PERIODIZITÄTSSATZ FÜR O_n

J.-H. ESCHENBURG

Der Bottsche Periodizitätssatz für die orthogonale Gruppe ist der Höhepunkt des Buches von Milnor über Morse-Theorie. Dort kommt alles zusammen aus Topologie, Algebra und Riemannscher Geometrie: Wegeräume, höhere Homotopiegruppen, Clifford-Darstellungen, Indexsatz für Geodäten, Symmetrische Räume, reflexive Untermannigfaltigkeiten. Der Periodizitätssatz für die unitäre Gruppe kann ganz analog bewiesen werden; Milnor geht allerdings einen etwas anderen Weg. Ich möchte im Folgenden eine Skizze des Beweises geben.

1. Wegeräume und Geodäten

Ist ΩX der Wegeraum eines topologischen Raums X, genauer: der Raum aller Wege $\omega : [0,1] \to X$ mit fest gewählten Endpunkten $\omega(0) = p$ und $\omega(1) = q$, so gilt

$$\pi_{j+1}(X) = \pi_j(\Omega X). \tag{1}$$

Zur Bestimmung der höheren Homotopiegruppen der Orthogonalen Gruppe

$$O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n};\ A^t A = I\}$$

muss also der Wegeraum ΩO_n studiert werden. Wir interessieren uns nur für den stabilen Bereich bezüglich n; wir können also n als beliebig groß und gerade (später sogar durch 16 teilbar) voraussetzen. Dann können wir $p = I$ und $q = -I$ wählen (wobei $I = \mathrm{diag}\,(1, \dots, 1)$ die Einheitsmatrix ist). Wir wollen nun den Raum aller Wege von I nach $-I$ in O_n durch einen sehr viel kleineren, endlich dimensionalen Teilraum approximieren, nämlich den Raum Ω_1 der minimalen Geodäten zwischen I und $-I$. Damit die Approximation die Topologie des Wegeraums im Wesentlichen bewahrt, müssen wir zeigen, dass alle nicht-minimalen Geodäten von I nach $-I$ in O_n hohen Index λ haben, nämlich (24.2)

$$\lambda \geq n - 2 \tag{2}$$

Dies wird mit der Indexformel bewiesen werden. Die kompakte Liegruppe O_n wie auch alle weiteren Räume, die auftreten werden, sind

Date: 8. Februar 2012.

symmetrische Räume, deren Krümmungstensor parallel ist. Deshalb ist auch der "Jacobi-Operator" $R_\gamma(t) = R(\gamma'(t), .)\gamma'(t)$ parallel längs einer Geodäten γ, also konstant, wenn wir die Tangentialräume längs γ durch Parallelverschiebung identifizieren. In einer Eigenbasis von R_γ lässt sich die Jacobigleichung $J'' + R_\gamma J = 0$ sofort integrieren, die Jacobifelder lassen sich direkt angeben und die Anzahl der konjugierten Punkte bestimmen.

Zwischen minimalen und nicht-minimalen Geodäten klafft also eine dicke Lücke, was den Index angeht. Die Morse-Theorie sagt uns daher, dass der volle Wegeraum Ω aus Ω_1 durch Anheften von Zellen von hoher Dimension entsteht; die Homotopiegruppen $\pi_j(\Omega)$ mit $j << n$ merken davon nichts, d.h. $\pi_j(\Omega) = \pi_j(\Omega_1)$. Allerdings haben wir dabei eigentlich schon die Bottsche Erweiterung der Morsetheorie benutzt, wo nicht nur kritische Punkte, sondern ganze kritische Mannigfaltigkeiten zugelassen sind. Bis jetzt hatten wir im Seminar nur von $\Omega(p, q)$ für nicht-konjugierte Punkte p und q gesprochen. Die Punkte $p = I$ und $q = -I$ sind jedoch konjugiert, wie Nord- und Südpol der Sphäre, und Ω_1, die Menge ihrer minimalen Verbindungen, ist eine disjunkte Vereinigung hochdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Mit anderen Worten: Das Energiefunktional E ist keine Morse-Funktion auf $\Omega(I, -I)$ (sondern nur eine Morse-Bott-Funktion). Dieses Problem beheben wir, indem wir E wieder durch eine Morsefunktion approximieren (22.1); dabei bleibt die Index-Lücke erhalten.

2. Ω_1

Nun müssen wir uns mit Ω_1 befassen. Minimale Geodäten von I nach $-I$ werden eindeutig durch ihren Mittelpunkt $J = \gamma(\frac{1}{2})$ festgelegt, denn wegen der Minimalität kann keine zweite ebenso lange Geodäte von I nach $-I$ durch J gehen. Weil von I ausgehende Geodäten in der kompakten Liegruppe O_n mit einer bi-invarianten Metrik genau die Ein-Parameter-Untergruppen sind (21.2),[1] gilt $J^2 = \gamma(\frac{1}{2})^2 = \gamma(1) = -I$. Die Mittelpunkte der minimalen Geodäten von I nach $-I$ sind also komplexe Strukturen in O_n, und umgekehrt ist jede komplexe Struktur ein solcher Mittelpunkt, denn alle komplexen Strukturen sind in O_n zueinander konjugiert.[2] Also ist Ω_1 die Menge der komplexen Strukturen

[1] Je zwei Bahnen $e^{tX}g$ und $e^{tX}gh$ der Einparametergruppe e^{tX} unter Linkstranslation sind isometrisch, wenn die Rechtstranslation R_h eine Isometrie ist. Wären die Bahnen keine Geodäten, könnte man aber in Richtung des mittleren Krümmungsvektorfeldes kürzere Bahnen finden.

[2] Der Mittelpunkt $J = \gamma(\frac{1}{2})$ der mimimalen Geodäten ist zugleich ihr infinitesimaler Erzeuger: $\gamma(t) = \exp(t\pi J)$ ist eine Geodäte mit Mittelpunkt $\gamma(\frac{1}{2}) = \exp(\frac{\pi}{2}J) = J$, denn die einzigen Eigenwerte von J sind $\pm i$, und $e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i$. Der

in O_n,

$$\Omega_1 := \{J \in O_n;\ J^2 = -I\} \subset SO_n \tag{3}$$

Diese Menge ist ein Orbit unter Konjugation, wobei die Stabilatorgruppe der kanonischen komplexen Struktur, der Skalarmultiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{n/2}$, die unitäre Gruppe $U_{n/2}$ ist. Also ist

$$\Omega_1 = O_n/U_{n/2}. \tag{4}$$

Dies ist ein symmetrischer Raum, der wie O_n in zwei kongruente Zusammenhangkomponenten (Konjugationsklassen von SO_n) zerfällt. Andererseits ist Ω_1, als Menge von komplexen Strukturen aufgefasst, auch eine interessante Teilmenge von O_n. Für $J \in O_n$ gilt ja $J \in \Omega_1 \iff J^2 = -I \iff J = -J^{-1} \iff J = \tau(J)$ für die Anti-Involution und Isometrie $\tau : O_n \to O_n$, $\tau(A) = -A^{-1}$. Also ist Ω_1 die Fixpunktmenge der Isometrie τ. Jede Fixpunkt-Kompontente einer Isometrie τ ist totalgeodätisch: Läge die Verbindungsgeodäte γ zwischen zwei nahe benachbarten Fixpunkten p, q außerhalb der Fixpunktmenge, dann gäbe es eine weitere verbindende Geodäte $\tau \circ \gamma$, was nicht möglich ist. Fixpunktkomponenten von Involutionen (Isometrien der Ordnung 2) heißen *reflektiv*. Wir haben also für alle $j \geq 0$ gezeigt:

$$\pi_{j+1}(O_n) = \pi_j(\Omega_1). \tag{5}$$

3. Ω_2

Wie geht es weiter? Es gilt ja $\pi_j(\Omega_1) = \pi_{j-1}(\Omega\Omega_1)$, wir müssen also den Raum der Wege in Ω_1 studieren, etwa der Wege von einem festen $J_1 \in \Omega_1$ zu $-J_1$. Zweifellos ist ja auch $-J_1$ eine komplexe Struktur in O_n, aber liegt sie in derselben Zusammenhangskomponente wie J_1? Ja! Wir finden sogar minimale Geodäten in O_n von J nach $-J$, die ganz in Ω_1 liegen! Eine minimale Geodäte von J_1 nach $-J_1$ in O_n erhalten wir als $J_1\gamma(t)$, wobei γ eine minimale Geodäte von I nach $-I$ ist. Für welche γ ist $J_1\gamma(t) \in \Omega_1$ für alle $t \in [0, 1]$? Dazu muss $(J_1\gamma(t))^2 = -I$ gelten, und insbesondere für den Mittelpunkt $J = \gamma(\frac{1}{2})$ gilt $(J_1 J)^2 = -I$, also

$$J_1 J = -J J_1,$$

die beiden komplexen Strukturen müssen also antikommutieren. Da J gleichzeitig der infinitesimale Erzeuger von γ ist (vgl. Fußnote 1), ist diese Bedingung auch schon hinreichend:

Erzeuger lebt aber in der Liealgebra $\mathfrak{o}_n$ von O_n, der Mittelpunkt dagegen in O_n selber. In der Tat ist die Menge der komplexen Strukturen gleich dem Durchschnitt $O_n \cap \mathfrak{o}_n$, wobei O_n und $\mathfrak{o}_n$ beide als Teilmengen von $\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet werden, denn die Gleichungen $J^t = J^{-1}$ für O_n und $J^t = -J$ für $\mathfrak{o}_n$ ergeben zusammen die Gleichung $J^{-1} = -J$ der komplexen Strukturen.

Lemma 3.1. *Für jedes $J_1 \in \Omega_1$ gilt: Eine minimale O_n-Geodäte $J_1\gamma$ von J_1 nach $-J_1$ liegt genau dann in Ω_1, wenn der Mittelpunkt (oder Erzeuger) $J = \gamma(\frac{1}{2})$ von γ mit J_1 antikommutiert.*

Sobald also zwei antikommutierende komplexe Strukturen in O_n existieren (was ab $n = 4$ der Fall ist), ist jedes $J_1 \in \Omega_1$ mit seinem Antipoden $-J_1$ durch eine in O_n minimale Geodäte verbindbar, die ganz in Ω_1 liegt.[3]

Wir wollen wieder den Wegeraum von Ω_1, genauer die Wege von J_1 nach $-J_1$, durch eine endlich-dimensionale Teilmenge ersetzen: die minimalen Geodäten von J_1 nach $-J_1$ in Ω_1. Ähnlich wie vorher in (2) müssen wir dazu zeigen, dass die nicht-minimalen Geodäten in Ω_1 hohen Index haben. Dazu werden wir am Ende kommen, wenn wir die ganze induktive Konstruktion durchgegangen sind. Wie vorher beschreiben wir die minimalen Geodäten $J_1\gamma$ durch ihre Mittelpunkte J_1J, wobei $J = \gamma(\frac{1}{2})$ in der Menge Ω_2 der mit J_1 antikommutierenden komplexen Strukturen in Ω_1 liegt:

$$\Omega_2 =: \{J \in \Omega_1;\ JJ_1 = -J_1J\}. \tag{6}$$

Wieder ist Ω_2 die Fixpunktmenge einer Involution τ_2, denn die definierende Gleichung ist $J = -J_1JJ_1^{-1} =: \tau_2(J)$ mit $\tau_2 : O_n \to O_n$, $\tau_2(A) = -J_1AJ_1^{-1}$; offensichtlich kann τ_2 auch als Involution auf Ω_1 aufgefasst werden, weil $\tau_2(\Omega_1) = \Omega_1$. Auf Ω_1 wirkt die Gruppe O_n. Welche $g \in O_n$ erhalten $\Omega_2 \subset \Omega_1$? Genau diejenigen, die mit τ_2 vertauschen, denn $\tau gJ = gJ = g\tau J$ für alle $J \in \Omega_2 \iff g\tau = \tau g$. Nun wirkt O_n durch Konjugation $i(g)x = gxg^{-1}$, und zudem ist $\tau = -i(J_1)$, also gilt $g\Omega_2 = \Omega_2 \iff i(gJ_1) = i(J_1g) \iff gJ_1 = \pm J_1g \iff g$ ist komplex linear oder komplex antilinear bezüglich J_1. Die Untergruppe von O_n, die Ω_2 erhält, hat also zwei Zusammenhangskomponenten, die unitären Matrizen sowie die unitären Matrizen verkettet mit der komplexen Konjugation $x \mapsto \bar{x}$ auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{n/2}$. Entsprechend hat auch Ω_2 zwei Zusammenhangskomponenten.

Jedes Element von Ω_2, also jede mit J_1 antikommutierende komplexe Struktur J definiert eine *quaternionale* Vektorraumstruktur auf $\mathbb{R}^n$, eine Erweiterung der durch J_1 gegebenen *komplexen* Struktur. Dazu muss n durch 4 teilbar sein. Wir dürfen annehmen, dass J_1 die kanonische

[3] P. Quast und M. Tanaka haben kürzlich etwas Stärkeres bewiesen: Jede reflektive Untermannigfaltigkeit M in einem symmetrischen R-Raum (z.B. in O_n) ist *konvex*: Je zwei Punkte von M sind durch eine im umgebenden Raum minimale Geodäte verbunden, die ganz in M liegt. Der Riemannsche Abstand in M ist also die Einschränkung des Riemannschen Abstands im umgebenden Raum. http://opus.bibliothek.uni-augsburg.de/volltexte/2011/1844/

komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{n/2}$ ist, und jedes mit J_1 antikommutierende J definiert eine Identifizierung von $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^{n/2}$ mit $\mathbb{H}^{n/4}$. Auf jeder Zusammenhangskomponente Ω_2^o von Ω_2 wirkt die Gruppe $U_{n/2}$ transitiv durch Konjugation, und die Stabilisatorgruppe der kanonischen quaternionalen Struktur ist die Gruppe $Sp_{n/4}$ aller quaternional-linearen orthogonalen Abbildungen auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{H}^{n/4}$. Also ist Ω_2^o der folgende symmetrische Raum:

(7) $$\Omega_2^o = U_{n/2}/Sp_{n/4},$$

und Ω_2 besteht aus zwei disjunkten Kopien von Ω_2^o. Wir erhalten für alle $j << n$:

(8) $$\pi_j(\Omega_1) = \pi_{j-1}(\Omega_2).$$

4. Ω_k

Wenn es k antikommutierende komplexe Strukturen in O_n gibt, können wir zu einem festen Satz $J_1, \dots, J_{k-1}$ von antikommutierenden komplexen Strukturen die Menge der damit antikommutierenden komplexen Strukturen definieren:

(9) $$\Omega_k := \{J \in \Omega_1;\ JJ_i = -J_iJ \text{ für } i = 1, \dots, k-1\}$$

Dies ist eine reflektive Teilmenge von Ω_{k-1}; die Reflektion ist $\tau_k J = -J_{k-1}J(J_{k-1})^{-1}$, und die darauf operierende Gruppe besteht aus allen Elementen von O_n, die mit allen $J_1, \dots, J_{k-1}$ kommutieren oder antikommutieren. Diese Gruppe operiert aber nicht in allen Fällen transitiv, wie wir weiter unten sehen werden; in einigen Fällen besteht Ω_k aus Zusammenhangskomponenten unterschiedlicher Dimension. In jedem der Fälle aber gilt (24.5):

Lemma 4.1. *Für jedes $k \geq 0$ und $J \in \Omega_k$ gilt: Jede nicht-minimale Geodäte von J nach $-J$ in Ω_k hat Index $\geq C \cdot n$ für eine Konstante C.*

Hierbei haben wir $\Omega_0 = O_n$ gesetzt. Der Beweis beruht darauf, dass wir $\mathbb{R}^n$ in irreduzible Moduln bezüglich $J_1, \dots, J_k$ (*k-Clifford-Moduln*) zerlegen. Für gegebenes k haben alle irreduziblem Clifford-Moduln die gleiche Dimension q_k, die bekannt ist,[4] und es gibt genau eine oder zwei (falls $k \equiv 3 \mod 4$) Äquivalenzklassen irreduzibler Cliffordmoduln. Mit einem zusätzlichen Tangentialvektor $A \in T_J\Omega_k$ erhalten wir sogar $(k+1)$-Cliffordmoduln. Jeder Isomorphismus zwischen zwei gleichen Moduln definiert ein Element $B \in T_J\Omega_k$, einen Eigenvektor des Jacobioperators R_A. Ist A Tangentenvektor einer einer nicht-minimalen

[4] $q_0 = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = q_3 = 4$, $q_4 = \cdots = q_7 = 8$, $q_8 = 16$, $q_{k+8} = 16q_k$

Geodäten von J nach $-J$ in Ω_k, erzeugen manche dieser B konjugierte Punkte, insgesamt mindestens $n/(2q_{k+1} - c)$ für eine Konstante c. In Abschnitt 7 führen wir diese Argumente aus.

Als Korollar erhalten wir für $k << n$:

$$\pi_{k+1}(O_n) = \pi_k\Omega_1 = \cdots = \pi_1\Omega_k. \tag{10}$$

5. Identifizierung der Ω_k

k=3:
Ω_3 kann als die Menge aller quaternionalen Unterräume von $V = \mathbb{R}^n = \mathbb{H}^{n/4}$ angesehen werden, die *quaternionale Grassmannsche*. Um dies zu sehen, betrachten wir zu jedem $J_3 \in \Omega_3$ die Matrix $J_{123} := J_1J_2J_3$; umgekehrt ist $J_3 = J_2J_1J_{123}$ aus J_{123} wieder zurückzugewinnen. Die Matrix J_{123} erfüllt $(J_{123})^2 = I$ und zerlegt damit V orthogonal in ihre ± 1-Eigenräume: $V = W \oplus W'$, und da J_{123} außerdem mit J_1 und J_2 kommutiert, sind diese Eigenräume invariant unter J_1 und J_2, also quaternionale Unterräume.

Ω_3 hat viele Zusammenhangskomponenten, nämlich die Mengen aller quaternionalen Unterräume von V mit einer festen Dimension p, die *quaternionalen Grassmann-Mannigfaltigkeiten* $G_p(\mathbb{H}^{n/4})$ wobei p die Werte $1, \ldots, n/8$ annehmen kann. Auf jeder Zusammenhangskomponente operiert die Gruppe $Sp_{n/4}$ transitiv (jeder p-dimensionale Unterraum lässt sich in jeden anderen überführen). Wir könnten jede der Zusammenhangskomponenten wählen, aber nur für die Komponente Ω_3^o der halbdimensionalen Unterräume, $p = n/8$, lässt sich der Prozess weiter fortsetzen, d.h. $\Omega_4 \subset \Omega_3^o$, wie wir gleich sehen werden. Deshalb nehmen wir an, dass n durch 8 teilbar ist und betrachten nur diese Komponente, für die W und W' die gleiche Dimension $p = n/8 =: m$ haben. Die Stabilisatorgruppe ist hier $Sp_m \times Sp_m$, also

$$\Omega_3^o = G_m(\mathbb{H}^{2m}) = Sp_{2m}/(Sp_m \times Sp_m). \tag{11}$$

k=4:
Ω_4 kann mit der Gruppe Sp_m mit $m = n/8$ identifiziert werden. Statt $J_4 \in \Omega_4$ betrachten wir lieber die Matrix $J_{34} = J_3J_4$, die mit J_{123} antikommutiert $(34123 = 12343 = -12334)$ und deshalb die ± 1-Eigenräume W und W' von J_{123} vertauscht (diese mssen also gleiche Dimension haben!). Da J_{34} außerdem mit J_1 und J_2 vertauscht, wird W durch J_{34} quaternional linear (und orthogonal) auf W' abgebildet, und die Einschränkung von J_{34} auf W bestimmt bereits die ganze Abbildung J_{34}, da $(J_{34})^2 = -I$. Indem wir W und W' mit $\mathbb{H}^m$ identifizieren, wird J_{34} mit einem (beliebigen) Element $A \in Sp_m$ identifiziert, genauer:

$J_{34} = \left(\begin{smallmatrix} & -A^{-1} \\ A & \end{smallmatrix}\right)$. Wir erhalten also:

$$\Omega_4 \cong Sp_m \tag{12}$$

k=5:
Ω_5 kann als die Menge der m-dimensionalen komplexen Unterräume X von W mit $X \perp J_2X$ (maximale *total-komplexe* Unterräume des quaternionalen Vektorraums $W = \mathbb{H}^m$, wie $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{H}^m$) angesehen werden. Statt $J_5 \in \Omega_5$ betrachen wir dazu lieber $J_{145} = J_1J_4J_5$. Diese Matrix ist symmetrisch und kommutiert mit J_{123}, denn $145123 = 112345 = 123145$. Deshalb erhält J_{145} den Eigenraum W von J_{123} und hat dort selbst die Eigenwerte ± 1; die Eigenraumzerlegung sei $W = X \oplus X'$. Da J_{145} mit J_1 kommutiert ($1145 = 1451$) und mit J_2 antikommutiert, wird diese Aufspaltung durch J_1 erhalten und durch J_2 vertauscht. Also ist X ein komplexer Unterraum und $X' = J_2X$; insbesondere halbiert X wieder die Dimension. Da jede unitäre Basis $b_1, \dots, b_m$ eines maximalen total-komplexen Unterraums X eine symplektische Basis des $\mathbb{H}$-Vektorraums $W \cong \mathbb{H}^m$ definiert, operiert Sp_m transitiv auf dieser Menge, und der Stabilisator des Standard-Unterraums $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{H}^m$ ist $U_m \subset Sp_m$. Wir haben also

$$\Omega_5 = Sp_m/U_m. \tag{13}$$

k=6:
Ω_6 kann als die Menge aller maximalen *total-reellen Unterräume* Y von X mit $J_1Y \perp Y$ und $X = Y \oplus J_1Y$ angesehen werden. Statt $J_6 \in \Omega_6$ betrachten wir dazu die symmetrische Matrix $J_{246} = J_2J_4J_6$; diese kommutiert mit J_{123} (denn $12\underline{3}246 = -12\underline{2}463 = -\underline{1}24623 = 246123$) und mit J_{145} (denn $14\underline{5}246 = -14\underline{2}465 = -\underline{1}24645 = 246145$).

Damit lässt J_{246} den Unterraum X invariant und spaltet ihn in seine ± 1-Anteile auf: $X = Y \oplus Y'$, und J_1 vertauscht diese beiden Räume, da es X invariant lässt und mit J_{246} antikommutiert. Da jede Orthonormalbasis von Y eine unitäre Basis von X definiert, wirkt die Gruppe U_m wirkt transitiv auf der Menge der totalreellen Unterräume mit Stabilisator O_m.

$$\Omega_6 = U_m/O_m. \tag{14}$$

k=7:
Ω_7 kann als die Menge aller reellen Unterräume Z von $Y \cong \mathbb{R}^m$ angesehen werden. Statt $J_7 \in \Omega_7$ betrachten wir dazu die Involution

$J_{167} = J_1J_6J_7$ (mit $(J_{167})^2 = I$), die mit J_{123}, J_{145} und J_{246} vertauscht[5] und deshalb den (reellen) Raum Y in seine ± 1-Anteile zerlegt: $Y = Z \oplus Z'$ mit $Z' = Z^\perp$.

Ω_7 hat viele Zusammenhangskomponenten, eine für jede mögliche Dimension $p \in \{1, \dots, m/2\}$ von Z. Wieder ist die mittlere Dimension $p = m/2$ die einzige, für die sich der Prozess fortsetzen lässt. Wir nehmen daher an, dass m gerade (und $n = 8m$ durch 16 teilbar) ist und wählen die Zusammenhangskomponente Ω_7^o zu $p = m/2$:

$$\Omega_7^o = G_{m/2}(\mathbb{R}^m) = O_m/(O_{m/2} \times O_{m/2}). \tag{15}$$

k=8:
Ω_8 kann mit der Orthogonalen Gruppe $O_{m/2}$ identifiziert werden. Dazu ersetzen wir $J_8 \in \Omega_8$ durch die komplexe Struktur $J_{78} = J_7J_8$, die mit $J_{123}, J_{145}, J_{246}$ kommutiert (keine gemeinsamen Indizes) und mit J_{167} antikommutiert. Deshalb lässt J_{78} den Raum Y invariant und vertauscht die Eigenräume Z und Z' von J_{176} in Y, definiert also eine Isometrie von Z nach Z' und zurück (insbesondere müssen Z und Z' die gleiche Dimension $p = m/2$ haben!). Indem wir Z und Z' mit $\mathbb{R}^{m/2}$ identifizieren, wird J_{78} zu einem Element von $O_{m/2}$, genauer $J_{78} = \begin{pmatrix} & -A^t \\ A & \end{pmatrix}$ für beliebiges $A \in O_{m/2}$.

$$\Omega_8 \cong O_{n/16}\,. \tag{16}$$

Bemerkung: Die so definierten Ketten Symmetrischer Räume,

$$\begin{array}{ccccccccc} O_n & \supset & SO_n/U_{n/2} & \supset & U_{n/2}/Sp_{n/4} & \supset & Sp_{n/4}/(Sp_{n/8})^2 & \supset & Sp_{n/8} \\ Sp_m & \supset & Sp_m/U_m & \supset & U_m/O_m & \supset & O_m/(O_{m/2})^2 & \supset & O_{m/2} \end{array}$$

folgen einem allgemeinen Schema, das Peter Quast in seiner Habilitationsschrift “Complex Structures and Chains of Symmetric Spaces” untersucht und klassifiziert hat. Auch andere Gruppen lassen solche topologisch bedeutsamen Ketten zu, z.B. $U_n \supset U_n/(U_{n/2})^2 \supset U_{n/2}$ (Periodizitätssatz für U_n) oder etwas spektakulärer:

$$E_7 \;\supset\; E_7/(E_6U_1) \;\supset\; (E_6U_1)/F_4 \;\supset\; F_4/Spin_9\,.$$

[5]Die obigen Rechnungen zeigen, dass J_{ijk} und J_{pqr} vertauschen, wenn $\{i, j, k\}$ und $\{p, q, r\}$ genau ein Element gemeinsam haben.

6. Anwendung auf den Periodizizätssatz

$$\begin{array}{rcccccc}
\pi_2(O_n) & = & \pi_1(\Omega_1) & = & \pi_1(SO_n/U_{n/2}) & = & 0 \\
\pi_3(O_n) & = & \pi_1(\Omega_2) & = & \pi_1(U_{n/2}/Sp_{n/4}) & = & \mathbb{Z} \\
\pi_4(O_n) & = & \pi_1(\Omega_3) & = & \pi_1(Sp_{n/4}/(Sp_{n/8})^2) & = & 0 \\
\pi_5(O_n) & = & \pi_1(\Omega_4) & = & \pi_1(Sp_{n/8}) & = & 0 \\
\pi_6(O_n) & = & \pi_1(\Omega_6) & = & \pi_1(Sp_{n/8}/U_{n/8}) & = & 0 \\
\pi_7(O_n) & = & \pi_1(\Omega_7) & = & \pi_1(U_{n/8}/O_{n/8}) & = & \mathbb{Z} \\
\pi_8(O_n) & = & \pi_1(\Omega_8) & = & \pi_1(O_{n/16}) & = & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\
\pi_{8+k}(O_n) & = & \pi_k(\Omega_8) & = & \pi_k(O_{n/16}) & = & \pi_k(O_n)
\end{array}$$

7. Der Index von nicht-minimalen Geodäten in O_n

Die Konstruktion von Milnor beruht darauf, dass wir auf jeder Stufe den Wegeraum Ω durch die Menge der minimalen Geodäten $\tilde{\Omega}$ ersetzen dürfen. Dazu verwenden wir die Morsetheorie für die Energiefunktion E auf Ω. Die kritischen Punkte von E sind die Geodäten. Wenn alle nicht-minimalen Geodäten hohen Index haben, dann entsteht Ω aus $\tilde{\Omega}$ durch Anheften von Zellen hoher Dimension, die sich auf die unteren Homotopiegruppen nicht auswirken. Nach dem Indexsatz von Morse ist der Index einer auf $[0,1]$ parametrisierten Geodäten γ die Anzahl der zu $\gamma(0)$ konjugierten Punkte (mit Vielfachheit gezählt) im offenen Parameterintervall $(0,1)$. Dazu müssen wir die Jacobigleichung $J'' + R_\gamma J = 0$ lösen, wobei $R_\gamma J = R(\gamma', J)\gamma'$, denn die konjugierten Punkte sind die Nullstellen von Jacobifeldern J mit $J(0) = 0$. Im Fall von symmetrischen Räumen ist dies leicht möglich, denn R_γ ist parallel und also konstant in einer parallelen Basis. Eine Liegruppe G mit biinvarianter Metrik ist symmetrisch, und der Krümmungstensor ist besonders einfach: Für $A, B, C \in T_eG = \mathfrak{g}$ gilt:

$$4R(A,B)C = [[A,B],C]. \tag{17}$$

Speziell für R_γ mit $\gamma(t) = e^{tA}$ gilt also

$$R_\gamma B =: R_A B = [[A,B],A] = -\mathrm{ad}(A)^2 B. \tag{18}$$

Wir werden also die Eigenwerte von $-\mathrm{ad}(A)^2$ ausrechnen müssen.

Für unsere Gruppe $G = O_n$ mit $n = 2m$ ist $\mathfrak{g} = \mathsf{A}_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ A^t = -A\}$ die Menge der schiefsymmetrischen Matrizen. Jedes schiefsymmetrische A ist über $\mathbb{C}$ unitär diagonalisierbar und über $\mathbb{R}$ orthogonal konjugiert zu Block-Diagonalmatrizen der Gestalt

$$A = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} & -a_1 \\ a_1 & \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & -a_m \\ a_m & \end{pmatrix}\right) \tag{19}$$

mit $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Wir setzen E_{ij} oder noch kürzer ij die Matrix $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ in der x_ix_j-Ebene von $\mathbb{R}^n$, also $E_{ij}e_i = e_j$, $E_{ij}e_j = -e_i$. Dann gilt $ji = -ij$ und

$$[ij, jk] = ki. \tag{20}$$

Speziell für

$$i' := 2i - 1, \quad i'' := 2i$$

und beliebige k erhalten wir daher

$$[i'i'', i''k] = ki', \quad [i'i'', ki'] = ki''. \tag{21}$$

Die Matrizen $i'i''$ erzeugen gerade die Matrizen A in (19). Daraus ersehen wir:

Lemma 7.1.

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(i'i'')\mathrm{ad}(k'k'') \ &: \ k'i' \mapsto k''i'', \\ &: \ k''i'' \mapsto k'i', \\ &: \ k''i' \mapsto -k'i'', \\ &: \ k'i'' \mapsto -k''i', \end{aligned}$$

während $\mathrm{ad}(i'i'')^2$ *und* $\mathrm{ad}(k'k'')^2$ *auf dem von* $k'i', k'i'', k''i', k''i''$ *aufgespannten Raum als* $-I$ *wirken. Folglich hat für beliebige* $a, b \in \mathbb{R}$

$$-\mathrm{ad}(a(i'i'') + b(k'k''))^2$$

Eigenwert $(a+b)^2$ *zu den Eigenvektoren* $i'k' + i''k''$ *und* $i'k'' - i''k'$,
Eigenwert $(a-b)^2$ *zu den Eigenvektoren* $i'k' - i''k''$ *und* $i'k'' + i''k'$.

Ist nun $\gamma(t) = e^{tA}$ eine Geodäte (Einparametergruppe) mit $A = \sum_{i=1}^{m} a_i(i'i'')$ und $\gamma(\pi) = -I$,[6] dann ist a_i ganzzahlig und ungerade. Nach dem vorstehenden Lemma hat $R_A = -\frac{1}{4}\mathrm{ad}(A)^2$ die Eigenwerte μ^2 mit $\mu = \frac{1}{2}|a_i \pm a_j|$, und jeder dieser Eigenwerte hat Multiplizität 2. Die Lösungen der Jacobigleichung $J'' + R_A J = 0$ mit $J(0) = 0$ sind also $J(t) = \sin(\mu t) E_\mu$, wobei E_μ einen zugehörigen Eigenvektor von $\mathrm{ad}(A)^2$ bezeichnet.

Ist γ eine minimale Geodäte von I nach $-I$, dann sind alle $a_i = \pm 1$, und es treten nur Eigenwerte 0 und 1 auf. Die erste Nullstelle von $\sin t$ liegt bei π; im Intervall $(0, \pi)$ treten also keine konjugierten Punkte auf, was bei minimalen Geodäten ja auch nicht der Fall sein darf.

Wenn γ eine nicht-minimale Geodäte ist, dann ist mindestens eins der a_i, sagen wir a_1 gleich ± 3. Wenn alle anderen $a_i = \pm 1$ sind, dann ist $\frac{1}{2}|a_1 \pm a_j| = 2$ für $j = 2, \ldots, m$. Da jeder Eigenwert Multiplizität zwei hat und $\sin(2t)$ genau eine Nullstelle in $(0, \pi)$ hat, bei $\pi/2$, erhalten wir in diesem Fall $2(m-1) = n - 2$ konjugierte Punkte, also Index $n - 2$. Wenn weitere der $|a_i| \geq 3$ sind, sagen wir $|a_2| = 3$, dann ist

[6] Wir ersetzen das Parameter-Intervall $[0, 1]$ durch $[0, \pi]$.

$\frac{1}{2}|a_1 \pm a_2| = 3$, und es gibt noch mehr konjugierte Punkte, denn $\sin(3t)$ hat schon zwei Nullstellen in $(0, \pi)$. Wir erhalten also

Satz 7.1. *Der Index einer nicht-minimalen Geodäten von I nach $-I$ in O_n ist mindestens $n-2$.*

8. Der Index von nicht-minimalen Geodäten in Ω_k

Mit Ω_1 hatten wir die komplexen Strukturen in O_n bezeichnet, also die $J \in O_n$ mit $J^2 = -I$. Für eine Familie von antikommutierenden komplexen Strukturen $J_1, \dots, J_{k-1} \in \Omega_1$ definieren wir

$$\Omega_k = \{J \in \Omega_1;\ J \text{ antikommutiert mit } J_1, \dots, J_{k-1}\}. \tag{22}$$

Offensichtlich gilt

$$O_n = \Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_{k-1} \supset \Omega_k \supset \dots$$

wobei wir den festen Satz von antikommutierenden komplexen Strukturen jedesmal erweitern. Wir haben früher gezeigt, dass wir Ω_k mit dem Raum der minimalen Geodäten von J_{k-1} nach $-J_{k-1}$ in Ω_{k-1} identifizieren können. Wir wollen nun zeigen, dass Ω_k für großes n den Wegeraum $\Omega(\Omega_{k-1})$ ersetzt, also gleiche Homotopiegruppen hat. Für $\Omega_0 = O_n$ haben wir das im vorigen Abschnitt gemacht.

Wir wählen uns ein festes Element $J_k \in \Omega_k$. Der Tangentialraum $T_{J_k}\Omega_k$ besteht aus den Matrizen $J_k A$, wobei A antisymmetrisch ist und mit J_k antikommutiert, mit den $J_1, \dots, J_{k-1}$ aber kommutiert (denn $J_k A$ soll antikommutieren). Die Matrizen $J_1, \dots, J_k$ und A erzeugen eine Unteralgebra $\mathbb{A}$ der Matrizenalgebra $\mathbb{R}^{n \times n}$, die auf $\mathbb{R}^n$ operiert, und wir zerlegen $\mathbb{R}^n$ in irreduzible Teilmoduln bezüglich A:

$$\mathbb{R}^n = M_1 \oplus \dots \oplus M_s. \tag{23}$$

Auf jedem M_j kann A nur ein Eigenwertpaar $\pm a_i \sqrt{-1}$ haben, sonst würde M_j weiter zerfallen, und weil $e^{\pi} A = -I$, ist a_j ganzzahlig und ungerade. Daher definiert A eine weitere komplexe Struktur auf M_j,

$$J_{k+1}|_{M_j} = \frac{1}{a_j} J_k A|_{M_j} \tag{24}$$

die mit $J_1, \dots, J_k$ antikommutiert. Also ist M_j eine irreduzible Darstellung der Clifford-Algebra Cl_{k+1}. Alle irreduziblen Darstellungen von Cl_{k+1} haben die gleiche Dimension q_{k+1} (vgl. Fußnote 4), und wenn $k \not\equiv 3 \mod 4$, sind alle irreduziblen Cliffordmoduln äquivalent; wenn $k \equiv 3 \mod 4$, gibt es zwei Äquivalenzklassen.

Wir ersetzen nun die Matrix $\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$ in der ij-Ebene im vorigen Abschnitt durch die Matrix $\begin{pmatrix} & -\phi^t \\ \phi & \end{pmatrix}$, wobei $\phi : M_i \to \bar{M}_j$ ein isometrischer

Modul-Isomorphismus ist; dabei ist $\bar{M}_j = M_j$ mit geänderter Modulstruktur: wir ersetzen die Operation von J_{k+1} durch die von $-J_{k+1}$. Solche Matrizen sind Tangentenvektoren von Ω_k. Nun rechnen wir wie zuvor die Eigenwerte von $-\mathrm{ad}(A)^2$ aus, wobei wir statt der Koordinatenrichtungen $\mathbb{R}e_i$ die M_i benutzen. Wir erhalten das gleiche Ergebnis, wobei n durch n/q_{k+1} oder $n/(2q_{k+1})$ zu ersetzen ist.