QUATERNIONEN UND OKTAVEN (2)

J.-H. ESCHENBURG

Inhaltsverzeichnis

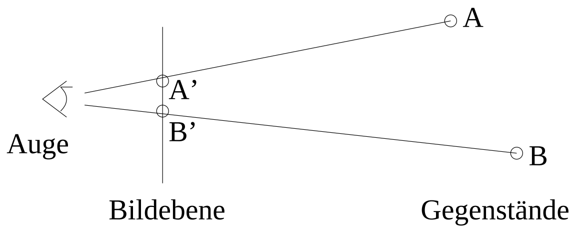
1. Die Ursprünge der Projektiven Geometrie

Um das Jahr 1415 herum wurde in Florenz ein entscheidendes Stück Mathematikgeschichte geschrieben: Der Baumeister des Doms von Florenz, Filippe Brunelleschi (1377 - 1440), entdeckte die Zentralperspektive. Dieser erste wirkliche Fortschritt in der Geometrie seit Euklid kann in seiner Bedeutung für die europäische Geistesgeschichte gar nicht hoch genug geschätzt werden: Malerei (Masaccio 1426), Astronomie (Kopernikus, Kepler) und Mathematik (projektive Geometrie) wurden

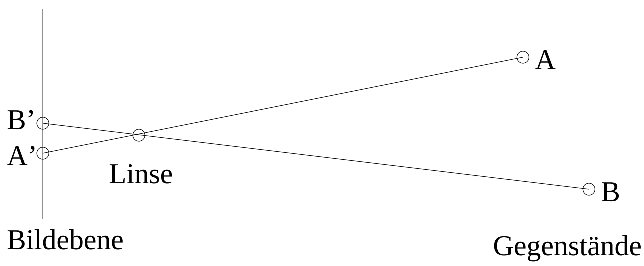
Date: 5. März 2010.

davon zutiefst beeinflusst. Perspektivische Abbildungen bilden Geraden auf Geraden ab, aber Parallelen nicht auf Parallelen, sondern auf Geraden mit einem gemeinsamen Schnittpunkt. Diese Schnittpunkte, *Fernpunkte* genannt, bilden zusammen selbst eine Gerade, den *Horizont*. Der französischen Festungsbaumeister *Gerard Desargues* (1591 - 1661) entwickelte daraus die Idee, die später von dem Mathematiker *Jean Victor Poncelet*[1] (1788 - 1867) durchgeführt wurde, nämlich die Ebene um weitere, "ideale" (d.h. nur der Idee nachvorhanden) Punkte zu erweitern, eben diese Fernpunkte, die gemeinsam eine weitere Gerade bilden, die Ferngerade. Ausgehend von der gewöhnlichen "affinen" Ebene werden die neuen Punkte als Klassen paralleler Geraden definiert; der Schnittpunkt dieser Parallelen ist der neu hinzugefügte Punkt.

Die Fernpunkte scheinen aber zunächst eine ganz andere Rolle zu spielen als die gewöhnlichen Punkte. Eine Konstruktion, die auch bereits auf die Renaissance zurückgeht und zum Beispiel von Albrecht Dürer[2] wiedergegeben wird, behebt diese Sonderrolle. Gleichzeitig klärt sie, wie perspektivische Bilder zustandekommen, beim Sehen



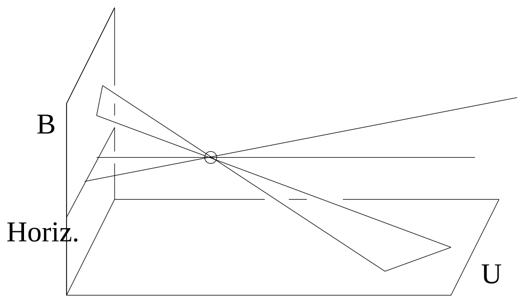
und im Fotoapparat:



[1]Poncelet geriet als Soldat unter Napoleon 1812 in russische Kriegsgefangenschaft und hatte viel Zeit, aber keine Bücher zur Verfügung. In dieser Situation entwickelte er systematisch von Grund auf die Gesetze dieser Geometrie. E.T. Bell schreibt darüber in "Men of Mathematics": "He makes the interesting observation that practically all details and complicated developments of the mathematics he had been taught had evaporated, while the general, fundamental principles remained as clear as ever in his memory."

[2]Albrecht Dürer (1471 - 1528): "Unterweysung der Messung" (1526)

In beiden Fällen fängt die Bildebene von den Gegenständen ausgesandte Lichtstrahlen auf, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen: die Linse des Auges oder des Fotoapparats. Geht man noch einen Schritt weiter und identifiziert die abgebildeten Punkte mit diesen Strahlen, dann hat man die eine Definition der *Projektiven Ebene*, die die Fernpunkte nicht mehr auszeichnet: die Menge der Geraden im Raum, die durch einen festen Punkt gehen (*Geradenbüschel*). Jede Ebene, die in den Strahlengang gehalten wird, fängt einen Teil der Strahlen auf. Die Punkte einer Geraden in der Ebene entsprechen dabei den Geraden aus dem Büschel, die in einer gemeinsamen Ebene liegen:



Einige Geraden des Büschels aber treffen die Ebene nicht, weil sie dazu parallel sind; das sind die Ferngeraden.

2. Verbindung zur Linearen Algebra

Wir wollen diese Konstruktionen mit den Mitteln der Linearen Algebra verfolgen. Die affine Ebene ist $\mathbb{R}^2 = \{(x, y);\ x, y \in \mathbb{R}\}$. *Geraden* werden wie in der Schule definiert: Lösungsmengen der Gleichungen $y = ax + b$ oder $x = c$; letztere sind die senkrechten Geraden, die nicht als Graph über der x-Achse darstellbar sind. Die Zahl a gibt die Steigung an; Geraden der zweiten Sorte haben die Steigung $a = \infty$. Geraden mit der gleichen Steigung heißen *parallel*. Zwei Geraden schneiden sich genau dann, wenn sie nicht parallel sind, und zwar in genau einem Punkt: Die Gerade $y = ax + b$ schneidet die Gerade $x = c$ im Punkt $(c, ac + b)$. Den Schnittpunkt mit einer Geraden $y = \tilde{a}x + \tilde{b}$ mit $\tilde{a} \neq a$ berechnet man durch Gleichsetzen der rechten Seiten: $ax + b = \tilde{a}x + \tilde{b}$ $\iff$ $(a - \tilde{a})x = \tilde{b} - b$, also $x = (a - \tilde{a})^{-1}(\tilde{b} - b)$.

Hier sehen wir zum ersten Mal die Verbindung zu unseren Divisionsalgebren: Der letzte Schritt lässt sich genau in einer Divisionsalgebra durchführen. Wir können also $\mathbb{R}$ durch eine Divisionsalgebra $\mathbb{K}$ ersetzen und erhalten dasselbe Resultat: Zwei Geraden schneiden sich genau dann, wenn sie nicht parallel sind (gleiche Steigung a haben), und dann ist der Schnittpunkt eindeutig. Auch der Schritt der Erweiterung zur projektiven Ebene lässt sich gemeinsam für alle Divisionsalgebren durchführen: Die Ferngerade enthält die Punkte (a) (die Klasse der Geraden mit Steigung a) für alle $a \in \mathbb{K}$ sowie den Punkt (∞), die Klasse der vertikalen Geraden. Durch die Hinzunahme der Fernpunkte brauchen wir bei Geradenpaaren den Sonderfall der Parallelität nicht mehr zu unterscheiden; in der projektiven Ebene schneiden sich zwei Geraden in (genau) einem Punkt.

Ebenso leicht sehen wir, dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht: Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Punkte der affinen Ebene und setzen wir $a = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)^{-1}$, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden $y - y_1 = a(x - x_1)$, und der Punkt (x_1, y_1) ist mit dem Fernpunkt (a) durch die Gerade $y - y_1 = a(x - x_1)$ und mit dem Fernpunkt (∞) durch die senkrechte Gerade $x = x_1$ verbunden. Das sind die beiden grundlegenden Eigenschaften (Axiome) der projektiven ebenen Geometrie: Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade und zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Die Konstruktion der projektiven Ebene durch Hinzunahme der Fernpunkte hat, wie erwähnt, einen Schönheitsfehler: Es gibt zwei unterschiedlich definierte Sorten von Punkten: die der affinen Ebene ("affine Punkte") und die Fernpunkte. Durch die zweite Konstruktion des Geradenbüschels im Raum wird diese Sonderrolle behoben. Wir können den gemeinsamen Punkt des Büschels (das "Zentrum") mit dem Ursprung O des dreidimensionalen Raums $\mathbb{K}^3$ identifizieren; die Geraden des Büschels sind dann genau die Geraden durch O, d.h. die eindimensionalen Untervektorräume. Damit erhalten wir eine neue Definition der Projektiven Ebene $\mathbb{K}P^2$ über $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}P^2 = \{[v];\ v \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}\}. \tag{2.1}$$

Dabei ist $[v] = v\mathbb{K}$ der vom Vektor v erzeugte eindimensionale Unterraum.[3] Man nennt $[v]$ auch einen *homogenen Vektor* und meint damit, dass die Komponenten v_1, v_2, v_3 nur bis auf einen willkürlich wählbaren gemeinsamen Faktor erklärt sind, d.h. $v\lambda = (v_1\lambda, v_2\lambda, v_3\lambda)$ mit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ definiert denselben homogenen Vektor: $[v\lambda] = [v]$. Man schreibt oft auch

$$v = [v_1 : v_2 : v_2] \tag{2.2}$$

[3]In Hinblick auf die Quaternionen (Multiplikation nicht kommutativ) ist es nützlich, die Skalare rechts und die Matrizen links zu schreiben, also lieber $v\lambda$ statt λv.

und drückt durch die Doppelpunkte aus, dass es nur auf die *Verhältnisse* (Quotienten) $v_i : v_j = v_i v_j^{-1}$ der drei Komponenten ankommt.[4] Die *Geraden* von $\mathbb{K}P^2$ bestehen dann genau aus solchen homogenen Vektoren $[v]$, die in einem gemeinsamen zweidimensionalen Unterraum liegen. Punkte der Projektiven Ebene entsprechen also eindimensionalen Unterräumen, Geraden der Projektiven Ebene dagegen zweidimensionalen Unterräumen des $\mathbb{K}^3$.

Aber jetzt stoßen wir auf ein großes Problem. Die erste Definition der Projektiven Ebene mit den Fernpunkten gilt ohne weiteres auch für die Oktaven $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, aber die zweite mit den eindimensionalen Unterräumen nicht! Wegen der fehlenden Assoziativität gilt nämlich nicht mehr $(v\lambda)\mu = v(\lambda\mu)$, und daher sind $[v]$ und $[v\lambda]$ nicht mehr gleich! Man behilft sich durch Einschränkung auf Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{O}^3$, deren Komponenten in einer gemeinsamen Quaternionen-Unteralgebra $\mathbb{H}'$ liegen; dann gilt $[v\lambda] = [v]$ wenigstens für alle $\lambda \in \mathbb{H}' \setminus \{0\}$. Aber erhalten wir so wirklich die projektive Ebene im Sinne der ersten Definition? Haben wir nicht vielleicht Punkte weggelassen? Und wie sehen die projektiven Geraden aus? Zweidimensionale Unterräume sind nicht weniger problematisch als eindimensionale! Wir werden dieses Problem gemeinsam mit einem anderen lösen, das auch für die übrigen Divisionsalgebren besteht: Ist $\mathbb{K}P^2$ eine schöne Menge, die auch eine Topologie trägt? Man sollte doch von Konvergenz einer Punktfolge reden können. Am besten wäre es, wenn wir $\mathbb{K}P^2$ einfach als *Mannigfaltigkeit* in einem $\mathbb{R}^N$ schreiben könnten. Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^N$ sind einfache Objekte: Sie sehen bis auf lokale Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^N$ lokal wie affine oder lineare Unterräume aus.[5]

3. Das Projektorenmodell

Wir wollen zunächst im assoziativen Fall bleiben ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$), aber dort den Blick etwas erweitern. Wir betrachten nicht nur die Menge der eindimensionalen Unterräume des $\mathbb{K}^3$, sondern allgemeiner die Menge der p-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{K}^n$. Diese Menge bezeichnen wir auch als *Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_p(\mathbb{R}^n)$ der p-Ebenen im K^n*.[6] Wie können wir diese Menge als Mannigfaltigkeit erkennen? Wir müssen $G_p(\mathbb{R}^n)$ als Teilmenge eines $\mathbb{R}^N$ verstehen, in einen $\mathbb{R}^N$ "einbetten". Dieser $\mathbb{R}^N$ wird der Vektorraum $H_n(\mathbb{K})$ der hermiteschen (oder selbstadjungierten) $n \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$ sein. Eine $n \times n$-Matrix

[4] $(v_i\lambda)(v_j\lambda)^{-1} = v_i\lambda\lambda^{-1}v_j^{-1} = v_i v_j^{-1}$.

[5] Die Menschen haben lange genug geglaubt, dass die Erde eine Scheibe sei; lokal sieht sie ja so aus, auf der bayerischen Hochebene ganz besonders.

[6] Hermann Günter Grassmann, 1809 - 1877, Stettin

$A = (a_{ij})$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ heißt *hermitesch*, wenn

$$A^* = A, \quad a_{ij} = \overline{a_{ji}} \tag{3.1}$$

wobei A^* die transponierte und konjugierte Matrix bezeichnet. Eine solche Matrix hat reelle Diagonaleinträge, $a_{ii} \in \mathbb{R}$, und die Koeffizienten oberhalb der Diagonale, a_{ij} mit $i < j$, bestimmen die unterhalb der Diagonale. Die Zahl der Parameter ist also $N = n + \frac{1}{2}n(n-1)k$ mit $k = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$. Wir können hermitesche Matrizen auch mit Hilfe des *hermitschen Skalarprodukts*

$$(v, w) = v^* w = \overline{v_1} w_1 + \cdots + \overline{v_n} w_n \in \mathbb{K} \tag{3.2}$$

kennzeichnen: Eine Matrix A ist hermitesch genau dann, wenn

$$(Av, w) = (v, Aw) \tag{3.3}$$

für alle $v, w \in \mathbb{K}^n$, denn $(Av, w) = (Av)^* w = v^* A^* w$ und $(v, Aw) = v^* Aw$ sind gleich für alle v, w genau dann, wenn $A^* = A$.

Wie also können wir $G_p(\mathbb{K}^n)$ in $H_n(\mathbb{K})$ einbetten? Wir müssen dazu jedem p-dimensionalen Unterraum W eine hermitesche Matrix zuordnen. Die Idee dazu ist einfach: Wir wählen die *Orthogonalprojektion* von $\mathbb{K}^n$ auf den Unterraum W, auch *Projektor* auf W genannt, d.h. die lineare Abbildung $P = P_W$ auf $\mathbb{K}^n$ mit $P = I$ auf W und $P = 0$ auf $W^\perp$. Diese ist hermitesch[7] und erfüllt die Projektorbedingung $P^2 = P$. Umgekehrt definiert jede solche Matrix P einen Unterraum $W = \text{Bild}\, P = P(\mathbb{K}^n)$. Wegen $P^2 = P$ ist $P = I$ auf W und andererseits ist $P = 0$ auf $W^\perp$, denn $P(W^\perp) \subset \text{Bild}\, P = W$, aber $(P(W^\perp), W) = (W^\perp, P(W)) = (W^\perp, W) = 0$. Die Dimension von Bild P ist gerade die *Spur*[8] von P. Wir erhalten also

$$G_p(\mathbb{K}^n) = \{P \in H_n(\mathbb{K});\ P^2 = P,\ \text{Spur}\, P = p\}. \tag{3.4}$$

[7]Jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ wird zerlegt in $v = v' + v''$ mit $v' \in W$ und $v'' \in W^\perp$, und $Pv = v'$. Somit ist $(Pv, w) = (v', w' + w'') = (v', w') = (v, Pw)$.

[8]Die Gleichung $\text{Spur}\,(AB) = \text{Spur}\,(BA)$ gilt über $\mathbb{H}$ nicht mehr, weil die Multiplikation nicht mehr kommutativ ist. Aber die Diagonalelemente einer hermiteschen Matrix sind reell, und für den Realteil gilt wieder die Kommutativität. Wenn also AB und BA beide hermitesch sind, dann erhalten wir $\text{Spur}\,(AB) = \text{Re Spur}\,(AB) = \text{Re Spur}\,(BA) = \text{Spur}\,(BA)$. Dies wenden wir an auf $A = US$ und $B = U^*$ für eine unitäre Matrix U (d.h. $U^*U = I$) und eine hermitesche Matrix S. Dann sind $AB = USU^*$ und $BA = U^*US = S$ beide hermitesch und somit $\text{Spur}\,(USU^*) = \text{Spur}\, S$. Wenn wir $S = P$ wählen und U den Unterraum W auf $\mathbb{K}^p$ abbildet, dann sehen wir $\text{Spur}\, UPU^* = p$ denn $UPU^* = \text{diag}\,(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

Dies ist die gemeinsame Lösungsmenge einer affinen (Spur $P = p$) und einer quadratischen ($P^2 = P$) Gleichung im Vektorraum $H_n(\mathbb{K})$ und tatsächlich eine Mannigfaltigkeit.[9]

Für $p = 1$ sind die Projektoren P besonders einfach zu beschreiben: Wenn $W = [v] = v\mathbb{K}$ mit $|v| = 1$, so ist

$$P_W = P_v = vv^*, \tag{3.5}$$

denn $vv^*x = v(v, x)$ ist die Komponente eines Vektors x in Richtung v; der Differenzvektor $x - v(v, x)$ ist senkrecht zu v:

$$(v, x - v(v, x)) = (v, x) - (v, v)(v, x) = 0.$$

4. Die Oktavenebene

Wir definieren die projektive Ebene über den Oktaven ganz analog zu (3.4):

$$\mathbb{O}P^2 = \{P \in H_3(\mathbb{O});\ P^2 = P,\ \text{Spur}\ P = 1\}. \tag{4.1}$$

Wie ist das mit der Definition (2.1) der projektiven Ebenen über den anderen Divisionsalgebren durch homogene Vektoren $[v] = [v_1 : v_2 : v_3]$ verträglich? Wir haben früher schon bemerkt, dass wir wir bei den Oktaven nicht alle Tripel (v_1, v_2, v_3) zulassen werden, sondern nur solche, deren *Assoziator* $[v_1, v_2, v_3] = v_1(v_2v_3) - (v_1v_2)v_3$ verschwindet, die also in einer assoziativen Unteralgebra liegen; wir wollen solche Vektoren *zulässig* nennen. Nach [4] wissen wir, dass dies immer der Fall ist, wenn mindestens eine der drei Zahlen reell ist; zwei Oktaven spannen immer eine assoziative Unteralgebra auf. Diese Einschränkung scheint auf den ersten Blick etwas willkürlich, während (4.1) sehr natürlich aussieht. Aber die beiden Definitionen sind äquivalent, wenn wir v durch die Matrix vv^* ersetzen:

Satz 4.1.

$$\mathbb{O}P^2 = \{vv^*;\ |v| = 1,\ [v_1, v_2, v_2] = 0\}. \tag{4.2}$$

---

[9] Das ist nicht ganz so einfach zu sehen, denn $G_p(\mathbb{K}^n)$ ist zwar ein Urbild, aber kein reguläres. Am einfachsten ist es vielleicht, wenn man $G_p(\mathbb{K}^n)$ lokal als Bild einer Immersion darstellt. Im Fall $p = 1$ kann man den Unterraum $[v] = v\mathbb{K}$ für $|v| = 1$ darstellen durch den Projektor $P = vv^*$, $Px = vv^*x = v(v, x)$; diese Abbildung ist eine Immersion von der Sphäre $\mathbb{S}^{kn-1} \subset \mathbb{K}^n$ in den Vektorraum $H_n(\mathbb{K})$. Im allgemeinen Fall kann man alle p-Ebenen W in der Nähe einer festen p-Ebene W_o als Graphen einer linearen Abbildung $F : W_o \to W_o^\perp$ kennzeichnen; diese linearen Abbildungen bilden einen Vektorraum $\text{Hom}(W_o, W_o^\perp)$. Wir wählen eine feste Basis $a_1, \dots, a_p$ von W_o und setzen $\hat{a}_j = a_j + Fa_j$. Die Vektoren $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$ bilden eine Basis von W. Diese orthonormalisieren wir nach Gram-Schmidt zu einer Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_p$ von W und setzen $P = \sum_j b_j b_j^*$. Die Abbildung $F \mapsto P$ ist die gesuchte Immersion. Ein wesentlich eleganteres Argument mit Hilfe von mehr Geometrie findet man in [5].

Beweis. Jedes $X \in H_3(\mathbb{O})$ ist von der Form

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & z & \bar{y} \\ \bar{z} & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + |z|^2 + |y|^2 & \bar{y}\bar{x} + (\alpha+\beta)z & zx + (\gamma+\alpha)\bar{y} \\ xy + (\alpha+\beta)\bar{z} & \beta^2 + |x|^2 + |z|^2 & \bar{z}\bar{y} + (\beta+\gamma)x \\ \bar{x}\bar{z} + (\gamma+\alpha)y & yz + (\beta+\gamma)\bar{x} & \gamma^2 + |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Nun nehmen wir Spur $X = 1$ an, also $\alpha + \beta + \gamma = 1$, und $X^2 = X$. Vergleich der (23)-Koeffizienten von X^2 und X ergibt dann

$$\bar{z}\bar{y} + (1-\alpha)x = x,$$

also $\bar{z}\bar{y} = \alpha x$, und ganz entsprechend aus den (31)- und (12)-Koeffizienten die zyklisch permutierten Gleichungen:

$$\bar{z}\bar{y} = \alpha x, \quad \bar{x}\bar{z} = \beta y, \quad \bar{y}\bar{x} = \gamma z. \tag{4.5}$$

Damit liegen alle drei Komponenten x, y, z in einer gemeinsamen assoziativen Unteralgebra $\tilde{\mathbb{H}}$ isomorph zu $\mathbb{H}$, und wir können (3.5) anwenden. □

Was sind die projektiven Geraden in diesem Modell? Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist eine projektive Gerade g durch die homogenen Vektoren eines zweidimensionalen Unterraums $E \subset \mathbb{K}^3$ gegeben; diesen können wir durch seinen Normalenvektor w beschreiben:

$$E = \{v \in \mathbb{K}^3;\ (w,v) = 0\}, \quad g = \{[v];\ (w,v) = 0\} = [w^\perp]. \tag{4.6}$$

Die projektiven Geraden werden also genau wie die Punkte durch homogene Vektoren $[w]$ beschrieben, denn $w^\perp$ ändert sich nicht bei Multiplikation von w mit einem Skalar in $\mathbb{K}$. Diese Orthogonalität sehen wir auch im Projektormodell:[10]

Hilfssatz 4.1. *Für $v, w \in \mathbb{K}^3$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ gilt:*

$$(v,w) = 0 \iff \langle P_v, P_w \rangle = 0.$$

Beweis. $\langle P_v, P_w \rangle = \mathrm{Re\ Spur}\,(vv^*ww^*) = \mathrm{Re\ Spur}\,(w^*vv^*w) = |(v,w)|^2$. □

[10]Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ sehen wir sogar $(v,w) = 0 \iff P_vP_w = 0$, denn $P_vP_w = vv^*ww^* = v(v,w)w^* = 0$ falls $(v,w) = 0 \iff (v,w) = 0$. Diese Rechnung funktioniert nicht über $\mathbb{O}$, dennoch ist das Ergebnis auch für $\mathbb{O}$ noch wahr.

Diese Rechnung motiviert die Geradendefinition in $\mathbb{O}P^2$: *Projektive Geraden* in $\mathbb{O}P^2$ sind genau die Schnitte von $\mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$ mit der Hyperebene $Y^\perp \subset H_3(\mathbb{O})$ für ein $Y \in \mathbb{O}P^2$.

Ist diese Definition der projektiven Ebene mit unserer früheren Definition durch Projektivierung der affinen Ebene verträglich? In der affinen Ebene $\mathbb{O}^2$ wurden die meisten Geraden durch die Gleichung $y = ax + b$ beschrieben, und diese hat die richtige Form:

$$0 = y - ax - b = (w, v)$$

mit $v = (x, y, 1)^t$ und $w = (-\bar{a}, 1, -\bar{b})^t$. Beides sind zulässige Vektoren, weil jeweils eine der drei Komponenten gleich 1 ist. Ebenso gilt für die Gleichung $x = c$ der vertikalen Geraden:

$$0 = x - c = (w, v)$$

für $w = (1, 0, -\bar{c})$. Die Ferngerade schließlich wird durch die Gleichung $z = 0$ beschrieben; sie wird von den (zulässigen) homogenen Vektoren $[v] = [x : y : 0]$ gebildet, die der Gleichung $(v, w) = 0$ für $w = (0, 0, 1)^t$ genügt. Die vorkommenden homogenen Vektoren w haben an der ersten, zweiten oder dritten Stelle eine 1 und sind im übrigen beliebig; alle zulässigen Vektoren $(x, y, z)^t$ können auf eine dieser drei Formen gebracht werden, z.B. $[x : y : z] = [xz^{-1} : yz^{-1} : 1]$ falls $z \neq 0$, deshalb gibt es nicht noch weitere Geraden.

5. Gruppenwirkungen

Ein großer Vorteil des Projektormodells ist, dass auf $G_p(\mathbb{K}^n) \subset H_n(\mathbb{K})$ damit bereits ein Abstand definiert ist, analog zum Abstandsbegriff auf einer Fläche im Raum: Der Abstand zwischen zwei Punkten ist die Länge der kürzesten Kurve zwischen diesen beiden Punkten, die ganz auf der Fläche bzw. der Mannigfaltigkeit verläuft.[11] Die Länge einer Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ist bekanntlich $L(c) = \int_a^b |c'|$ mit $|c'|^2 = \langle c', c' \rangle$. Wir benötigen also ein Skalarprodukt auf unserem Raum $\mathbb{R}^N = H_n(\mathbb{K})$; dieses ist

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re}\operatorname{Spur}(X^*Y) = \operatorname{Re}\operatorname{Spur}(XY). \tag{5.1}$$

Die Kugelfläche hat unter den Flächen eine besondere Eigenschaft: Sie hat eine hohe Symmetrie; man kann sie drehen, ohne eine Veränderung zu bemerken, sie ist *homogen* ("die Kugel rollt"). Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^N$ wird *homogen* genannt, wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ eine

[11] Wenn es eine solche kürzeste Kurve nicht gibt, dann nimmt man das Infimum aller Längen von Kurven zwischen den beiden Punkten, die ganz auf der Fläche verlaufen.

abstandstreue Abbildung, eine *Isometrie* g des $\mathbb{R}^N$ gibt[12] mit $g(M) = M$ und $g(p) = q$. Eine solche Abbildung werden wir *Isometrie von* $(M, \mathbb{R}^N)$ nennen. Man kann zeigen, dass homogene Teilmengen immer Mannigfaltigkeiten sind.[13] Wir werden sehen, dass auch $G_p(\mathbb{K}^n)$ eine homogene Teilmenge, ein Orbit ist. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ist das einfach: Wir betrachten die Gruppe

$$G = \{g \in M_n(\mathbb{K});\ g^*g = I\} \tag{5.2}$$

der *unitären* Transformationen auf $\mathbb{K}^n$, also $G = O_n, U_n, Sp_n$. Diese überführt jeden p-dimensionalen Unterraum in jeden anderen, sie wirkt *transitiv*[14] auf $G_p(\mathbb{K}^n)$: wir brauchen ja nur Orthonormalbasen für beiden Unterräume bezüglich des hermiteschen Skalarprodukts zu wählen, zu Orthonormalbasen von $\mathbb{K}^n$ zu ergänzen und diese aufeinander abzubilden. Diese Gruppenwirkung können wir leicht auf unser Projektormodell übertragen: Wenn W den Projektor P hat ($W = \text{Bild } P$), dann hat der Unterraum gW für jedes $g \in G$ den konjugierten Projektor $gPg^{-1} = gPg^*$. Die Gruppe G wirkt auf dem umliegenden Raum $H_n(\mathbb{K})$ durch lineare Abbildungen $X \mapsto kXk^*$ und jedes $g \in K$ lässt die Teilmenge $G_p(\mathbb{K}^n) \subset H_n(\mathbb{K})$ invariant, denn gPg^* ist wieder ein Projektor ($gPg^*gPg^* = gP^2g^* = gPg^*$). Da G auch das Skalarprodukt auf $H_n(\mathbb{K})$ invariant lässt,

$$\langle gXg^*, gYg^*\rangle = \text{Re Spur}\,(gXg^*gYg^*) = \text{Re Spur}\,(gXYg^{-1}) = \langle X, Y\rangle,$$

wirkt G durch *Isometrien.* Die Grassmannsche $G_p(\mathbb{K}^n) \subset H_n(\mathbb{K})$ ist also wie die Sphäre im $\mathbb{R}^3$ homogen[15]

Es gibt noch eine viel größere Gruppe, die transitiv auf $G_p(\mathbb{R}^n)$ wirkt. Dies ist die Gruppe $GL_n(\mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$-linearen invertierbaren Abbildungen auf $\mathbb{K}^n$, die offensichtlich jeden p-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{K}^n$ in jeden anderen überführen. Einige dieser Abbildungen bewirken allerdings gar nichts auf $G_p(\mathbb{K}^n)$, sie sind "*ineffektiv*", da sie jeden Unterraum in sich selbst überführen. Das sind genau die skalaren

[12] D.h. $g(x) = Ax + b$ für eine orthogonale Matrix A und ein $b \in \mathbb{R}^N$

[13] Die Gruppe G aller Isometrien von $(M, \mathbb{R}^N)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe aller Isometrien des $\mathbb{R}^N$ und damit selbst eine *Liegruppe*, eine Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer Gruppenstruktur, und die Operation auf $\mathbb{R}^N$ ist differenzierbar. M ist eine *Bahn* (ein *Orbit*), d.h. $M = Gp = \{gp;\ g \in G\}$; solche Mengen sind Mannigfaltigkeiten.

[14] Eine *Gruppenwirkung* einer Liegruppe G auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $\phi : G \times M \to M$, $(g, p) \mapsto gp$, mit den Eigenschaften $ep = p$ und $g(hp) = (gh)p$ für alle $p \in M$ und $g, h \in G$. Die Gruppenwirkung heißt *transitiv*, wenn jeder Punkt von M in jeden anderen überführt werden kann: Für alle $p, q \in M$ gibt es ein $g \in G$ mit $gp = q$.

[15] Sie ist sogar ein symmetrischer Raum wie auch die Sphäre; vgl. [5].

Vielfachen der Identität, wobei die Skalare ($\neq 0$) mit allen Skalaren in $\mathbb{K}$ vertauschen müssen. (Übung!)[16] Diese Skalarmenge ist $Z = \mathbb{R}^*$ für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{H}\}$ und $Z = \mathbb{C}^*$ für $K = \mathbb{C}$. Jede Matrix $g \in GL_n(\mathbb{K})$ kann um solch ein *Zentrumselement* $z = \lambda I$, $\lambda \in Z$ abgeändert werden, ohne die Wirkung auf $G_p(\mathbb{K}^n)$ zu verändern, denn für jedes $W \in G_p(\mathbb{K}^n)$ ist $gW = gzW$. Die "effektiv" wirkende Gruppe ist daher $PGL_n(\mathbb{K}) := GL_n(\mathbb{K})/Z$, die *projektive lineare Gruppe.* Im Fall der Projektiven Ebene $\mathbb{K}P^2 = G_1(\mathbb{K}^3)$ oder allgemeiner des *Projektiven Raums* $\mathbb{K}P^{n-1} = G_1(\mathbb{K}^n)$ bildet diese Gruppe auch Geraden in Geraden ab, denn Geraden kommen ja von zweidimensionalen Unterräumen in $\mathbb{K}^n$ her, und die werden durch invertierbare lineare Abbildungen aufeinander abgebildet.[17] [18]

Die große Gruppe $L = GL_n(\mathbb{K})$ wirkt ebenfalls linear auf $H_n(\mathbb{K})$ mit derselben Vorschrift $X \mapsto gXg^*$ für alle $g \in L$. Aber die Grassmannsche $G_p(\mathbb{K}^n)$ bleibt nicht mehr invariant, denn gPg^* ist kein Projektor mehr. Einzige Ausnahme ist $p = 1$, denn für $P = vv^*$ ist $gPg^* = ww^*$ mit $w = gv$. Allerdings ist ww^* nur dann ein Projektor, wenn $|w| = 1$; im Allgemeinen ist ww^* also ein positives Vielfaches eines Projektors, was keinen großen Unterschied macht.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ kennen wir bisher keine Gruppe von linearen Transformationen von $H_3(\mathbb{O})$, die die Rolle von G und L übernehmen könnte; dazu müssen wir die Struktur von $H_3(\mathbb{O})$ erst besser kennenlernen.

6. Matrizen über normierten Algebren

Es sei $\mathbb{K}$ eine normierte Algebra mit Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ und Norm $|x|^2 = x\bar{x}$; das zugehörige Skalarprodukt auf $\mathbb{K}$ ist

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\,(\bar{x}y).$$

Wir betrachten die Menge $M_n(\mathbb{K})$ der $n \times n$-Matrizen X über $\mathbb{K}$. Zu $X = (x_{ij})$ definieren wir die *adjungierte Matrix* $X^* = \bar{X}^t = (\bar{x}_{ji})$

---

[16] Es genügt, die linearen Abbildungen zu betrachten, die jeden eindimensionalen Unterraum in sich überführen, denn die eindimensionalen Unterräume kann man als Schnitte von p-dimensionalen darstellen.

[17] $PGL_n(\mathbb{K})$ ist sogar fast immer die Gruppe *aller* geradentreuen Abbildungen (*Kollineationen*) des projektiven Raums $\mathbb{K}P^{n-1}$; einzige Ausnahme ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wo man neben den linearen auch noch die antilinearen Abbildungen (Verknüpfungen von linearen Abbildungen mit der komplexen Konjugation) diese Eigenschaft haben.

[18] Die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_p(\mathbb{K}^n)$ für $p > 1$ hat eine ganz ähnliche Struktur: Den Geraden entsprechen die p-dimensionalen Unterräume, die in einem festen $p+1$-dimensionalen Unterraum liegen.

oder $(X^*)_{ij} = \bar{x}_{ji}$. Die Menge $M_n(\mathbb{K})$ ist eine Algebra unter Matrix-Multiplikation: Das Produkt XY ist die Matrix mit den Einträgen

$$(XY)_{ij} = \sum_k x_{ik} y_{kj}.$$

Diese Multiplikation ist nicht mehr assoziativ, wenn $\mathbb{K}$ nicht assoziativ war. Die Abbildung $X \mapsto X^*$ ist ein Anti-Isomorphismus, $(XY)^* = Y^* X^*$, denn

$$(Y^* X^*)_{ij} = \sum_k \bar{y}_{ki} \bar{x}_{jk} = \sum_k \overline{x_{jk} y_{ki}} = (\overline{XY})_{ij}.$$

Die *Spur* einer Matrix X ist die Summe der Diagonalelemente:

$$\text{Spur } X = \sum_i X_{ii}$$

Insbesondere ist $\text{Spur}\,(XY) = \sum_{i,j} x_{ij} y_{ji}$. Da $\mathbb{K}$ nicht notwendig kommutativ ist, gilt nicht mehr $\text{Spur}\,(XY) = \text{Spur}\,(YX)$, aber für die Realteile stimmt das noch. Damit definieren wir ein Skalarprodukt auf $M_n(\mathbb{K})$:

$$\langle X, Y \rangle = \text{Re Spur}\,(X^* Y) = \text{Re} \sum_{ij} \bar{x}_{ji} y_{ji} = \sum_{ji} \langle x_{ji}, y_{ji} \rangle. \tag{6.1}$$

Dieses verträgt sich mit der Multiplikation folgendermaßen:

$$\langle XY, Z \rangle = \text{Re Spur}\,((XY)^* Z) = \text{Re Spur}\,(Y^* X^* Z) = \langle Y, X^* Z \rangle \tag{6.2}$$

und entsprechend $\langle XY, Z \rangle = \langle X, ZY^* \rangle$.

Eine Matrix X heißt *hermitesch* wenn $X^* = X$ und *antihermitesch*, wenn $X^* = -X$. Dann ist

$$M_n(\mathbb{K}) = H_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) \tag{6.3}$$

wobei $H_n(\mathbb{K})$ den Raum der hermiteschen und $A_n(\mathbb{K})$ den der antihermiteschen Matrizen bezeichnet; in der Tat lässt sich jede Matrix $X \in M_n(\mathbb{K})$ in eine hermitesche $X^+ = \frac{1}{2}(X + X^*)$ und eine antihermitesche $X^- = \frac{1}{2}(X - X^*)$ zerlegen. Die beiden Teilräume stehen aufeinander senkrecht, denn für $X \in H_n(\mathbb{K})$ und $A \in A_n(\mathbb{K})$ gilt

$$\begin{aligned} \langle A, X \rangle &= \text{Re Spur}\,(A^* X) = -\,\text{Re Spur}\,(AX), \\ \langle X, A \rangle &= \text{Re Spur}\,(X^* A) = \text{Re Spur}\,(XA) = \text{Re Spur}\,(AX). \end{aligned}$$

Da $\langle A, X \rangle = \langle X, A \rangle$, muss beides gleich Null sein.

Das Matrixprodukt zerlegen wir in ein kommutatives und ein antikommutatives Produkt:

$$X \circ Y = (XY + YX)/2, \quad [X, Y] = [XY] = XY - YX. \tag{6.4}$$

Das erste heißt *Jordan-Produkt*, das zweite *Lie-Produkt*. Insbesondere gilt $X^2 = X \circ X$; das Jordanprodukt ist die Polarisierung[19] des quadratischen Polynoms $X \mapsto X^2$.

Wenn X, Y hermitesch sind, dann auch $X \circ Y$, da $(XY)^* = Y^*X^* = YX$. Damit bildet $H_n(\mathbb{K})$ mit dem Jordanprodukt eine kommutative Algebra. Für das Lieprodukt dagegen gilt mit analoger Begründung:

$$[A_n, A_n] \subset A_n, \quad [A_n, H_n] \subset H_n, \quad [H_n, H_n] \subset A_n \tag{6.5}$$

wobei wir der Kürze halber $A_n := A_n(\mathbb{K})$ und $H_n := H_n(\mathbb{K})$ schreiben. Zum Beispiel ist für $A \in A_n$ und $X \in H_n$ das Lieprodukt $[A, X]$ wieder in H_n, denn

$$[A, X]^* = (AX - XA)^* = X^*A^* - A^*X^* = -XA + AX = [A, X].$$

Das Jordan-Produkt definiert zusammen mit dem Skalarprodukt eine symmetrische 3-Form (kubische Form) auf $H_n(\mathbb{K})$, nämlich

$$(X, Y, Z) := \langle X \circ Y, Z \rangle. \tag{6.6}$$

Hilfssatz 6.1. *Diese Trilinearform* $(X, Y, Z) \mapsto (X, Y, Z) = \langle X \circ Y, Z \rangle$ *ist symmetrisch.*

Beweis. Sie ist invariant unter Vertauschung von X und Y, und auch unter zyklischer Vertauschung, denn

$$\begin{aligned} 2(X, Y, Z) &= \text{Re Spur}\,(XYZ + YXZ) \\ &= \text{Re Spur}\,(ZXY + ZYX) \\ &= \text{Re Spur}\,(ZXY + XZY) \\ &= 2(Z, X, Y). \qquad \square \end{aligned}$$

Aus der kubischen Form und dem Skalarprodukt lässt sich das Jordanprodukt wieder errechnen; jede orthogonale Abbildung auf $H_n(\mathbb{K})$, die die kubische Form erhält, ist also ein Automorphismus der Algebra $(H_n(\mathbb{K}), \circ)$.

7. Hermitesche 3×3-Matrizen

Wir wollen uns jetzt auf den Fall $n = 3$ beschränken, der für $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ am interessantesten ist und auch für die anderen Divisionsalgebren

---

[19] Jedes homogene Polynom $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vom Grad k kommt von einer eindeutigen symmetrischen k-fach linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ her, genauer: $F(x) = f(x, \ldots, x)$. Dabei bedeutet *symmetrisch*, dass die Argument von f beliebig permutiert werden können, ohne dass der Wert sich ändert. Die Abbildung f heißt *Polarisierung* von F, siehe weiter unten. Für $F(X) = X^2$ zum Beispiel ist $f(X, Y) = \frac{1}{2}(XY + YX)$.

spezielle Eigenschaften hat. Jedes $X \in H_3(\mathbb{K})$ sieht folgendermaßen aus:[20]

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & z & \bar{y} \\ \bar{z} & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in \mathbb{K}$. Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass jede solche Matrix eine kubische Gleichung löst. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist das einfach der Satz von Cayley-Hamilton der linearen Algebra: Jede Matrix löst ihr eigenes charakteristisches Polynom; bei 3×3-Matrizen ist das eine kubische Gleichung. Das dies in $H_3(\mathbb{K})$ für $K = \mathbb{H}, \mathbb{O}$ noch immer gilt, ist das erste Wunder dieser Theorie.

Satz 7.1. *Für alle $X \in H_3(\mathbb{K})$ mit* Spur $X = 0$ *(d.h. $X \perp I$) gilt*

$$|X|^4 = 2|X^2|^2 \tag{7.2}$$

Diese Gleichung ist selbst für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht ganz trivial; wir wollen diesen Fall deshalb als erstes ansehen. Dann ist X orthogonal diagonalisierbar und die Ähnlichkeitstransformation $X \mapsto AXA^{-1}$ ändert die Spur nicht, deshalb können wir annehmen, dass X bereits diagonal ist: $X = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Dann ist[21]

$$\begin{aligned} |X|^4 &= \langle X, X \rangle^2 = (\text{Spur } X^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 \\ |X^2|^2 &= \langle X^2, X^2 \rangle = \text{Spur } X^4 = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \end{aligned}$$

Hilfssatz 7.1. $|X|^4 = 2|X^2|^2$ *falls* $X = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ *und* $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Beweis. Um nicht in endlose Rechnungen zu verfallen, lohnt es sich, vorher etwas über diese Rechnungen nachzudenken. Alle vorkommenden Ausdrücke in α, β, γ werden *symmetrische Polynome* von α, β, γ sein, d.h. invariant (mit unverändertem Wert) bei Permutationen der drei Argumente.[22] Mit jedem Term $\alpha^k \beta^l \gamma^m$ kommen deshalb auch alle seine Permutationen vor: $\alpha^l \beta^k \gamma^m$, $\alpha^l \beta^m \gamma^k$ usw. In genau einem dieser Terme sind die Potenzen absteigend geordnet: $k \geq l \geq m$; diesen Term benutzen wir als Bezeichnung für die Summe aller Terme, die daraus durch Permutation hervorgehen. Beispiel: Statt $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ schreiben wir kurz $(\alpha\beta)$. Die Polynome $(\alpha^k \beta^l \gamma^m)$ sind nach der lexikographischen Ordnung[23] von $(k, l, m) \in \mathbb{N}^3$ geordnet. Jedes symmetrische Polynom

[20] Die Bezeichnung der Koeffizienten x, y, z ist so getroffen, dass $X_{12} = x_3 = z$, und zyklisch so weiter: $X_{23} = x_1 = x$ und $X_{31} = x_2 = y$.

[21] Vorsicht: $|X|^4$ ist Quadrat einer Quadratsumme, $|X^2|^2$ dagegen eine Summe von vierten Potenzen, genau anders, als man auf den ersten Blick meint.

[22] Vgl. L. Van der Waerden, Algebra 1, S.100 für den folgenden Algorithmus

[23] $(k, l, m) > (k', l', m') \iff k \geq k'$ und zusätzlich $l \geq l'$ falls $k = k'$, und zusätzlich $m > m'$ falls $l = l'$.

kann man durch die *elementarsymmetrischen* ausdrücken, die keine Potenzen der Variablen enthalten; es sind dies $\sigma_1 = (\alpha)$, $\sigma_2 = (\alpha\beta)$, $\sigma_3 = (\alpha\beta\gamma)$. Das geschieht, indem man von $(\alpha^k\beta^l\gamma^m)$ das Polynom $\sigma_1^{k-l}\sigma_2^{l-m}\sigma_3^m$ abzieht. Dieses hat als lexikographisch höchsten Anteil ebenfalls $\alpha^k\beta^l\gamma^m$; alle anderen Terme haben eine kleinere Ordnung als (k, l, m). Wiederholt man das Verfahren für jeden Term der Differenz $(\alpha^k\beta^l\gamma^m) - \sigma_1^{k-l}\sigma_2^{l-m}\sigma_3^m$, so kann man Schritt für Schritt die Ordnung des Restes erniedrigen, bis kein Rest mehr übrig bleibt und man das gegebene symmetrische Polynom damit durch elementarsymmetrische Polynome ausgedrückt hat. Ist zum Beispiel das Polynom $(\alpha^2\beta^2)$ gegeben, dann muss man $\sigma_2^2 = (\alpha\beta)^2$ abziehen, denn[24]

$$(\alpha\beta)^2 = (\alpha^2\beta^2) + 2(\alpha^2\beta\gamma).$$

Den zweiten Term $\alpha^2\beta\gamma$ vergleichen wir mit $\sigma_1\sigma_3 = (\alpha)(\alpha\beta\gamma)$, und sind bereits fertig:

$$(\alpha)(\alpha\beta\gamma) = (\alpha^2\beta\gamma).$$

Wir haben also $(\alpha^2\beta^2) = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$ bewiesen, und damit $(\alpha^2\beta^2) = \sigma_2^2 = (\alpha\beta)^2$, falls $\sigma_1 = 0$. Somit ist

$$(\alpha^2)^2 = (\alpha^4) + 2(\alpha^2\beta^2) = (\alpha^4) + 2(\alpha\beta)^2.$$

Andererseits ist $(\alpha\beta) = -\frac{1}{2}(\alpha^2)$, denn $(\alpha^2) + 2(\alpha\beta) = (\alpha)^2 = 0$ falls $\sigma_1 = (\alpha) = 0$, und damit

$$\frac{1}{2}(\alpha^2)^2 = (\alpha^4). \tag{7.3}$$

Also folgt $|X|^4 = (\alpha^2)^2 = 2(\alpha^4) = 2|X^2|^2$. □

Damit ist der Satz für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bewiesen, aber bereits für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ steht die Eigenwert-Theorie nicht mehr so zur Verfügung, da es im Allgemeinen keine Determinante über dem Schiefkörper $\mathbb{H}$ gibt, von $\mathbb{O}$ gar nicht zu reden. Wir können aber die Behauptung des Satzes mit nicht allzu viel Rechenaufwand direkt beweisen, wobei wir den Hilfssatz oder genauer Gleichung (7.3) benutzen müssen. Mit (7.1) und $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gilt:

$$X^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + |z|^2 + |y|^2 & \bar{y}\bar{x} - \gamma z & zx - \beta\bar{y} \\ xy - \gamma\bar{z} & \beta^2 + |x|^2 + |z|^2 & \bar{z}\bar{y} - \alpha x \\ \bar{x}\bar{z} - \beta y & yz - \alpha\bar{x} & \gamma^2 + |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Wenn wir für symmetrische Polynome in $|x|^2, |y|^2, |z|^2$ eine ähnliche Konvention einführen wie für die in α, β, γ, so ergibt sich

$$|X^2|^2 \quad = \quad (\alpha^4) + 2(|x|^4) + 2(|x|^2|y|^2)$$

[24]Hier geht die Dimension 3 ein: Wenn es noch eine vierte Variable δ gäbe, würde noch ein weiterer Term $\alpha\beta\gamma\delta$ auftauchen.

$$
\begin{aligned}
&+2(\alpha^2(|z|^2+|y|^2)+\beta^2(|x|^2+|z|^2)+\gamma^2(|x|^2+|y|^2))\\
&+2(|y\bar{x}|^2+|zx|^2+|\bar{z}y|^2)\\
&+2(\alpha^2|x|^2+\beta^2|y|^2+\gamma^2|z|^2)\\
&-4\,(\gamma\langle\bar{y}\bar{x},z\rangle+\alpha\langle\bar{z}\bar{y},x\rangle+\beta\langle\bar{x}\bar{z},y\rangle)
\end{aligned}
$$

Die drei Skalarprodukte $\langle\bar{y}\bar{x},z\rangle$, $\langle\bar{z}\bar{y},x\rangle$, $\langle\bar{x}\bar{z},y\rangle$ in der letzten Zeile sind gleich: $\langle\bar{y}\bar{x},z\rangle=\langle\bar{y},zx\rangle=\langle\bar{z}\bar{y},x\rangle$ usw. Deshalb verschwindet die letzte Zeile: $-2(\alpha+\beta+\gamma)\langle\bar{y},zx\rangle=0$ und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
|X^2|^2 \;=\;& (\alpha^4)\\
&+2(|x|^4)+4(|x|^2|y|^2)\\
&+2(\alpha^2)(|x|^2).
\end{aligned}
$$

Andererseits ist $|X|^2=(\alpha^2)+2(|x|^2)$ und damit

$$
\begin{aligned}
|X|^4 \;=\;& (\alpha^4)+2(\alpha^2\beta^2)\\
&+4(|x|^4)+8(|x|^2|y|^2)\\
&+4(\alpha^2)(|x|^2).
\end{aligned}
$$

Da $(\alpha^4)=2(\alpha^2\beta^2)$ nach (7.3), zeigt der Vergleich der beiden Beziehungen die Behauptung $|X|^4=2|X^2|^2$. □

Die beiden Ausdrücke $Q_1(X)=|X|^4$ und $Q_2=2|X^2|^2$ sind quartische Polynome auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $H_3(\mathbb{K})$. Zu ihnen gehört jeweils eine symmetrische 4-Linearform q_i mit $Q_i(X)=q_i(X,X,X,X)=q_i(X^4)$ (wobei wir X^4 als Element im 4-fachen symmetrischen Tensorprodukt von $H_3(\mathbb{K})$ auffassen). Die 4-Form q_i nennt man die *Polarisierung* von Q_i. Wir erhalten sie, indem wir für X eine Summe von 4 variablen Matrizen $X=A+B+C+D$ einsetzen. Dann ist X^4 eine Summe symmetrischer Ausdrücke in den Variablen A,B,C,D, die wir wie vorher durch ihren höchsten Term notieren, z.B. (A) statt $A+B+C+D$, und wir erhalten:[25]

$$(A)^4=(A^4)+4(A^3B)+6(A^2B^2)+12(A^2BC)+24ABCD$$

Auf jedem einzelnen dieser Ausdrücke müssen q_1 und q_2 den gleichen Wert haben (Koeffizientenvergleich), insbesondere auf A^3B. Aus

$$q_1(A^4)=Q_1(A)=\langle A,A\rangle\langle A,A\rangle$$

[25] Die Vorfaktoren geben an, wie oft der entsprechende Term in der Rechnung auftaucht. z.B. A^2BC kommt 12mal vor: Für die zwei A-Faktoren gibt es 6 Paare von Plätzen, und die restlichen beiden Plätze enthalten A,B oder B,A. Das gesamte Polynom (A^2BC) hat 12 Summanden: mit A^2 können wir BC, BD und CD kombinieren, und ebenso gibt es je drei Summanden mit B^2, C^2 und D^2. Die Zahl der Summanden bei den 5 Polynomen auf der rechten Seite ist 4, 12, 6, 12, 1, und in der Tat ist $4+4\cdot12+6\cdot6+12\cdot12+24=4\cdot(1+12+9+36+6)=4\cdot64=4^4$; das ist die Gesamtanzahl von Summanden.

folgt $q_1(A^3B) = \langle A, A\rangle\langle A, B\rangle$ (dieser Ausdruck ist bereits invariant unter Permutationen) und aus

$$q_2(A^4) = Q_2(A) = 2\langle A \circ A, A \circ A\rangle$$

folgt ebenso $q_2(A^3B) = 2\langle A \circ A, A \circ B\rangle = 2\langle (A \circ A) \circ A, B\rangle$, wobei wir die Symmetrie der 3-Form $(X, Y, Z) = \langle X \circ Y, Z\rangle$ benutzt haben (Hilfssatz 6.1). Wenn wir für A und B wieder X und Y einsetzen und mit $X^3 = \frac{1}{2}(X^2 \circ X + X \circ X^2)$ die dritte Jordanpotenz bezeichnen, erhalten wir

$$\langle 2X^3 - |X|^2X, Y\rangle = 0 \tag{7.5}$$

für alle X, Y mit Spur 0, also für alle $X, Y \perp I$. Somit ist $2X^3 - |X|^2X$ senkrecht zu $I^\perp$, also ein reelles Vielfaches von I:

$$X^3 - \frac{1}{2}|X|^2X = \kappa I \tag{7.6}$$

mit $\kappa = \kappa(X) \in \mathbb{R}$. Wenn X auch einen Anteil in I-Richtung hat,

$$X = X' + \frac{\langle X, I\rangle I}{\langle I, I\rangle} = X' + \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X)I$$

mit $X' \perp I$, dann können wir $X' = X - \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X)I$ anstelle von X in (7.6) substituieren. Dabei ist

$$\begin{aligned} (X')^3 &= X^3 - \mathrm{Spur}\,(X)X^2 + \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X)^2X - \frac{1}{27}\,\mathrm{Spur}\,(X)^3I \\ |X'|^2 &= |X|^2 - |\frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X)I|^2 = |X|^2 - \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X)^2 \end{aligned}$$

und somit folgt aus (7.6) die *Cayley-Hamilton-Gleichung* für X:

$$X^3 - \mathrm{Spur}\,(X)X^2 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\,(X)^2 - |X|^2\right)X - \det(X)I = 0. \tag{7.7}$$

Hierbei bezeichnet det( ) eine bestimmte kubische Form[26] auf $H_3(\mathbb{K})$ (genannt *Determinante*), die wir durch das Skalarprodukt von (7.7) mit I berechnen können:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Spur}\,(X^3) - \mathrm{Spur}\,(X)\,\mathrm{Spur}\,(X^2) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\,(X)^2 - |X|^2\right)\mathrm{Spur}\,(X) - 3\det(X) \\ &= \mathrm{Spur}\,(X^3) - \frac{3}{2}\,\mathrm{Spur}\,(X)|X|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\,(X)^3 - 3\det(X) \end{aligned}$$

und damit

$$\det(X) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X^3) - \frac{1}{2}|X|^2\,\mathrm{Spur}\,(X) + \frac{1}{6}\,\mathrm{Spur}\,(X)^3. \tag{7.8}$$

[26] Eine *Form* ist ein homogenes Polynom mit Werten im Grundkörper, hier $\mathbb{R}$. Eine kubische Form ist ein homogenes Polynom vom Grad 3.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ kann man $\det X$ auch auf die übliche Weise ("Sarrus") berechnen:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & z & y \\ \bar{z} & \beta & x \\ \bar{y} & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma + zx\bar{y} + \bar{z}\bar{x}y - \beta y\bar{y} - \gamma z\bar{z} - \alpha x\bar{x}.$$

Dieselbe Formel folgt aus (7.8) auch über $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$, was wir aber nicht benutzen werden; wir geben den Beweis hier nur der Vollständigkeit halber an.

Satz 7.2.

$$\det X = \alpha\beta\gamma + 2\langle zx, y\rangle - \left(\alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2\right). \tag{7.9}$$

Beweis. Im Fall $X = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ ist das eine Rechnung in symmetrischen Polynomen, wobei wir nach dem geschilderten Verfahren symmetrische Polynome durch elementarsymmetrische darstellen. Um $\operatorname{Spur}(X^3) = (\alpha^3)$ darzustellen, subtrahieren wir σ_1^3:

$$\sigma_1^3 = (\alpha)^3 = (\alpha^3) + 3(\alpha^2\beta) + 6\alpha\beta\gamma.$$

Außer der Determinante $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$ bleibt ein Restterm $3(\alpha^2\beta)$, von dem wir $3\sigma_1\sigma_2$ abziehen können:

$$\sigma_1\sigma_2 = (\alpha)(\alpha\beta) = (\alpha^2\beta) + 3\alpha\beta\gamma.$$

Also ist

$$\sigma_1^3 = \operatorname{Spur}(X^3) + 3\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3. \tag{7.10}$$

Weiterhin gilt $\sigma_1^2 = (\alpha)^2 = (\alpha^2) + 2\sigma_2$, also

$$\sigma_1^2 = |X|^2 + 2\sigma_2 \tag{7.11}$$

Also ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{Spur}(X^3) - \frac{3}{2}\operatorname{Spur}(X)|X|^2 + \frac{1}{2}\operatorname{Spur}(X)^3 \qquad (7.12)\\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 - \frac{3}{2}\sigma_1\left(\sigma_1^2 - 2\sigma_2\right) + \frac{1}{2}\sigma_1^3 \\ &= 3\sigma_3 = 3\alpha\beta\gamma. \end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall müssen wir u.a. die Matrix X nach (7.1) mit X^2 multiplizieren und die Spur des Produkts nehmen, denn $\operatorname{Spur}(XX^2) = \operatorname{Spur}(X^2X) = \operatorname{Spur}(X \circ X^2)$. Man erhält $XX^2 =$

$$\begin{pmatrix} \alpha & z & y \\ \bar{z} & \beta & x \\ \bar{y} & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 + |z|^2 + |y|^2 & y\bar{x} + (\alpha+\beta)z & zx + (\alpha+\gamma)y \\ x\bar{y} + (\alpha+\beta)\bar{z} & \beta^2 + |x|^2 + |z|^2 & \bar{z}y + (\alpha+\beta)x \\ \bar{x}\bar{z} + (\alpha+\gamma)\bar{y} & \bar{y}z + (\beta+\gamma)\bar{x} & \gamma^2 + |x|^2 + |y|^2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\operatorname{Spur}(X^3) \;=\; (\alpha^3) + 6\langle zx, y\rangle$$

$$\begin{aligned}
& \quad + \alpha(|y|^2 + |z|^2) + \beta(|x|^2 + |z|^2) + \gamma(|x|^2 + |y|^2) \\
& \quad + 2\left((\alpha+\beta)|z|^2 + (\alpha+\gamma)|y|^2 + (\beta+\gamma)|x|^2\right) \\
&= (\alpha^3) + 6\langle zx, y\rangle \\
& \quad + 3\left(\alpha(|y|^2 + |z|^2) + \beta(|x|^2 + |z|^2) + \gamma(|x|^2 + |y|^2)\right) \\
\mathrm{Spur}\,(X^2) &= (\alpha^2) + 2(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2) \\
\mathrm{Spur}\,(X) &= (\alpha)
\end{aligned}$$

und mit der Beziehung (7.12) für die Diagonalelemente α, β, γ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Spur}\,(X^3) - \frac{3}{2}\,\mathrm{Spur}\,(X)|X|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\,(X)^3 \\
&= 3\alpha\beta\gamma + 6\langle zx, y\rangle \\
& \quad + 3\left(\alpha(|y|^2 + |z|^2) + \beta(|x|^2 + |z|^2) + \gamma(|x|^2 + |y|^2)\right) \\
& \quad - 3(\alpha+\beta+\gamma)(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2) \\
&= 3\alpha\beta\gamma + 6\langle zx, y\rangle - 3\left(\alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

8. Automorphismen von $H_3(\mathbb{K})$ erhalten $\mathbb{O}P^2$

Ein *Automorphismus* der Jordanalgebra $H_3(\mathbb{K})$ ist eine invertierbare lineare Abbildung g auf $H_3(\mathbb{K})$ mit $g(X \circ Y) = gX \circ gY$ für alle $X, Y \in H_3(\mathbb{K})$. Die Automorphismen bilden eine Gruppe $\mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{K}))$, die den Namen F_4 trägt. Wir werden sehen, dass sie die Rolle der unitären Gruppen im Falle der anderen Divisionsalgebren übernimmt. Dazu müssen wir zunächst verstehen, dass $\mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$ unter F_4 invariant bleibt. Wenn $P \in H_3(\mathbb{O})$ ein Projektor ist, $P^2 = P$, dann gilt dasselbe auch für gP, aber warum bleibt auch die Bedingung Spur $P = 1$ erhalten? Das ist eine Konsequenz der Cayley-Hamilton-Gleichung (7.7), die wir abkürzen wollen als

$$X^3 - \sigma_1(X)X^2 + \sigma_2(X)X - \sigma_3(X)I = 0 \tag{8.1}$$

mit $\sigma_1 = \mathrm{Spur}$, $\sigma_3 = \det$.

Satz 8.1. *Für alle $g \in F_4 = \mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$ und alle $X \in H_3(\mathbb{O})$ gilt*

$$\mathrm{Spur}\ gX = \mathrm{Spur}\ X. \tag{8.2}$$

Beweis. (Cf. [7]) Weil $gI = I$ und damit Spur $gI =$ Spur I ist, genügt es zu zeigen, dass Spur $gX = 0 \iff$ Spur $X = 0$. Wenn Spur $X = 0$, dann gilt nach (8.1) $X^3 + \sigma_2(X)X - \sigma_3(X)I = 0$ und somit

$$(gX)^3 + \sigma_2(X)gX - \sigma_3(X)I = 0. \tag{$*$}$$

Daraus würden wir gern Spur $gX = 0$ schließen, aber $(*)$ ist vielleicht nicht die Cayley-Hamilton-Gleichung (8.1) für gX. Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt

$$\sigma_1(gX)(gX)^2 = \left(\sigma_2(gX) - \sigma_2(X)\right)gX - \left(\sigma_3(gX) - \sigma_3(X)\right)I.$$

Entweder ist nun $\sigma_1(gX) = 0$, d.h. Spur $gX = 0$, oder aber $(gX)^2$ ist Linearkombination von gX und I, aber dann war auch X^2 Linearkombination von X und I. Mit der Bezeichnung $K = \{X;\ \text{Spur } X = 0\}$ (Kern der Spur) und $Q = \{X;\ X^2 \in \mathbb{R}X + \mathbb{R}I\}$ (quadratisches Minimalpolynom) haben wir gezeigt: $g(K \setminus Q) \subset K$. Nun ist $K \setminus Q$ eine offene Menge in K, und sie ist nicht leer, denn sie enthält jede Diagonalmatrix mit Spur Null und drei verschiedenen Eigenwerten. Daher ist $K \setminus Q$ dicht[27] in K, also folgt $g(K) \subset K$. □

Folgerung 8.1. *Jedes $g \in \text{Aut}(H_3(\mathbb{O})) = F_4$ wirkt orthogonal auf $H_3(\mathbb{O})$ und erhält die Determinante.*

Beweis. Das folgt aus $|X|^2 = \text{Spur } X^2$ und der Determinantenformel (7.8). □

9. Die Liealgebra der Automorphismengruppe

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass die Automorphismengruppe von $H_3(\mathbb{O})$ sehr groß ist.

Die Automorphismen einer $\mathbb{R}$-Algebra A bilden eine *Liegruppe*, d.h. eine Mannigfaltigkeit im Vektorraum $\text{End}(A)$ mit differenzierbaren Gruppenoperationen. Der Tangentialraum im Einselement I besteht aus den Tangentenvektoren $A = g'(0)$ aller Kurven $g(t) = g_t$ in der Gruppe $G = \text{Aut}(A)$, die im Einselement starten, $g(0) = I$. Wenn wir die Gleichung $g_t(ab) = (g_t a)(g_t b)$ nach t ableiten und $t = 0$ setzen, dann erhalten wir eine Gleichung für die Elemente $v = g'(0) \in T_I G \subset \text{End}(A)$:

$$v(ab) = (va)b + a(vb). \tag{9.1}$$

Eine solche lineare Abbildung v nennt man eine *Derivation* der Algebra A. Der Tangentialraum $T_I(\text{Aut}\, A)$ besteht also aus Derivationen von A. Die Umkehrung gilt auch: Wenn $v \in \text{End}(A)$ eine Derivation von A ist, dann ist v die Anfangsableitung einer Kurve $g(t)$ in $\text{Aut}(A)$, nämlich $g(t) = e^{tv}$. Dazu zeigen wir, dass die Matrix $e^v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} v^n$ ein Automorphismus von A ist: Durch Iteration der Derivationsgleichung (9.1) folgt nämlich $v^2(ab) = (v^2 a)b + 2(va)(vb) + a(v^2 b)$ und allgemeiner $v^n(ab) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (v^k a)(v^{n-k} b)$ und damit $e^v(ab) = \sum_n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} (v^k a)(v^{n-k} b) = (e^v a)(e^v b)$ wie im Beweis des Additionstheorems der e-Funktion.

Wir haben in (6.5) bereits $[A_n, H_n] \subset H_n$ gesehen; jedes $A \in A_n(\mathbb{K})$ erzeugt also einen Endomorphismus

$$\text{ad}_A : X \mapsto [AX]$$

[27] Wenn die Polynome mit der Lösungsmenge $Q = \{X;\ X^2, X, I \text{ linear abhängig}\}$ auf einer offenen Teilmenge des Unterraums K verschwinden, dann auf ganz K.

von H_n. Falls $\mathbb{K}$ assoziativ ist, ist dies eine Derivation von $H_n(\mathbb{K})$:[28]

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{ad}_A(X \circ Y) &= [A, (XY{+}YX)] \\
&= A(XY) + A(YX) - (XY)A - (YX)A \\
2\,(\mathrm{ad}_A X \circ Y + X \circ \mathrm{ad}_A Y) &= [AX]Y + Y[AX] + X[AY] + [AY]X \\
&= \underline{(AX)Y} - (XA)Y + Y(AX) - \underline{Y(XA)} \\
&\quad + X(AY) - \underline{X(YA)} + \underline{(AY)X} - (YA)X
\end{aligned}$$

Die unterstrichenen Terme entsprechen denen der zweiten Zeile und die übrigen heben sich gegenseitig weg, sofern man assoziativ rechnen darf. Dass dies aber noch für $H_3(\mathbb{O})$ stimmt, trotz fehlender Assoziativität, darf als das zweite Wunder dieser Theorie angesehen werden:

Satz 9.1. *Für jedes* $A \in A_3(\mathbb{O})$ *mit* Spur $A = 0$ *ist* $\mathrm{ad}_A \in \mathrm{End}(H_3(\mathbb{O}))$ *eine Derivation, d.h. für alle* $X, Y \in H_3(\mathbb{O})$ *gilt*

$$\mathrm{ad}_A(X \circ Y) = \mathrm{ad}_A X \circ Y + X \circ \mathrm{ad}_A Y. \tag{9.2}$$

Die entscheidende Beobachtung dazu verdanke ich einer Arbeit von Freudenthal [6]:

Hilfssatz 9.1. *Für jedes* $X \in H_3(\mathbb{K})$ *und* $A \in A_3(\mathbb{K})$ *mit* Spur $A = 0$ *gilt*

$$\langle [AX], X^2 \rangle = 0. \tag{9.3}$$

Beweis. Wir zeigen dazu für alle $X \in H_3(\mathbb{K})$

$$XX^2 - X^2X = aI, \quad a \in \mathbb{K}' = \{x \in \mathbb{K};\ x \perp 1\}. \tag{9.4}$$

Dann folgt nämlich mit (6.2) die Behauptung:

$$\langle AX, X^2 \rangle = \langle A, X^2X \rangle = \langle A, XX^2 \rangle = \langle XA, X^2 \rangle.$$

Zum Beweis von (9.4) betrachten wir die Matrix

$$D = XX^2 - X^2X$$

mit den Einträgen

$$d_{ij} = \sum_{kl} (x_{ik}(x_{kl}x_{lj}) - (x_{ik}x_{kl})x_{lj}) = \sum_{kl} [x_{ik}, x_{kl}, x_{lj}]$$

[28] Das sieht man auch anders: Die antihermiteschen Matrizen bilden den Tangentialraum in I der Gruppe G der orthogonalen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), unitären ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) oder symplektischen ($\mathbb{K} = \mathbb{H}$) Matrizen. Die Konjugation mit solchen Matrizen lässt den Raum der hermiteschen Matrizen invariant ($X^* = X$, $Y = gXg^* \Rightarrow Y^* = Y$) und erhält das Matrixprodukt ($g(XY)g^{-1} = gXg^{-1}gYg^{-1}$) und damit auch das Jordanprodukt, sie ist also ein Automorphismus. Die Ableitung der Konjugation ist das Lieprodukt, genauer: Ist $g(t)$ eine Kurve in G mit $g(0) = I$ und $g'(0) = A \in T_I G$, dann gilt $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} g(t)Xg(t)^{-1} = AX - XA = [AX]$. Für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ muss die zugehörige Gruppe G erst konstruiert werden; es ist die F_4.

wobei wir mit $[x,y,z] = x(yz) - (xy)z$ den *Assoziator* bezeichnen. Wann immer einer der drei Koeffizienten x_{ik}, x_{kl}, x_{lj} reell ist oder zwei davon zueinander konjugiert sind, ist der Assoziator gleich Null. Da x_{kk} reell und $x_{kl} = \bar{x}_{lk}$, müssen, wenn ein Summand stehen bleiben soll, die drei Indizes i,k,l paarweise verschieden sein, ebenso wie k,l,j, was wegen $n = 3$ insbesondere $i = j$ impliziert. Es folgt $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und

$$d_{ii} = [x_{ik}, x_{kl}, x_{li}] + [x_{il}, x_{lk}, x_{ki}]$$

mit $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$, also zum Beispiel

$$d_{11} = [x_{12}, x_{23}, x_{31}] + [x_{13}, x_{32}, x_{21}]$$

Da der Assoziator antisymmetrisch ist (weil $\mathbb{K}$ alternativ ist) und damit invariant unter zyklischen Permutationen, folgt $d_{11} = d_{22} = d_{33}$. Jeder Assoziator ist imaginär, daher haben wir (9.4) und damit die Behauptung gezeigt.[29] $\square$

Die nun gefundene Gleichung (9.3) können wir mit Hilfe unserer Trilinearform $(X,Y,Z) = \langle X \circ Y, Z\rangle$ auch so ausdrücken:

$$([AX], X, X) = 0. \tag{9.5}$$

Durch Polarisieren erhalten wir daraus:

$$([AX], Y, Z) + ([AY], Z, X) + ([AZ], X, Y) = 0. \tag{9.6}$$

Also ist ad_A eine Derivation dieser Trilinearform und auch des Skalarprodukts,

$$\langle [AX|, Y\rangle + \langle X, [AY]\rangle = 0$$

(siehe nachfolgender Hilfssatz), und somit eine Derivation des Jordanprodukts, denn für alle $Z \in H_3(\mathbb{O})$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [AX] \circ Y, Z\rangle + \langle X \circ [AY], Z\rangle + \langle X \circ Y, [AZ]\rangle \\ &= \langle [AX] \circ Y, Z\rangle + \langle X \circ [AY], Z\rangle - \langle [A, X \circ Y], Z\rangle. \end{aligned}$$

Hilfssatz 9.2. *Für alle $A \in A_n(\mathbb{K})$ und $X, Y \in H_n(\mathbb{K})$ gilt:*

$$\langle [AX], Y\rangle + \langle X, [AY]\rangle = 0. \tag{9.7}$$

Beweis.

$\langle [AX], Y\rangle + \langle X, [AY]\rangle = \mathrm{Re\ Spur}\,(\underline{AXY} - XAY + XAY - \underline{XYA}) = 0$,

denn auch die unterstrichenen Terme heben sich weg: $\mathrm{Re\ Spur}\,(A(XY)) = \mathrm{Re\ Spur}\,((XY)A)$. $\square$

[29]Die beiden Terme in dem Ausdruck für d_{11} heben sich nicht auf, sondern sind gleich; es gilt nämlich

$$\overline{[x,y,z]} = \overline{x(yz)} - \overline{(xy)z} = (\bar{z}\bar{y})\bar{x} - \bar{z}(\bar{y}\bar{x}) = -[\bar{z}, \bar{y}, \bar{x}].$$

Mit der infinitesimalen Wirkung von A_3 auf H_3 durch Derivationen reiht sich $\mathbb{O}$ unter die anderen Divisionsalgebren ein. Ein Unterschied ist allerdings, dass im assoziativen Fall Wirkung und Kommutator miteinander verträglich sind ("Jacobi-Identität"):

$$[\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}\, B)] = \mathrm{ad}([AB]) \tag{9.8}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} [[AB]X] &= ABX - BAX - XAB + XBA, \\ [A[BX]] - [B[AX]] &= ABX - \underline{AXB} - BAX + \underline{BXA} \\ &\quad - \underline{BXA} + XBA + \underline{AXB} - XAB. \end{aligned}$$

Die unterstrichenen Terme heben sich gegenseitig weg, die übrigen entsprechen denen der ersten Zeile. □

Immerhin ist $[\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)]$ wieder eine Derivation; allgemein ist der Kommutator[30] von Derivationen eine Derivation: Sind ϕ, ψ Derivationen einer Algebra A, dann auch $\phi\psi - \psi\phi$, denn

$$\begin{aligned} (\phi\psi - \psi\phi)(ab) &= \phi(\psi(a)b + a\psi(b)) - \psi(\phi(a)b + a\phi(b)) \\ &= \phi(\psi(a))b + \psi(a)\phi(b) + \phi(a)\psi(b) + a\phi(\psi(b)) \\ &\quad - \psi(\phi(a))b - \phi(a)\psi(b) - \psi(a)\phi(b) - a\phi(\psi(b)) \\ &= (\phi(\psi(a)) - \psi(\phi(a))\, b + a\, (\phi(\psi(b)) - \psi(\phi(b)))\, . \end{aligned}$$

Ist auch $\mathrm{ad}([A, B])$ eine Derivation? Zwar ist $[A, B] \in A_3$, aber die Eigenschaft $\mathrm{Spur}\,[A, B] = 0$ ist nicht garantiert, wenn $\mathrm{Spur}\, AB \neq \mathrm{Spur}\, BA$. Deshalb machen wir $[A, B]$ spurfrei, indem wir den Spur-Term $\frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,([A, B])I$ abziehen (man beachte $\mathrm{Spur}\, I = 3$). Nun ist $\mathrm{ad}([A, B] - \frac{\mathrm{Spur}\,[AB]}{3} I$ nach Satz 9.1 eine Derivation, und ebenso

$$\phi = [\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)] - \mathrm{ad}\left([A, B] - \frac{\mathrm{Spur}\,[AB]}{3} I \right).$$

Diese Derivation hat wegen (9.8) auf allen Matrizen X mit rein reellen Koeffizienten den Wert Null und ist damit einfach eine Derivation von

[30]Allgemeiner gilt: Der Tangentialraum $T_I G$ einer Matrixgruppe $G \subset GL(V)$ bildet eine *Liealgebra*, d.h. mit $v, w \in T_G I$ ist $[v, w] = vw - wv \in T_I G$. Denn wenn $v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} g(t)$ und $w = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} h(s)$ mit $g(t), h(s) \in G$ und $g(0) = h(0) = I$, dann ist $g(t)wg(t)^{-1} = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} g(t)h(s)g(t)^{-1} \in T_I G$ für alle t, und damit enthält $T_I G$ auch den Vektor $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} g(t)wg(t)^{-1} = vw - wv$, denn $(g^{-1})' = -g^{-1}g'g^{-1}$ und somit $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} g(t)^{-1} = -v$.

$\mathbb{K} = \mathbb{O}$,[31] liegt also in der Liealgebra von $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$. Statt (9.8) erhalten wir also

$$[\mathrm{ad}(A), \mathrm{ad}(B)] - \mathrm{ad}\left([A, B] - \frac{\mathrm{Spur}\,[AB]}{3} I\right) \in T_I(G_2). \tag{9.9}$$

Zu den $2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 = 38$ Dimensionen von $A_3(\mathbb{O})_o$ treten noch die 14 Dimensionen von G_2; die volle Dimension von F_4 ist daher 52. Wir werden dieses Ergebnis aber nicht benutzen, sondern in den folgenden Abschnitten auf andere Weise erhalt en.

10. Hauptachsentransformationen, Polarität der F_4

Wie groß ist die Gruppe $G = F_4$? Wir wählen uns dazu eine Diagonalmatrix $X = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ mit paarweise verschiedenen Einträgen und fragen nach der Dimension der Bahn von G durch X. Der Tangentialraum dieser Bahn, $T_X(GX)$, enthält jedenfalls alle Matrizen $[A, X]$, $A \in A_3(\mathbb{O})_o$. Welche davon sind gleich Null? Der Diagonalanteil von A trägt zum Kommutator $[A, X]$ mit der reellen Diagonalmatrix X nichts bei. Ist $A = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -\bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix}$, dann werden die Koeffizienten von $[A, X]$ durch Faktoren $\pm(\alpha_i - \alpha_j)$ vor x_k abgeändert; da die Differenzen nicht verschwinden, ist $[A, X] = 0$ genau dann, wenn alle $x_k = 0$, d.h. wenn A Diagonalmatrix ist. Damit hat der Raum $\{[A, X];\ A \in A_3\}$ dieselbe Dimension wie der Raum der Matrizen in $A_3(\mathbb{K})$ ohne Diagonalanteil, also $3 \cdot 8 = 24$. Die Matrizen $[A, X] \in H_3(\mathbb{K})$ haben selber keinen Diagonalanteil und stehen damit senkrecht auf dem Raum der Diagonalmatrizen; genauer bilden sie das orthogonale Komplement zum Raum der Diagonalmatrizen. Damit haben wir den Tangentialraum der Bahn GX schon gefunden; er kann nicht größer sein, weil G ja die Koeffizienten $\sigma_j(X)$ des charakteristischen Polynoms (8.1) und damit die Eigenwerte invariant lässt; der Tangentialraum der Bahn kann daher keine Komponente im Raum der Diagonalmatrizen haben. Wir können also festhalten:

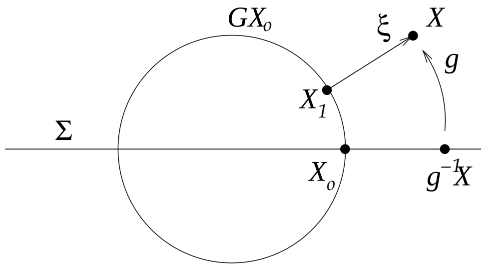
Satz 10.1. *Es sei X eine (reelle) Diagonalmatrix mit voneinander verschiedenen Einträgen. Der Tangentialraum $T_X(GX)$ der Bahn durch eine Diagonalmatrix X ist das orthogonale Komplement des Raumes Σ der Diagonalmatrizen in $H_3(\mathbb{K})$. Mit anderen Worten, Σ ist der Normalraum der Bahn GX im Punkt X.* □

[31] Wenn wir mit E_{ij} bzw. F_{ij} die Matrizen bezeichnen, deren Koeffizienten verschwinden außer einer 1 bei ij und ji bzw. 1 bei ij und -1 bei ji, dann gilt $E_{ij} \circ F_{jk} = \frac{1}{2} F_{ik}$ und $F_{ij} \circ F_{jk} = \frac{1}{2} E_{ik}$ für $i \neq k$, außerdem $E_{ii} \circ E_{jk} = 0 = E_{ii} \circ F_{jk}$ für $i \neq j, k$. Daraus folgt $\phi(aF_{ij}) = \varphi(a) F_{ij}$ für alle $a \in \mathbb{O}'$ für einen Automorphismus φ von $\mathbb{O}$, unabhängig von ij. Details siehe im Kapitel 13.

Satz 10.2. *Jedes $X \in H_3(\mathbb{K})$ kann durch einen Automorphismus in eine Diagonalmatrix verwandelt werden ("Hauptachsentransformation").*

Beweis. Gegeben sei ein $X_o \in \Sigma$. Die Bahn GX_o ist kompakt (denn G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer orthogonalen Gruppe, also kompakt); damit gibt es einen zu X nächsten Punkt $X_1 = gX_o$ in der Bahn GX_o. Der Differenzvektor $\xi = X - X_1$ muss damit senkrecht auf $T_{X_1}GX_o$ stehen, sonst könnte man noch einen näheren Punkt in GX_o finden. Daher ist ξ ein Normalenvektor von GX_o im Punkt $X_1 = gX_o$, und $g^{-1}\xi$ ist ein Normalenvektor von GX_o im Punkt X_o. Somit $g^{-1}\xi \in \Sigma$ und damit

$$g^{-1}X = g^{-1}(X_1 + \xi) = X_o + g^{-1}\xi \in \Sigma. \qquad \square$$



Solche Wirkungen, bei denen alle Bahnen einen festen Unterraum senkrecht schneiden, nennt man *polar*, weil das voranstehende Bild an ebene Polarkoordinaten erinnert.

Folgerung 10.1. *$G = F_4$ wirkt transitiv auf $\mathbb{O}P^2$.*

Beweis. Jedes $P \in \mathbb{O}P^2$ kann in eine Diagonalmatrix mit den Einträgen 1, 0, 0 verwandelt werden; die drei Diagonalmatrizen mit diesen Einträgen sind untereinander durch eine Permutationsmatrix konjugiert; die Konjugation mit einer reellen orthogonalen Matrix ist ein Automorphismus von $H_3(\mathbb{O})$. $\square$

Dieser Satz hat viele Anwendungen; wir können ja jetzt jede Matrix in $H_3(\mathbb{O})$ mit Hilfe eines Elements von $F_4 = \mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{O}))$ diagonalisieren, wie für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.[32] Eine Anwendung ist die Äquivalenz der Bedingungen $\langle X, Y\rangle = 0$ und $X \circ Y = 0$ für $X, Y \in \mathbb{O}P^2$; wegen $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Re\ Spur}\,(X \circ Y)$ ist die eine Richtung selbstverständlich.

Satz 10.3. *Für alle $X, Y \in \mathbb{O}P^2$ gilt:*

$$\langle X, Y\rangle = 0 \Rightarrow X \circ Y = 0. \tag{10.1}$$

[32]Für $\mathbb{H}$ kann man dieselben Argumente geben wie für $\mathbb{O}$; alle unsere Betrachtungen für $\mathbb{O}$ gelten immer auch für die anderen Divisionsalgebren. Dabei besteht $\mathrm{Aut}(H_3(\mathbb{K}))$ aus den Konjugationen mit unitären Matrizen (in O_3, U_3, Sp_3).

Beweis. Da F_4 transitiv wirkt, dürfen wir $Y = E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ setzen. Da

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & z & \bar{y} \\ \bar{z} & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix}$$

auf E_1 senkrecht steht, folgt $\alpha = 0$. Damit ist $(X^2)_{11} = |z|^2 + |y|^2$ und $X_{11} = 0$; aus $X^2 = X$ folgt also $z = y = 0$. Nun sehen wir $X \circ E_1 = 0$. □

Wir werden als nächstes die Stabilisatorgruppe des Elements $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ bestimmen; es ist die Gruppe $Spin_9$, die in F_4 enthalten ist.

11. Die Gruppe $Spin_9$

Zunächst müssen wir an die Cliffordalgebren und die Spin-Gruppen erinnern. Die Cliffordalgebra Cl_n (vgl. [4]) ist die von den Vektoren von $V = \mathbb{R}^n$ erzeugte assoziative Algebra mit Eins und der Relation

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle\, 1.$$

Sie hat Dimension 2^n. Insbesondere ist jeder Einheitsvektor in V invertierbar mit $v^{-1} = -v$, da $v^2 = -1$. Die *Spin-Gruppe $Spin_n$* besteht aus allen geradzahligen Produkten $g = v_1 \dots v_{2k}$ in Cl_n, wobei die $v_j \in V$ Einheitsvektoren sein sollen, $v_j \in \mathbb{S}^{n-1}$. Da die lineare Abbildung $V \to V$, $x \mapsto vxv$ die Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$ ist ($v \mapsto -v$, $w \mapsto w$ für $w \perp v$), ist die Abbildung $\mathrm{Ad}(g) : x \mapsto gxg^{-1}$ ein Element der Drehgruppe SO_n und damit ist $Spin_n$ eng mit SO_n verbunden: Die Abbildung $Ad : Spin_n \to SO_n$ ist fast ein Isomorphismus, nur das Vorzeichen wird verschluckt: $Ad(g) = Ad(-g)$. Man sagt auch, dass $Spin_n$ eine *zweiblättrige Überlagerung* von SO_n ist, und die Wirkung von $Spin_n$ auf $V = \mathbb{R}^n$ heißt *Vektordarstellung* von $Spin_n$.

Da die Gruppe $Spin_n$ aus geradzahligen Produkten besteht, liegt sie in der 2^{n-1}-dimensionalen Unteralgebra Cl_n^+, die von Produkten von Elementen von V mit einer geraden Anzahl von Faktoren erzeugt wird. Diese Unteralgebra ist isomorph zu Cl_{n-1}; der Isomorphismus ist

$$j : Cl_{n-1} \to Cl_n^+, \quad v \mapsto ve_n \tag{11.1}$$

für alle $v \in V' = \mathbb{R}^{n-1}$. Wenn $v, w \in V'$, dann ist

$$ve_nwe_n = -we_ne_nv = vw,$$

deshalb erhält j die Multiplikation. Jedes gerade Produkt (d.h. mit einer geraden Anzahl von Faktoren) wird auf sich selbst abgebildet, an jedes ungerade wird e_n angehängt.

Wenn n ungerade ist, dann besitzt die Gruppe $Spin_n$ noch eine etwas andere Darstellung: Sie wird als Gruppe erzeugt von der Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}\omega = \{v\omega;\ v \in \mathbb{S}^{n-1}\}$, wobei

$$\omega = e_1 e_2 \dots e_n \tag{11.2}$$

das Produkt der Standardbasis $e_1, \dots, e_n$, das sog. *Volumenelement* ist, vgl [4], Abschnitt 10. Es gilt $\omega e_i = (-1)^{n-1} e_i \omega$, denn man muss $n-1$ Vertauschungen mit e_j, $j \neq i$ vornehmen, um e_i an ω vorbeizuziehen. Das Quadrat von ω ist stets ± 1, genauer $(-1)^{n(n+1)/2}$. Wenn n nun ungerade ist, dann ist $v\omega \in Spin_n$, und weil die Zweierprodukte vw ein Erzeugendensystem bilden und $v\omega w\omega = \pm vw$, ist auch $\mathbb{S}^{n-1}\omega$ ein Erzeugendensystem von $Spin_n$.

Indem wir den Isomorphismus j von (11.1) rückgängig machen, wird $\mathbb{S}^{n-1}\omega$ in Cl_{n-1} eingebettet. Dazu spalten wir jedes $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ auf in

$$v = u + \varphi e_n, \quad u \perp e_n, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad |u|^2 + \varphi^2 = 1.$$

Dann ist

$$v\omega = u\omega + \varphi e_n \omega = u\omega' e_n - \varphi\omega'$$

mit $\omega' = e_1 \dots e_{n-1}$. Das Element $u\omega'$ ist ein ungerades Produkt (Länge n) und wird daher unter j auf $u\omega' e_n = u\omega$ abgebildet. Der andere Term $\varphi\omega'$ dagegen ist gerade und wird von j auf sich selbst abgebildet. Also folgt

$$j^{-1}(v\omega) = (u - \varphi)\omega'. \tag{11.3}$$

Jede Cliffordalgebra besitzt eine treue Darstellung durch Matrizen, $Cl_{n-1} \subset \mathrm{End}(W)$ für einen Vektorraum W. Insbesondere heißt die Einschränkung $Spin_n \subset Cl_{n-1} \subset \mathrm{End}(W)$ *Spindarstellung* der Gruppe $Spin_n$, und die Elemente von W heißen *Spinoren*. Wir sehen uns nun speziell $n = 9$ an. Wir hatten in [4], Abschnitt 11 gesehen, dass Cl_8 durch den Matrizenring $\mathbb{R}^{16\times 16}$ dargestellt wird, und zwar entspricht jedes $u \in \mathbb{R}^8 = \mathbb{O} \subset Cl_8$ der Matrix

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} & -L_{\bar{u}} \\ L_u & \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

wobei L_u die Linksmultiplikation $x \mapsto ux$ in $\mathbb{O}$ bezeichnet (eine 8×8-Matrix). Das Element $\omega' = e_1 \dots e_8$ ist eine *Involution*, $(\omega')^2 = 1$, die mit allen $\tilde{u}$ antikommutiert; also vertauscht $\tilde{u}$ die ± 1-Eigenräume von ω' und deshalb muss (eventuell bis auf das Vorzeichen) $\omega' = \left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)$ gelten.[33] Also ist $j^{-1}(v\omega) = (u-\varphi)\omega' = \left(\begin{smallmatrix} & -L_{\bar{u}} \\ L_u & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right) - \varphi\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)$

[33] Man kann $\omega' = \hat{e}_1 \dots \hat{e}_8$ recht leicht explizit ausrechnen, wenn man die folgende Multiplikationsregel beachtet:

und damit

$$j^{-1}(v\omega) = \begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar u} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix} \tag{11.5}$$

Mit diesem Isomorphismus j^{-1} betrachten wir $Spin_9$ als die von dieser Matrix-8-Sphäre erzeugte Untergruppe von SO_{16},

$$Spin_9 = \left\langle \begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar u} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix};\ (u,\varphi) \in S^8 \subset \mathbb{O} \times \mathbb{R} \right\rangle \tag{11.6}$$

wobei die spitzen Klammern das Erzeugnis als Gruppe bezeichnen.

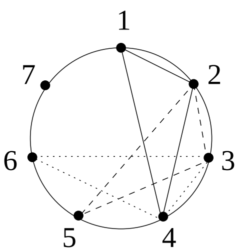
12. Wirkung von $Spin_9$ auf $H_3(\mathbb{O})$

Wir schreiben jedes $X \in H_3(\mathbb{O})$ folgendermaßen als Blockmatrix:

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & v^* \\ v & \hat x \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

mit $v \in \mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$ und $\hat x = \left(\begin{smallmatrix} \beta & x^* \\ x & \gamma \end{smallmatrix}\right)$. Jedem erzeugenden Element $\left(\begin{smallmatrix} -\varphi & L_{\bar u} \\ L_u & \varphi \end{smallmatrix}\right) \in Spin_9$ gemäß (11.6) ordnen wir die Oktaven-Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat u \end{pmatrix}, \quad \hat u = \left(\begin{smallmatrix} -\varphi & \bar u \\ u & \varphi \end{smallmatrix}\right)$$



Die Ziffern 1 bis 7 dieser "Uhr" stellen die imaginären Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_7$ dar. Durch den "Zeiger" werden Quaternionenalgebren angedeutet, z.B. $e_1e_2 = e_4$, $e_2e_4 = e_1$, $e_4e_1 = e_2$ und $e_ie_j = -e_je_i$ für $i \neq j$. Dieser "Zeiger" rückt zyklisch weiter vor: 124, 235, 346, 457, 561, 672, 713. Alle Zahlenpaare sind jetzt durch eine dieser Zeigerstellungen verbunden, womit die Multiplikationstabelle vollständig ist. Da $\hat e_i = \left(\begin{smallmatrix} & L_{e_i} \\ L_{e_i} & \end{smallmatrix}\right)$, müssen wir das Produkt $L = L_{e_1} \dots L_{e_7}$ berechnen, indem wir es auf die Basisvektoren $e_1, \dots, e_7$ und $e_0 = 1$ anwenden:

$$\begin{array}{lcl} Le_0 & : & e_0 \overset{e_7\cdot}{\mapsto} e_7 \overset{e_6\cdot}{\mapsto} e_2 \overset{e_5\cdot}{\mapsto} e_3 \overset{e_4\cdot}{\mapsto} -e_6 \overset{e_3\cdot}{\mapsto} e_4 \overset{e_2\cdot}{\mapsto} e_1 \overset{e_1\cdot}{\mapsto} -e_0 \\ Le_1 & : & e_1 \overset{e_7\cdot}{\mapsto} e_3 \overset{e_6\cdot}{\mapsto} e_4 \overset{e_5\cdot}{\mapsto} -e_7 \overset{e_4\cdot}{\mapsto} e_5 \overset{e_3\cdot}{\mapsto} e_2 \overset{e_2\cdot}{\mapsto} -1 \overset{e_1\cdot}{\mapsto} -e_1 \\ Le_2 & : & e_2 \overset{e_7\cdot}{\mapsto} e_6 \overset{e_6\cdot}{\mapsto} -1 \overset{e_5\cdot}{\mapsto} -e_5 \overset{e_4\cdot}{\mapsto} -e_7 \overset{e_3\cdot}{\mapsto} -e_1 \overset{e_2\cdot}{\mapsto} e_4 \overset{e_1\cdot}{\mapsto} -e_2 \\ \dots & & \end{array}$$

Wir erhalten $L = -I$ und damit $\hat e_1 \dots \hat e_7 = \left(\begin{smallmatrix} & L \\ L & \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} & -I \\ -I & \end{smallmatrix}\right)$, also $\omega' = \hat e_0 \hat e_1 \dots \hat e_7 = \left(\begin{smallmatrix} & -I \\ I & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} & -I \\ -I & \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)$.

zu; diese erfüllt $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \hat{u}^2 \end{pmatrix} = I$ wegen $\varphi^2 + |u|^2 = 1$. Mit dieser Matrix konjugieren wir X:

$$UXU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & v^* \\ v & \hat{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & v^*\hat{u} \\ \hat{u}v & \hat{u}\hat{x}\hat{u} \end{pmatrix} \tag{12.2}$$

Weil in keiner Komponente mehr als zwei (nicht reelle) Oktaven beteiligt sind, haben wir kein Problem mit der Assoziativität. Die Konjugation mit U ist ein Automorphismus von $H_3(\mathbb{O})$, also ein Element von F_4, denn das Matrix-Quadrat und damit das Jordanprodukt (die Polarisierung des Quadrats) bleiben erhalten:

$$UX^2U = UXUUXU = (UXU)^2.$$

Aber lässt sich die Wirkung von U zu einer Wirkung von $Spin_9$ fortsetzen? Dazu müssen wir uns die lineare Abbildung (12.2) auf $H_3(\mathbb{O})$ genau ansehen. Offensichtlich gilt

$$\hat{u}v = \begin{pmatrix} -\varphi & \bar{u} \\ u & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar{u}} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

die linke untere Ecke von (12.2) ist also die Spindarstellung von $Spin_9$. Da die Matrix UXU hermitesch ist, bleibt nur noch die rechte untere Ecke zu betrachten.

Hilfssatz 12.1. *Die linearen Abbildungen $\hat{x} \mapsto \hat{u}\hat{x}\hat{u}$ auf $H_2(\mathbb{O})$ erzeugen die Vektordarstellung von $Spin_9$ auf $H_2(\mathbb{O})_o = \left\{ \begin{pmatrix} -\xi & \bar{x} \\ x & \xi \end{pmatrix} ;\ \xi \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{O} \right\} \cong \mathbb{R}^9$, trivial auf Matrizen der Form $\begin{pmatrix} \eta & \\ & \eta \end{pmatrix}$ fortgesetzt.*

Beweis. Wir müssen zunächst die Vektordarstellung berechnen. Die erzeugenden Matrizen $\begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar{u}} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix}$ von $Spin_9 \subset \mathbb{R}^{16\times 16}$ gehören in der Cliffordalgebra Cl_9 zu Elementen $v\omega$ mit $v = (\varphi, u) \in \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{O} = \mathbb{R}^9$ und $\omega = e_1 e_2 \dots e_9$. Die Vektordarstellung dieses Elements auf $\mathbb{R}^9$ ist gegeben durch

$$z \mapsto v\omega z (v\omega)^{-1} = v\omega z v\omega = -vzv$$

denn $\omega^2 = -1$, und ω kommutiert mit allen Vektoren von $\mathbb{R}^9$. Da $\mapsto vzv$ die Spiegelung an der Hyperfläche $v^\perp$ ist, ist die Vektordarstellung von $v\omega$ die Spiegelung an $\mathbb{R}v$, also die Matrix A mit $Av = v$ und $Aw = -w$ für $w \perp v$. Dies müssen wir für die Abbildung $\hat{x} \mapsto \hat{u}\hat{x}\hat{u}$ nachrechnen, wobei $\hat{u}$ die Rolle von v und $\hat{x}$ die Rolle von z spielt.

Da $\hat{u}^2 = I$, gilt offensichtlich $\hat{u}\hat{u}\hat{u} = \hat{u}$. Wir müssen noch $\hat{u}\hat{x}\hat{u} = -\hat{x}$ für $\hat{x} \perp \hat{u}$ zeigen. Setzen wir $\hat{x} = \begin{pmatrix} -\xi & \bar{x} \\ x & \xi \end{pmatrix}$, so bedeutet $\hat{x} \perp \hat{u}$:

$$\varphi\xi = -\langle u, x \rangle. \tag{12.3}$$

Nun ist $\hat{u}\hat{x}\hat{u} = \left(\begin{smallmatrix} -\eta & \bar{y} \\ y & \eta \end{smallmatrix}\right)$ mit

$$\begin{aligned} \eta &= (\varphi^2 - |u|^2)\xi + 2\varphi\langle u, x\rangle \\ &= (\varphi^2 - |u|^2)\xi - 2\varphi^2\xi \\ &= -(\varphi^2 + |u|^2)\xi \\ &= -\xi \\ y &= 2\varphi\xi u - \varphi^2 x + u\bar{x}u \\ &= -2\langle u, x\rangle u - \varphi^2 x + u\bar{x}u \\ &= -u\bar{x}u - x\bar{u}u - \varphi^2 x + u\bar{x}u \\ &= -(|u|^2 + \varphi^2)x \\ &= -x \end{aligned}$$

□

Damit haben wir gezeigt, dass durch (12.2) eine Wirkung der Gruppe $Spin_9$ auf $H_3(\mathbb{O})$ durch Automorphismen definiert wird, also ein Homomorphismus $Spin_9 \to F_4$. Dieser Homomorphismus ist sogar injektiv, weil bereits die Spindarstellung (also nur der Anteil der Wirkung auf den Plätzen 21 und 31 der Matrix $X \in H_3(\mathbb{O})$) injektiv ("treu") ist; wir können deshalb $Spin_9$ als Untergruppe von F_4 auffassen. Außerdem zeigt (12.2), dass die Matrix $E_1 := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$ unter $Spin_9$ fix bleibt. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, dass $Spin_9$ die *volle* Stabilisatorgruppe von E_1 ist. Da F_4 transitiv auf $\mathbb{O}P^2$ wirkt (Folgerung 10.1), hätten wir damit gezeigt:

$$\mathbb{O}P^2 = F_4/Spin_9 \tag{12.4}$$

Daraus ließe sich erneut die Dimension von F_4 berechnen: $16 = \dim \mathbb{O}P^2 = \dim F_4 - \dim Spin_9$, wobei $\dim Spin_9 = \dim SO_9 = \dim A_9(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\, 9 \cdot 8 = 36$, also $\dim F_4 = 16 + 36 = 52$.

Was wir bereits jetzt sehen, ist der Tangentialraum von $\mathbb{O}P^2$ und die Wirkung von $Spin_9$ darauf: Da $\mathbb{O}P^2 = F_4.E_1$ (Bahn von $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ unter der linearen Wirkung der Gruppe F_4 auf $H_3(\mathbb{O})$), ist $T_{E_1}\mathbb{O}P_2 = (T_I F_4).E_1$, wobei $T_I F_4$ der Tangentialraum von I (die *Liealgebra* der Gruppe $F_4 \subset \mathrm{End}(H_3(\mathbb{O}))$ ist.[34] Zwar kennen wir nicht die Wirkung der ganzen Liealgebra $T_I F_4$, wohl aber die der erzeugenden Teilmenge

$$A_3(\mathbb{O})_o = \{A = \begin{pmatrix} a & -\bar{x} & -\bar{y} \\ x & b & -\bar{z} \\ y & z & c \end{pmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{O}',\ a + b + c = 0,\ x, y, z \in \mathbb{O}\}$$

der spurfreien antihermiteschen Matrizen, die durch das Kommutatorprodukt $\mathrm{ad}(A)X = [A, X]$ auf $H_3(\mathbb{O})$ wirken, vgl. Satz 9.1: Es gilt

[34]Da $F_4 \subset \mathrm{End}(H_3(\mathbb{O}))$, ist auch $T_I F_4 \subset \mathrm{End}(H_3(\mathbb{O}))$; damit ist $(T_I F_4).E_1 = \{\psi E_1;\ \psi \in T_I F_4\} \subset H_3(\mathbb{O})$ erklärt.

$[A, E_1] = \begin{pmatrix} & -\bar{x} & -\bar{y} \\ x & & \\ y & & \end{pmatrix}$ und damit

$$A_3(\mathbb{O})_o.E_1 = \{\begin{pmatrix} & -\bar{x} & -\bar{y} \\ x & & \\ y & & \end{pmatrix};\ x, y \in \mathbb{O}\} \cong \mathbb{O}^2.$$

Dies ist ein 16-dimensionaler Unterraum von $T_I\mathbb{O}P^2$, also bereits der ganze Raum, weil $\mathbb{O}P^2$ auch 16-dimensional ist.

Die Gruppe $Spin_9 \subset F_4$ wirkt auf $\mathbb{O}P^2$ und lässt das Element E_1 fest, wirkt also auch auf dem Tangentialraum $T_{E_1}\mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$, und diese Wirkung kennen wir bereits aus (12.2): Es ist die Spindarstellung von $Spin_9$ auf $\mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$.

Satz 12.1. *$Spin_9 \subset SO_{16}$ wirkt transitiv auf $\mathbb{S}^{15}$.*

Beweis. Nach (11.6) wird $Spin_9 \subset SO_{16}$ erzeugt von Matrizen $g = \begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar{u}} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix}$ mit $(u, \varphi) \in \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass wir die ganze $\mathbb{S}^{15}$ durch Anwendung von $Spin_9$ auf den Vektor $\binom{0}{1} \subset \mathbb{O}^2$ gewinnen können. Setzen wir zunächst $\varphi = 0$ und $u = v \in \mathbb{S}^7 \subset \mathbb{O}$, so erhalten wir $\begin{pmatrix} & L_{\bar{v}} \\ L_v & \end{pmatrix}\binom{0}{1} = \binom{v}{0}$. Auf diesen neuen Vektor wiederum g angewandt ergibt $\begin{pmatrix} -\varphi & L_{\bar{u}} \\ L_u & \varphi \end{pmatrix}\binom{v}{0} = \binom{-\varphi v}{uv}$. Ist nun $\binom{x}{y} \in \mathbb{S}^{15}$ beliebig, so können wir ϕ, u, v finden mit $\binom{x}{y} = \binom{-\varphi v}{uv}$; wir müssen dazu die Gleichungen $x = -\varphi v$, $y = uv$ nur nach u und v auflösen. Es ergibt sich $v = -\frac{1}{\varphi}x$ und $u = yv^{-1} = -\varphi y x^{-1}$, wobei wir $\varphi = |x|$ setzen müssen, damit $|v| = 1$ gilt.[35] Dann ist auch (u, φ) ein Einheitsvektor, denn $|u|^2 + \varphi^2 = |y|^2 + |x|^2 = 1$. □

Damit sehen wir, dass $\mathbb{O}P^2$ wirklich eine sehr hohe Symmetrie besitzt, nämlich ein sogenannter *Zwei-Punkt-homogener* oder *isotroper* Raum ist: Mit der Gruppe F_4, die aus Isometrien des umgebenden Raums $H_3(\mathbb{O})$ besteht, können wir nicht nur jeden Punkt von $\mathbb{O}P^2$ auf jeden anderen abbilden, sondern auch jeden Einheitstangentialvektor auf jeden anderen, wie auch bei der Sphäre (Fußball) $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$.

13. Wirkung von $Spin_8$ auf $H_3(\mathbb{O})$

Wir wollen nun zeigen, dass $Spin_9$ genau die Stabilisatorgruppe von E_1 bezüglich der Wirkung von F_4 ist. Das geschieht in [7] ganz direkt. Wir gehen aber lieber den systematischeren Weg von [6] und bestimmen eine kleinere Gruppe, nämlich die zusammenhängende Untergruppe von F_4, die alle drei Matrizen E_1, E_2, E_3 auf sich selbst abbildet. Wir werden sehen, dass dies die Gruppe $Spin_8 \subset Spin_9$ ist. Durch Nachschalten von Elementen von $Spin_9$ können wir anschließend jedes

[35]Wir dürfen o.B.d.A. $x \neq 0$ voraussetzen, weil x und y nicht gleichzeitig verschwinden können.

Element g der Stabilisatorgruppe von E_1 so verändern, dass es auch E_2 und E_3 festhält und deshalb in $Spin_8 \subset Spin_9$ liegt; deshalb war auch das ursprüngliche Element g bereits in $Spin_9$.

Es sei also $L := \{\phi \in G = F_4;\ \phi(E_i) = E_i \text{ für } i = 1,2,3\}$. Wir benötigen einige Standardmatrizen und ihre Produkte: Es seien E_{ij} bzw. F_{ij} die 3×3-Matrizen, deren Koeffizienten alle verschwinden außer an den Plätzen ij und ji, wo 1 für E_{ij} bzw. 1 und -1 für F_{ij} steht. Für $j \neq k, l$ haben wir dann[36]

$$\begin{aligned} 2E_{ij} \circ E_{jk} &= E_{ik}, \\ 2E_{ij} \circ F_{jk} &= F_{ik}, \\ E_{jj} \circ E_{kl} &= 0 \\ E_{jj} \circ F_{kl} &= 0 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$H_{kl} := \mathbb{R}E_{kl} + \mathbb{O}' F_{kl} = \{X \perp E_k, E_l;\ E_j \circ X = 0\} \tag{13.1}$$

(mit $E_j := E_{jj}$). Jedes $\phi \in L$ lässt daher $H_{kl} \cong \mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ invariant, denn aus $X \circ E_j = 0$ folgt $(\phi X) \circ E_j = 0$. Es folgt daher

$$\phi \begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \phi_3 x_3 & \overline{\phi_2 x_2} \\ \overline{\phi_3 x_3} & 0 & \phi_1 x_1 \\ \phi_2 x_2 & \overline{\phi_1 x_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{13.2}$$

für gewisse $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in SO_8$. Andererseits ist

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & \bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & y_3 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 & 0 & y_1 \\ y_2 & \bar{y}_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \bar{z}_{12} & z_{31} \\ z_{12} & * & \bar{z}_{23} \\ \bar{z}_{31} & z_{23} & * \end{pmatrix}$$

mit $z_{ij} = \frac{1}{2}(x_i y_j + y_i x_j)$. Aus $\phi X \circ \phi Y = \phi(X \circ Y)$ erhalten wir daher

$$(\phi_i x_i)(\phi_j y_j) + (\phi_i y_i)(\phi_j x_j) = \tilde{\phi}_k (x_i y_j + y_i x_j) \tag{13.3}$$

mit $(ijk) = (123)$ (zyklische Reihenfolge) und $\tilde{\phi}_k(z) = \overline{\phi_k(\bar{z})}$. Speziell für $x = x_i$, $y = y_j$ und $y_i = 0$ folgt

$$(\phi_i x)(\phi_j y) = \tilde{\phi}_k(xy) \tag{13.4}$$

wobei $x, y \in \mathbb{O}$ beliebig sind. Anders herum folgt (13.3) auch aus (13.4), auf die beiden Terme von (13.3) angewandt. Die Gleichungen sind also äquivalent. Die Gleichung (13.4) ist genau die Trialität für die Oktaven, die durch $Spin_8$ realisiert wird, vgl. [4], Gl. (74), mit $C = \phi_i$, $A = \phi_j$, $B = \tilde{\phi}_k$.

---

[36] z.B. $E_{11} \circ E_{13} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$, $E_{21} \circ E_{13} = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$, $E_{11} \circ E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} = 0$

Bemerkung: Man wundert sich vielleicht, wie aus der einen Gleichung $(Cx)(Ay) = B(xy)$ in [4], (74) plötzlich drei Gleichungen werden können. Dazu bringe man Ay auf die andere Seite: $Cx = B(xy)(Ay)^{-1} = B(xy)\tilde{A}(y^{-1})$ mit $\tilde{A}(y) = \overline{A(\bar{y})}$. Mit $u = xy$ und $v = y^{-1}$ folgt $C(uv) = (Bu)(\tilde{A}v)$. Konjugation liefert $\overline{C(uv)} = \overline{\tilde{A}v}\,\overline{Bu}$ oder $A(\bar{v})\tilde{B}(\bar{u}) = \tilde{C}(\bar{v}\bar{u})$. Die Rollen von C, A, B in der früheren Gleichung $(Cx)(Ay) = B(xy)$ werden jetzt durch $A, \tilde{B}, \tilde{C}$ übernommen; die Reihenfolge der drei Matrizen wurde also zyklisch permutiert. Der Übergang $(A, B, C) \mapsto (\tilde{B}, \tilde{C}, A)$ ist ein (äußerer) Automorphismus der Gruppe $Spin_8$, genannt *Trialitätsautomorphismus.*

Nun können wir zeigen, dass die Stabilisatorgruppe

$$H = \{g \in F_4;\ g(E_1) = E_1\}$$

mit $Spin_9$ übereinstimmt. Dazu sei ein Element $g \in H$ gegeben. Für $X = g(E_2) = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & v^* \\ v & \hat{x} \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir:

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha & v^* \\ v & \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2}v^* \\ \frac{1}{2}v & 0 \end{pmatrix}$$

also folgt $\alpha = 0$, $v = 0$ und $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & \hat{x} \end{smallmatrix}\right)$ mit Spur $\hat{x} = 1$ und $|\hat{x}| = 1$, weil Entsprechendes für E_2 gilt. Die Gruppe $Spin_9$ wirkt durch die Vektordarstellung transitiv auf der Menge solcher Matrizen,[37] somit finden wir ein $g_1 \in Spin_9$, das X auf E_2 abbildet, also $g_1 g(E_2) = g_1(X) = E_2$ und auch $g_1 g(E_1) = E_1$. Setzen wir $Y = g_1 g(E_3)$, so ist $Y \perp E_2, E_1$ und wir finden ein $g_2 \in Spin_9$ mit $g_2(E_2) = E_2$ und $g_2(Y) = E_3$, also lässt $\tilde{g} := g_2 g_1 g$ alle drei Matrizen E_1, E_2, E_3 fest. Aus topologischen Gründen[38] muss H zusammenhängend sein, und nach der obigen Diskussion folgt nun $\tilde{g} \in Spin_8$. Da $Spin_8 \subset Spin_9$ und $g_1, g_2 \in Spin_9$, folgt $g = g_1^{-1} g_2^{-1} \tilde{g} \in Spin_9$, was zu zeigen war.

14. Wirkung von $Spin_8$ und $Spin_7$ auf $\mathbb{O}^2 = T_{E_1}\mathbb{O}P^2$

Wir wollen $Spin_8$ auch als Untergruppe von $Spin_9 \subset SO_{16}$ beschreiben. Dazu müssen wir noch einmal auf die Ergebnisse des vorvorigen Abschnitts 12 zurückgreifen. Wir erinnern uns, dass das Element

[37] Wir haben $\hat{x} = \hat{x}_o + \frac{1}{2}I$ mit $\hat{x}_o \in H_2(\mathbb{O})_o \cong \mathbb{R}^9$ und $1 = |\hat{x}|^2 = |\hat{x}_o|^2 + \frac{1}{2}$, also liegt $\hat{x}_o$ in der Sphäre vom Radius $1/\sqrt{2}$ im $\mathbb{R}^9$. Auf dieser wirkt die $Spin_9$ als SO_9 transitiv.

[38] $\mathbb{O}P^2$ ist einfach zusammenhängend, denn jede Schleife kann die 8-dimensionale Ferngerade in der 16-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathbb{O}P^2$ vermeiden und dann im affinen Teil $\mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$ zusammengezogen werden. Da außerdem $G = F_4$ zusammenhängend ist, muss auch H zusammenhängend sein: Andernfalls gäbe es einen Weg in G von einer Komponente von H in eine andere; dieser würde auf eine Schleife in $\mathbb{O}P^2 = G/H$ projiziert, die nicht zusammengezogen werden kann.

$\omega' = e_1 \dots e_8 \in Spin_8$ mit allen e_i, $i = 1, \dots, 8$ antikommutiert, mit e_9 dagegen kommutiert (8 Vorzeichenwechsel). Somit vertauscht ω' mit den Erzeugenden $e_i e_j$ von $Spin_8$, aber antikommutiert mit den Elementen von $Spin_9$, die (genau) einen Faktor e_9 enthalten. Somit gilt:

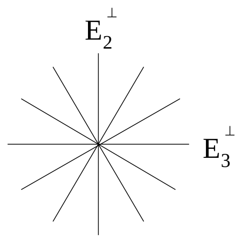
$$Spin_8 = \{\phi \in Spin_9;\ \phi\omega' = \omega'\phi\}. \tag{14.1}$$

In der Spindarstellung $Spin_8 \subset Cl_8 \subset \mathbb{R}^{16\times 16}$ wird ω' zur Matrix $\left(\begin{smallmatrix} I_8 & \\ & -I_8 \end{smallmatrix}\right)$, mit der genau die blockdiagonalen Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & B \end{smallmatrix}\right)$ kommutieren; also können wir feststellen:

$$\begin{aligned} Spin_8 &= Spin_9 \cap \{\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & B \end{smallmatrix}\right);\ A, B \in \mathbb{R}^{8\times 8}\} \\ &= \{\phi \in Spin_9;\ \phi(\mathbb{O}^1) = \mathbb{O}^1\} \end{aligned} \tag{14.2}$$

wobei wir $\mathbb{O}^1 = \mathbb{O} \times \{0\} \subset \mathbb{O}^2$ ansehen.

Wir können dies folgendermaßen interpretieren: Durch den Punkt $E_1 \in \mathbb{O}P^2$ gehen viele projektive Geraden (Mengen vom Typ $P^\perp \cap \mathbb{O}P^2$ mit $P \in \mathbb{O}P^2$), nämlich alle die mit $P \perp E_1$.[39] Die Tangentialräume der Geraden durch E_1 sind die Schnitte der Unterräume $P^\perp$ mit $T_{E_1}\mathbb{O}P^2 = \mathbb{O}^2$; es sind die affinen Geraden in $\mathbb{O}^2$ vom Typ $\{y = ax\}$ mit $a \in \mathbb{O}$ sowie $\{x = 0\}$. Das sieht man am besten mit dem eingangs vorgestellten Modell von $\mathbb{O}P^2 = \mathbb{O}^2 \cup$ Ferngerade; die affine Ebene $\mathbb{O}^2$ ist eine Karte von $\mathbb{O}P^2$ um E_1, und die Geraden durch E_1 sind in dieser Karte genau diese Teilmengen $\{y = ax\}$ sowie $\{x = 0\}$.



Die Gruppe F_4 wirkt transitiv auf der Menge aller Geraden und $Spin_9$ auf der Menge der Geraden durch E_1,[40] und $Spin_8$ ist nach (14.2) der

[39] Die Bedingung $E_1 \perp P$, d.h. Re Spur $(E_1 \circ P) = 0$ ist äquivalent zu $E_1 \circ P = 0$. Dazu sei $P = vv^*$ mit $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ dann ist $E_1 P = e_1 e_1^* v v^* = v_1 e_1 v^* = v_1 \left(\begin{smallmatrix} v^* \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $PE_1 = vv^* e_1 e_1^* = \bar v_1 v e_1^* = \bar v_1 (v, 0, 0)$. Es folgt Spur $E_1 P = |v_1|^2 =$ Spur PE_1. Aus $E_1 \perp P$ folgt also $v_1 = 0$ und damit $E_1 P = PE_1 = 0$.

[40] Es ist leicht zu sehen, dass die $Spin_9$ auf einer der Geraden transitiv operiert, nämlich auf $E_1^\perp$: Bereits mit der erzeugenden Menge $\{U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \hat u \end{smallmatrix}\right);\ \hat u = \left(\begin{smallmatrix} -\varphi & \bar u \\ u & \varphi \end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix} \varphi \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{S}^8\}$ kann man alle Elemente $vv^* \perp E_1$ (d.h. $v \perp e_1$) erreichen, denn $\mathrm{Ad}(U)$ bildet $E_2 = e_2 e_2^*$ ab auf vv^* mit $v = -\varphi e_2 + u e_3$. Damit wirkt F_4 transitiv nicht nur auf der Geradenmenge, sondern sogar auf allen "Fahnen", d.h. allen Paaren (Punkt, Gerade) mit Punkt $\in$ Gerade.

Stabilisator der Geraden $E_3^\perp$ durch E_1 und E_2, da deren Tangentialraum im Punkt E_1 gerade $\mathbb{O}e_1$ ist, und gleichzeitig auch der Stabilisator der Geraden $E_2^\perp$, deren Tangentialraum ja das orthogonale Komplement $\mathbb{O}e_2$ von $\mathbb{O}e_1$ ist. In der Tat wissen wir ja, dass $Spin_8$ eine Untergruppe von $SO_8 \times SO_8$ ist, die auf jedem der beiden Faktoren vom Typ $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ wie die ganze SO_8 wirkt, denn $Spin_8$ besteht aus allen Tripeln $(A, B, C) \in (SO_8)^3$ mit $(Cx)(Ay) = B(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{O}$ (Trialität, siehe Abschnitt 13 sowie [4], (72)), wobei jeweils zwei dieser Matrizen die dritte bestimmen und jeweils eine davon frei gewählt werden kann. Somit wirkt $Spin_8$ auf dem Tangentialraum $\mathbb{O}e_1 \cong \mathbb{R}^8$ der Geraden $E_3^\perp = \mathbb{S}^8$ wie SO_8.

Die Stabilisatorgruppe des Punktes $e_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{O}^2$ muss eine Untergruppe von $Spin_8$ sein, weil diese auch die Gerade durch E_1 tangential zu $(0, 1)$ erhält. und sie muss auf $\mathbb{O}e_1$ und auf $\mathbb{O}e_2$ wie SO_7 operieren. Welche Untergruppe von $Spin_8$ ist das? Die Standard-Untergruppe $Spin_7$ ist es nicht, denn sie besteht aus den Paaren $(A, A) \in Spin_8$ ([4], (78)) und lässt damit den Punkt $(0, 1)$ nicht fest, denn die $A \in SO_8$ mit $(A, A) \in Spin_7$ operieren transitiv auf $\mathbb{S}^7$ ([4], 17.2). Aber auf Grund der Trialität gilt $C(1)A(1) = A(1)$ für $(A, A, C) \in Spin_8$, und damit $C(1) = 1$. Anwenden des Trialitätsautomorphismus (vgl. Bemerkung am Ende von Abschnitt 13) verwandelt (A, A, C) in $(\tilde{A}, \tilde{C}, A)$, und da $\tilde{C}(1) = 1$, folgt $\left(\begin{smallmatrix}\tilde{A} & \\ & \tilde{C}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$, also wird e_2 durch solche Matrizen fest gelassen. Die Standgruppe von e_2 ist also $\tau(Spin_7)$, wobei τ der Trialitätsautomorphimus ist. Entsprechend ist die Standgruppe von e_1 die Gruppe $\tau^{-1}(Spin_7)$.

Der Gruppenkette $Spin_7' = \tau^{-1}(Spin_7) \subset Spin_8 \subset Spin_9 \subset F_4$ für $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ entsprechen bei den anderen Divisionsalgebren die Ketten

$$\begin{array}{lccccccc}
\mathbb{K} = \mathbb{R}: & O_1 & \subset & O_1 \times O_1 & \subset & O_2 & \subset & PO_3 \\
\mathbb{K} = \mathbb{C}: & U_1 & \subset & U_1 \times U_1 & \subset & U_2 & \subset & PU_3 \\
\mathbb{K} = \mathbb{H}: & Sp_1 & \subset & Sp_1 \times Sp_1 & \subset & Sp_2 & \subset & PSp_3 \\
\mathbb{K} = \mathbb{O}: & Spin_7' & \subset & Spin_8 & \subset & Spin_9 & \subset & F_4
\end{array}$$

15. Geometrische Bedeutung der Determinante

Im Abschnitt 7 hatten wir die Determinante kennengelernt, vgl. (7.8):

$$\det(X) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Spur}\,(X^3) - \frac{1}{2}|X|^2\,\mathrm{Spur}\,(X) + \frac{1}{6}\,\mathrm{Spur}\,(X)^3.$$

Sie ist ein kubisches Polynom auf dem Raum $H_3(\mathbb{O})$. Die zugehörige symmetrische Trilinearform (Polarisierung von det) bezeichnen wir mit demselben Symbol det:

$$
\begin{aligned}
\det(X,Y,Z) &= \frac{1}{3}\operatorname{Spur}(X\circ Y\circ Z)\\
&\quad -\frac{1}{6}\left(\langle X,Y\rangle \operatorname{Spur} Z+\langle Y,Z\rangle \operatorname{Spur} X+\langle Z,X\rangle \operatorname{Spur} Y\right)\\
&\quad +\frac{1}{6}\operatorname{Spur}(X)\operatorname{Spur}(Y)\operatorname{Spur}(Z) \qquad (15.1)
\end{aligned}
$$

Wir können nun die Oktavenebene $\mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$ "bis auf reelle Vielfache", d.h. die Teilmenge $\mathbb{R}\cdot\mathbb{O}P^2$ durch die Determinante kennzeichnen:

Satz 15.1. $X \in \mathbb{R}\cdot\mathbb{O}P^2 \iff \det(X,X,\ )=0.$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
\det(X,X,Z) &= \frac{1}{3}\langle X^2,Z\rangle\\
&\quad -\frac{1}{6}\left(\langle X,X\rangle \operatorname{Spur} Z+2\langle X,Z\rangle \operatorname{Spur} X\right)\\
&\quad +\frac{1}{6}\operatorname{Spur}(X)^2 \operatorname{Spur} Z\\
&= \frac{1}{3}\left\langle X^2-\frac{1}{2}(|X|^2-\xi^2)I-\xi X\ ,\ Z\right\rangle \qquad (15.2)
\end{aligned}
$$

mit $\xi = \operatorname{Spur} X$. Somit gilt $\det(X,X,Z)=0$ für alle $Z \iff$

$$X^2-\xi X=\frac{1}{2}(|X|^2-\xi^2)I.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Spur, so zeigt sich $|X|^2-\xi^2=0$, und die Gleichung vereinfacht sich zu $X^2=\xi X$. Also gilt $\det(X,X,Z)=0$ $\forall Z \in H_3(\mathbb{O}) \iff X^2=\xi X \iff P:=X/\xi$ erfüllt $P^2=X^2/\xi^2=\xi X/\xi^2=P$ mit $\operatorname{Spur} P=1 \iff X/\xi\in\mathbb{O}P^2 \iff X\in\mathbb{R}\cdot\mathbb{O}P^2$. ☐

Wir erinnern nun an die Projektive Geometrie von $\mathbb{O}P^2$: Die Elemente von $\mathbb{O}P^2$ haben wir als *Punkte* bezeichnet, und *Geraden* waren die Mengen[41]

$$g_Y=\{X\in\mathbb{O}P^2;\ \langle X,Y\rangle=0\}=\{X\in\mathbb{O}P^2;\ X\circ Y=0\}. \qquad (15.3)$$

Zu zwei Punkten X,Y gibt es genau eine Verbindungsgerade $g=X\vee Y$ mit $X,Y\in g$, wie wir bereits ganz am Anfang im Abschnitt 2 gesehen haben. Also muss $g=g_W$ gelten für ein $W\in\mathbb{O}P^2$ aber wie berechnen wir dieses?

[41]Die Äquivalenz $\langle X,Y\rangle=0 \iff X\circ Y=0$ folgt aus Fußnote 39, S. 34, denn wir können durch Anwendung eines Elements von F_4 ohne Einschränkung $X=E_1$ annehmen.

Satz 15.2. *$X \vee Y = g_W$ mit*

$$\begin{aligned} W &= I - \frac{Z^2}{1-\epsilon}, \qquad (15.4) \\ Z &= X - Y, \\ \epsilon &= \langle X, Y\rangle = \operatorname{Spur}(X \circ Y) \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst $W \in \mathbb{O}P^2$. Dazu müssen wir nur zeigen, dass Spur $W^k = 1$ für $k = 1, 2, 3$.[42] Wir berechnen also *Spur* Z^k und beachten dabei, dass X, Y *Idempotente* (d.h. $X^2 = X$, $Y^2 = Y$) mit Spur 1 sind:[43]

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur} Z &= \operatorname{Spur} X - \operatorname{Spur} Y \\ &= 0 \\ \operatorname{Spur} Z^2 &= \operatorname{Spur} X^2 + \operatorname{Spur} Y^2 - 2\operatorname{Spur}(X \circ Y) \\ &= 2(1-\epsilon) \\ \operatorname{Spur} Z^3 &= \operatorname{Spur} X^3 - \operatorname{Spur} Y^3 + 3 \operatorname{Re} \operatorname{Spur}(XY^2 - X^2Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Aus der Cayley-Hamilton-Gleichung (7.7)

$$Z^3 - (\operatorname{Spur} Z)Z^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(Z)^2 - \operatorname{Spur}(Z^2))Z - (\det Z)I = 0$$

wird somit

$$Z^3 - (1-\epsilon)Z = (\det Z)I.$$

Da die Spur der linken Seite dieser Gleichung verschwindet (wegen Spur $Z^3 = 0 =$ Spur Z), erhalten wir $\det Z = 0$ und somit

$$\begin{array}{rclcrcl} Z^3 &=& (1-\epsilon)Z, && \operatorname{Spur} Z^3 &=& 0 \\ Z^4 &=& (1-\epsilon)Z^2, && \operatorname{Spur} Z^4 &=& 2(1-\epsilon)^2 \\ Z^5 &=& (1-\epsilon)^2 Z, && \operatorname{Spur} Z^5 &=& 0 \\ Z^6 &=& (1-\epsilon)^2 Z^2, && \operatorname{Spur} Z^6 &=& 2(1-\epsilon)^3 \end{array}$$

und so weiter. Jetzt können wir die Spuren der Potenzen von W berechnen, siehe (15.4):

$$\begin{aligned} \operatorname{Spur} W &= \operatorname{Spur} I - \frac{\operatorname{Spur} Z^2}{1-\epsilon} = 3 - 2 = 1 \\ \operatorname{Spur} W^2 &= \operatorname{Spur} I - 2\frac{\operatorname{Spur} Z^2}{1-\epsilon} + \frac{\operatorname{Spur} Z^3}{(1-\epsilon)^2} = 3 - 4 + 2 = 1 \end{aligned}$$

---

[42] Damit sind nämlich die symmetrischen Funktionen der drei Eigenwerte und somit die Eigenwerte selbst (bis auf Reihenfolge) eindeutig bestimmt, und da $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ eine Lösung ist, ist W unter der Gruppe F_4 konjugiert zu E_1, also $W \in \mathbb{O}P^2$.

[43] Bei der Berechnung von Spur $Z^3 = \operatorname{Spur}(Z^2 \circ Z)$ beachte man $\operatorname{Spur}(X \circ Y) = \operatorname{Re} \operatorname{Spur} XY$ sowie die Assoziativität und Kommutativität von Re Spur .

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spur} W^3 &= \operatorname{Spur}\left(I - \frac{3Z^2}{1-\epsilon} + \frac{3Z^4}{(1-\epsilon)^2} - \frac{Z^6}{(1-\epsilon)^3}\right)\\
&= 3 - 6 + 6 - 2 = 1,
\end{aligned}$$

womit $W \in \mathbb{O}P^2$ gezeigt ist. Es bleibt noch $X, Y \in g_W$ zu zeigen, d.h. $X \circ W = Y \circ W = 0$. Dazu berechnen wir zunächst $X \circ Z^2$, wobei wir beachten müssen, dass X, Y Idempotente sind:

$$\begin{aligned}
X \circ Z^2 &= X \circ (X - y)^2\\
&= X \circ (X^2 - 2X \circ Y + Y^2)\\
&= X - 2X \circ (X \circ Y) + X \circ Y\\
&\overset{*}{=} X - X \circ Y - \langle X, Y\rangle X + X \circ Y\\
&= X - \epsilon X
\end{aligned}$$

Bei "$\overset{*}{=}$" haben wir noch $2X \circ (X \circ Y) = X \circ Y + \langle X, Y\rangle X$ zu zeigen. Dabei dürfen wir $X = E_1$ setzen (Anwendung von F_4), dann ist die Gleichung einfach zu sehen.[44] Jetzt können wir $X \circ W = 0$ zeigen (und entsprechend $Y \circ W = 0$), womit $X, Y \in g_W$ bewiesen ist:

$$X \circ W = X \circ I - \frac{X \circ Z^2}{1-\epsilon} = X - \frac{X - \epsilon X}{1 - \epsilon} = 0. \qquad \square$$

Bemerkung: Die Determinante ist eine symmetrische Trilinearform auf $H_3(\mathbb{O})$. Mit dem Skalarprodukt kann man diese in eine bilineare Abbildung $H_3(\mathbb{O}) \times H_3(\mathbb{O}) \to H_3(\mathbb{O})$ verwandeln, also in ein neues Produkt, das sogenannte *Kreuzprodukt* auf $H_3(\mathbb{O})$; nach (15.1) gilt dafür:

$$\begin{aligned}
\langle X \times Y, Z\rangle &:= 3\det(X, Y, Z)\\
X \times Y &= X \circ Y + \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(X)\operatorname{Spur}(Y) - \operatorname{Spur}(X \circ Y))\\
&\quad - \frac{1}{2}(\operatorname{Spur}(X)Y + \operatorname{Spur}(Y)X)\, I \qquad (15.5)
\end{aligned}$$

Insbesondere für $X, Y \in \mathbb{O}P^2$ erhalten wir mit (15.4):

$$\begin{aligned}
X \times Y &= X \circ Y - \frac{1}{2}(X + Y) + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{Spur}(X \circ Y))I\\
&= -\frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{2}(1-\epsilon)I = \frac{1}{2}(1-\epsilon)W.
\end{aligned}$$

[44] Mit $Y = vv^*$ und $X = E_1 = e_1 e_1^*$ ist

$$\begin{aligned}
2X \circ Y &= e_1 e_1^* v v^* + v v^* e_1 e_1^*\\
&= v_1 e_1 v^* + \bar{v}_1 v e_1^*,\\
4X \circ (X \circ Y) &= v_1(e_1 e_1^* e_1 v^* + e_1 v^* e_1 e_1^*) + \bar{v}_1(e_1 e_1^* v e_1^* + v e_1^* e_1 e_1^*)\\
&= v_1 e_1 v^* + \bar{v}_1 v e_1^* + 2|v_1|^2 e_1 e_1^*\\
&= 2X \circ Y + 2\langle Y, X\rangle X.
\end{aligned}$$

Da es bei den Geraden auf reelle Vielfache nicht ankommt, können wir also feststellen:

$$X \vee Y = g_{X\times Y}. \tag{15.6}$$

Satz 15.3. *Drei Punkte $X, Y, Z \in \mathbb{O}P^2$ sind kollinear, d.h. liegen auf einer gemeinsamen Geraden genau dann, wenn*

$$\det(X, Y, Z) = 0. \tag{15.7}$$

Beweis. $\det(X, Y, Z) = 0 \iff \langle X \times Y, Z\rangle = 0 \iff Z \in g_{X\times Y} = X \vee Y$. □

16. Die Automorphismengruppe der Determinante

Automorphismen ϕ der Algebra $(H_3(\mathbb{O}), \circ)$ (d.h. $\phi \in F_4$) erhalten die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms (7.7), die Spur, die Determinante sowie σ_2 oder das Skalarprodukt,[45] und umgekehrt sind bijektive lineare Abbildungen von $H_3(\mathbb{O})$, die diese drei charakteristischen Größen erhalten, bereits Automorphismen der Algebra.[46]

Wir wollen uns in diesem Abschnitt eine größere Gruppe ansehen, die Gruppe aller linearen Isomorphismen von $H_3(\mathbb{O})$, die lediglich die Determinante erhält, die *Automorphismengruppe der Determinante*, die mit dem Namen E_6 bezeichnet wird:

$$E_6 := \{\phi \in GL(H_3(\mathbb{O}));\ \det \phi(X) = \det X\ \forall X \in H_3(\mathbb{O})\} \tag{16.1}$$

Offensichtlich gilt $F_4 \subset E_6$. Da die Teilmenge $\mathbb{R} \cdot \mathbb{O}P^2 \subset H_3(\mathbb{O})$ durch die Determinante gekennzeichnet ist (Satz 15.1), ist sie invariant unter E_6, und daher erhält E_6 die Oktavenebene bis auf reelle Vielfache. Weil auch die Kollinearität von Punkten durch die Determinante gegeben wird (Satz 15.3), sind die Elemente von E_6 *Kollineationen*, d.h. Abbildungen auf $\mathbb{O}P^2$, die Geraden auf Geraden abbilden. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass E_6 bereits alle Kollineationen von $\mathbb{O}P^2$ enthält, also die volle *Kollineationsgruppe* oder *Projektive Gruppe* von $\mathbb{O}P^2$ darstellt. Im gegenwärtigen Abschnitt wollen wir zeigen, dass E_6 sehr groß ist, weil ihre Liealgebra von allen 3×3-Matrizen mit Spur 0 über den Oktaven erzeugt wird.[47]

---

[45] Nach (7.7) ist $\sigma_2(X) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\,(X)^2 - |X|^2\right)$. Unter der Voraussetzung Spur $\phi(X) =$ Spur X gilt daher $\sigma_2(\phi(X)) = \sigma_2(X) \iff |\phi(X)|^2 = |X|^2$.

[46] Ist ϕ eine linearer Isomorphismus von $H_3(\mathbb{O})$, der diese drei Größen erhält, so gilt nach (15.1) auch $\langle \phi(X) \circ \phi(Y), \phi(Z)\rangle = \langle X \circ Y, Z\rangle$ für alle X, Y, Z, also $\phi(X) \circ \phi(Y) = X \circ Y$ für alle $X, Y \in H_3(\mathbb{O})$.

[47] Es ist $\mathbb{O}^{3\times 3} = H_3(\mathbb{O}) \oplus A_3(\mathbb{O})$. Der Teilraum $A_3(\mathbb{O})_o$ erzeugt bereits die Liealgebra von F_4 mit Dimension 52; dazu kommt noch $H_3(\mathbb{O})_o$ mit Dimension 26; die Dimension von E_6 ist also mindestens 52+26 = 78, und das ist in der Tat bereits die volle Dimension von E_6, wie wir in Satz 16.2 zeigen werden.

Dazu müssen wir zunächst die Wirkung solcher Matrizen auf $H_3(\mathbb{O})$ definieren. Für jedes $T \in \mathbb{O}^{3\times 3}$ und $X \in H_3(\mathbb{O})$ setzen wir

$$T \circ X := \frac{1}{2}(TX + XT^*). \tag{16.2}$$

Für $T \in H_3(\mathbb{O})$ erhalten wir das Jordanprodukt $\frac{1}{2}(XT + TX)$ zurück, aber für $T \in A_3(\mathbb{O})$ ist es das Lieprodukt: $TX + XT^* = XT - TX = [T, X]$. Wir hatten schon gesehen, dass dies die Wirkung der Liealgebra von F_4 ist; wir definieren hier also eine Erweiterung dieser Wirkung.

Satz 16.1. *Für jedes $T \in \mathbb{O}^{3\times 3}$ mit* Spur $T = 0$ *ist die lineare Abbildung $\phi_T : X \mapsto T \circ X$ auf $H_3(\mathbb{O})$ ein Element der Liealgebra von E_6, d.h. eine Derivation der Determinante:*

$$\det(\phi_T X, Y, Z) + \det(X, \phi_T Y, Z) + \det(X, Y, \phi_T Z) = 0. \tag{16.3}$$

Beweis. Wir dürfen $T \in H_3(\mathbb{O})_o$ annehmen, denn für $T \in A_3(\mathbb{O})_o$ ist ϕ_T bereits in der Liealgebra von F_4. Außerdem genügt es, den Fall $X = Y = Z$ zu betrachten (Polarisierung). Zu zeigen ist also $\det(X, X, \phi_T X) = 0$. Nach (15.2) gilt mit $\xi = \text{Spur } X$:

$$\begin{aligned} 3\det(X, X, \phi_T X) &= \left\langle X^2 - \frac{1}{2}(|X|^2 - \xi^2)I - \xi X\, ,\, T \circ X \right\rangle \\ &= \left\langle X^3 - \frac{1}{2}(|X|^2 - \xi^2)X - \xi X^2\, ,\, T \right\rangle \\ &\overset{(7.7)}{=} \langle (\det X)I, T \rangle \\ &= \det X \cdot \text{Spur } T, \end{aligned} \tag{16.4}$$

und also $\det(X, X, \phi_T X) = 0$, da Spur $T = 0$. □

Wir wollen nun die Umkehrung zeigen: Die Abbildungen (16.2) erzeugen bereits die ganze Liealgebra von E_6. Wir zeigen sogar etwas mehr:

Satz 16.2.

$$\mathfrak{e}_6 = \mathfrak{f}_4 + H_3(\mathbb{O})_o. \tag{16.5}$$

wobei $\mathfrak{e}_6$ und $\mathfrak{f}_4$ die Liealgebren von E_6 und F_4 bezeichnen.

Beweis. Es sei $\phi \in \mathfrak{e}_6$ ein beliebiges Element. Wir suchen $T \in (\mathbb{O}^{3\times 3})_o$ mit $\phi = \phi_T$ oder wenigstens $\phi - \phi_T \in \mathfrak{f}_4$. Um einen Kandidaten für T zu finden, beobachten wir $\phi_T(I) = T$ für $T \in H_3(\mathbb{O})_o$ (während $\phi_T(I) = 0$ für $T \in A_3(\mathbb{O})_o$). Versuchen wir es also mit $T = \phi(I)$; dann ist $T \in H_3(\mathbb{O})$ und $\phi_T(I) = T = \phi(I)$. Aber es sollte auch Spur $T = 0$ gelten; woher bekommen wir das? Weil $\phi \in \mathfrak{e}_6$, ist $\det(I, I, \phi(I)) = 0$.

Nach (16.4) gilt andererseits $\det(I, I, \phi(I)) = \det I \cdot \text{Spur } T = \text{Spur } T$, somit ist Spur $T = 0$ und damit $\phi_T \in \mathfrak{e}_6$.

Wir betrachten jetzt die Differenz $\phi_1 = \phi - \phi_T \in \mathfrak{e}_6$. Offensichtlich ist $\phi_1(I) = T - T = 0$. Damit bleibt I fix unter $e^{t\phi_1} \in E_6$, und $e^{t\phi_1}$ erhält nicht nur die Trilinearform $(X, Y, Z) \mapsto \det(X, Y, Z)$ auf $H_3(\mathbb{O})$, sondern auch die Bilinearform $(Y, Z) \mapsto \det(I, Y, Z)$ und die Linearform $Z \mapsto \det(I, I, Z)$. Nach (15.2) gilt für $X = I$ mit $\xi = \text{Spur } I = 3$:

$$\begin{aligned} 3\det(I, I, Z) &= \langle X^2 - \frac{1}{2}(|X|^2 - \xi^2)I - \xi X \,,\, Z\rangle \\ &= \langle I - \frac{1}{2}(3-9)I - 3I, Z\rangle \\ &= \text{Spur } Z \end{aligned}$$

Also erhält $e^{t\phi_1}$ auch die Spur. Schließlich haben wir mit (15.1):

$$\begin{aligned} \det(I, Y, Z) &= \frac{1}{3}\text{Spur}\,(I \circ Y \circ Z) \\ &\quad - \frac{1}{6}\,(\langle I, Y\rangle\,\text{Spur } Z + \langle Y, Z\rangle\,\text{Spur } I + \langle Z, I\rangle\,\text{Spur } Y) \\ &\quad + \frac{1}{6}\,\text{Spur}\,(I)\,\text{Spur}\,(Y)\,\text{Spur}\,(Z) \\ &= \frac{1}{3}\langle Y, Z\rangle \\ &\quad - \frac{1}{6}\,(2\,\text{Spur}\,(Y)\,\text{Spur}\,(Z) + 3\langle Y, Z\rangle) \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\text{Spur}\,(Y)\,\text{Spur}\,(Z) \\ &= (\frac{1}{3} - \frac{1}{2})\langle Y, Z\rangle + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3})\,\text{Spur}\,(Y)\,\text{Spur}\,(Z) \\ &= \frac{1}{6}\,(\text{Spur}\,(Y)\,\text{Spur}\,(Z) - \langle Y, Z\rangle)\,. \end{aligned}$$

Da $e^{t\phi_1}$ die Bilinearform $(Y, Z) \mapsto \det(I, Y, Z)$ sowie die Spur erhält, ist nun auch das Skalarprodukt invariant. Somit erhält $e^{t\phi_1}$ alle Invarianten σ_i und ist deshalb ein Element der F_4 (vgl. Fußnote 46, S. 39). Also ist $\phi_1 \in \mathfrak{f}_4$ und somit $\phi = \phi_T + \phi_1 \in H_3(\mathbb{O}) + \mathfrak{f}_4$, was zu zeigen war. $\square$

17. Die Projektive Gruppe der Oktavenebene

(Wird noch bearbeitet)

Literatur

[1] J.F. Adams: *Lectures on Exceptional Lie Groups*, University of Chicago Press 1996

[2] J. Baez: The Octonions, Bulletin Amer. Math. Soc. 39, S. 145 - 205 (2001), mathhttp://math.ucr.edu/home/baez/octonions

[3] J.-H. Eschenburg: Skript zur Vorlesung *Geometrie*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu/

[4] J.-H. Eschenburg: Skript zur Vorlesung *Quaternionen und Oktaven*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu/

[5] J.-H. Eschenburg: *Symmetric Spaces*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu/

[6] H. Freudenthal: *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*, Notes Utrecht 1951, 1960, reprinted in Geom. Dedicata 19 (1985), 7 - 63

[7] F.R. Harvey: *Spinors and Calibrations*, Academic Press 1990

[8] S. Murakami: *Exceptional simple Lie groups and related topics in recent differential geometry*, in: "Differential Geometry and Topology", Proceedings Tianjin 1986/86, Springer Lecture Notes in Math. 1369 (1989), 183 - 221

[9] H. Salzmann et al.: *Compact Projective Planes*, De Gruyter 1995

[10] T.A. Springer, F.D. Veldkamp: *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, Springer 2000

Index