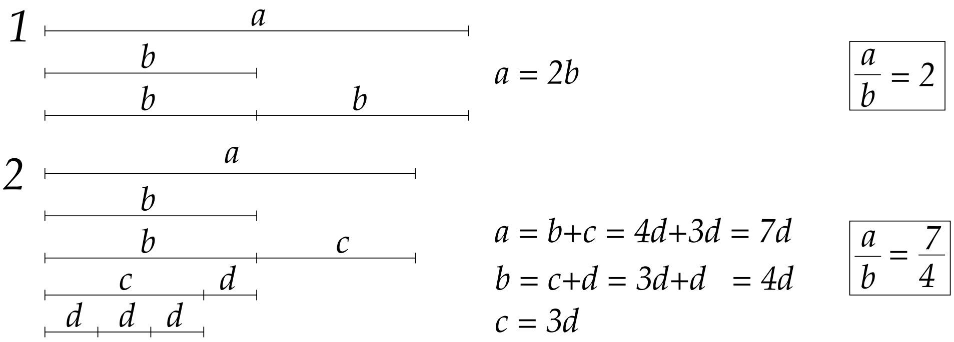
QUADRATWURZELN UND SELBSTÄHNLICHE FIGUREN

J.-H. ESCHENBURG

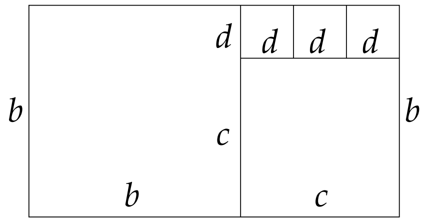
Schon in der Frühzeit der Mathematik, lange vor *Pythagoras* (ca. 570 - 500 v.Chr.), erkannte man, dass Zahlen nicht nur zum Zählen dienten, sondern auch zum Messen. Man konnte zum Beispiel mit Zahlen ausdrücken, wie oft eine kleine Strecke b in eine große a hineinpasst: in unserem ersten Beispiel 2-mal, im zweiten 7/4-mal. Die beiden Strecken repräsentieren selbst keine Zahlen (eine Einheitsstrecke steht nicht zur Verfügung), und doch werden sie von Zahlen beherrscht: Ihr *Verhältnis* ist eine Zahl, 2 bzw. 7/4. Vielleicht begründet diese Tatsache den Pythagoras zugeschriebenen Jubelruf: "Alles ist Zahl".



Das Beispiel 2 ist besonders interessant, weil es zunächst nicht "aufgeht": Die kleine Strecke b geht jetzt nur einmal in die große Strecke a hinein, aber es bleibt ein Rest $c < b$. Damit haben wir wieder eine kleinere Strecke (c) und eine größere (b), die wir nun im zweiten Schrit miteinander vergleichen, so wie vorher b und a. So entsteht ein *Algorithmus*, ein Rechenverfahren, bei dem der gleiche Schritt auf immer neue Eingaben angewandt wird, die teilweise erst während des Prozessen entstehen (z.B. c). Dabei geht c genau einmal in die größere Strecke b hinein, mit einem Rest $d < c$. Im dritten Schritt vergleichen wir d mit c und stellen fest, dass d genau 3-mal in c aufgeht, danach ist das Verfahren beendet. Durch Rechnung von hinten nach vorne finden wir, dass die Strecke d genau 4-mal in b und 7-mal in a aufgeht (d ist das "gemeinsame Maß" für a und b), deshalb das Verhältnis $a/b = 7/4$.

Date: 4. März 2017.

Wir können dieses Verfahren der "Wechselwegnahme" auch etwas anders beschreiben, als "Quadratur des Rechtecks". Wir möchten dabei das Rechteck mit Kantenlängen a und b durch möglichst große Quadrate lückenlos ausfüllen. In unserem Beispiel passt genau ein Quadrat mit Kantenlänge b hinein, wobei rechts ein Rechteck mit Kantenlängen b und c übrig bleibt. In dieses passt ein Quadrat mit Kantenlänge c, und oben bleiben genau drei Quadrate mit Kantenlänge $d = b–c$ übrig.



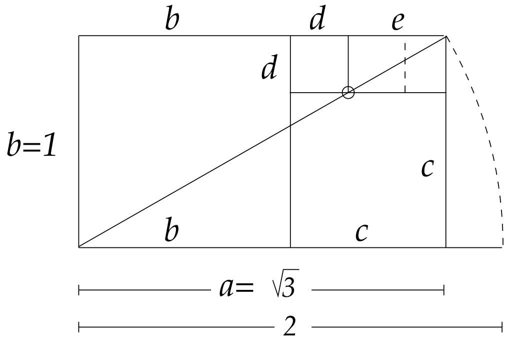
Um das Jahr 500 v.Chr. machten die Mathematiker, die Pythagoras um sich geschart hatte, eine erschütternde Entdeckung: Das obige Verfahren kann unendlich fortdauern. Man fand "irrationale" Verhältnisse von Strecken, solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt und die sich daher nicht als Verhältnis ganzer Zahlen ausdrücken lassen. Dazu gehörten die Verhältnisse von Diagonale und Seitenlänge im Quadrat und im regulären Fünfeck, $\sqrt{2}$ und der Goldene Schnitt $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Um 400 v.Chr. bewies *Theaitetos* (ca. 417 - 368 v.Chr.), dem wir auch die Entdeckung des Dodekaeders und Ikosaeders verdanken, dass *alle* Quadratwurzeln positiver ganzer Zahlen ganz oder irrational sind; es ist der uns allen bekannte Beweis durch Widerspruch, der bei Euklid steht.[1] In dem gleichnamigen Dialog "Theaitetos" von Platon belauschen wir ein fiktives Gespräch zwischen Theaitetos, seinem Lehrer Theodoros und Sokrates in dessen Todesjahr 399 v.Chr., in dem Theaitetos seine Leistung erwähnt und sie mit der seines Lehrers vergleicht:

> "Über Quadratwurzeln ('dynamis') *zeichnete* uns Theodoros hier etwas, womit er von den Quadraten von drei und fünf Quadratfuß Flächeninhalt bewies, dass ihre Seitenlänge nicht messbar wäre durch die einfüige. Und so ging er jede Quadratwurzel einzeln durch bis zum Quadrat mit siebzehn Quadratfuß; bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel so etwas ein, da der Quadratwurzeln unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchen,

[1]Angenommen, p prim und $\sqrt{p} = m/n$ (gekürzter Bruch), dann ist $m^2 = pn^2$ und $p|m^2$, also $p|m$, also $p^2|m^2 = pn^2$, also $p|n^2$, also $p|n$, der Bruch m/n war also nicht gekürzt, Widerspruch! Anders gesagt: p kommt in m^2 mit gerader Potenz vor, in pn^2 in ungerader Potenz, deshalb ist stets $m^2 \neq pn^2$.

> sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir diese Quadratwurzeln alle behandeln könnten."

Ob Platon die Zeichnungen von Theodoros gesehen hat, wissen wir nicht; sie gingen verloren. Aber Benno Artmann[2] hat sie 1994 vermutlich "wiederentdeckt"; er konnte damit jedenfalls erklären, warum Theodoros bis $\sqrt{17}$ und nicht weiter kommen konnte. Die Idee ist die Anwendung der Wechselwegnahme in Form der "Quadratur des Rechtecks". Betrachten wir als Beispiel den Fall $\sqrt{3}$ und das Rechteck mit Kantenlängen $a = \sqrt{3}$ und $b = 1$. Die Strecke $\sqrt{3}$ können wir als Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seitenlängen $1, \sqrt{3}, 2$ geometrisch konstruieren.



Die "Quadratur" ist ähnlich wie im vorigen Beispiel: In das (a, b)-Rechteck passt genau ein Quadrat mit Kantenlänge b hinein, wobei rechts ein Rechteck mit Kantenlängen c und b übrig bleibt. In dieses passt ein Quadrat mit Kantenlänge c, und oben bleiben zwei Quadrate mit Kantenlänge $d = b - c$ und ein Rest übrig. Wir teilen aber zunächst nur eins dieser d-Quadrate ab; dann bleibt ein Rechteck mit Kantenlängen d und e, wobei diesmal $e > d$. Theodoros hat nun wohl beobachtet, dass das (e, d)-Rechteck zum ursprünglichen (a, b)-Rechteck *ähnlich* ist (formgleich bei unterschiedlicher Größe): die Diagonalen haben die gleiche Richtung, weil der markierte Eckpunkt des kleinen Rechtecks auf der Diagonalen des großen liegt. Ob Theodoros das wirklich bewiesen oder nur an der Zeichnung abgelesen hat, wissen wir nicht. Ein algebraischer Beweis dafür ist schnell gegeben: Zu zeigen ist

$$a/b = e/d \iff a/b = \sqrt{3},$$

wobei

$$a = b + c, \quad b = c + d, \quad c = d + e$$

[2]B. Artmann: A proof for Theodoros' theorem by drawing diagrams, Journal of Geometry 49 (1994). Siehe auch Janina Deininger: Ein Beweis des Theorems von Theodoros durch graphische Darstellung, Zulassungsarbeit, Augsburg 2012.

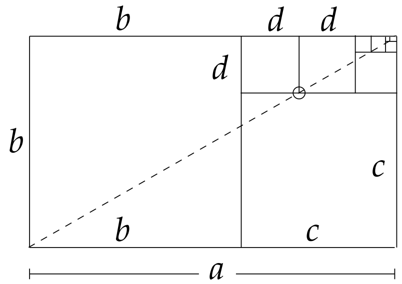
Also ist

$$
(1)\qquad \begin{cases}
a &= b+c \\
 &= (c+d)+(d+e) \\
 &= ((d+e)+d)+(d+e) \quad = \quad \underline{2e+3d}, \\
b &= c+d \\
 &= (d+e)+d \quad = \quad \underline{e+2d}
\end{cases}
$$

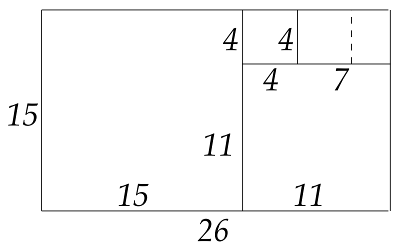
und damit (durch Erweitern mit $1/d$)

$$
x := \frac{e}{d} \overset{!}{=} \frac{a}{b} = \frac{2e+3d}{e+2d} = \frac{2x+3}{x+2} \iff (x+2)x = 2x+3 \iff x^2 = 3.
$$

Das (e,d)-Rechteck wird nun weiter unterteilt nach dem gleichen Muster wie das (a,b)-Rechteck, und wieder bleibt oben rechts ein noch kleineres formgleiches Rechteck übrig, mit dem wir ebenso verfahren können, usw.; das so unterteilte Rechteck ist *selbstähnlich*. Die Anzahlen der einbeschriebenen Quadrate sind $1,1,2,1,2,\dots$ (Schreibweise $[1;\overline{1,2}]$, bekannt auch als *Kettenbruch-Entwicklung*, bei der a/b als iterierter Bruch geschrieben wird). Insbesondere bricht der Prozess der Wechselwegnahme niemals ab, $\sqrt{3}$ ist also irrational.



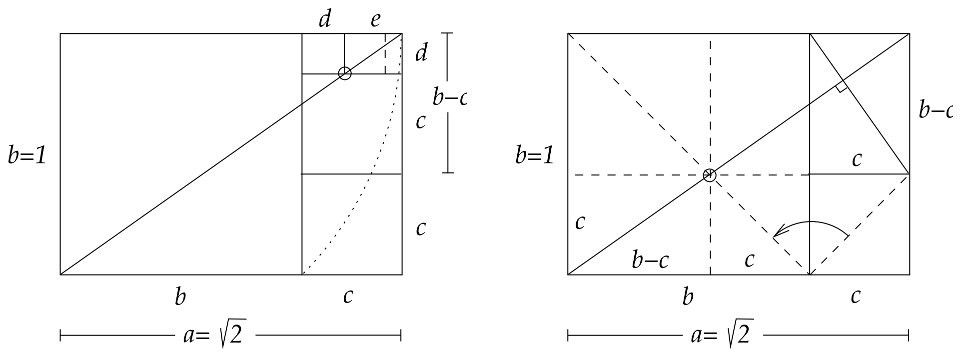
Theodoros hat weit mehr bewiesen als die Irrationalität: Mit seiner Zeichnung lässt sich $\sqrt{3}$ beliebig genau berechnen. Dazu setzt man einen Näherungswert für e/d an, zum Beispiel 2, und berechnet damit a/b. Dabei wird die Zeichnung ein bisschen verändert, nämlich zu der auf Seite 2: Oben rechts sind jetzt drei d-Quadrate, und wir erhalten wieder $a/b = 7/4$. Das ist kein so schlechter Näherungswert für $\sqrt{3}$, denn $(7/4)^2 = 3 + 1/16$. Wir können ihn verbessern, indem wir ihn als neuen Startwert für e/d einsetzen, wie in der folgenden Zeichnung:



Der neue Wert $a/b = 26/15$ ist schon erheblich besser: $26^2 = 676 = 3 \cdot 15^2 + 1$, also $(26/15)^2 = 3 + 1/225$. Im nächsten Schritt könnten wir dann $e = 26$ und $d = 15$ ansetzen und erhielten $c = d + e = 41$ und $b = c+d = 56$ und $a = b+c = 97$. In der Tat ist $97^2 = 9409 = 3 \cdot 56^2 + 1$, also $(97/56)^2 = 3 + 1/3136$.

Ebenso kann man die anderen Wurzeln behandeln (siehe [Artmann] oder Kap. 2 in "Sternstunden der Mathematik"), wobei es bei $\sqrt{13}$ eine Besonderheit gibt, die ich hier nicht verraten will. Warum aber hörte Theodoros bei $\sqrt{17}$ auf? Weil $\sqrt{19}$ die Entwicklung $[4; \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$ hat, die mit ihren 8 winzigen Quadraten am Ende einer langen Periode nicht mehr sauber zu zeichnen ist.

Zwei andere Beispiele sollen noch erwähnt werden. Das erste ist $\sqrt{2}$.



Zunächst wird $\sqrt{2}$ konstruiert, indem die Diagonale des Einheitsquadrates in die Horizontale gedreht wird. Auf den ersten Blick sieht das linke Bild sehr ähnlich aus wie das von $\sqrt{3}$, nur dass $c = a - b$ kleiner ist und daher zwei Quadrate mit Kantenlänge c in das Rechteck passen. Aber es gibt einen qualitativen Unterschied: Nicht nur das Rechteck oben rechts mit Kantenlängen e und d ist ähnlich zum Ausgangsrechteck, sondern bereits das (um 90 Grad gedrehte) Rechteck mit Kantenlängen $b - c$ und c. Das sieht man am besten nach einer Drehung um 90 Grad (rechtes Bild); dann haben die Diagonalen beider Rechtecke die gleiche Richtung; das Seitenverhältnis muss also das gleiche sein wie beim Ausgangsrechteck. Das können Sie sofort selbst ausprobieren, denn Sie haben alle ein Rechteck mit Kantenlängen $\sqrt{2}$ und 1 bei sich: ein Din-A4-Blatt. Knicken oder zeichnen Sie die Diagonale des Blattes, knicken Sie quer dazu die Diagonale des linken Quadrats und knicken Sie das rechts übrig bleibende Rechteck nach links herüber. Dessen Rand geht danach genau durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen, wie in der rechten Figur.

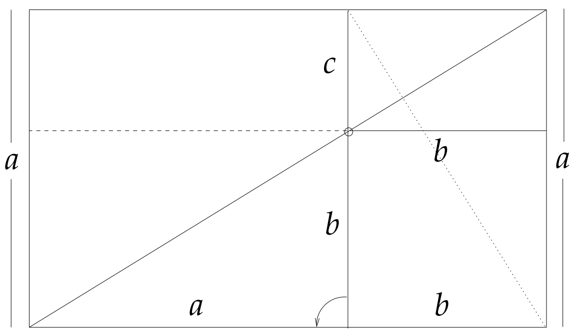
Die Anzahlen der füllenden Quadrate sind erst 1 und dann immer 2, also $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$.

Nachweis: Da $c = a - b$ und $b - c = b - (a - b) = 2b - a$, gilt $\frac{b-c}{c} = \frac{a}{b} \iff b(b-c) = ac \iff b(2b-a) = a(a-b) \iff 2b^2 = a^2 \iff \frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Das einfachste Beispiel aber ist der *Goldene Schnitt* $a/b = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$. Dabei wird eine Gesamtstrecke $a+b$ so in einen gößeren Teil a und einen kleineren b unterteilt, dass die Gesamtstrecke sich zum größeren Teil so verhält wie der größere Teil zum kleineren:

$$\frac{a}{b} \overset{!}{=} \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}\,. \tag{2}$$

Setzt man $\frac{a}{b} = x$, so gilt also die Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$ oder $x^2 = x + 1$; die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung ist $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.



In das $(a+b, a)$-Rechteck passt das a-Quadrat einmal hinein, und das übrig bleibende Rechteck ist bereits wieder ähnlich zum Ausgangsrechteck: Nach 90-Grad-Drehung stimmen die Diagonalen überein. Alle Zahlen sind 1, die Kettenbruchentwicklung ist $[1; \overline{1}]$.

Theaitetos hat also in dem Dialog die Leistung seines alten Lehrers nicht ganz gerecht beurteilt; sie umfasst viel mehr als nur den Nachweis der Irrationalität. Doch die Kritik, dass Theodoros eben nur bis $\sqrt{17}$ gekommmen ist, scheint berechtigt. Erst über zwei Jahrtausende später hat *Lagrange*[3] bewiesen, dass jede Quadratwurzel eine periodische Kettenbruchentwicklung hat. Die Methoden stammen nicht aus der Geometrie, sondern aus einem Gebiet, das erst im Mittelalter im islamischen Kulturkreis entwickelt wurde, der Algebra.

Gegeben sei eine quadratische Gleichung $ax^2 - bx = c$ mit ganzzahligen Koeffizienten a, b, c, zum Beispiel die Gleichung $x^2 = p$ mit $a = 1$, $b = 0$, $c = p$. Die Lösungen sind $x_\pm = (b \pm \sqrt{d})/(2a)$ mit $d = b^2 + 4ac$ ("Diskriminante"). Wir setzen $ac > 0$ voraus; dann ist $\sqrt{d} > b$ und nur die Lösung $x = x_+$ ist positiv. Um die Kettenbruchentwicklung von x

[3]Joseph-Louis Lagrange, 1736 (Turin) - 1813 (Paris): Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques (1770).

zu bestimmen, zieht man den ganzzahligen Anteil[4] ab und bildet den Kehrwert des Restes, zieht davon wieder den ganzzahligen Anteil ab usw. Man macht also immer abwechselnd die folgenden zwei Variablentransformationen $x \rightsquigarrow \tilde{x}$ und berechnet die quadratische Gleichung für die neue Variable $\tilde{x}$:

A. $\tilde{x} = x - [x]$,

B. $\tilde{x} = 1/x$.

In beiden Fällen ändert die Diskriminante $d = b^2 + 4ac$ ihren Wert bei Übergang von x zu $\tilde{x}$ nicht: Bei der Variablenverschiebung (A) bleibt $x_+ - x_- = \sqrt{d}/a$ gleich und auch der Koeffizient a ändert sich nicht, und bei der Inversion (B) vertauschen a und c nur ihre Rollen und ac bleibt gleich, ebenso wie b^2, denn mit $x = 1/\tilde{x}$ gilt

$$ax^2 - bx = c \iff a/\tilde{x}^2 - b/\tilde{x} = c \iff a - b\tilde{x} = c\tilde{x}^2.$$

Nun gibt es aber für gegebenes d nur endlich viele ganze Zahlen a, b, c mit $ac > 0$ und $d = b^2 + 4ac$. Deshalb muss in dem Prozess ABAB... irgendwann eine Gleichung auftreten, die schon einmal da war; von da an ist der Prozess periodisch.

Kann man auch andere Zahlen auf diese Weise berechnen, zum Beispiel Kubikwurzeln? Nicht so einfach, denn Kubikwurzeln haben keine periodische Kettenbruchentwicklung! Man muss erst etwas Allgemeineres in dem obigen Verfahren entdecken, um weiter zu kommen. Kehren wir noch einmal zu unserem Beispiel $\sqrt{3}$ zurück. Dort galt $e/d = a/b$ mit $a = 2e + 3d$ und $b = e + 2d$, siehe (1) auf Seite 4. Lassen Sie uns statt der *Verhältnisse* $\frac{e}{d}$ und $\frac{a}{b}$ die *Vektoren* $\binom{e}{d}$ und $\binom{a}{b}$ in der Ebene betrachten. Dann sagt $e/d = a/b$, dass die Vektoren $\binom{e}{d}$ und $\binom{a}{b}$ gleichgerichtet sind, $\binom{a}{b} = \lambda \binom{e}{d} := \binom{\lambda e}{\lambda d}$ für eine reelle Zahl $\lambda > 0$:

$$\lambda \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 2e+3d \\ e+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix}, \tag{3}$$

also $A\binom{e}{d} = \lambda \binom{e}{d}$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ oder

$$(A - \lambda I)\binom{e}{d} = 0\,. \tag{4}$$

Die gemeinsame Steigung der Diagonalen der (e, d)- und (a, b)-Rechtecke wurde zu der *Eigenwertgleichung* (4) für die ganzzahlige Matrix A. Die Gleichung (4) kann nur dann eine Lösung $\binom{e}{d} \neq \binom{0}{0}$ haben, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$, d.h.

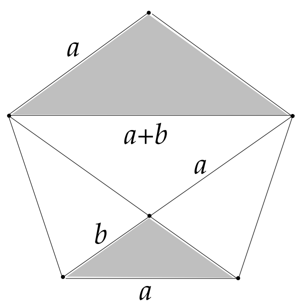
$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 3\,, \text{ also } \lambda - 2 = \pm\sqrt{3}\,. \tag{5}$$

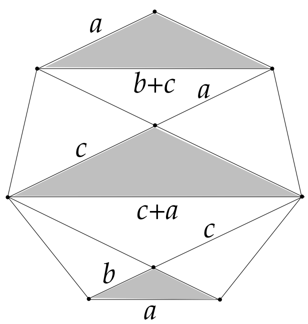
[4]Der ganzzahlige Anteil $[x]$ einer reellen Zahl x ist die größte ganze Zahl $k \leq x$.

Aus (4) wird dann $\begin{pmatrix} \mp\sqrt{3} & 3 \\ 1 & \mp\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und beide Zeilen sind äquivalent zu $e = \pm\sqrt{3}\,d$. Da Streckenverhältnisse positiv sind, ist nur die positive Lösung brauchbar, $e/d = \sqrt{3}$, was wir ja schon wussten. Das ist soweit nur eine Umformulierung der Rechnung auf Seite 4; allerdings haben wir eigentlich zwei Lösungen bekommen, nämlich zwei Eigenwerte $\lambda_\pm = 2 \mp \sqrt{3}$. Aber nur einer von ihnen ist brauchbar, der positive und betragsmäßig größere, $\lambda_+ = 2 + \sqrt{3}$, und $\binom{e}{d}$ ist der Eigenvektor zum größeren Eigenwert.

Dieser letzte Umstand erklärt den Erfolg des Iterationsverfahrens auf Seite 4: Der größte Eigenwert zieht nämlich am meisten, wenn wir A iterieren, d.h. die Potenzen A^k bilden. Wenn A eine *Diagonalmatrix* ist, $A = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$, dann wird der Vektor $A^k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+^k x \\ \lambda_-^k y \end{pmatrix}$ zwar immer länger, aber seine Richtung konvergiert für große k gegen die Richtung des Vektors $e_1 = \binom{1}{0}$, sofern $x \neq 0$ für den Startvektor $\binom{x}{y}$. Begründung: Wenn $\lambda_+ > |\lambda_-|$, dann ist $\lambda_+^k >> |\lambda_-^k|$. Soweit der Fall der Diagonalmatrix. Aber A ist tatsächlich eine Diagonalmatrix, wenn wir nämlich in das Koordinatensystem übergehen, das von den beiden *Eigenvektoren* v_+, v_- (mit $Av_\pm = \lambda_\pm v_\pm$) aufgespannt wird. Deshalb konvergiert die Richtung von $A^k v$ gegen die Richtung von v_+ für jeden Startvektor v, der nicht gerade ein Vielfaches von v_- ist, z.B. $v = \binom{1}{0}$.

Jetzt sehen wir, wie wir das Verfahren im Prinzip auch auf andere algebraische Zahlen, zum Beispiel Lösungen kubischer Gleichungen ausweiten können: Dass die Richtung $[v_+]$ des Eigenvektors v_+ zum betragsmäßig größten Eigenwert einer Matrix A am besten zieht, wenn wir A iterieren, $[A^k v] \xrightarrow{k\to\infty} [v_+]$ für jeden Startwert v mit einem v_+-Anteil $\neq 0$, das stimmt für jede Dimensionszahl n, und die Eigenwerte einer $n \times n$-Matrix sind die Lösungen einer Gleichung vom Grad n. Ich weiß nicht, ob man damit Kubikwurzeln berechnen kann. Ich möchte aber das einfachste kubische Beispiel behandeln, das Analogon zum Goldenen Schnitt; es hat mit der Geometrie des regelmäßigen Siebenecks zu tun.





Die gefärbten Dreiecke in den beiden Figuren (regelmäßiges Fünfeck und Siebeneck) sind untereinander ähnlich, weil ihre Seiten parallel sind. Es gibt eine Seitenlänge a und bis auf Kongruenz im Fünfeck eine Diagonale (Länge $a+b$) und im Siebeneck zwei Diagonalen, eine lange $a+b$ und eine kurze $b+c$. Weil das Verhältnis entsprechender Seiten in ähnlichen Dreiecken gleich ist, erhalten wir im Fall des Fünfecks

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} =: \lambda, \tag{6}$$

das ist die Gleichung (2) des Goldenen Schnittverhältnisses. Anders gesagt, $a+b = \lambda a$ und $a = \lambda b$, also

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenwert λ ist Lösung der Gleichung

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Das ist die Gleichung des goldenen Schnttes, $\lambda^2 = \lambda + 1$, mit den Lösungen $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Da $\lambda_+ > |\lambda_-|$, zieht die zugehörige Eigenrichtung $[v_+] = \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ am meisten, und wir können $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ oder a/b durch Iteration von A gewinnen: $a/b = \lim a_n/b_n$ mit

n	a_n	b_n	a_n/b_n	$a_n + b_n$
0	1	0	∞	1
1	1	1	1	2
2	2	1	2	3
3	3	2	1.5	5
4	5	3	1.67	8
5	8	5	1.6	13
6	13	8	1.625	...

Das ist die Approximation des goldenen Schnitts durch die Verhältnisse aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen.

Im Fall des Siebenecks ist

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{c} = \frac{a}{b} =: \lambda, \tag{7}$$

also $b+c = \lambda a$, $a = \lambda b$, $c + a = \lambda c$. Das ist die Eigenwertgleichung

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte λ sind die Lösungen der Gleichung

$$0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) + \lambda,$$

also

$$f(\lambda) := \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0. \tag{8}$$

An den Stellen $\lambda = -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 2$ hat $f(\lambda)$ die Werte $-\frac{13}{8}$, 1, $-\frac{7}{8}$, 1. Das zeigt, dass die drei Nullstellen von f in den Intervallen $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(0, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, 2)$ liegen müssen. Da die von uns gesuchte Nullstelle $\lambda_+ = a/b$ größer als 1 ist, muss sie im Intervall $(\frac{3}{2}, 2)$ liegen und damit den größten Betrag unter den drei Eigenwerten haben. Daher lassen sich die Richtung des Eigenvektors (a, b, c) und damit die Verhältnisse a/b, b/c, a/c durch Iteration von A bestimmen, d.h. durch die Rekursion

$$a_{n+1} = b_n + c_n, \quad b_{n+1} = a_n, \quad c_{n+1} = c_n + a_n \ :$$

n	a_n	b_n	c_n	a_n/b_n	$b_n + c_n$	$c_n + a_n$
0	1	0	1	∞	1	2
1	1	1	2	1	3	3
2	3	1	3	3	4	6
3	4	3	6	1.33	9	10
4	9	4	10	2.25	14	19
5	14	9	19	1.56	28	33
6	28	14	33	2	47	61
7	47	28	61	1.68	89	108
8	89	47	108	1.89	155	197
9	155	89	197	1.74	286	352
10	286	155	352	1.85	...	

Das Neun-, Elf- und $(2n+1)$-Eck verhalten sich analog; jedesmal ist das Verhältnis der Seite zur kürzesten Diagonale ein Eigenwert einer ganzzahlig invertierbaren Matrix A, die nur aus Nullen und Einsen besteht; das allgemeine Schema dieser Matrix ist leicht zu ermitteln. Vermutlich ist der gesuchte Eigenwert wieder der betragsmäßig größte[5] und kann daher durch Iteration von A berechnet werden. Die Idee von Theodoros hat uns weit geführt in interessante neue Gefilde.

E-mail address: eschenburg@math.uni-augsburg.de

[5] Da in jeder Zeile und Spalte von A höchstens zwei Einsen stehen, folgt $|Av| < 2|v|$ für jeden Vektor v, also haben alle Eigenwerte Betrag < 2. Der gesuchte Eigenwert, das Verhältnis der kleinsten Diagonale zur Seitenlänge, ist aber nur wenig kleiner als 2, weil die Winkel des Vielecks ja sehr flach sind.