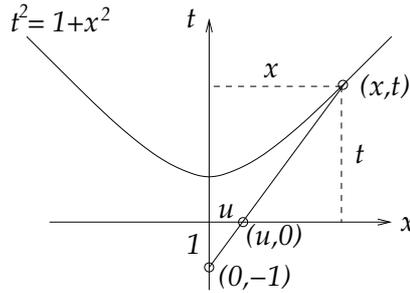
$$\alpha_{ij} = \phi_{ij}^\perp \stackrel{*}{=} -\langle \phi_{ij}, \phi \rangle \phi = \langle \phi_i, \phi_j \rangle \phi = g_{ij} \phi$$

(“ $*$ ” gilt, weil $\langle \phi, \phi \rangle_- = -1$). Mit (54) folgt also

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \alpha_{jk} \alpha_{il} - \alpha_{ik} \alpha_{jl} \\ &= (g_{jk} g_{il} - g_{ik} g_{jl}) \langle \phi, \phi \rangle_- \\ &= -R_{ijkl}^o \end{aligned}$$

und damit hat \mathbf{H} Schnittkrümmung -1 .

Eine bequeme Parametrisierung für \mathbf{H} ist die *hyperbolische Stereographische Projektion*. Wir setzen dazu $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (x, t)$ und projizieren jeden Punkt $u = (u, 0) \in \mathbb{R}^n$ mit $|u| < 1$ von $(0, -1)$ aus in gerader Linie auf den Hyperboloiden $t = \sqrt{1 + x^2}$, wobei wir abgekürzt x^2 für $\langle x, x \rangle = |x|^2$ schreiben.



Die so definierte Abbildung $\phi : U \rightarrow \mathbf{H}$ mit $U = \{u \in \mathbb{R}^n; |u| < 1\}$ ist die *hyperbolische Stereographische Projektion*. Die Projektionsgerade geht durch $(0, -1)$ mit Richtungsvektor $(u, 1)$; der Projektionspunkt auf der Hyperbel ist also vom Typ $(x, t) = (0, -1) + s(u, 1)$, also $x = su$ und $t = s - 1$. und damit $1 = t^2 - x^2 = s^2 - 2s + 1 - s^2 u^2$, also $0 = s^2 - 2s - s^2 u^2$ oder mit $s \neq 0$ (die Lösung $s = 0$ führt nur auf den Ausgangspunkt $(0, -1)$ zurück und ist uninteressant) $0 = s - 2 - su^2$, also $s = 2/(1 - u^2)$. Damit ist $x = su = 2u/(1 - u^2)$ und $t = s - 1 = (2 - 1 + u^2)/(1 - u^2) = (1 + u^2)/(1 - u^2)$. Somit erhalten wir

$$(62) \quad \phi(u) = \frac{1}{1 - u^2} (2u, 1 + u^2).$$

Wir wollen nun die hyperbolische Metrik in dieser Parametrisierung berechnen. Dazu brauchen wir zunächst $D\phi_u a = \partial_a \phi(u)$ für einen beliebigen Vektor $a \in \mathbb{R}^n$. Für die Funktion $f(u) = u^2 = \langle u, u \rangle$ gilt $\partial_a f = 2\langle a, u \rangle = 2au$ (Kurzform), und für $g(u) = \frac{1}{1 - u^2} = h(f(u))$ mit

$h(s) = \frac{1}{1-s}$ gilt $\partial_a g(u) = h'(f(u)) \partial_a f(u) = \frac{2au}{(1-u^2)^2}$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_a \phi(u) &= \frac{2au}{(1-u^2)^2} (2u, 1+u^2) + \frac{1}{1-u^2} (2a, 2au) \\ &= \frac{2}{(1-u^2)^2} (2(au)u + (1-u^2)a, (1+u^2)au + (1-u^2)au) \\ &= \frac{2}{(1-u^2)^2} (2(au)u + (1-u^2)a, 2au) \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir die Länge dieses Vektors bezüglich des Minkowski-Skalarprodukts berechnen. Lassen wir zunächst den Skalar weg und berechnen die Länge $|v|_-^2 = -\langle v, v \rangle_-$ für den Vektor

$$\begin{aligned} v &= (2(au)u + (1-u^2)a, 2au) : \\ |v|_-^2 &= (2(au)u + (1-u^2)a)^2 - (2au)^2 \\ &= \underbrace{4(au)^2 u^2}_{\text{}} + (1-u^2)^2 a^2 + 4(\underline{1-u^2})(au)^2 - \underline{4(au)^2} \\ &= (1-u^2)^2 a^2 \end{aligned}$$

Somit folgt $|v|_- = (1-u^2)|a|$ und daher

$$(63) \quad |\partial_a \phi(u)|_- = \frac{2}{1-u^2} |a|.$$

Die Parametrisierung $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}$ ist also konform mit Metrik $g_{ij} = \frac{4}{(1-u^2)^2} \delta_{ij}$. Anders gesagt, der Einheitsball $U \subset \mathbb{R}^n$ mit der Metrik

$$(64) \quad g_u(a, b) = \frac{4}{(1-u^2)} \langle a, b \rangle$$

ist ein anderes *Modell* für den Hyperbolischen Raum, das *Poincaré-Modell*.²⁸

Wir wollen noch die Geodäten in beiden Modellen (Hyperboloid und Poincaré) bestimmen. Im Hyperboloid-Modell geht das wieder genau wie bei der Sphäre: Die Geodäten sind Schnitte des Hyperboloids mit zweidimensionalen Unterräumen (Ebenen durch 0). Die Begründung ist genau die gleiche: Jede Ebene E , die den Hyperboloid schneidet, besitzt ein orthogonales Komplement F bezüglich des

²⁸Für die hyperbolische *Ebene* hatten wir in einer Übung ein anderes Modell kennengelernt: die obere Halbebene $\mathbb{C}_+ = \{w \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} w > 0\}$ mit der Metrik

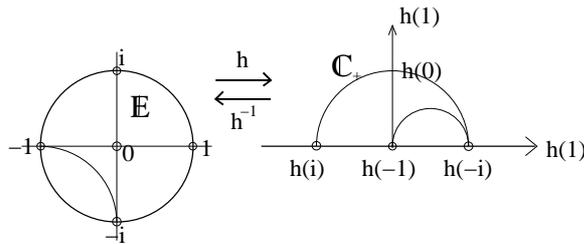
$$(65) \quad g_w(a, b) = \frac{1}{\operatorname{Im} w} \langle a, b \rangle.$$

Diese hängt eng mit der Einheitskreisscheibe $U = \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ zusammen, die durch eine gebrochen-lineare Abbildung (Möbiustransformation) auf \mathbb{C}_+ abgebildet wird, durch die *Cayley-Transformation* $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}_+$,

$$h(z) = i \frac{1-z}{1+z}.$$

Minkowski-Skalarprodukts, und die lineare Abbildung mit Eigenwert 1 auf E und -1 auf F (*Lorentz-Spiegelung an E*) ist eine Isometrie des Minkowskiraums \mathbb{R}^{n+1} , die \mathbb{H} invariant lässt. Die Schnitte von \mathbb{H} mit der Fixebene E sind eindimensionale Mannigfaltigkeiten. Wenn man sie nach Bogenlänge parametrisiert,²⁹ werden sie zu Geodäten, weil c'' einerseits in der Ebene E liegt, andererseits senkrecht auf c' steht, also ist $(c'')^T = 0$.

Was wird aus diesen Kurven im Poincaré-Modell, also bei Anwendung von ϕ^{-1} ? Dazu geben wir noch eine andere Beschreibung von ϕ , die die Verbindung zur üblichen (sphärischen) *stereographischen Projektion* herstellt (siehe Figur nächste Seite): Wir projizieren jeden Punkt von \mathbb{H} zuerst vom Ursprung $(0, 0)$ aus auf die Tangentialhyperebene $T = \mathbb{R}^n + (0, 1)$ und erhalten Punkt 1 in T . Genauer liegt 1 im Einheitsball $T_1 \subset T$ um den Punkt $(0, 1)$. Diesen Punkt 1 in T_1 projizieren wir jetzt vertikal auf die obere Halbsphäre der Einheitssphäre \mathbb{S} , und den Bildpunkt 2 projizieren wir vom "Südpol" $(0, -1)$ aus in gerader Linie



Die von \mathbb{C}_+ auf \mathbb{E} übertragene ("zurückgeholte") Riemannsche Metrik ist

$$\tilde{g}_z(a, a) = g_{h(z)}(Dh_z a, Dh_z a) = g_{h(z)}(h'(z)a, h'(z)a) = \frac{|h'(z)|^2 |a|^2}{(\operatorname{Im} h(z))^2}$$

für alle $a \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Dabei ist

$$\begin{aligned} h'(z) &= i \frac{-(1+z) - (1-z)}{(1+z)^2} = \frac{-2i}{(1+z)^2}, \\ \operatorname{Im} h(z) &= \operatorname{Im} i \frac{(1-z)(1+\bar{z})}{(1+z)(1+\bar{z})} = -\frac{1-z\bar{z}}{|1+z|^2}, \end{aligned}$$

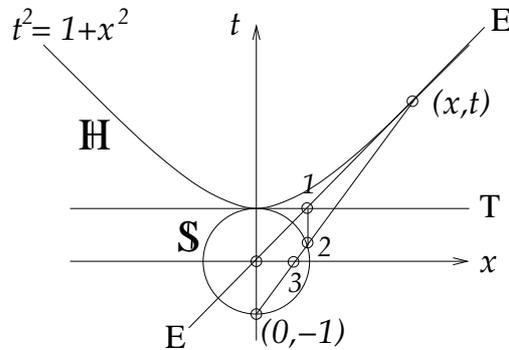
also

$$\tilde{g}_z(a, a) = \frac{4}{(1-|z|^2)^2} |a|^2.$$

Wir erhalten also auf $U = \mathbb{E}$ die Metrik (64) zurück und haben damit gesehen, dass (65) ebenfalls die hyperbolische Ebene beschreibt. Analog kann man auch in beliebigen Dimensionen den Einheitsball durch den Halbraum $\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \ni (x, y)$ ersetzen mit der Metrik $g_{(x,y)}(a, b) = \frac{1}{y^2} \langle a, b \rangle$ und bekommt ein weiteres Modell des hyperbolischen Raums, das *Halbraum-Modell*.

²⁹Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt *nach Bogenlänge parametrisiert*, wenn $|c'| = 1$, d.h. $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 1$. Jede *reguläre* Kurve ($c'(t) \neq 0$ für alle t) lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren.

auf die Hyperebene \mathbb{R}^n (die “ x -Achse”) und erhalten Punkt 3; diese letztere Abbildung ist die *Stereographische Projektion* von \mathbb{S} .



Lemma 15.1. *Der so erhaltene Punkt 3 ist $\phi^{-1}(x, t)$.*

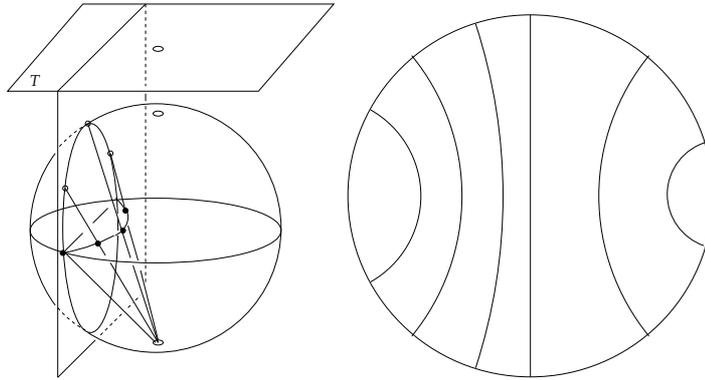
Beweis. Punkt 1 ist proportional zu (x, t) , aber mit t -Koordinate 1, also ist $1 = (\frac{x}{t}, 1)$. Dabei lag (x, t) auf dem Hyperboloid \mathbb{H} , also ist $t = \sqrt{1+x^2}$. Der Punkt 2 hat die gleiche x -Koordinate wie 1 und zusätzlich Abstand 1 vom Ursprung, also ist die t -Komponente von 2 die Quadratwurzel aus $1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$, somit ist $2 = (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}})$. Wir müssen zeigen, dass 2 auf der Verbindungsgeraden zwischen $(0, -1)$ und (x, t) liegt, also von der Gestalt

$$g(s) = (0, -1) + s(x, t + 1) = (sx, s(t + 1) - 1)$$

ist. Das s wird so bestimmt, dass die x -Komponente von $g(s)$ mit der von 2 schon übereinstimmt, also gleich $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ist. Dann ist $sx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ und damit $s = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{t}$, und die t -Komponente von $g(s)$ ist gleich $s(t + 1) - 1 = 1 + \frac{1}{t} - 1 = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, also gleich der von 2. Damit ist $g(s)$ der Punkt 2, und 3 muss das Urbild $\phi^{-1}(x, t)$ sein, weil der Punkt auf dem Projektionsstrahl von $(0, -1)$ nach (x, y) liegt. \square

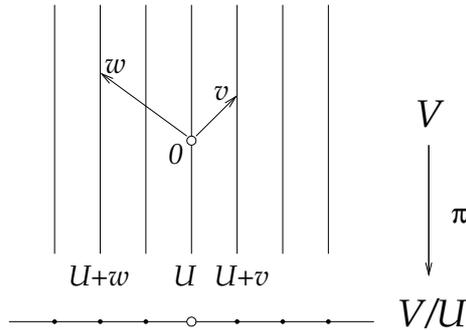
Was bringt uns diese Beschreibung? Wir haben die hyperbolische Stereographische Projektion als Komposition von drei Abbildungen geschrieben: die Zentralprojektion vom Ursprung $(0, 0)$ auf die Tangentialebene T , die vertikale Projektion auf die obere Halbsphäre, und die (sphärische) Stereographische Projektion. Unter jeder Teilabbildung können wir sehen, wohin die Geodäten gehen. Die Zentralprojektion bildet die Geodäte $\mathbb{H} \cap E$ auf das Geradenstück $T_1 \cap E$ ab; T_1 ist ein weiteres Modell des hyperbolischen Raums, in dem die Geodäten die Gestalt von Geradenstücken annehmen, das *Kleinsche Modell*. Wenn wir diese Geradenstücke in der gemeinsamen Tangentialhyperebene T

von H und S vertikal auf die obere Halbsphäre von S projizieren, erhalten wir Schnitte mit vertikalen Ebenen, also Kleinkreise, die den Äquator $S \cap \mathbb{R}^n$ senkrecht treffen. Diese werden nun mit der Stereographischen Projektion vom Südpol aus auf die Äquatorebene \mathbb{R}^n projiziert. Da die Stereographische Projektion Kreise in Kreise abbildet und Winkel erhält, sind die Bilder der vertikalen Bögen Kreisbögen im Einheitsball $U \subset \mathbb{R}^n$, die den Rand, die Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ senkrecht schneiden, sogenannte *Orthokreise*.

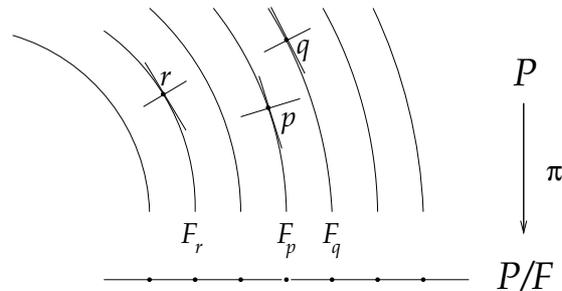


16. QUOTIENTEN-MANNIGFALTIGKEITEN

Neben den Untermannigfaltigkeiten gibt es noch eine andere Konstruktion Riemannscher Mannigfaltigkeiten, die in gewissem Sinne dazu dual ist und die wir nur kurz streifen wollen: die Quotienten-Mannigfaltigkeiten. Diese sind nach derselben Idee wie der Quotienten-Vektorraum modelliert: Ist V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum, so bildet die Menge der Nebenklassen $\{v+U; v \in V\}$ wieder einen Vektorraum, den Quotientenraum oder Faktorraum V/U , denn Nebenklassen kann man in offensichtlicher Weise addieren und mit Skalaren multiplizieren: $(v+U) + (w+U) := v+w+U$ und $\lambda(v+U) = \lambda v+U$. Geometrisch gesehen sind die Elemente des Quotientenraum die affinen Unterräume von V , die zu U parallel sind. Mit V/U verbunden ist die lineare Abbildung $\pi : V \rightarrow V/U$, $\pi(v) = v+U$, die *kanonische Projektion*.

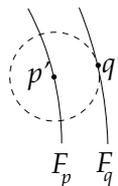


Ganz analog sind *Quotientenmannigfaltigkeiten* konstruiert. Statt des großen Vektorraums V haben wir eine große Riemannsche Mannigfaltigkeit P , und durch jeden Punkt $p \in P$ geht eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit F_p , *Faser* genannt, entsprechend dem affinen Unterraum $v + U$ durch $v \in V$.



Alle Fasern sollen parallel sein im Sinne von *äquidistant*: Für je zwei Fasern F_p und F_q ist der Abstand von p zu F_q gleich dem Abstand jedes anderen Elementes $p' \in F_p$ zu F_q ; der *Abstand von p zu F_q* ist nach Definition das Infimum aller Längen von Kurven in P mit Anfangspunkt p und Endpunkt in F_q . Außerdem soll die Zuordnung, die jedem Punkt $p' \in F_p$ den “nächsten” Punkt (“*Fußpunkt*”) $q' \in F_q$ zuordnet, der unter allen Punkten von F_q den kleinsten Abstand von p' hat,³⁰ ein Diffeomorphismus sein, wenn F_p und F_q genügend nahe beieinander liegen. Dann

³⁰Es kann im Prinzip mehrere nächste Punkte an p' geben, aber wenn p' genügend nahe bei F_q liegt, gibt es genau einen, wie wir noch sehen werden. F_q verhält sich im Kleinen genau wie ein affiner Unterraum.



bildet die Menge der Fasern $P/F := \{F_p; p \in P\}$ wieder eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Dimension $n = \dim P - \dim F_p$: Der Tangentialraum im Punkt $F_p \in P/F$ ist der Quotientenraum $T_p P / T_p F_p$, und der Abstand zwischen F_p und $F_q \in P/F$ ist gerade der Abstand von p zu F_q . Die kanonische Projektion $\pi : P \rightarrow P/F$, $\pi(p) = F_p$ ist differenzierbar, und $D\pi_p : T_p P \rightarrow T_{F_p}(P/F)$ ist die lineare kanonische Projektion $T_p P \rightarrow T_p P / T_p F_p$. Alle Ableitungen $D\pi_p : T_p P \rightarrow T_{F_p}(P/F)$, sind also surjektiv, und auch die Abbildung π selbst ist surjektiv; eine solche Abbildung nennt man eine *Submersion*. Außerdem ist sie so nahe an einer Isometrie, wie es nur möglich ist: Eine echte Isometrie kann π nicht sein, weil $D\pi_p$ ja einen Kern besitzt, nämlich $T_p F_p$. Aber auf dessen orthogonalem Komplement, $\mathcal{H}_p = T_p P \ominus T_p F_p$, dort kann $D\pi_p$ sehr wohl eine Isometrie sein, und genau dies ist der Fall. Eine Submersion mit dieser Eigenschaft nennt man *Riemannsche Submersion*. Die Unterräume $\mathcal{V}_p = T_p F_p$ und $\mathcal{H}_p = (T_p F_p)^\perp$ nennt man auch *Vertikalraum* und *Horizontalraum*.

Levi-Civita-Ableitung und Krümmung der Riemannschen Mannigfaltigkeiten P und P/H sind eng miteinander verknüpft (*O'Neill-Formeln*).³¹ Insbesondere ist die Schnittkrümmung einer horizontalen Ebene in P nicht größer als die Schnittkrümmung ihrer Projektion in P/F ; die Riemannsche Submersion π wirkt also (schwach) krümmungserhöhend.

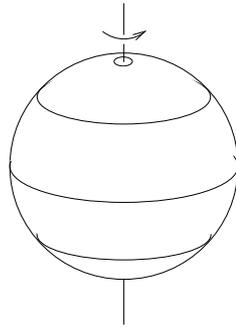
Eine große Klasse von Beispielen erhält man durch freie isometrische Operationen von Liegruppen auf einer Mannigfaltigkeit P . Eine *Liegruppe* ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G mit einer differenzierbaren Gruppenstruktur, d.h. es gibt ein ausgezeichnetes Element $e \in G$ (das Neutralelement und zwei differenzierbare Abbildungen $(g, \tilde{g}) \mapsto g\tilde{g} : G \times G \rightarrow G$ (Gruppenmultiplikation) und $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$ (Inversion) mit den üblichen Gruppenaxiomen (Assoziativität, Rolle von Neutralelement und dem Inversen). Die Abbildungen $L_g : x \mapsto gx$ und $R_g : x \mapsto xg$ sind daher Diffeomorphismen von G (mit Umkehrungen $L_{g^{-1}}$ und $R_{g^{-1}}$), genannt *Links-* und *Rechts-translation*. Beispiele für Liegruppen sind die orthogonale Gruppe $O_m = \{a \in \mathbb{R}^{m \times m}; a^*a = e\}$ und die anderen Matrixgruppen, SL_m , U_m , SU_m , Sp_m .³² Eine *Operation* (*Wirkung*, *Aktion*) einer Liegruppe H

³¹Vgl. z.B. A. Besse: *Einstein Manifolds* (Springer 1986) oder J. Cheeger, D.B. Ebin: *Comparison Theorems in Riemannian Geometry* (North Holland 1975).

³² SL_n besteht aus den Matrizen mit Determinante 1 (über jedem Körper, insbesondere über \mathbb{R} und \mathbb{C}), U_n und Sp_m sind wie O_m definiert, nur dass die Matrizen a komplexe oder quaternionale Koeffizienten haben mit $(a^*)_{ij} = \overline{a_{ji}}$, und $SU_m = U_m \cap SL_m(\mathbb{C})$.

auf einer Mannigfaltigkeit P ist ein Gruppenhomomorphismus von H in die Diffeomorphismengruppe von P , genauer eine differenzierbare Abbildung $\Phi : H \times P \rightarrow P$, bezeichnet $\Phi(h, p) = \Phi_h(p) = hp$, mit $ep = p$ und $\tilde{h}(hp) = (\tilde{h}h)p$. Die Linkstranslation ist eine Wirkung von H auf sich selbst, die Rechtstranslation nicht, weil sie die Reihenfolge der Faktoren umdreht: $R_h R_{\tilde{h}} x = x \tilde{h} h = R_{\tilde{h}h} x$; dagegen ist $\Phi_h = R_{h^{-1}}$ wieder eine Wirkung. Die Operation heißt *isometrisch*, wenn alle $\Phi_h : P \rightarrow P$ Isometrien von P sind.

Ist H eine Liegruppe mit einer isometrischen Gruppenwirkung auf P so setzt man $F_p := Hp = \{hp; h \in H\}$. Diese Menge wird *Orbit* oder *Bahn* des Punktes p unter der Gruppe G genannt. Wir nehmen an, dass alle F_p abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten sind.³³ Zwei verschiedene Bahnen F_p und F_q sind dann tatsächlich äquidistant, denn jedes $p' \in F_p$ erfüllt $p' = hp$ für ein $h \in H$, und da auch F_q invariant unter der Isometrie h ist, gilt $d(p', F_q) = d(hp, hF_q) = d(p, F_q)$. Keineswegs gewährleistet ist aber die Diffeomorphie von verschiedenen Bahnen.



Wenn wir uns zum Beispiel auf der 2-Sphäre \mathbb{S}^2 die Gruppe der Drehungen um die z -Achse ansehen (Erddrehung), so sind die Bahnen die Breitenkreise, mit Ausnahme der beiden Pole $\pm e_3$, die unter diesen Drehungen fix bleiben; ihre Bahn besteht also jeweils nur aus einem einzigen Punkt. Um solche Phänomene auszuschließen, nehmen wir zusätzlich an, dass die Gruppe *frei operiert*, d.h. kein $h \in H$ außer der Identität e besitzt irgendwo auf P einen Fixpunkt. Dann ist jede Bahn F_p diffeomorph zu H unter der Abbildung $h \mapsto hp : H \rightarrow P$. Wenn q' nun der Fußpunkt von p in F_q ist, dann ist hq' der Fußpunkt von hp in F_q , und die Abbildung $hq' \mapsto hp$ ist ein Diffeomorphismus. Eine solche Riemannsche Faserung nennt man *orbitale Faserung*, und statt P/F schreibt man in diesem Fall P/H .

³³Das ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn H eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe aller Isometrien, der *Isometriegruppe* von P ist.

17. BEISPIELE VON QUOTIENTENMANNIGFALTIGKEITEN

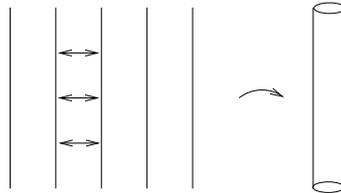
Wir haben drei Klassen von Beispielen von Riemannschen Faserungen, besonders von orbitalen Faserungen im Auge: Überlagerungen, Hopf-Faserungen und Nebenklassenräume von Gruppen.

17.1. Überlagerungen. In diesem Fall ist die Gruppe H , die auf P frei und isometrisch operiert, null-dimensional (*diskret*), alle Bahnen sind also diskrete Punktfolgen. Ein sehr einfaches Beispiel ist die Kreislinie \mathbb{S}^1 , die man nicht nur als Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, sondern auch als Quotientenmannigfaltigkeit von \mathbb{R} gewinnen kann, wobei die Gruppe H aus den Translationen $x \mapsto x + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ besteht; wir schreiben kurz $H = 2\pi\mathbb{Z}$. Die Gerade wird wie ein Faden aufgewickelt, wobei jedes ganzzahlige Vielfache von 2π auf die gleiche Stelle kommt. Man kann auch sagen: Man nimmt das Intervall $[0, 2\pi]$ und verklebt die beiden Randpunkte. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$ bildet $\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ diffeomorph auf $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ ab.

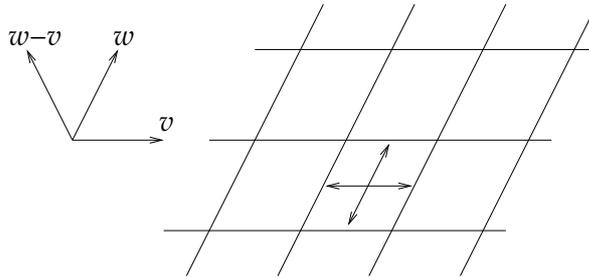
Man kann dieses Beispiel auf 2 und mehr Dimensionen übertragen, im einfachsten Fall durch Produktbildung:

$$\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}) = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

Diese Mannigfaltigkeit nennt man einen *Torus*. Topologisch gesehen ist das einfach ein geschlossener Schlauch: Solange man nur in x -Richtung identifiziert, erhält man einen Zylinder (ein aufgerollter Teppich), die zweite Identifizierung in y -Richtung schließt die Enden des Teppichs zusammen.

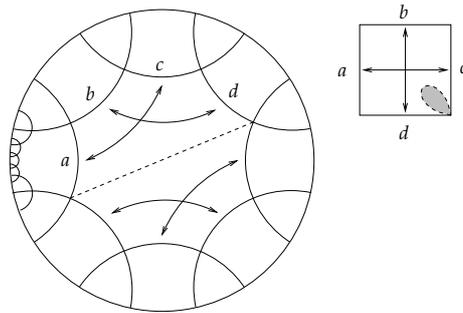


Der so entstandene Torus heißt *Quadrat-Torus*, denn er entsteht aus der Identifizierung (Verklebung) der gegenüberliegenden Kanten eines Quadrats mit Kantenlänge 2π . Die Gruppe $H = 2\pi\mathbb{Z}^2$ nennt man ein *Gitter*, hier ein *Quadratgitter* (Rechenkästchenmuster). Sie ist eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$ mit den beiden Erzeugenden $2\pi e_1$ und $2\pi e_2$. Man kann diese Erzeuger durch ein beliebiges Paar linear unabhängiger Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ ersetzen; die Gruppe $H = \{kv + lw; k, l \in \mathbb{Z}\}$ operiert auf \mathbb{R}^2 durch Translation, und der Quotient \mathbb{R}^2/H ist ein *schiefes Torus*. Man kann ihn auch dadurch gewinnen, dass man die gegenüberliegenden Seiten des durch v und w aufgespannten Parallelogramms identifiziert.



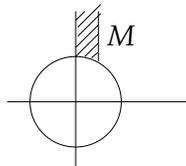
Allgemeiner kann man n -dimensionale Tori mit Hilfe einer beliebigen Basis v_1, \dots, v_n definieren: Man setzt $T = \mathbb{R}^n/H$ mit $H = \mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_n$.³⁴ Alle diese Mannigfaltigkeiten haben Schnittkrümmung Null, weil die Metrik lokal dieselbe bleibt wie die euklidische Metrik des \mathbb{R}^n .

In der *Hyperbolischen Ebene* \mathbb{H}^2 hat man diskrete frei operierende Gruppen von Isometrien mit noch interessanteren Quotienten. Man kann zum Beispiel im Poincaré-Modell leicht ein Achteck aus Orthokreisbögen (Geodäten) mit lauter rechten Winkeln finden.



Längs jeder Kante findet man eine hyperbolischen Translation (Komposition von zwei hyperbolischen Spiegelungen), die die eine der beiden senkrecht schneidenden Kanten auf die andere abbildet, wie in der Figur durch die Doppelpfeile angedeutet. Unsere Gruppe H ist die von diesen vier hyperbolischen Translationen erzeugte Untergruppe der Isometriengruppe von \mathbb{H}^2 . Sie bewirkt eine Identifizierung der Kanten des

³⁴Zwei Basen, die durch eine ganzzahlig-invertierbare Matrix ineinander transformiert werden, definieren dasselbe Gitter H und daher denselben Torus. In unserem Beispiel definieren die Vektoren $v, w - v$ den gleichen Torus wie v, w . Legt man $v = e_1$ fest, dann erfasst man bereits alle Tori durch Wahl von w im *Modulgebiet* $M = \{(x, y); x^2 + y^2 \geq 1, x \in [0, \frac{1}{2}], y > 0\}$. Die Gruppe $GL_2(\mathbb{Z})$, die diese Einschränkung möglich macht, nennt man deshalb *Modulgruppe*.



Achtecks in der dargestellten Art. Denkt man sich das Achteck durch die gestrichelte Linie in zwei Teile zerlegt, dann sieht jeder Teil nach der Identifizierung aus wie ein Torus mit einem Loch, das durch die gestrichelte Linie berandet ist (rechte Figur); die gesamte Fläche wird also aus zwei Tori mit Loch bestehen, die entlang der Loch-Randes zusammengeklebt sind.

Allgemeiner kann man von einem hyperbolischen rechtwinkligen $4n$ -Eck ausgehen und jeweils vier aufeinanderfolgende Kanten kreuzweise identifizieren, wie beim Achteck gezeigt. Dann erhält man eine andere Gruppe H , und \mathbb{H}^2/H ist eine Vereinigung von n Tori mit Loch. Die Zahl n der Tori nennt man das *Geschlecht* der Fläche. Auf diese Weise kann man einer Fläche von beliebigem Geschlecht eine Metrik mit Krümmung $K = -1$ geben (von \mathbb{H}^2 geerbt), und das natürlich in vielfältiger Weise, ähnlich wie beim Torus; den zugehörigen Modulraum nennt man *Teichmüller-Raum*.

17.2. Hopf-Faserungen. Bei den Hopf-Faserungen³⁵ ist P die Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Für alle n operiert die Gruppe $H = \{\pm I\} = \mathbb{S}^0$ frei auf \mathbb{S}^n , denn die *Antipodenabbildung* $-I$ hat keine Fixpunkte.³⁶ Der Quotient $\mathbb{S}^n/\mathbb{S}^0$ ist der reell-projektive Raum $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, die Menge aller eindimensionalen Unterräume (Geraden durch 0) im \mathbb{R}^{n+1} (jede solche Gerade schneidet \mathbb{S}^n in einem antipodischen Punktepaar). Wenn n ungerade ist, $n = 2m + 1$, dann ist \mathbb{S}^n die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{2m+2} = \mathbb{C}^{m+1}$. Die komplexen Zahlen wirken auf \mathbb{C}^{m+1} durch Skalarmultiplikation, und die komplexen Zahlen mit Betrag 1 erhalten die Norm jedes Vektors. Also operiert $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ auf der Sphäre \mathbb{S}^{2m+1} , und zwar frei, denn $\lambda x \neq x$ für alle $\lambda \neq 1$. Der Quotient $\mathbb{S}^{2m+1}/\mathbb{S}^1$ ist der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, die Menge der eindimensionalen komplexen Unterräume (komplexen Geraden durch 0) des \mathbb{C}^{m+1} , denn jede komplexe Gerade durch 0 schneidet \mathbb{S}^{2m+1} in den \mathbb{S}^1 -Vielfachen eines Vektors. Im Fall $n = 4m + 3$ ist \mathbb{S}^n die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{4m+4} = \mathbb{H}^{m+1}$, wobei \mathbb{H} hier den Schiefkörper der *Quaternionen* bezeichnet.³⁷ Die Quaternionen der Länge 1 bilden die Gruppe $\mathbb{S}^3 = SU_2$, die auf $\mathbb{S}^{4m+3} \subset \mathbb{H}^{m+1}$ durch quaternionale Skalarmultiplikation operiert, und zwar wieder frei, und der Quotient $\mathbb{S}^{2m+3}/\mathbb{S}^3$ ist der quaternional-projektive Raum $\mathbb{H}\mathbb{P}^m$, die

³⁵Heinz Hopf, 1894 Gräbschen bei Breslau - 1971 Zollikon bei Zürich

³⁶Das ist ein einfaches Beispiel einer diskreten isometrischen Gruppenaktion, wie wir sie im vorigen Unterabschnitt betrachtet haben. Für ungerade n gibt es weitere solche Aktionen, zum Beispiel für jedes $k \in \mathbb{N}$ die $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ -Aktion durch Skalarmultiplikation mit Potenzen einer primitiven k -ten Einheitswurzel ω (d.h. $\omega^k = 1$, aber $\omega^j \neq 1$ für $j < k$).

³⁷Die *Quaternionen*, 1844 von W.R. Hamilton entdeckt, sind der Vektorraum \mathbb{R}^4 mit Basis $1, i, j, k$ und der (assoziativen) Multiplikation $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Menge der quaternionalen Geraden durch 0 in \mathbb{H}^{m+1} . Es gibt noch eine weitere Divisionsalgebra,³⁸ die *Oktavenalgebra* $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. Auch für diese ist noch eine projektive Ebene $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ (mit Dimension 16) definiert, doch sie ist nicht mehr Quotientenmannigfaltigkeit einer Sphäre.³⁹ Aber die Einheitssphäre im Tangentialraum eines Punktes o von $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$, die 15-Sphäre, besitzt noch eine Hopf-Faserung; sie ist gefasert durch 7-Sphären. Jeder Punkt $p \in \mathbb{O}\mathbb{P}^2$ ist nämlich mit o durch genau eine oktonial-projektive Gerade (eine 8-Sphäre) verbunden, und je zwei dieser Geraden schneiden sich nur in o . Ihre Tangentialräume in o schneiden die 15-Sphäre jeweils in einer 7-Sphäre, und diese 7-Sphären bilden die Hopf-Faserung der 15-Sphäre. Sie gehört zu einer Riemannschen Submersion $\pi : S^{15} \rightarrow \mathbb{O}\mathbb{P}^1 = S^8$ (wie in den analogen Fällen $\mathbb{R}\mathbb{P}^1 = S^1$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = S^2$, $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 = S^4$), aber im Gegensatz zu den anderen Fällen ist dies keine orbitale Submersion; die 7-Sphären sind nicht gemeinsam die Bahnen einer Gruppenoperation auf S^{15} .

17.3. Quotienten von Liegruppen. Die dritte Klasse besteht aus Quotienten von Liegruppen. Jede (im topologischen Sinn) abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ ist auch eine Untermannigfaltigkeit, also wieder eine Liegruppe.⁴⁰ Die Untergruppe H wirkt auf G durch Rechtstranslation $(h, g) \mapsto gh^{-1}$, und die Bahnen dieser Aktion sind die Nebenklassen $gH = \{gh^{-1}; h \in H\}$. Die kanonische Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$, $g \mapsto gH$ ist eine Riemannsche Submersion für jede Riemannsche Metrik auf G , für die die Rechtstranslationen mit allen $h \in H$ als Isometrien wirken; es gibt viele solcher Metriken.⁴¹

³⁸Eine *Algebra* ist ein Vektorraum A mit einer bilinearen Abbildung $A \times A \rightarrow A$, genannt *Multiplikation*. A heißt *Divisionsalgebra*, wenn jede Gleichung $ax = b$ oder $xa = b$ eindeutig lösbar ist. Die Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ sind auch *normiert*, d.h. $|ab| = |a||b|$ für alle $a, b \in A$. Rechts- und Linksmultiplikationen mit Einheitsvektoren sind daher normerhaltende, also orthogonale lineare Abbildungen auf A .

³⁹Vgl. "Quaternionen und Oktaven" sowie "Quaternionen und Oktaven (2)" unter www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu

⁴⁰Für diese und andere hier nicht bewiesene Tatsachen über Liegruppen verweisen wir auf Hochschild, G. (1965): The structure of Lie groups, sowie S. Helgason (2001): Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.

⁴¹Jedes Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $T_e G$ lässt sich zu einer Riemannschen Metrik auf G fortsetzen, die sogar invariant unter *allen* Rechtstranslationen $R_{\tilde{g}}$, $\tilde{g} \in G$ ist: Sind $a, b \in T_g G$, so liegen $a_o := DR_{g^{-1}}a$ und $b_o := DR_{g^{-1}}b$ in $T_e G$ und wir definieren $\langle a, b \rangle := \langle a_o, b_o \rangle$. Dass die so definierte Riemannsche Metrik tatsächlich rechtsinvariant ist, sieht man wie folgt. Wenden wir auf $a \in T_g G$ zunächst eine Rechtstranslation $R_{\tilde{g}}$ an, so erhalten wir $a_1 = DR_{\tilde{g}}a \in T_{g\tilde{g}}G$, denn $R_{\tilde{g}}g = g\tilde{g}$. Um $\langle a_1, a_1 \rangle$ auszurechnen, müssen wir nach obiger Regel auf a_1 zuerst $R_{(g\tilde{g})^{-1}}$ anwenden, um wieder in den Tangentialraum $T_e G$ zu kommen. Nach der Kettenregel ist

Das Beispiel ist deshalb von großer Bedeutung, weil alle *homogenen* Riemannschen Mannigfaltigkeiten sich als Nebenklassenräume G/H darstellen lassen. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt *homogen*, wenn eine Gruppe G darauf isometrisch und *transitiv* wirkt, d.h. es gibt nur einen einzigen Orbit, je zwei Elemente $x_o, x \in M$ sind durch ein $g \in G$ verbunden: $x = gx_o$. Zum Beispiel ist die n -Sphäre \mathbb{S}^n ein homogener Raum, denn O_{n+1} wirkt darauf transitiv, und wenn $n = 2m + 1$, also $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$, dann wirken auch U_{m+1} und SU_{m+1} transitiv.

Wenn also G auf M transitiv wirkt, dann betrachten wir die Untergruppe $H \subset G$, deren Elemente einen festen Punkt $x_o \in M$ als Fixpunkt haben: $H = \{g \in G; gx_o = x_o\}$; sie wird *Stabilisator* oder *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von x_o genannt. Die Gruppenoperation gibt uns eine differenzierbare Abbildung

$$(66) \quad \Phi^o : G/H \rightarrow M, \quad \Phi^o(gH) = gx_o.$$

Diese ist wohldefiniert, denn falls $gH = \tilde{g}H$, dann ist $\tilde{g} = gh$ und $\tilde{g}x_o = ghx_o = gx_o$. Sie ist surjektiv, denn alle $x \in M$ sind von der Form gx_o für ein $g \in G$. Sie ist auch injektiv, denn wenn $gx_o = \tilde{g}x_o$, dann folgt $g^{-1}\tilde{g}x_o = x_o$, also $g^{-1}\tilde{g} =: h \in H$; somit ist $\tilde{g} = gh$ und $\tilde{g}H = gH$. In der Tat ist sie ein Diffeomorphismus.⁴² Dieser Diffeomorphismus überträgt die Wirkung von G auf G/H durch Linkstranslation ($\tilde{g}(gH) = (\tilde{g}g)H$) auf die (völlig beliebige!) Wirkung von G auf M , denn $\Phi(\tilde{g}gH) = \tilde{g}\Phi(gH)$. Damit können wir alle homogenen Räume samt ihrer Gruppenwirkung auf die Nebenklassenräume von Liegruppen zurückführen. Beispiel: Für die Wirkung von O_{n+1} auf der Sphäre \mathbb{S}^n ist die Standgruppe von e_{m+1} die Untergruppe O_n , also ist $\mathbb{S}^n = O_{n+1}/O_n$.

$DR_{(g\tilde{g})^{-1}}DR_{\tilde{g}}a = D(R_{(g\tilde{g})^{-1}} \circ R_{\tilde{g}})a = DR_{g^{-1}}a = a_o$, denn die Rechtstranslation dreht (ebenso wie die Inversion) die Reihenfolge um ($R_{gh}x = x(gh) = (xg)h = R_h R_g x$), also ist $R_{(g\tilde{g})^{-1}} \circ R_{\tilde{g}} = R_{\tilde{g}(g\tilde{g})^{-1}} = R_{g^{-1}}$.

Man kann auch allgemeiner Untergruppen $H \subset G \times G$ betrachten, die von links und rechts gleichzeitig operieren: $(h_1, h_2)g = h_1gh_2^{-1}$. Auch solche Gruppen können frei und isometrisch operieren, was zu neuen und interessanten Quotientenmannigfaltigkeiten G/H führt, vgl. "Freie isometrische Aktionen auf kompakten Liegruppen mit positiv gekrümmten Orbiträumen", www.math.uni-augsburg.de/~eschenbu

⁴²Das ergibt sich aus der Mannigfaltigkeitsstruktur von G/H : Die Abbildung $\hat{\Phi}^o : G \rightarrow M$, $\hat{\Phi}^o(g) = gx_o$ ist differenzierbar, und der Kern der Ableitung in g ist genau der Tangentialraum der Faser gH , der Vertikalraum \mathcal{V}_g . Deswegen ist $D\hat{\Phi}_g^o$ auf dem Horizontalraum $\mathcal{H}_g = \mathcal{V}_g^\perp$ injektiv. Da $D\hat{\Phi}_g^o$ auch surjektiv ist, ist $D\hat{\Phi}_{gH}^o$ umkehrbar. Eine bijektive differenzierbare Abbildung mit umkehrbaren Ableitungen ist nach dem Umkehrsatz (Inverser Funktionensatz) ein Diffeomorphismus.

Es gibt noch eine Verallgemeinerung dieser Klasse von Faserungen: Ist eine Kette von abgeschlossenen Untergruppen $K \subset H \subset G$ gegeben, so gibt es eine Faserung $G/K \rightarrow G/H$, die nicht mehr orbital ist. Die Hopffaserung der 15-Sphäre ist von dieser Art.

18. KOVARIANTE ABLEITUNG LÄNGS EINER KURVENSCHAR

Wir müssen noch einen mehr technischen Punkt klären. Wir haben in Abschnitt 12 die kovariante Ableitung längs einer Kurve definiert. Was passiert, wenn wir statt einer Kurve eine "Fläche" vorliegen haben, eine Abbildung von zwei Variablen $f : I \times J \rightarrow M$? Wir können diese in doppelter Weise als Schar von Kurven verstehen, $s \mapsto f(s, t)$ für festes t sowie $t \mapsto f(s, t)$ für festes s , und damit sind die kovariante Ableitungen längs f in s - und in t -Richtung definiert. Der Einfachheit halber identifizieren wir M mit $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Hilfe einer Parametrisierung $\phi : U \rightarrow M$; dabei werden die Einheitsvektoren e_i mit den partiellen Ableitungen $\phi_i = D\phi \cdot e_i$ identifiziert. Wenn $f = f^i e_i$, dann sind die partiellen Ableitungen $\partial_s f = \frac{\partial f}{\partial s}$ und $\partial_t f = \frac{\partial f}{\partial t}$ gegeben durch $\partial_s f = (\partial_s f^i) e_i$ und $f_t = (\partial_t f^j) e_j$. Für jedes Vektorfeld $A = a^i \phi_i$ längs f , (d.h. $A : I \times J \rightarrow \mathbb{R}^d$ differenzierbar mit $A(s, t) \in T_{f(s,t)}M$), gilt mit (45)

$$\begin{aligned} \nabla_t A &= (\partial_t a^i) \phi_i + a^i \nabla_{\partial_t f} \phi_i \\ &= (\partial_t a^i) \phi_i + a^i (\partial_t f^j) \nabla_j \phi_i \\ &= (\partial_t a^i) \phi_i + a^i (\partial_t f^j) \Gamma_{ji}^k \phi_k \end{aligned}$$

Speziell für $A = \partial_s f = (\partial_s f^i) \phi_i$ haben wir $a^i = \partial_s f^i$ und $\partial_t a^i = \partial_t \partial_s f^i$ und daher

$$(67) \quad \nabla_t \partial_s f = (\partial_t \partial_s f^i) \phi_i + (\partial_s f^i) (\partial_t f^j) \Gamma_{ji}^k \phi_k = \nabla_s \partial_t f.$$

Wenn wir zweifache Ableitungen ausrechnen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla_s \nabla_t A &= \nabla_s ((\partial_t a^i) \phi_i + a^i \nabla_t \phi_i) \\ &= (\partial_s \partial_t a^i) \phi_i + (\partial_t a^i) \nabla_s \phi_i + (\partial_s a^i) \nabla_t \phi_i + a^i \nabla_s \nabla_t \phi_i \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist symmetrisch in s und t , abgesehen vom letzten Term. Beim Antisymmetrisieren bleibt also nur dieser übrig:

$$[\nabla_s \nabla_t] A = a^i [\nabla_s, \nabla_t] \phi_i.$$

Dabei ist wegen $\nabla_t = (\partial_t f^j) \nabla_j$ und $\nabla_s = (\partial_s f^j) \nabla_j$

$$\begin{aligned} \nabla_s \nabla_t \phi_i &= \nabla_s ((\partial_t f^j) \nabla_j \phi_i) \\ &= (\partial_s \partial_t f^j) \nabla_j \phi_i + (\partial_t f^j) (\partial_s f^k) \nabla_k \nabla_j \phi_i. \end{aligned}$$

Wieder entfällt der erste Term beim Antisymmetrisieren und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 [\nabla_s, \nabla_t]\phi_i &= (\partial_t f^j)(\partial_s f^k)[\nabla_k, \nabla_j]\phi_i \\
 &= (\partial_t f^j)(\partial_s f^k)R_{kj}\phi_i \\
 (68) \qquad \qquad &= R(\partial_s f, \partial_t f)\phi_i,
 \end{aligned}$$

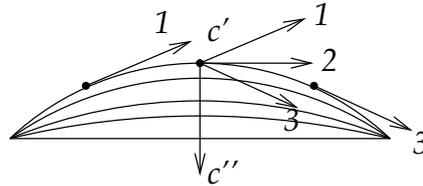
denn $\partial_s f = (\partial_s f^k)\phi_k$ und $\partial_t f = (\partial_t f^j)\phi_j$. Insgesamt folgt also:

$$(69) \qquad [\nabla_s, \nabla_t]A = a^i R(\partial_s f, \partial_t f)\phi_i = R(\partial_s f, \partial_t f)A.$$

19. ERSTE VARIATION DER LÄNGE

Leitfrage: Gibt es zwischen zwei Punkten x und y in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M eine *kürzeste* Kurve? Gibt es eine Kurve $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$ mit $c(a) = x$, $c(b) = y$ und $L(c) = d(x, y) = \inf\{L(\tilde{c}); \tilde{c} : x \rightsquigarrow y\}$?

Wir wollen uns zunächst fragen, welche Kurven *nicht* Kürzeste sind und wie wir sie verkürzen können. Im euklidischen Raum verkürzen wir eine Kurve c durch Deformation in ihre Krümmungsrichtung.



Ist sie nach Bogenlänge parametrisiert, so ist diese Richtung einfach die zweite Ableitung c'' ; sie gibt an, wie sich der Tangentenvektor c' längs der Kurve verändert. Der Vektor c'' heißt auch *Krümmungsvektor*, seine Länge $|c''|$ ist die *Krümmung* der Kurve. Wenn die Krümmung Null ist, wenn c also eine Gerade ist, können wir nicht verkürzen.

In einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist das nicht viel anders, nur dass wir die zweite Ableitung c'' durch die kovariante Ableitung $\nabla^c c' = \nabla c'$ des Tangentenvektors ersetzen; seine Länge $|\nabla c'|$ heißt *geodätische Krümmung* der Kurve c . Wenn sie verschwindet, ist c eine *Geodäte*.

Satz 19.1. Erste Variationsformel: Es sei $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte C^1 -Kurve, $|c'| = 1$, und c_s sei eine Variation von c , d.h. eine C^1 -Abbildung

$$(-\epsilon, \epsilon) \times [t_0, t_1] \rightarrow M, \quad (s, t) \mapsto c_s(t)$$

mit $c_0 = c$. Wir setzen $' = \frac{\partial}{\partial t}$ und $\delta = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$. Es sei $a = \delta c_s(t_0)$ und $b = \delta c_s(t_1)$. Dann gilt:

$$\delta L(c_s) = \langle b, c'(t_1) \rangle - \langle a, c'(t_0) \rangle + \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c_s(t), \nabla_t c'(t) \rangle dt.$$

Beweis. Es ist $L(c_s) = \int_{t_0}^{t_1} |c'_s(t)| dt$. Differentiation des Integranden ergibt

$$\delta |c'_s| = \delta \sqrt{\langle c'_s, c'_s \rangle} \stackrel{*}{=} \frac{\langle \nabla_t \delta c_s, c' \rangle}{|c'|} = \langle \nabla_t \delta c_s, c' \rangle = \langle \delta c_s, c' \rangle' - \langle \delta c_s, \nabla_t c' \rangle,$$

wobei wir in “ $\stackrel{*}{=}$ ” die Ableitungen nach s und t gemäß (67) vertauscht haben: $\nabla_s \partial_t c_s(t) = \nabla_t \partial_s c_s(t)$. Somit ergibt sich

$$\delta L(c_s) = \int_{t_0}^{t_1} \delta |c_s| = \langle \delta c_s, c' \rangle|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c_s, \nabla c' \rangle. \quad \square$$

Satz 19.2. Eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : [t_0, t_1] \rightarrow M$ mit $c(t_0) = x$ und $c(t_1) = y$ ist Geodätische genau dann, wenn für alle Variationen c_s von c mit festen Endpunkten $c_s(t_0) = x$ und $c_s(t_1) = y$ für alle s gilt: $\delta L(c_s) = 0$.

Beweis. Für Variationen mit festen Endpunkten lautet die Erste Variationsformel

$$\delta L(c_s) = \int_a^b \langle \delta c_s, \nabla c' \rangle.$$

Ist c eine Geodätische, so ist $\nabla c' = 0$ und damit $\delta L(c_s) = 0$. Ist c keine Geodätische, also $\nabla c'(t) \neq 0$ für ein $\bar{t} \in [t_0, t_1]$, so gibt es eine Variation c_s von c mit $\delta c_s = f \cdot \nabla c'$ für eine Funktion $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$, $f(\bar{t}) > 0$ und $f(t_0) = f(t_1) = 0$ (s.u.). Dann ist $\delta L(c_s) = \int_{t_0}^{t_1} (f \cdot |\nabla c'|^2) > 0$.

Um diese Variation zu konstruieren, benutzen wir eine Parametrisierung ϕ um den Punkt $c(t_0)$ und übertragen damit die Kurve c (oder wenigstens ein Stück davon nahe $c(t_0)$) ebenso wie das Vektorfeld $X = \nabla c'$ längs c in den \mathbb{R}^n . Dort können wir jedes beliebige Variationsvektorfeld vorgeben, also auch fX ; wir setzen einfach $c_s(t) = c(t) + f(t)X(t)$ (wobei wir wieder c statt $\phi^{-1} \circ c$ sowie $X(t)$ statt $D\phi_{c(t)}^{-1} X(t)$ schreiben). Wir können annehmen, dass f seinen Träger nahe \bar{t} hat, so dass $c_s(t) \neq c(t)$ nur nahe \bar{t} gilt und wir deshalb außerhalb der Karte $c_s(t) = c(t)$ setzen können. \square

Auf den ersten Blick scheint unsere Leitfrage damit recht befriedigend beantwortet zu sein: Wenn c eine Kürzeste ist, dann ist doch sicher

auch $\delta L(c_s) = 0$ für alle Variationen c_s mit festen Endpunkten und somit c eine Geodätische. Ist umgekehrt c eine Geodätische, so ist die Länge von c vielleicht kein Minimum, aber doch wenigstens stationär bei allen Variationen mit festen Endpunkten. Dies erweist sich aber bei näherem Hinsehen als trügerisch:

- (1) Es ist nicht klar, ob es überhaupt eine Geodäte gibt, die zwei gegebene Punkte x und y verbindet.
- (2) Selbst wenn eine Geodätische existiert, ist nicht klar, ob sie Kürzeste ist.
- (3) Selbst wenn eine Kürzeste zwischen x und y existiert, ist nicht einmal klar, dass diese eine Geodäte ist, denn wir haben von Beginn an vorausgesetzt, dass unsere Kurve c differenzierbar ist; vielleicht ist die Kürzeste gar nicht differenzierbar.

Alle drei Fragen können wir beantworten, wenn wir uns nicht nur eine isolierte Geodätische ansehen, sondern alle Geodätische, die von einem Punkt ausgehen, auf einmal. Das geschieht durch eine Abbildung, die die Matrix-Exponentialabbildung verallgemeinert und deshalb auch (*Riemannsche*) *Exponentialabbildung* genannt wird.

20. DIE RIEMANNSCHE EXPONENTIALABBILDUNG

Die Geodätengleichung $\nabla c' = 0$ oder

$$(70) \quad \ddot{u}^i + \dot{u}^j \dot{u}^k \Gamma_{jk}^i(u) = 0$$

wenn $c(t) = \phi(u(t))$ ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung; deshalb ist jede Lösung eindeutig durch Angabe eines Anfangspunkts und einer Anfangsableitung bestimmt. Wir wollen die Geodäte mit Anfangsvektor $v \in T_x M$ mit γ_v bezeichnen, also $\gamma_v(0) = x$, $\gamma'_v(0) = v$ und $\nabla \gamma' = 0$. Die Geodätengleichung (70) hat noch eine weitere interessante Eigenschaft: Jede affine Umparametrisierung einer Geodäten ist wieder eine Geodäte:

Lemma 20.1. *Wenn $u(t)$ eine Lösung von (70) ist, dann auch $\tilde{u}(t) = u(\alpha t + \beta)$ für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Der formale Grund ist, dass in (70) die zweite Ableitung linear, die erste aber quadratisch vorkommt: $\dot{\tilde{u}}(t) = \frac{d}{dt} u(\alpha t + \beta) = \alpha \dot{u}(\alpha t + \beta)$, und $\ddot{\tilde{u}}(t) = \frac{d}{dt} \alpha \dot{u}(\alpha t + \beta) = \alpha^2 \ddot{u}(\alpha t + \beta)$. Der Faktor α^2 lässt sich also kürzen und (70) gilt auch für \tilde{u} . \square

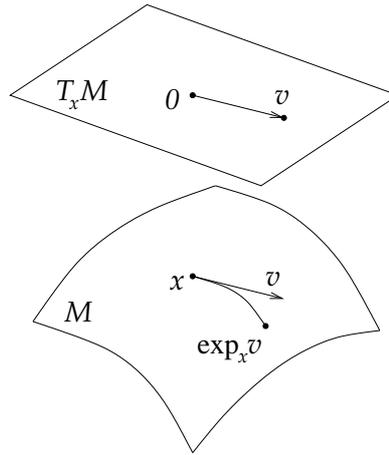
Korollar 20.1. *Wo immer beide Seiten definiert sind, gilt*

$$(71) \quad \gamma_{\alpha v}(t) = \gamma_v(\alpha t)$$

Beweis. $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_v(\alpha t)$ ist Geodäte mit Anfangsvektor $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \alpha \dot{\gamma}_v(0) = \alpha v$. Das Gleiche gilt für $\gamma_{\alpha v}$. Nach dem Eindeutigkeitssatz sind beide Lösungen gleich, $\tilde{\gamma} = \gamma_{\alpha v}$. \square

Definition: Für jedes $x \in M$ und jedes $v \in T_x M$, für das $\gamma_v(1)$ definiert ist, setzen wir

$$(72) \quad \exp_x(v) = \gamma_v(1).$$



Lemma 20.2. *Die Abbildung \exp_x ist auf einer offenen Umgebung des Nullpunktes 0 von $T_x M$ definiert und nahe 0 ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Nach dem Existenzsatz für Differentialgleichungen gibt es eine Umgebung U_1 von 0 in $T_x M$ und ein $\epsilon > 0$, so dass γ_v für alle $v \in U_1$ auf $(-2\epsilon, 2\epsilon)$ definiert ist. Setzen wir $U_2 := \epsilon U_1 = \{\epsilon \cdot v; v \in U_1\}$, so ist γ_w auf $(-2, 2)$ definiert für alle $w \in U_2$ (vgl. Lemma 1); insbesondere ist $\exp_x w = \gamma_w(1)$ definiert. Nach dem Satz über die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung von den Anfangswerten ist die so definierte Abbildung $\exp_x : U_2 \rightarrow M$ differenzierbar. Die Diffeomorphie nahe 0 folgt nun aus dem Umkehrsatz (inverser Funktionensatz). Es ist nämlich leicht, die Ableitung von \exp_x in 0 auszurechnen, also die lineare Abbildung $(D \exp_x)_0 : T_0(T_x M) = T_x M \rightarrow T_x M$, denn für alle $v \in T_x M$ gilt nach Kettenregel:

$$(D \exp_x)_0 v = \left. \frac{d}{dt} \exp_x(tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_v(t) \right|_{t=0} = \gamma'_v(0) = v.$$

Also ist $(D \exp_x)_0$ die Identität auf $T_x M$ und damit invertierbar. Damit ist \exp_x selbst nahe 0 differenzierbar, d.h. \exp_x bildet eine offene Umgebung $U_3 \subset U_2$ von 0 diffeomorph auf eine Umgebung von $x = \exp_x(0)$ in M ab. \square

Definition: Die größte Zahl ϵ mit der Eigenschaft, dass \exp_x auf $B_\epsilon(0)$ ein Diffeomorphismus ist, heißt *Injektivitätsradius* an der Stelle x , geschrieben $i(x)$. Das Argument zeigt auch: Wenn $i(x) > \epsilon$, dann ist auch $i(\tilde{x}) > \epsilon$ für alle \tilde{x} in einer Umgebung von x .

Lemma 20.3. Gaußlemma: In “Exponentialkoordinaten” schneiden sich Radien und Kugeln orthogonal. Genauer: Es sei $\epsilon > 0$ so, dass \exp_x auf $B_\epsilon(0) \subset T_x M$ ein Diffeomorphismus ist und $r \in (0, \epsilon)$. Dann gilt für jedes $v \in T_x M$ mit $|v| = 1$: Die Geodätische $\gamma_v(t) = \exp_x(tv)$ schneidet die Sphäre $\Sigma_r = \exp_x(\partial B_r(0))$ im Punkt $\gamma_v(r)$ orthogonal, d.h. $\gamma'_v(r) \perp T_{\gamma_v(r)}\Sigma_r$.

Beweis. Jeder Vektor $w \in T_{\gamma_v(r)}\Sigma_r = (D \exp_x)_{\gamma_v(r)}(T_{rv}\partial B_r(0))$ ist von der Form $w = \delta \exp_x(r \cdot v(s)) = \delta \gamma_{v(s)}(r)$, wobei $v(s)$ eine Kurve in $T_x M$ mit $v(0) = v$ und $|v(s)| = 1$ für alle s ist; wir setzen wieder $\delta = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}$. Auf die Variation $c_s = \gamma_{v(s)} : [0, r] \rightarrow M$ von $c = \gamma_v$ wenden wir die Erste Variationsformel (19.1) an und erhalten

$$\delta L(c_s) = \langle \delta c_s(r), c'(r) \rangle = \langle w, \gamma'_v(r) \rangle,$$

denn der linke Randterm $\langle \delta c_s(0), c'(0) \rangle$ verschwindet, weil $c_s(0) = x$ für alle s , und auch der Integralterm $\int \langle \nabla c', \delta c_s \rangle$ verschwindet, denn c ist Geodäte, $\nabla c' = 0$. Andererseits wissen wir aber, dass $L(c_s) = \int_0^r |\gamma'_{v(s)}(t)| dt = r|v(s)| = r$ für alle s (vgl. Lemma 12.2), und somit ist $\delta L(c_s) = 0$. \square

Lemma 20.4. Die Abbildung \exp_x ist eine “radiale Isometrie”, d.h. für jeden Vektor $v \in T_x M$ im Definitionsbereich von \exp_x gilt $|(D \exp_x)_v v| = |v|$ und damit $|(D \exp_x)_v w| = |w|$ für alle $w \in \mathbb{R}v$.

Beweis. Es ist $(D \exp_x)_v v = \frac{d}{dt} \exp_x(v + tv)|_{t=0} = \gamma'_v(1+t)|_{t=0} = \gamma'_v(1)$ und damit

$$|(D \exp_x)_v v| = |\gamma'_v(1)| = |\gamma'_v(0)| = |v|$$

nach Lemma 12.2. \square

Satz 20.1. Es sei $\epsilon > 0$ so, dass \exp_x auf $B_\epsilon(0) \subset T_x M$ ein Diffeomorphismus ist. Dann existiert für alle $y \in \exp_x(B_\epsilon(0))$ genau eine Kürzeste γ_{xy} von x nach y , und zwar die Geodätische $\gamma_{xy}(t) = \gamma_{v_o}(t) = \exp_x(tv_o)$ für $v_o = \exp_x^{-1}(y)$.

Beweis. Es sei $c : [t_o, t_1] \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(t_o) = x$ und $c(t_1) = y$. Wir müssen zeigen, dass c länger ist als γ_{xy} , es sei denn, c wäre lediglich eine Umparametrisierung von γ_{xy} . Wir setzen $e = \exp_x|_{B_\epsilon(0)}$ und $v_o = e^{-1}(y)$ sowie $r_o = |v_o|$. Die Kurve c muss die offene Menge $e(B_{r_o}(0))$ verlassen, da ihr Endpunkt y außerhalb liegt. Wenn dies zum ersten Mal

bei $c(\bar{t})$ mit $\bar{t} < t_1$ geschieht, so ersetzen wir c durch die kürzere Kurve $c|_{[t_o, \bar{t}]}$ und zeigen, dass selbst diese noch immer länger als γ_{xy} ist. Wir dürfen somit ohne Einschränkung annehmen, dass c ganz im Abschluss von $e(B_{r_o}(0))$ verläuft, allerdings ist der Endpunkt dann nicht mehr notwendig y , sondern vielleicht ein anderer Punkt $z \in e(\partial B_{r_o}(0))$, eben der Punkt, wo unsere ursprüngliche Kurve c die Menge $e(B_{r_o}(0))$ zum ersten Mal verlässt. Nun setzen wir $v(t) = e^{-1}(c(t))$ für alle $t \in [t_o, t_1]$ (also $c(t) = e(v(t))$) und schreiben $v(t)$ in Polarkoordinaten: $v(t) = r(t)w(t)$ mit $r(t) = |v(t)|$ und $w(t) = v(t)/|v(t)|$. Dann ist $v' = (rw)' = r'w + rw'$ und somit nach dem Gaußlemma (Lemma 20.3) sowie der radialen Isometrie-eigenschaft (Lemma 20.4):

$$|De_v v'|^2 = |De_v(r'w)|^2 + |De_v(rw')|^2 \geq |De_v(r'w)|^2 = |r'w|^2 = |r'|^2. \quad (*)$$

Somit gilt

$$L(c) = \int_{t_o}^{\bar{t}} |c'| = \int_{t_o}^{\bar{t}} |De_v v| \geq \int_{t_o}^{\bar{t}} r' = r(\bar{t}) - r(t_o) = r_o = L(\gamma_{xy}),$$

womit die Ungleichung bewiesen ist. Die Gleichheit gilt nur, wenn der in der Abschätzung (*) weggelassene Term $|De_v(rw')|^2$ überall verschwindet, also $w' = 0$ ist, und wenn zusätzlich $|r'| = r'$ ist, also $r' \geq 0$ gilt. Dann bleibt nur $w = \text{const}$ und $v(t) = r(t)w$ übrig, d.h. c ist eine Umparametrisierung der Geodätischen $\gamma_{r_o w}$. Außerdem muss $\bar{t} = t_1$ und $z = y$ gelten, sonst kann die Gleichheit nicht gelten. Also haben wir $e(r_o w) = \gamma_{r_o w}(1) = y = e(v_o)$ und damit $r_o w = v_o$, also $\gamma_{r_o w} = \gamma_{xy}$. \square

Korollar 20.2. *Für alle $r < i(x)$ ist $e(B_r(0))$ gleich dem Abstandskugel $B_r(x)$ bezüglich der inneren Metrik.*

Unsere eingangs gestellten Fragen 1) und 2) sind jetzt weitgehend beantwortet: Sind $x, y \in M$ genügend nahe beisammen, dann gibt es genau eine Kürzeste zwischen ihnen, und zwar die Geodätische γ_{xy} . Die Frage, was passiert, wenn x und y weit auseinanderliegen, werden wir im nächsten Kapitel behandeln. Auch Frage 3 können wir jetzt beantworten:

Satz 20.2. *Jede Kürzeste ist Geodätische.*

Beweis. Es sei $\lambda : [0, L] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte kürzeste Kurve von $x = \lambda(0)$ nach $y = \lambda(L)$. Nach Satz 2 ist die Kürzeste λ vor und hinter jedem ihrer Punkte $p = \lambda(t)$ (für beliebiges $t \in [0, L]$) ein Stück weit eine Geodätische, denn ist $y = \lambda(t') \in B_\epsilon(x)$ für ein $\epsilon < i(p)$, so muss λ zwischen t und t' bis auf Parametrisierung mit der eindeutig bestimmten Kürzesten γ_{xy} übereinstimmen. Das Argument schließt allerdings noch nicht aus, dass λ einzelne Knickstellen

besitzt. Wir sahen jedoch, dass der Injektivitätsradius $i(x)$ für alle zu x nahe benachbarten \tilde{x} eine gemeinsame untere Schranke $\epsilon > 0$ besitzt. Damit ist λ wirklich eine ungebrochene Geodätische: Gäbe es einen Knick in einem Punkt $x \in \lambda$, so könnten wir Punkte $x', x'' \in \lambda$ vor und hinter dem Knick mit $d(x', x'') < \epsilon$ wählen; der Abschnitt von γ zwischen x' und x'' wäre dann Kürzeste von x' nach x'' innerhalb des Injektivitätsradius von \exp_x , würde aber bei x einen Knick enthalten, also nicht mit $\gamma_{x'x''}$ übereinstimmen; das wäre ein Widerspruch zu Satz 20.1. \square

21. KÜRZESTE IM GROSSEN

Nachdem wir gesehen haben, dass Kürzeste immer Geodätische sind und dass genügend nahe benachbarte Punkte stets durch eine (sogar eindeutige) Kürzeste verbindbar sind, fragen wir nun, ob auch beliebig weit entfernte Punkte $p, q \in M$ durch eine Kürzeste verbindbar sind. Ohne weitere Voraussetzungen kann das nicht stimmen, wie wir schon an einer nicht konvexen offenen Teilmenge der \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik sehen. Es reicht aber aus, vorauszusetzen, dass M "grenzenlos" ist in dem Sinne, dass wir von einem Punkt aus die Geodätische in jeder Richtung bis ins Unendliche fortsetzen können. Die Ideen stammen von H.Hopf und W.Rinow⁴³ (1931).

Satz 21.1. *Es sei M eine (zusammenhängende) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$, und \exp_p sei auf ganz T_pM definiert. Dann gibt es für jeden Punkt $q \in M$ eine Kürzeste γ von p nach q . Insbesondere ist $\bar{B}_R(p) = \exp_p(\bar{B}_R(0))$ für alle $R > 0$.*

Beweis. Wir können alle Geodätischen durch den Punkt p betrachten; eine von ihnen soll den Punkt q treffen und Kürzeste von p nach q sein. Wie finden wir die Anfangsrichtung dieser Geodätischen? Dazu betrachten wir einen kleinen abgeschlossenen Ball $\bar{B}_r(p) = \{x \in M; d(p, x) \leq r\}$ mit $r < i(p)$; die Abbildung \exp_p bildet also den abgeschlossenen euklidischen Ball $\bar{B}_r(0)$ in T_pM diffeomorph auf $\bar{B}_r(p)$ ab. Insbesondere ist $\partial\bar{B}_r(p)$ (Folgen-)kompakt (eine Sphäre), und daher nimmt die stetige⁴⁴ Funktion $d_q : M \rightarrow \mathbb{R}$, $d_q(x) = d(x, q)$ auf $\partial\bar{B}_r(p)$ ein Minimum an, etwa im Punkt $x = \exp_p(rv) \in \partial\bar{B}_r(p)$ für ein $v \in T_pM$ mit $|v| = 1$. Der Punkt x ist also unter allen Punkten von $\partial\bar{B}_r(p)$ am nächsten an q . Wir setzen $\gamma = \gamma_v$ und behaupten $\gamma(R) = q$

⁴³Willi Ludwig August Rinow, 1907 (Berlin) - 1979 (Greifswald)

⁴⁴Die Stetigkeit von d_q folgt aus der umgekehrten Dreiecksungleichung: Wenn $x_i \rightarrow x$, dann $|d_q(x_i) - d_q(x)| \leq d(x_i, x) \rightarrow 0$.

für $R = d(p, q)$. Anders gesagt, für $t = R$ behaupten wir die Gleichung

$$t + d_q(\gamma(t)) = R. \quad (*)_t$$

Die geometrische Bedeutung von $(*)_t$ ist, dass $\gamma_{[0,t]}$ Kürzeste ist und wir außerdem “keinen Umweg machen”, wenn wir von $p = \gamma(0)$ über $\gamma(t)$ nach q laufen, d.h. es gilt $d(p, q) = d(p, \gamma(t)) + d(\gamma(t), q)$.

Wir werden diese Gleichung schrittweise für immer größere t beweisen, “bis wir bei $t = R$ ankommen”. Zunächst zeigen wir $(*)_r$. Eine beliebige Kurve c von p nach q schneidet $\partial\bar{B}_r(p)$, sagen wir in x' , und wir können c in zwei Abschnitte c_1 von p bis x' und c_2 von x' bis q zerlegen. Dann ist $L(c_1) \geq r$ und $L(c_2) \geq d_q(x') \geq d_q(x)$ und also $L(c) = L(c_1) + L(c_2) \geq r + d_q(\gamma(r))$. Dieselbe Ungleichung gilt dann auch für das Infimum R aller dieser $L(c)$, also erhalten wir $R \geq r + d_q(\gamma(r))$. Andererseits ist nach Dreiecksungleichung $R \leq r + d(\gamma(r), q)$ und somit gilt die Gleichheit $(*)_r$.

Es sei nun $s = \sup\{t \in [0, R]; (*)_t \text{ gilt}\} \geq r$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dann auch $(*)_s$. Wir müssen also nur noch $s = R$ beweisen. Dazu zeigen wir allgemeiner: Gilt $(*)_s$ für irgend ein $s < R$, so gilt auch noch $(*)_{s+r_1}$ für ein $r_1 > 0$, d.h. s kann noch nicht das Supremum gewesen sein. Der Beweis ist ähnlich wie der erste Schritt: Es sei $p_1 = \gamma(s)$ und $r_1 < i(p_1)$. Der Punkt $x_1 \in \partial\bar{B}_{r_1}(p_1)$ sei der nächste an q , d.h. d_q nimmt auf der kompakten Menge $\partial\bar{B}_{r_1}(p_1)$ sein Minimum bei x_1 an. Bezeichnen wir mit γ_1 den Abschnitt von γ zwischen p und p_1 , also $\gamma_1 = \gamma|_{[0,s]}$, so ist die zusammengesetzte Kurve $\gamma_1 \cup \gamma_{p_1 x_1}$ mit Länge $s + r_1$ eine Kürzeste. Denn wegen $(*)_s$ ist $d(p, q) = d(p, p_1) + d(p_1, q)$, und wegen der Wahl von x_1 ist $d(p_1, q) = d(p_1, x_1) + d(x_1, q)$ (jede Kurve von p_1 nach q trifft $\partial\bar{B}_{r_1}(p_1)$ in einem Punkt x'_1 usw. wie oben). Also ist

$$d(p, q) = d(p, p_1) + d(p_1, x_1) + d(x_1, q) \quad (**)$$

und damit auch $d(p, x_1) = d(p, p_1) + d(p_1, x_1) = s + r_1$, was zu zeigen war. Eine Kürzeste kann aber keine Knicke haben (Satz 2 des vorigen Kapitels), also ist γ_{p_1, x_1} die geodätische Fortsetzung von γ_1 , d.h. $x_1 = \gamma(s + r)$. Aus $(**)$ ergibt sich nun $(*)_{s+r_1}$.

Die Folgerung $\bar{B}_R(p) = \exp_p(\bar{B}_R(0))$ ist jetzt klar: “ \supset ” gilt ohnehin, weil alle Punkte von $\exp_p(\bar{B}_R(0))$ mit p durch eine Geodäte mit Länge $\leq R$ verbunden sind, also Abstand $\leq R$ haben, und “ \subset ” folgt aus der gerade bewiesenen Existenz einer Geodäten mit Länge $\leq R$ von p zu jedem Punkt von $\bar{B}_R(p)$. \square

Satz 21.2. Satz von Hopf und Rinow: *Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

- (1) Der Definitionsbereich von \exp_p ist ganz $T_p M$, für einen Punkt $p \in M$.
- (2) M ist metrisch vollständig, d.h. jede Cauchyfolge konvergiert.
- (3) M ist geodätisch vollständig, d.h. jede Geodätische ist auf ganz \mathbb{R} parametrisiert.

Beweis. “(1) \Rightarrow (2)”: Es sei (q_i) eine Cauchyfolge in M , d.h. $d(q_i, q_j) < \epsilon$ falls i, j genügend groß (etwa $i, j \geq i_0$). Nach Dreiecksungleichung ist $d(p, q_j) \leq d(p, q_{i_0}) + d(q_{i_0}, q_j) < d(p, q_{i_0}) + \epsilon =: R$ für alle $j > i_0$, also liegt die Folge $(q_j)_{j \geq i_0}$ in der kompakten Menge⁴⁵ $\bar{B}_R(p) = \exp_p(\bar{B}_R(0))$ und besitzt somit eine konvergente Teilfolge. Eine Cauchyfolge mit konvergenter Teilfolge ist aber selbst konvergent.

“(2) \Rightarrow (3)”: Gegeben sei eine Geodätische $\gamma : [0, s) \rightarrow M$, ohne Einschränkung nach Bogenlänge parametrisiert. Wir wollen zeigen, dass γ über s hinaus fortgesetzt werden kann. Dazu sei (t_i) eine reelle Folge mit $t_i \nearrow s$. Da $d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq |t_i - t_j| < \epsilon$ für genügend große i, j , ist $(\gamma(t_i))$ eine Cauchyfolge in M , also $\gamma(t_i) \rightarrow q$ nach Annahme (2). Setzen wir $v_i = \gamma'(t_i)$, so ist $|v_i| = 1$, und da die Fußpunkte $\gamma(t_i)$ konvergieren, konvergiert auch eine Teilfolge der v_i , also o.E. $v_i \rightarrow v$ mit $v \in T_q M$ und $|v| = 1$. Nach dem Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung von ihren Anfangswerten existieren die Geodätischen γ_{v_i} und γ_v auf einem gemeinsamen Intervall $(-\delta, \delta)$, und es gilt $\gamma_{v_i}(t) \rightarrow \gamma_v(t)$ für alle $t \in (-\delta, \delta)$. Aber γ_{v_i} ist bis auf die Parametrisierung ein Teil von γ , genauer: $\gamma_{v_i}(t) = \gamma(t_i + t)$, wo immer beide Seiten definiert sind, insbesondere also für $-\delta < t < 0$. Somit ist $\gamma_v(t) = \lim_i \gamma(t_i + t) = \gamma(s + t)$, d.h. die Geodätische γ_v stimmt (bis auf Parametrisierung) im Intervall $(-\delta, 0)$ mit γ überein und setzt also γ fort auf das Intervall $[0, s + \delta)$, wobei $\gamma(\tau) = \gamma_v(\tau - s)$ für $s - \delta < \tau < s + \delta$. Also ist γ beliebig weit, d.h. auf ganz $[0, \infty)$ (und indem wir auch $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$ betrachten, sogar auf ganz \mathbb{R}) fortsetzbar.

“(3) \Rightarrow (1)” ist trivial: Wenn jede Geodätische auf ganz \mathbb{R} definiert ist, dann auch jede durch p , also ist \exp_p auf ganz $T_p M$ definiert. \square

22. ZWEITE VARIATIONSFORMEL

Satz 22.1. *Gegeben sei eine Variation $c_s : [t_0, t_1]$ von einer Geodäten $c_0 = \gamma$ mit festen Endpunkten: $c_s(t_0) = p$, $c_s(t_1) = q$ für alle s . Mit*

⁴⁵Das Bild der kompakten Menge $\bar{B}_R(0)$ unter der stetigen Abbildung \exp_p ist kompakt. Ist allgemein K eine folgenkompakte Menge und $F : K \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung in einen topologischen Raum Y , so ist $F(K)$ folgenkompakt: Eine Folge $(F(x_i))$ besitzt eine konvergente Teilfolge, da (x_i) in K eine konvergente Teilfolge besitzt.

$\delta = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0}$ und $\delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \Big|_{s=0}$ und $' = \partial_t, \nabla_t$ gilt:

$$(73) \quad \delta^2(c_s) = - \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c, \delta c'' + R(\delta c, \gamma')\gamma' \rangle dt.$$

Beweis. Die erste Variationsformel für alle c_s sagt

$$\partial_s L(c_s) = - \int_a^b \langle \partial_s c_s, c_s'' \rangle.$$

Erneute Ableitung des Integranden bei $s = 0$ ergibt

$$\delta \langle \partial_s c_s, c_s'' \rangle = \langle \delta^2 c_s, c_s'' \rangle + \langle \delta c, \delta c'' \rangle = \langle \delta c, \delta c'' \rangle$$

weil $c_s'' = \gamma'' = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} \delta c_s'' &= \nabla_s \nabla_t \partial_t c_s \Big|_{s=0} \\ &= \nabla_t \nabla_s \partial_t c_s \Big|_{s=0} + R(\delta c_s, \gamma')\gamma' \\ &= \nabla_t \nabla_t \partial_s c_s \Big|_{s=0} + R(\delta c_s, \gamma')\gamma' \\ &= \delta c_s'' + R(\delta c_s, \gamma')\gamma' \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta^2 L(c_s) &= \delta \partial_s L(c_s) \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \delta \langle \partial_s c, c_s'' \rangle \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c_s, \delta c_s'' + R(\delta c_s, \gamma')\gamma' \rangle \end{aligned}$$

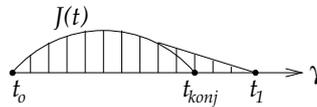
□

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (73) ist eine quadratische Form auf dem Raum der Vektorfelder längs γ , die *Indexform* genannt wird. Den ersten Term im Integral kann man mit partieller Integration noch umformen:

$$(74) \quad - \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c_s, \delta c_s'' \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \langle \delta c_s', \delta c_s' \rangle,$$

weil δc_s an den Randpunkten verschwindet. Dieser Term ist also positiv, und wenn die Schnittkrümmung nichtpositiv ist, $K \leq 0$, dann ist auch der zweite Term nichtnegativ und die zweite Ableitung ist positiv; die Geodäte γ realisiert dann ein lokales Minimum der Kurvenlängen zwischen p und q . Ist die Krümmung dagegen positiv, dann hat der zweite Term das andere Vorzeichen; überwiegt er, so realisiert die Geodäte γ nicht mehr den kürzesten Abstand, was ja bei einem Großkreis auf der \mathbb{S}^2 nach Passieren des Antipoden des Startpunktes auch wirklich geschieht. Für kleine Intervalle $[t_0, t_1]$ wird der positive

Term immer überwiegen; das ändert sich erst, wenn es ein Variationsvektorfeld $J = \delta c_s$ mit $J(t_o) = 0 = J(t_1)$ und $J'' + R(J, \gamma')\gamma' = 0$ gibt, ein *Jacobifeld*, das an beiden Randpunkten verschwindet (siehe folgender Abschnitt). Ist t_1 der minimale Wert, für den ein solches Vektorfeld existiert, so ist $\gamma|_{[t_o, t'_1]}$ für alle $t'_1 < t_1$ noch lokal Kürzeste, weil $\delta^2 L > 0$ für alle Variationen von $\gamma|_{[t_o, t'_1]}$. Aber für $\gamma|_{[t_o, t_1]}$ gibt es plötzlich Variationen, für die die zweite Ableitung verschwindet: $\delta^2 L(c_s) = 0$ falls $\delta c_s = J$. Dann nennt man den Punkt $\gamma(t_1)$ den *ersten konjugierten Punkt* zu $\gamma(t_o)$ längs der Geodäten γ . Verlängert man γ noch über den ersten konjugierten Punkt hinaus, kann man Variationen finden, für die die zweite Ableitung sogar negativ ist; solche Variationen verkürzen also tatsächlich. Man erhält sie, wenn man das Jacobifeld durch Null fortsetzt und dann die Ecke abschneidet.



23. GEODÄTISCHE VARIATIONEN, JACOBIFELDER

Die Riemannsche Exponentialabbildung \exp_p verwendet alle von $p \in M$ ausgehenden Geodäten. Diese bilden eine $n - 1$ -parametrische Familie von Geodäten. Wir wollen allgemeiner Variationen $\gamma_s(t)$ betrachten, deren Kurven γ_s sämtlich Geodäten sind, *geodätische Variationen*. Sie werden uns die geometrische Bedeutung des Krümmungstensors zeigen. Dieses Problem wurde für Flächen bereits von Jacobi⁴⁶ studiert; das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation, $\delta\gamma_s(t)$ entlang der Geodäten $\gamma = \gamma_0 : I \rightarrow M$, wird deshalb *Jacobifeld* genannt und oft mit $J(t)$ bezeichnet. Welche besonderen Eigenschaften hat dieses Variationsvektorfeld? Die Geodätengleichung $\nabla_t \partial_t \gamma_s(t) = 0$ gibt auch eine Differentialgleichung für J ; wir brauchen dazu diese Gleichung nur noch einmal nach s abzuleiten:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_s \nabla_t \partial_t \gamma_s \\ &= \nabla_t \nabla_s \partial_t \gamma_s + R(\partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) \partial_t \gamma_s \\ &= \nabla_t \nabla_t \partial_s \gamma_s + R(\partial_s \gamma_s, \partial_t \gamma_s) \partial_t \gamma_s \end{aligned}$$

und für $s = 0$ erhalten wir

$$(75) \quad J'' + R(J, \gamma')\gamma' = 0,$$

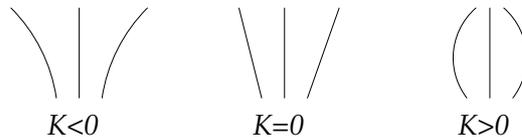
⁴⁶Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 (Potsdam) - 1851 (Berlin)

wobei wir J'' für $\nabla_t \nabla_t J$ geschrieben haben. Dies ist eine lineare Differentialgleichung, die Linearisierung der Geodätengleichung.⁴⁷ Dass J'' eine zweifache *kovariante* Ableitung ist, macht keinen Unterschied; wir können J mit Hilfe einer parallelen ONB $E_1(t), \dots, E_n(t)$ längs γ darstellen als $J = \sum j_i E_i$ mit Funktionen $j_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist $J'' = j_i'' E_i$, und j_i'' sind gewöhnliche zweite Ableitungen. Anders ausgedrückt: Durch Parallelverschiebung lassen sich alle Tangentialräume längs γ identifizieren, und J'' wird zur gewöhnlichen Ableitung. Es ist leicht zu sehen, dass jedes Vektorfeld J längs γ mit (75) auch wirklich Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ist; wir können damit als *Jacobifelder* einfach die Lösungen von (75) bezeichnen.

Wir sehen nun die geometrische Bedeutung des Terms $R(J, \gamma')\gamma'$: er bestimmt die zweite Ableitung einer Variation von Geodäten. Genauer gesagt ist dafür nicht der volle Krümmungstensor, sondern die lineare Abbildung $R_\gamma : v \mapsto R(v, \gamma')\gamma'$ auf $T_{\gamma(t)}M$ verantwortlich (wir unterdrücken die Variable t in der Notation); er wird manchmal auch *Jacobioperator* genannt. Nach den Krümmungsidentitäten ist R_γ selbstadjungiert:

$$\begin{aligned} \langle R_\gamma v, w \rangle &= \langle R(v, \gamma')\gamma', w \rangle \\ &= \langle R(\gamma', w)v, \gamma' \rangle \\ &= \langle R(w, \gamma')\gamma', v \rangle \\ &= \langle R_\gamma w, v \rangle. \end{aligned}$$

Die *Diagonalwerte* $\langle R_\gamma v, v \rangle$ dieser linearen Abbildung sind Schnittkrümmungen, wenn $v \perp \gamma'$ und $|v| = 1$, denn $\langle R_\gamma v, v \rangle = K(\gamma', v)$. Insbesondere sind die Eigenwerte Schnittkrümmungen, wenn man von dem Eigenwert 0 zum Eigenvektor γ' absieht ($R_\gamma \gamma' = R(\gamma' \gamma')\gamma' = 0$): Ist $R_\gamma v = \lambda v$ mit $|v| = 1$, $v \perp \gamma'$, so ist $\lambda = \langle R_\gamma v, v \rangle = K(\gamma', v)$. Damit deutet sich der folgende Sachverhalt an: Ist $K \leq 0$, dann haben die Geodäten die Tendenz, wieder zusammenzukommen, bei $K \leq 0$ dagegen, auseinanderzustreben, stärker noch als im euklidischen Raum.



Der Fall $K \leq 0$ ist der einfachere:

⁴⁷Allgemein erhalten wir die *Linearisierung* einer gewöhnlichen Differentialgleichung durch Ableiten einer Schar von Lösungen nach dem Scharparameter; dies ergibt immer ein Vektorfeld entlang einer Lösungskurve, das eine lineare Differentialgleichung erfüllt.

Lemma 23.1. *Bei Schnittkrümmung $K \leq 0$ ist $|J|^2 = \langle J, J \rangle$ konvex für jedes Jacobifeld und deshalb nach einer Nullstelle monoton steigend.*

Beweis.

$$(76) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \langle J, J \rangle'' &= \langle J', J \rangle' = \langle J'', J \rangle + \langle J', J' \rangle \\ &= -\langle R(J, \gamma')\gamma', J \rangle + |J'|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

also ist die Funktion $\langle J, J \rangle$ konvex. An einer Nullstelle t_o von $\langle J, J \rangle$ ist $\langle J, J \rangle'(t_o) > 0$ und wegen der Konvexität $\langle J, J \rangle'(t) > 0$ für alle $t \geq t_o$, also ist $\langle J, J \rangle$ monoton steigend. \square

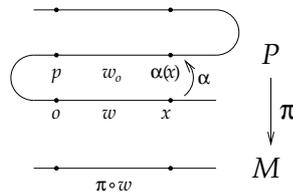
Damit erhalten wir ein erstes globales Ergebnis:

Satz 23.1. Satz von Hadamard-Cartan:⁴⁸ *Ist M vollständig mit Schnittkrümmung $K \leq 0$, dann ist die Riemannsche Exponentialabbildung $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ für jedes $p \in M$ ein surjektive lokaler Diffeomorphismus und sogar eine Riemannsche Überlagerung für eine geeignete Riemannsche Metrik auf $T_p M = \mathbb{R}^n$.*

Beweis. $(D \exp_p)_v w = \delta \exp_p(v + sw) = \delta \gamma_{v+sw}(1) = J(1)$ für das Jacobifeld $J = \delta \gamma_{v+sw}$ mit $J(0) = 0$. Nach dem vorigen Lemma ist $J(1) \neq 0$, also ist $(D \exp_p)_v$ injektiv für jedes $v \in T_p M$ und \exp_p ist ein lokaler Diffeomorphismus; außerdem ist \exp_p surjektiv nach dem Satz von Hopf-Rinow. Wenn wir $T_p M$ mit der durch $e = \exp_p$ zurückgeholten Riemannschen Metrik versehen,

$$g_u(v, w) = \langle De_u v, De_u w \rangle$$

für alle $u, v, w \in T_p M$, dann ist diese Metrik vollständig, denn die Strahlen durch 0 sind auf ganz \mathbb{R}_+ definierte Geodäten für g , wobei wir die radiale Isometrieeigenschaft von \exp_p benutzt haben. Nach Hopf-Rinow ist g damit vollständig. Eine surjektive lokale Isometrie $e = \pi : P \rightarrow M$ ist eine Riemannsche Überlagerung, falls P vollständig und einfach zusammenhängend ist. \square



Bemerkung:

Um Letzteres einzusehen, fixieren wir einen Punkt $o \in P$. Jedem Punkt $p \in P$ mit $\pi(p) = \pi(o)$ können wir folgendermaßen eine Isometrie von

⁴⁸Jacques Salomon Hadamard, 1865 (Versailles) - 1963 (Paris),
Élie Cartan, 1869 (Dolomieu) - 1951 (Paris)

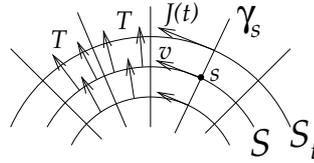
P zuordnen: Weil π lokale Isometrie ist, gibt es Umgebungen U_p von p und U_o von o , für die $\alpha = (\pi|_{U_p})^{-1} \circ (\pi|_{U_o}) : U_o \rightarrow U_p$ eine Isometrie ist. Diese können wir global auf ganz P fortsetzen: Für jedes $x \in P$ betrachten wir einen stetigen Weg $w : [0, 1] \rightarrow P$ von $w(0) = o$ nach $w(1) = x$ und seine Projektion $\pi \circ w$ in M . Weil P einfach zusammenhängend ist, sind je zwei solche Wege ineinander deformierbar bei festen Randpunkten (homotop). Weil π eine lokale Isometrie ist, können wir $\pi \circ w$ zu einem anderen Weg w_o in P "hochheben", $\pi \circ w_o = \pi \circ w$, diesmal mit Anfangspunkt $w_o(0) = p$. Wir setzen nun $\alpha(x) = w_o(1)$. Damit haben wir eine lokale Isometrie α mit $\pi \circ \alpha = \text{id}$ definiert. Diese ist injektiv: Ist $\alpha(x) = \alpha(\tilde{x}) =: y$, so gibt es einen zweiten Weg w_1 von p nach y in P , und weil P einfach zusammenhängend, sind w_o und w_1 homotop. Dann ist auch $\pi \circ w_o$ homotop zu $\pi \circ w_1$, und ebenso sind die Hochhebungen dieser Wege mit Anfang p homotop. Letztere enden bei x und \tilde{x} , also gilt $\tilde{x} = x$. Als lokale Isometrie ist α auch surjektiv. Somit ist α bijektiv und damit eine Isometrie. Diese Isometrien $\alpha = \alpha_p, p \in F_o = \pi^{-1}\pi(o)$ bilden zusammen eine Untergruppe H der Isometriengruppe von P , die *Deckgruppe* von π : Das ist die Menge aller Isometrien α von P mit $\pi \circ \alpha = \pi$. Wenn ein solches α_p einen Fixpunkt hat, $\alpha_p(x) = x$, dann folgt $w = w_o$ und damit $p = o$, und diese Isometrie α_o ist nach Definition die Identität. Die Gruppe H operiert also frei, und es gilt $P/H = M$.

24. DIE RICCATIGLEICHUNG

Für Schnittkrümmung $K \geq 0$ ist die Wirkung der Krümmung nicht mehr so einfach zu sehen, weil in diesem Fall die beiden Terme auf der rechten Seite von (76) gegeneinander arbeiten. In der Tat gibt es selbst im Fall $K = 1$ Geodäten, die sich nicht annähern, sondern immer den gleichen Abstand beibehalten, zum Beispiel die Hopfkreise auf \mathbb{S}^3 . Aber wir wollen zeigen, dass viele geodätische Variationen doch die Tendenz haben, zusammenzulaufen, insbesondere solche, die von einem gemeinsamen Punkt p ausgehen. Allgemeiner betrachten wir Geodäten, deren Anfangsvektoren die Einheitsnormalvektoren einer festen Hyperfläche (zum Beispiel eine Abstandssphäre um p) $S \subset M$ sind. In jedem Punkt $s \in S$ sei $\nu_s \in T_s M$ der Einheitsnormalvektor und $\gamma_s := \gamma_{\nu_s}$ die Geodäte mit diesem Anfangsvektor. Alle diese Geodäten zusammen bilden eine lokale Parametrisierung

$$\phi : S \times I \rightarrow M, \quad \phi(s, t) = \gamma_s(t),$$

und die Abbildung $s \mapsto \phi(s, t)$ für festes t beschreibt die Parallelhyperfläche zu S im Abstand t , genannt S_t .



Die partielle Ableitung $T = \partial_t \phi$ ist das Tangentialvektorfeld an die Geodäten γ_s und erfüllt demnach die Gleichung $\nabla_T T = 0$, und für jeden Tangentenvektor $v \in T_s S$ ist $J(t) = D\phi_{(s,t)} v$ ein Jacobifeld längs γ_s , das Variationsfeld der Geodäten γ_s in Richtung von v . Ein solches Jacobifeld heißt *S-Jacobifeld*. Da die partiellen Ableitung in t - und s -Richtung vertauschbar sind, gilt $[T, J] = 0$ (man kann sich v zu einem Tangentialvektorfeld auf S und damit J zu einem lokalen Vektorfeld auf M fortgesetzt denken), also

$$J' = \nabla_T J = \nabla_J T = UJ \quad \text{mit} \quad U = \nabla T.$$

Dieser Tensor $U = \nabla T$ ist für $t = 0$ die *Weingartenabbildung* oder der *Formoperator* der Hyperfläche S was im Wesentlichen dasselbe ist wie die Zweite Fundamentalform α von S , denn für alle $v, w \in T_s S \perp T$ gilt

$$\langle \alpha(v, w), T \rangle = \langle \nabla_v w, T \rangle = -\langle w, \nabla_v T \rangle = -\langle w, Uv \rangle.$$

Diese Rechnung zeigt auch, dass U eine *selbstadjungierte* lineare Abbildung auf $T_s S$ ist, weil α symmetrisch ist. Für beliebiges t müssen wir S durch S_t ersetzen.

Satz 24.1. *Der Formoperator $U(t)$ von einer Parallelschar von Hyperflächen S_t entwickelt sich längs einer normalen Geodäten γ gemäß der folgenden Differentialgleichung vom Riccati-Typ,⁴⁹*

$$(77) \quad U' + U^2 + R_\gamma = 0.$$

Beweis. Für jedes S -Jacobifeld haben wir oben die Differentialgleichung

$$(78) \quad J' = UJ$$

gefunden. Durch weiteres Ableitung erhalten wir durch Einsetzen von (75) und (78):

$$-R_\gamma J = J'' = (UJ)' = U'J + UJ' = U'J + UUJ,$$

also $(U' + U^2 + R_\gamma)J = 0$ für alle S -Jacobifelder J und damit die Behauptung. \square

⁴⁹Das ist ein Typ von Differentialgleichungen erster Ordnung, bei der die gesuchte Funktion U quadratisch vorkommt, aber nicht in höherer Ordnung. Sie ist benannt nach Jacopo Francesco Riccati, 1676 (Venedig) - 1754 (Treviso), der eine Klassifikation der Differentialgleichungen versucht hat.

Wir wollen diese Gleichung kurz *Riccatigleichung* nennen. Mit ihr lässt sich viel mehr anfangen als mit der Jacobigleichung, denn sie hat eine gute *Vergleichstheorie*:

Satz 24.2. *Hat man zwei solche Gleichungen $U_i' + U_i^2 + R_i = 0$ mit $R_1 > R_2$ (d.h. $R_1 - R_2$ ist positiv definit) und $U_1(t_o) < U_2(t_o)$ für ein t_o , dann folgt $U_1(t) < U_2(t)$ für alle $t \geq t_o$, solange die Lösung $U_1(t)$ existiert.⁵⁰*

Beweis.

$$(U_1 - U_2)' = U_2^2 - U_1^2 + R_2 - R_1 < U_2^2 - U_1^2. \quad (*)$$

Nehmen wir an, die Ungleichung $U_1(t) < U_2(t)$ wäre für irgend ein $t > t_o$ verletzt. Dann gibt es ein kleinstes solches t ; nennen wir es t_1 . Für $t_o \leq t < t_1$ ist also $U_2(t) - U_1(t)$ noch positiv definit, für $t = t_1$ aber nicht mehr. Bei t_1 ist $U_2 - U_1$ aus Stetigkeitsgründen noch immer positiv *semi*-definit, aber nicht mehr positiv definit; es gibt also einen nichttrivialen Kern und damit ein $v \neq 0$ mit $U_2 v = U_1 v$. Bei t_1 gilt demnach $\langle (U_2^2 - U_1^2)v, v \rangle = |U_2 v|^2 - |U_1 v|^2 = 0$. Die Funktion $f(t) = \langle (U_1(t) - U_2(t))v, v \rangle$ erfüllt also $f(t_1) = 0$ und $f'(t_1) < 0$ wegen (*), aber $f(t) < 0$ für $t_o \leq t < t_1$, das ist ein Widerspruch! \square

Für $R_\gamma = I$ ist $U(t) = \cot(t - t_o)I$ eine Lösung von (77). Für $R_\gamma > I$ hat also jede Lösung U einen Pol, spätestens bei $t = \pi$. Für die S -Jacobifelder bedeutet dies wegen (78), dass sie an einer Stelle $t_1 \leq \pi$ verschwinden müssen. Insbesondere gilt das für solche Jacobifelder, die bei $t_o = 0$ verschwinden; auch diese müssen bei $t_1 \leq \pi$ eine zweite Nullstelle haben. Die Geodäten, die von $p = \gamma(0)$ ausgehen, kommen also spätestens im Abstand π wieder zusammen, jedenfalls in erster Ordnung. Dasselbe gilt aus Stetigkeitsgründen auch noch für $R_\gamma \geq I$.

Satz 24.3. Satz von Bonnet-Myers *Ist M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq 1$, so ist M kompakt, und der maximale Abstand von zwei Punkten in M ist höchstens π (wie auf \mathbb{S}^2).*

Beweis. Nach dem ersten konjugierten Punkt hört jede Geodäte auf, Kürzeste zu sein. Dieser tritt im Abstand $\leq \pi$ vom Anfangspunkt auf. Deshalb kann keine Kürzeste länger als π sein. Da M vollständig ist, kann jeder Punkt mit einem festen Punkt p durch eine Kürzeste verbunden werden. Daher ist $M = \exp_p(\overline{B_\pi(0)})$ kompakt. \square

⁵⁰Wenn eine Lösung U der Riccatigleichung (77) eine Singularität entwickelt, dann geht dort $|U|^2 = \text{Spur } U^2$ gegen ∞ . Weil $U' = -U^2 - R$ kurz vor der Singularität negativ ist, muss ein Eigenwert von U gegen $-\infty$ gehen. Solange U_1 existiert, muss deshalb $U_2 > U_1$ auch existieren.

Die Voraussetzung ist allerdings viel zu stark, weil wir längs jeder Geodäten nur ein einziges Jacobifeld mit zwei Nullstellen brauchen; wir haben aber gezeigt, dass *jedes* Jacobifeld im Abstand $\leq \pi$ zwei Nullstellen hat. Es genügt, vorauszusetzen, dass die Riccikrümmung mindestens so groß wie die der Sphäre gleicher Dimension n ist, nämlich $n - 1$; dies zu sehen war der Beitrag von Myers.⁵¹ Technisch gesehen müssen wir dazu nur die Spur der Riccati-Gleichung (77) bilden; die Spur von U erfüllt dann eine skalare Riccati-Ungleichung: Wir setzen $u = \text{Spur } U / (n - 1)$ und zerlegen U in seinen Spurteil und seinen spurfreien Teil: $U = uI + U_o$ mit $\text{Spur } U_o = 0$. Diese Zerlegung ist orthogonal bezüglich des üblichen Spur-Skalarprodukts auf dem Raum S_{n-1} der selbstadjungierten linearen Abbildungen auf $T_s S = \mathbb{R}^{n-1}$, denn $\text{Spur } U = \langle U, I \rangle$ und damit ist uI die Komponente von U in Richtung I und $U_o \perp I$. Somit folgt $\text{Spur}(U^2) = |U|^2 = |uI|^2 + |U_o|^2$ und die Spur von (77) ergibt

$$(79) \quad u' + u^2 + \hat{r} = 0$$

mit $\hat{r} = \frac{\text{Ric}(\gamma') + |U_o|^2}{n-1} \geq r = \frac{\text{Ric}(\gamma')}{n-1}$. Mit der Voraussetzung $\hat{r} \geq r \geq 1$ erhalten wir einen Pol für u im Abstand $\leq \pi$ wie vorher, und mindestens eins der Jacobifelder, die in $\gamma(0)$ verschwinden, muss im Abstand $\leq \pi$ eine zweite Nullstelle haben, also einen konjugierten Punkt. Damit kann keine Kürzeste länger als π sein.

25. DER SPHÄRENSATZ

Satz 25.1. Sphärensatz von Berger und Klingenberg (1961)⁵²
Eine einfach zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\frac{1}{4} < K < 1$ ist homöomorph zur Sphäre S^n .

Dieses Resultat ist deshalb besonders berühmt geworden, weil die Voraussetzung nicht verbessert werden kann: Für $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$ gibt es Gegenbeispiele, die projektiven Ebenen und Räume über \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathbb{O} . Wir werden sehen, warum der Beweis nur "homöomorph", nicht "diffeomorph" liefert. Es gibt in der Tat ab Dimension 7 differenzierbare Mannigfaltigkeiten, die homöomorph, aber nicht diffeomorph zur Sphäre sind, sogenannte *exotische Sphären*; die ersten wurden von John Milnor (geb. 1931) entdeckt.⁵³ Lange Zeit hat man sich gefragt, ob auch

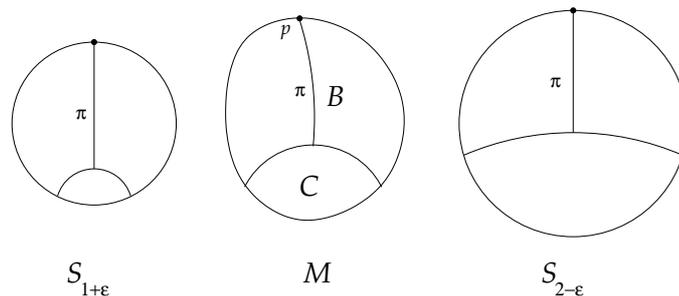
⁵¹Myers, S. B.: Riemannian manifolds with positive mean curvature, Duke Mathematical Journal 8 (2): 401404 (1941)

⁵²Marcel Berger, geb. 1927 (Paris),
 Wilhelm Klingenberg, 1924 (Rostock) - 2010 (Bonn)

⁵³Milnor, John W.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Mathematics 64 (1956), 399405

solche Räume eine Metrik mit $\frac{1}{4} < K < 1$ tragen können. Gromoll und Meyer⁵⁴ fanden 1974 immerhin eine Metrik mit $K \geq 0$ auf der einfachsten exotischen 7-Sphäre.⁵⁵ Aber 2009 zeigten Brendle und Schoen⁵⁶ mit den Methoden, die Perelman beim Beweis der Poincaré-Vermutung entwickelt hatte, dass man im Sphärensatz das Wort “homöomorph” tatsächlich durch “diffeomorph” ersetzen kann. Ein ehemaliger Augsburger Student, Christoph Böhm, hat einen wesentlichen Beitrag dazu geleistet. Die folgende Beweisskizze des topologischen (“homöomorph”) Sphärensatzes stammt von einer Idee von M. Gromov.⁵⁷

Beweis. Wir dürfen aus Kompaktheitsgründen annehmen, dass die Schnittkrümmung von M zwischen der einer kleinen Sphäre vom Radius $1 + \epsilon$ (Krümmung $1 - \epsilon_1$ und einer großen Sphäre vom Radius $2 - \epsilon$ (Krümmung $\frac{1}{4} + \epsilon_2$ liegt. Der Vergleichssatz der Riccati-Gleichung kann so interpretiert werden: Je größer die Schnittkrümmung ($R_1 > R_2$) desto mehr krümmt sich eine Parallelhyperflächenschar bei entsprechenden Anfangsbedingungen nach außen, desto “konkaver” ist sie ($U_1 < U_2$). Das wenden wir an auf das exp-Bild des abgeschlossenen Balles von Radius π im Tangentialraum eines Punktes p in M und in den beiden Vergleichssphären $S_{1+\epsilon}$ und $S_{2-\epsilon}$.



In der kleinen Sphäre ist das ein Ball, der fast bis zum Antipodenpunkt geht, aber noch nicht ganz; der entsprechende Formoperator U_1 der Sphäre hat also noch keine Singularität. Deshalb hat auch der Formoperator U von $\Sigma_t = \exp_p(\partial B_t(0))$ in der schwächer gekrümmten

⁵⁴Detlef Gromoll, 1938 (Berlin) - 2008 (Stony Brook, N.Y.), Wolfgang Meyer, geb. 1936

⁵⁵Gromoll, D., Meyer, W.: An exotic sphere with nonnegative sectional curvature, *Annals of Math.* 100 (1974), 401 - 406

⁵⁶Brendle, Simon; Schoen, Richard: Manifolds with 1/4-pinched curvature are space forms, *Journal of the American Mathematical Society* 22 (2009) 287307

⁵⁷J.-H. Eschenburg: Local convexity and nonnegative curvature - Gromov’s proof of the sphere theorem. *Invent. math.* 84, 507 - 522 (1986). Der ursprüngliche Beweis findet sich in D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: *Differentialgeometrie im Großen*. Springer Lecture Notes in Math. 55, (1975).

Mannigfaltigkeit M für $t \leq \pi$ noch keine Singularität, d.h. \exp_p ist lokaler Diffeomorphismus auf $\bar{B}_\pi(0)$ und $\Sigma_\pi = \exp_p(\partial B_\pi(0))$ ist eine glatte Hyperfläche.

In der großen Sphäre $S_{2-\epsilon}$ dagegen reicht der Ball vom Radius π gerade über den Äquator bis in die Südhalbkugel hinein und fängt dort bereits an, "konkav" zu sein, $U_2(\pi) < 0$. Das gleiche muss auf der stärker gekrümmten Mannigfaltigkeit M gelten. Das Komplement C des Gebietes $B = \exp_p(B_\pi(0))$ ist also streng konvex in dem Sinne, dass sich der Rand Σ_π wie bei einem streng konvexen Gebiet verhält. Kompakte lokal konvexe Gebiete in einer Mannigfaltigkeit mit $K \geq 0$ sind aber lokal diffeomorph zu einem Ball, wie im \mathbb{R}^n . Beide Teile B und C von M sind also lokal diffeomorph zu einem Ball und M damit lokal diffeomorph zu einer Mannigfaltigkeit, die sich aus zwei Bällen zusammensetzen lässt ("Nordhalbkugel" und "Südhalbkugel") und daher homöomorph zur Sphäre S^n ist. Weil M einfach zusammenhängt, ist der lokale Diffeomorphismus ein globaler.

Wir haben dabei etliche Schwierigkeiten unterschlagen. Zwar ist Σ_π eine glatte Hyperfläche, aber sie kann *immersiert* sein, d.h. Selbstschnitte sind zugelassen. Wir müssen zeigen, dass eine immersierte streng lokal konvexe Hyperfläche in M mit $K \geq 0$ einen immersierten Ball berandet. Bei Dimension $n = 2$ stimmt das nicht, denn es gibt lokal konvexe geschlossene Kurven mit beliebig großer Windungszahl in der Ebene. Aber ab Dimension $n = 3$ kann man solche Komplikationen ausschließen. Im euklidischen \mathbb{R}^n zum Beispiel muss eine lokal streng konvexe geschlossene immersierte Hyperfläche eine eingebettete Sphäre sein, denn die Gaußsche Normalenabbildung auf die Sphäre S^{n-1} ist ein lokaler Diffeomorphismus und muss injektiv sein, weil S^{n-1} einfach zusammenhängend ist für $n \geq 3$. Dieses Argument von Hadamard kann man in unserer Situation lokal benutzen und damit den Satz zeigen.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einführung	1
2. Untermannigfaltigkeiten	7
3. Innere und äußere Geometrie	9
4. Die Tangentiale Ableitung	11
5. Axiome für die tangentielle Ableitung	13
6. Lieklammern und Flüsse	15
7. Riemannsche Mannigfaltigkeiten	18
8. Kovariante Ableitungen	20
9. Der Krümmungstensor	22
10. Krümmungsidentitäten	24

11. Spurbildungen: Ricci- und Einsteintensor, Skalarkrümmung	26
12. Kovariante Ableitung längs Kurven, Paralleltransport	28
13. Einsteins Gravitationstheorie (ART)	30
14. Untermannigfaltigkeiten und Gaußgleichung	37
15. Hyperbolische Geometrie	39
16. Quotienten-Mannigfaltigkeiten	44
17. Beispiele von Quotientenmannigfaltigkeiten	48
17.1. Überlagerungen	48
17.2. Hopf-Faserungen	50
17.3. Quotienten von Liegruppen	51
18. Kovariante Ableitung längs einer Kurvenschar	53
19. Erste Variation der Länge	54
20. Die Riemannsche Exponentialabbildung	56
21. Kürzeste im Großen	60
22. Zweite Variationsformel	62
23. Geodätische Variationen, Jacobifelder	64
24. Die Riccatigleichung	67
25. Der Sphärensatz	70