

Linearität

J.-H. Eschenburg, Universität Augsburg, WS 13/14

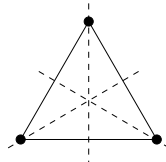
VORBEMERKUNG

In den “Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss“ der Kultusminister (2003) werden die folgenden mathematischen Leitideen genannt: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall. Die Vorlesung nimmt diese Vorgabe auf. Sie ist Teil eines viersemestrigen Zyklus, der die fachlichen Grundlagen für das nichtvertiefte Lehramtsstudium der Mathematik bereitstellen soll. Er besteht aus folgenden Teilen: Linearität (§55(1)2 alte LPO), Mehrere Variable (§55(1)2 LPO), Zahl und Funktion (§55(1)1 LPO), Flächen- und Rauminhalt, Integration (§55(1)1 LPO). Mit normalen Schulkenntnissen sollte man den Zyklus mit jeder dieser Vorlesungen beginnen können.

Von Anfang an hatte es die Mathematik mit zwei unterschiedlichen Klassen von Gegenständen zu tun: *Zahlen* und *Formen*. Im nun beginnenden Kursteil wird die *räumliche Form* Ausgangspunkt unserer Überlegungen sein. Während die Zahlen hübsch geordnet und gereiht daherkommen, bilden die räumlichen Formen zunächst eine chaotische, völlig unübersichtliche Gesamtheit. Die Mathematik musste daher Ordnungsprinzipien entwickeln. Die drei wichtigsten solchen Prinzipien sind:

- (1) *Logische Möglichkeit (Existenz)*: Was gibt es, was nicht?
- (2) *Isomorphie*: Was ist gleich, was unterschiedlich?
- (3) *Symmetrie*: Auf wieviele Arten gleicht etwas sich selbst?

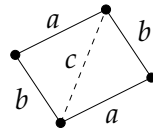
Symmetrie ist die Wiederkehr des Gleichen an anderer Stelle. Eine Form ist symmetrisch, wenn sie unter gewissen Transformationen (z.B. Spiegelungen, Drehungen, Verschiebungen) ungeändert („invariant“) bleibt.



Nicht mehr nur die Form ist dann Gegenstand mathematischer Betrachtung, sondern zugleich auch sämtliche Transformationen, unter denen sie invariant ist, die *Symmetrietransformationen*. Diese bilden eine eigene kleine „Rechenwelt“, genannt *Gruppe*: Symmetrietransformationen kann man zu neuen Symmetrietransformationen zusammenfügen oder

zerlegen. Diese „Rechenwelt“ lässt sich nun von der ursprünglich gegebenen Form ganz loslösen („abstrahieren“), indem man nur noch ihre Rechengesetze studiert. So lässt sich beispielsweise feststellen, dass ein Würfel und eine Reihe von 4 gleichartigen Gegenständen „die gleichen“ (d.h. isomorphe) Symmetriegruppen haben.

In dieser Vorlesung haben wir es nur mit den einfachsten räumlichen Formen zu tun, den *linearen*¹: Punkte, Geraden, Ebenen und besonders *Strecken*. Durch Verschieben und Aneinanderlegen formen wir aus zwei Strecken a und b eine neue Strecke c :



Deshalb bilden die Strecken ähnlich wie die Symmetrietransformationen eine „Rechenwelt“ mit eigenen Regeln: einen *Vektorraum*.² Auch diesen Begriff, der eine Spezialisierung und Erweiterung des Gruppenbegriffs ist, können wir nun aus seinem ursprünglichen Zusammenhang (dem Aneinanderlegen von Strecken) lösen und nur noch die dadurch realisierten Rechengesetze studieren. So entsteht der abstrakte Begriff des Vektorraums, der auch in vielen anderen Bereichen der Mathematik eine Rolle spielt (z.B. bei Gleichungssystemen, Funktionen, Differentialgleichungen). Erfahrungen und Sätze der anschaulichen Geometrie können in Sätze der Vektorraumtheorie umgewandelt und so indirekt auf solche gar nicht mehr anschaulichen Gegenstandsbereiche angewandt werden. Zugleich kann die Dimensionsschranke 3 unserer räumlichen Anschauung mühelos übersprungen werden. Die Idee dazu geht eigentlich bereits auf *Descartes*³ zurück, der die *Koordinaten* in die Mathematik eingeführt hat. Die *Dimensionszahl* ist einfach die Anzahl der Koordinaten oder Parameter, die benötigt werden, um eine Situation eindeutig festzulegen.

¹lat. linea = Gerade

²Genau betrachtet bilden auch die Strecken eine Gruppe von Symmetrietransformationen, nämlich der *Verschiebungen*. Einer Strecke a entspricht die Verschiebung vom Anfangspunkt zum Endpunkt von a , und dem Aneinanderlegen von Strecken a und b zur Strecke c entspricht die Verkettung der zugehörigen Verschiebungen zu einer neuen Verschiebung vom Anfangs- zum Endpunkt der Strecke c . Wir haben hier noch eine weitere Rechenoperation: Wir können Strecken um einen Zahlfaktor verlängern.

³René Descartes, 1596 (La Haye, jetzt Descartes, Touraine, Frankreich) - 1650 (Stockholm)

Mit dem Vektorraumbegriff verbunden ist der Begriff der *linearen Abbildung* (*Homomorphismus*): eine Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, die die Rechenoperationen erhält. Solche Abbildungen sind zugleich vereinfachte Modelle für beliebige (differenzierbare) Abbildungen mehrerer Variabler, wie wir im kommenden Semester sehen werden.

In der Analysis haben wir den Abstraktionsprozess noch weitgehend vermieden. In der Linearen Algebra dagegen wird er zu einem der Lerninhalte; er ist ein wesentliches Element der Mathematik. *Abstraktion* bedeutet Reduktion auf das (von einem bestimmten Standpunkt) Wesentliche, also eine Vereinfachung. Die Schwierigkeit besteht darin, dass wir uns an abstrakte Begriffe erst gewöhnen müssen, bevor wir eine gefühlsmäßige Beziehung dazu entwickeln können. Das beginnt bereits mit dem grundlegendsten Begriff der Mathematik, der Zahl. Fünf Finger, fünf Personen, fünf Bäume haben nichts weiter gemeinsam als ihre Anzahl, von allen anderen Eigenschaften wird abgesehen, abstrahiert. Die meisten Kinder haben diesen Prozess schon im Schuleintrittsalter verstanden und vollzogen. Von solchen Prozessen lebt die Mathematik; ohne sie gäbe es nur ein Chaos von nebeneinanderstehenden Phänomenen. Der Abstraktionsprozess erst macht es möglich, das Gemeinsame in scheinbar ganz unterschiedlichen Phänomenen zu erkennen. Er wird allerdings erst dann notwendig, wenn solche unterschiedlichen Phänomene wirklich auftreten und untersucht werden.

Alle Mathematik ist das Werk von Menschen in ihrer Epoche; die Geschichte der Mathematik ist ein Teil der Menschheitsgeschichte. Das versuche ich durch zahlreiche biographische Hinweise zu verdeutlichen, die ich zum größten Teil der sehr empfehlenswerten Internetseite

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/

der University of St. Andrews in Schottland verdanke.

1. WIE ALT SIND XAVER UND YVONNE?

Zum Aufwärmen beginnen wir mit einer Aufgabe für Kopfrechner: Xaver ist zwei Jahre älter als Yvonne; zusammen sind sie 40. Wie alt sind Xaver und Yvonne?

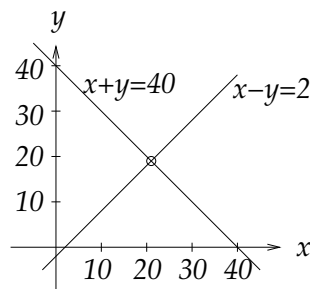
Das ist ein *lineares Gleichungssystem*, bestehend aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten: Ist x das Alter von Xaver und y das von Yvonne, dann sagen unsere Bedingungen

$$(1) \quad x + y = 40$$

$$(2) \quad x - y = 2$$

Durch Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen könnten Sie jeweils eine der beiden Variablen eliminieren: $2x = 42$, $2y = 38$, und

daraus das Ergebnis $x = 21$, $y = 19$ entnehmen. Man kann dieses Ergebnis sogar graphisch darstellen, indem man das Alter aller möglichen Xavers und Yvones (einschließlich der noch ungeborenen), die zusammen 40 Jahre alt sind (Gleichung (1)), als Punktmenge in ein xy -Diagramm einträgt und ebenso diejenigen mit Altersunterschied 2 (Gleichung (2)). Beide Punktfolgen sind Geraden. In ihrem Schnittpunkt sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt; dort liegt die Lösung $(21, 19)$.



Unversehens sind wir also von der Algebra in die Geometrie geraten und sprechen plötzlich von Geraden und Punkten statt von Gleichungen und Lösungen.

Wenn Sie die Aufgabe im Kopf gelöst haben, dann vermutlich ganz anders: Sie haben sich vielleicht gesagt: Die Hälfte von 40 ist 20; wären die beiden gleich alt, so wären sie beide 20; da Xaver aber 2 Jahre älter ist als Yvonne, muss er 21 und Yvonne 19 sein. Sie haben dabei gar nicht mehr mit den ursprünglichen Variablen $x = \text{Alter von Xaver}$, $y = \text{Alter von Yvonne}$ gerechnet, sondern mit neuen Größen: dem arithmetischen Mittel $u = \frac{1}{2}(x + y)$ sowie der halben Differenz $v = \frac{1}{2}(x - y)$. Der Wert dieser neuen Variablen ergibt sich sofort aus der Aufgabenstellung: $u = 20$, $v = 1$, und daraus lassen sich die gesuchten Größen $x = u + v$, $y = u - v$ sofort zurückgewinnen.

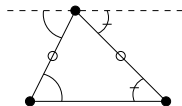
Wir sehen hier bereits drei Motive, die in der Linearen Algebra eine Rolle spielen: Lineare Gleichungssysteme, Geometrie und Variablen-substitution.

2. WAS GIBT ES? WAS GIBT ES NICHT?

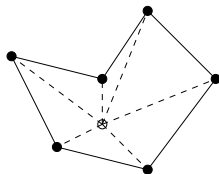
Im Vorlesungsskriptum „Zahl und Funktion“ haben wir die Mathematik folgendermaßen zu kennzeichnen versucht:

Die Aufgabe der Mathematik ist die Erkenntnis des Verborgenen aus dem Offensichtlichen sowie die Anwendungen dieser Erkenntnis.

Ein Beispiel haben wir eben diskutiert: das verborgene Alter von Xaver und Yvonne. Ein etwas interessanteres Beispiel ist der Satz von der Winkelsumme im Dreieck:



Zieht man die (gestrichelten) Parallele zur Grundseite, dann sieht man die drei Winkel an der Spitze des Dreiecks vereinigt,⁴ wo sie sich offensichtlich zu 180° ergänzen. Das Einzeichnen der Parallele ist die Arbeit des Mathematikers: Sie bildet die Brücke zwischen dem Offensichtlichen (*Der gestreckte Winkel ist 180°*) und dem Verborgenen (*Jedes Dreieck hat Winkelsumme 180°*).⁵ Da jedes Vieleck mit n Ecken sich aus n Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt zusammensetzen lässt,



ist die Winkelsumme eines n -Ecks gleich $(n - 2) \cdot 180^\circ$ (von $n \cdot 180$ Grad für die n Dreiecke, aus denen das n -Eck zusammengesetzt ist, müssen noch $360 = 2 \cdot 180$ Grad für die Winkel im gemeinsamen Eckpunkt abgezogen werden).

Die obige Aufgabenbeschreibung der Mathematik bedarf natürlich der Ergänzung. Eine naheliegende Frage wäre: Welcher Art sind denn die verborgenen Erkenntnisse, auf die die Mathematik aus ist? Hier ist eine (aber nicht „die“) Antwort dazu:

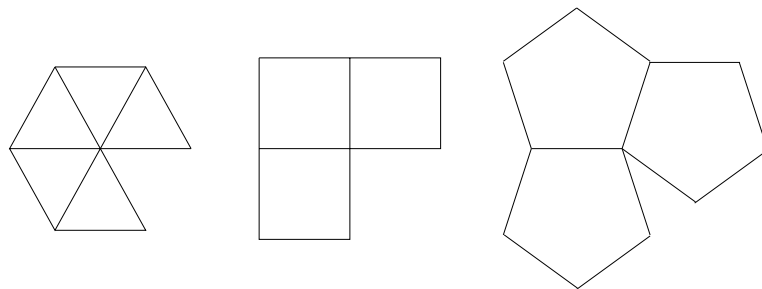
Mathematik unterscheidet das Mögliche vom Unmöglichen.

Auch dazu ein berühmtes Beispiel: Es gibt genau fünf konvexe Körper, die von kongruenten regelmäßigen Vielecken (gleiche Winkel, gleich Seitenlängen) berandet werden, wobei jeder der Eckpunkte des Körpers

⁴Durch die 180° -Drehung um die markierten Seitenmittelpunkte gehen die Winkel an der Grundseite in die an der Spitze über.

⁵Eine andere Beweisidee ist, das Dreieck einmal zu umlaufen; dabei hat man sich insgesamt einmal um 360° gedreht. Diese Drehung verteilt sich auf die drei Außenwinkel, die zusammen also 360° betragen. Da Innenwinkel = $180^\circ -$ Außenwinkel, ist die Summe der Innenwinkel $3 \cdot 180 - 360 = 180$ Grad. Dieselbe Idee gibt auch sofort die Innenwinkelsumme von beliebigen Vielecken.

gleich aussieht: die fünf *platonischen Körper*.⁶ Der Beweis ist einfach:⁷ Um eine konvexe Ecke zu bilden, müssen mindestens 3 Vielecke zusammenkommen, und die Summe der Winkel an dieser Ecke muss kleiner sein als der volle Winkel 360° . Die Winkelsumme im n -Eck ist $(n - 2) \cdot 180^\circ$, und da im regelmäßigen n -Eck alle Winkel gleich sind, hat jeder den Wert $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$. Für $n = 3, 4, 5, 6$ sind dies die Winkel $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ$ und für $n > 6$ noch mehr als 120° .



Deshalb gibt es nur die Möglichkeiten, dass an jeder Ecke drei, vier oder fünf Dreiecke (*Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder*), drei Quadrate (*Würfel*) oder drei Fünfecke (*Dodekaeder*) zusammenstoßen. Mehr ist nicht möglich, weil sonst die Winkelsumme an jeder Ecke bereits 360° oder mehr betragen würde.⁸ Wir können also mit absoluter Sicherheit sagen, dass es nur diese fünf platonischen Körper „gibt“; niemals wird irgend jemand einen sechsten entdecken oder erfinden können.

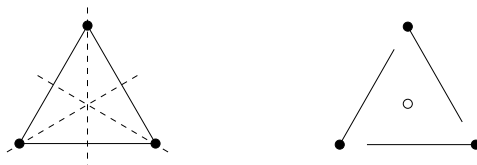
⁶Plato (427 - 347 v.Chr., Athen) war nicht der Entdecker dieser Körper. Drei von ihnen (Tetraeder, Würfel und Oktaeder) waren bereits in der Schule des Pythagoras (vor 460 v.Chr.) bekannt, die anderen beiden (Dodekaeder und Ikosaeder) wurden von Platons Schüler Theaitetos (ca. 417 - 369 v.Chr., Athen) entdeckt. Die Körper spielten aber in der Platonischen Naturphilosophie eine Rolle: Würfel, Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder sollten die Gestalt der Atome der vier Elemente Erde, Feuer, Luft und Wasser wiedergeben, während das Dodekaeder die Gestalt des Universums darstellte.

⁷Eigentlich zeigt das folgende Argument nur, dass es nicht mehr Möglichkeiten gibt. Dass diese fünf Körper aber tatsächlich existieren, lässt sich durch Basteln mit Papier und Klebstoff nicht wirklich beweisen, denn eine solche Konstruktion ist immer fehlerbehaftet. Stattdessen gibt man einfach die drei Koordinaten jedes Eckpunkts dieser Körper im 3-dimensionalen Raum an. Für Würfel und Oktaeder ist dies eine leichte Übungsaufgabe, für den Tetraeder nicht viel schwerer (wir kommen darauf zurück). Für den Ikosaeder sind die 12 Eckpunkte wie folgt (Wikipedia): $(0, \pm 1, \pm \Phi)$, $(\pm \Phi, 0, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm \Phi, 0)$, und die 20 Eckpunkte des Dodekaeders sind $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(0, \pm \varphi, \pm \Phi)$, $(\pm \varphi, \pm \Phi, 0)$, $(\pm \Phi, 0, \pm \varphi)$, wobei $\Phi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ und $\varphi = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ der Goldene Schnitt und sein Kehrwert sind, vgl. Zahl und Funktion.

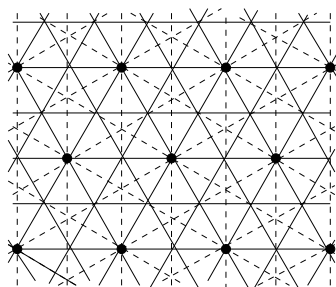
⁸Vorlagen zum Basteln dieser Körper finden Sie z.B. auf der Homepage von Klaus Bernt: www.math.uni-augsburg.de/~bernt/Regula/

3. SYMMETRIE

Wenn geklärt ist, was es „gibt“, schließt sich die Frage an: Wie sieht es aus? Welche Eigenschaften haben diese Formen, die in vielfacher Weise in der Natur realisiert sind?⁹ Eine der hervorstechendsten Eigenschaften geometrischer Formen, die auch einen Teil ihres ästhetischen Reizes ausmacht, ist ihre *Symmetrie*. Dabei denken wir vielleicht als erstes an die *Spiegelsymmetrie*, die uns überall in den Gegenständen unserer Umgebung einschließlich unseres eigenen Körpers begegnet. Ein gleichseitiges Dreieck zum Beispiel hat drei Spiegelachsen (linke Figur):



Durch eine leichte Veränderung (rechte Figur) *brechen* wir diese Symmetrie; die Figur geht nun bei Spiegelungen nicht mehr in sich selbst über. Aber eine andere Art von Symmetrie bleibt noch bestehen, die *Drehsymmetrie*: Bei Drehungen um 120° oder 240° um den markierten Punkt bleibt die Figur ungeändert.



Bei *periodischen Mustern* (Tapeten- oder Fliesenmustern sowie Kristallgittern) finden wir neben Spiegelungen und Drehungen noch eine weitere Art von Symmetrien: *Verschiebungen*, auch *Translationen* genannt.¹⁰ Alle Translationen, die einen schwarzen Punkt auf einen anderen schwarzen Punkt verschieben, führen nämlich das gesamte Muster in sich über,

⁹Zahlreiche Beispiele finden sich in dem Lehrbuch „Lineare Algebra und Analytische Geometrie I“ von E. Brieskorn.

¹⁰Spiegelungen, Drehungen und Translationen haben gemeinsam, dass sie *Isometrien*, d.h. abstandserhaltende Abbildungen der Ebene sind (sie werden auch *Kongruenzabbildungen* genannt). Es gibt noch eine vierte Sorte von Isometrien: *Gleitspiegelungen*, bei denen gleichzeitig an einer Achse gespiegelt und in Richtung der Achse verschoben wird. Auch sie treten oft bei Tapetenmustern als Symmetrien auf.

wobei wir allerdings von Randeffekten absehen und uns das Muster über die unendliche Ebene ausgebreitet vorstellen müssen.¹¹

Die *Platonischen Körper* bilden ein besonders reiches Feld für Symmetriebetrachtungen. Sehen wir uns einmal den bekanntesten unter ihnen an, den Würfel, und beschränken wir uns auf Drehungen.¹² Wieviele solcher Drehungen gibt es? Jede der 6 Seiten kann oben liegen, und jede der vier Kanten dieser Seite kann vorn liegen, womit die *Lage* des Würfels festgelegt ist; das ergibt $6 \cdot 4 = 24$ mögliche Lagen und ebenso viele Drehungen.¹³

Fassen wir zusammen, was wir bis jetzt über Symmetrien feststellen konnten: Bei Konfigurationen in der Ebene (Vielecke, Muster) oder im Raum (platonische Körper, Kristallgitter) finden wir bestimmte abstandstreue Abbildungen (*Isometrien*) der Ebene oder des Raums, die diese Konfigurationen ungeändert lassen; wir nennen sie *Symmetrietransformationen* oder kurz *Symmetrien*. Es kann davon endlich viele geben (wie bei Vielecken und Platonischen Körpern) oder auch unendlich viele (wie bei periodischen Mustern und Kristallgittern).

Es gibt noch andere Arten von Symmetrien. Stellen Sie sich vier gleichartige Gegenstände in einer Reihe vor. Jetzt fangen Sie an, diese Gegenstände umzuordnen, ihre Plätze zu vertauschen. Sie werden nach keiner dieser Umordnungen eine Veränderung bemerken, weil die Gegenstände ja nicht unterscheidbar sind. Auch dies ist also eine Transformation, die eine Konfiguration nicht verändert und in dem Sinne eine *Symmetrie*; allerdings handelt es sich diesmal nicht um eine Isometrie des Raumes (die Gegenstände werden ja unabhängig von einander bewegt). Erst wenn wir auf jeden der Gegenstände eine Nummer schreiben und sie damit unterscheidbar machen, sehen wir die Umordnung (*Permutation*): Aus der Reihe 1234 wurde vielleicht 4132. Wieviele solcher Anordnungen gibt es? Wir können dem Gegenstand 1 einen der vier Plätze 1,2,3,4 geben; egal, welchen Platz wir gewählt haben, bleiben für den Gegenstand 2 jetzt noch drei mögliche Plätze frei. Legen wir

¹¹Die *islamische Kunst* hat es in der Konstruktion wunderbarer periodischer Muster aus einfachsten Elementen besonders weit gebracht; in Europa besonders bekannt sind die Kachelmuster der Alhambra in Granada (Spanien) aus dem 14. Jahrhundert: <http://torus.math.uiuc.edu/jms/Photos/03/JulE/Alhambra/> Interessanterweise sind die Spiegelsymmetrien durch die Über- und Unterkreuzungen der zahlreichen Bänder sehr oft gebrochen; es bleiben die Dreh- und Translationssymmetrien.

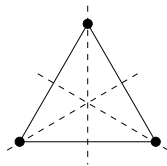
¹²Beim Würfeln dreht sich der Würfel, aber er wird nicht gespiegelt!

¹³Wenn wir eine Anfangslage fixieren, dann können wir jede mögliche Lage durch genau eine Drehung erhalten, und umgekehrt überführt jede Drehung den Würfel in eine neue Lage. Es gibt also ebenso viele Drehungen wie Lagen.

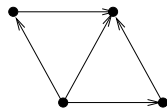
diesen fest, so gibt es für den Gegenstand 3 noch zwei mögliche leere Plätze, und der Gegenstand 4 muss sich mit dem letzten freien Platz zufrieden geben. Insgesamt haben wir damit $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ mögliche Anordnungen der vier Gegenstände. Es gibt also 24 Permutationen von 4 Gegenständen, genauso wie es 24 Drehungen des Würfels gibt - ob das wohl ein Zufall ist? Die Überlegung lässt sich natürlich ebenso für eine Reihe von beliebig vielen (sagen wir: n) Gegenständen durchführen: Dafür gibt es $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ Umordnungen (Permutationen); dieses Produkt aller Zahlen von 1 bis n nennt man kurz $n!$ („ n -Fakultät“).¹⁴

4. GRUPPEN

Die Symmetrien einer Konfiguration kann man nicht nur *zählen*, sondern man kann mit ihnen auch *rechnen*. Rechnen bedeutet, je zwei mathematische Gegenstände, z.B. die Zahlen 2 und 3, zu einem dritten zu verknüpfen, etwa zur Summe $2 + 3 = 5$ oder zum Produkt $2 \cdot 3 = 6$. Ebenso lassen sich auch zwei Symmetrien zu einer neuen Symmetrie verknüpfen, und zwar durch *Hintereinanderschaltung* (*Komposition*, *Verkettung*). Betrachten wir noch einmal das Beispiel des gleichseitigen Dreiecks:



Wenn wir die Figur erst an der einen, dann an der anderen Achse spiegeln, so haben wir insgesamt eine Drehung ausgeführt, und eine Drehung mit einer Spiegelung verkettet ergibt die Drehung in die andere Richtung. Oder betrachten wir ein periodisches Muster wie in Figur S. 7. Die Komposition von zwei Translationen ist wieder eine Translation:



Was bei der Komposition von Translationen und Drehungen oder von zwei Drehungen um verschiedene Drehzentren herauskommt, ist kniffliger; experimentieren Sie mal selbst ein bisschen! Aber auch ohne Rechnung wissen wir: Wenn das Muster unter zwei Transformationen erhalten bleibt, dann ändert sich auch nichts, wenn wir erst die erste und danach die zweite anwenden. Die Komposition ist deshalb wieder

¹⁴von lat. facultas = Möglichkeit

eine Symmetrie des Musters. Außerdem können wir jede Symmetrietransformation durch Verkettung mit einer anderen wieder rückgängig machen:¹⁵ Bei Spiegelungen müssen wir dieselbe Transformation noch einmal anwenden, bei Translationen um dasselbe Stück in die Gegenrichtung verschieben und bei Drehungen wird um denselben Winkel in die andere Richtung gedreht.

Eine solche in sich abgeschlossene Rechenwelt mit zwei Rechenoperationen (Komposition und Inversion) nennt man eine *Gruppe*. Bei diesem Begriff *abstrahiert* man von der ursprünglichen Konfiguration, deren Symmetrietransformationen man studiert, man abstrahiert sogar von der Tatsache, dass es sich bei der „Rechenoperation“ um die Komposition von Abbildungen handelt; es bleiben nur die reinen Rechengesetze übrig:

Definiton: Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einem ausgezeichneten Element $e \in G$, genannt *Neutralelement*, sowie zwei Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G, & (g, h) &\mapsto g * h \\ G &\rightarrow G, & g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

genannt *Gruppenoperation* und *Inversion*, die folgende Gesetze erfüllen: Für alle $g, h, k \in G$ gilt:

G1: Assoziativgesetz: $(g * h) * k = g * (h * k)$,

G2: Rolle des Neutralelements: $e * g = g * e = g$,

G3: Rolle des Inversen: $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Eine Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch*¹⁶ wenn zusätzlich gilt:

G0: Kommutativgesetz: $g * h = h * g$.

Definition: Eine *Untergruppe* einer Gruppe G ist eine Teilmenge $H \subset G$, die selbst eine Gruppe bildet, weil sie unter der Gruppenoperation und der Inversion erhalten bleibt: Für alle Elemente $h, h' \in H$ gilt:

UG1: $e \in H$,

UG2: $h * h' \in H$,

UG3: $h^{-1} \in H$.

Wir haben bereits angedeutet, dass die Symmetrietransformationen einer Konfiguration eine Gruppe bilden, die *Symmetriegruppe* der Konfiguration. Die Gruppenoperation $*$ ist hier die Verkettung \circ . Die Verkettung von Abbildungen ist immer assoziativ: Ist X eine Menge und $f, g, h : X \rightarrow X$ Abbildungen auf dieser Menge, so gilt für alle $x \in X$:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x))),$$

¹⁵Die Symmetrien sind *bijektive (umkehrbare, invertierbare)* Abbildungen.

¹⁶Niels Henrik Abel, 1802 (Frindoe bei Stavanger) - 1829 (Froland, Norwegen)

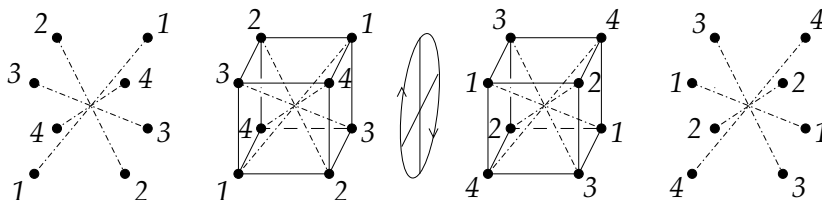
$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Das Neutralelement ist die *identische Abbildung* $e = \text{id}$, die überhaupt nichts verändert: $\text{id}(x) = x$ für jedes $x \in X$. Das Inverse einer Symmetrietransformation f ist ihre *Umkehrabbildung* f^{-1} , die Abbildung, die f rückgängig macht: $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$, mit anderen Worten

$$f \circ f^{-1} = \text{id}, \quad f^{-1} \circ f = \text{id}.$$

Auch Untergruppen haben wir schon gesehen. Für ein periodisches Muster zum Beispiel bilden die *Translationen* eine Untergruppe der vollen Symmetriegruppe, ebenso die Drehungen um ein festes Drehzentrum.

Wir sagten, dass *Abstraktion* uns hilft, das Gleichartige im Verschiedenen zu entdecken. Dies können wir am Gruppenbegriff demonstrieren. Ein Würfel und eine Reihe von vier gleichartigen Gegenständen scheinen wenig miteinander gemeinsam zu haben. Und doch ist ihre Symmetriegruppe „dieselbe“. Wir sahen bereits, dass es ebenso viele Drehungen des Würfels wie Permutationen von vier Gegenständen gibt, nämlich 24. Aber wir können viel mehr feststellen: Es gibt in der Tat vier Objekte, die bei Drehungen des Würfels untereinander permutiert werden: die vier Raumdiagonalen des Würfels. Jede Drehung des Würfels ergibt eine Permutation der vier Raumdiagonalen, und umgekehrt bestimmt eine Permutation der Raumdiagonalen eindeutig eine Würfeldrehung. So entspricht der 90° -Drehung um die x -Achse die Permutation $1234 \mapsto 4312$.



Die Permutation der Raumdiagonalen kommt durch Einschränkung der Drehung auf das Diagonalengerüst (in der Zeichnung ganz außen) zustande, deshalb entspricht der Verkettung von Drehungen auch die Verkettung der zugehörigen Permutationen: Die beiden Gruppen sind *isomorph*.

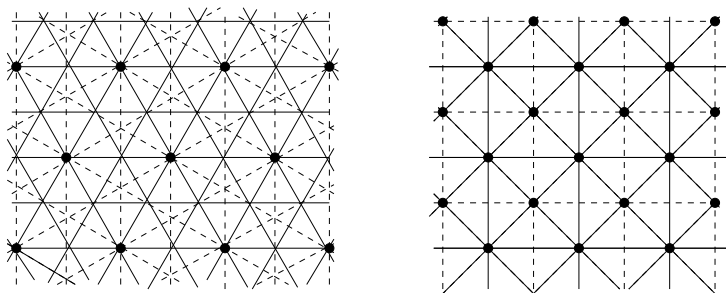
Definition: Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Gruppen G, G' ist eine bijektive Abbildung $f : G \rightarrow G'$, die die Gruppenoperation und die Inversion erhält:

$$(3) \quad \begin{aligned} f(g * h) &= f(g) * f(h) \\ f(g^{-1}) &= f(g)^{-1} \end{aligned}$$

für alle $g, h \in G$. Zwei Gruppen G, G' heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus $f : G \rightarrow G'$ gibt.¹⁷

In unserem Beispiel ist G die Drehgruppe des Würfels und G' die Permutationsgruppe der vier Raumdiagonalen des Würfels, und der Isomorphismus $f : G \rightarrow G'$ ordnet jeder Drehung g die dadurch erzeugte Permutation der Raumdiagonalen zu.

Isomorphe Gruppen sehen wir als gleichartig an. Damit kann man feststellen, wann zwei ganz unterschiedliche Konfigurationen „dieselbe Symmetrie“ besitzen, nämlich wenn ihre Symmetriegruppen isomorph sind. In diesem Sinne gibt es zum Beispiel genau 17 Symmetrietypen von ebenen periodischen Mustern;¹⁸ in der Alhambra in Granada (Spanien) sind diese Typen als Kachelmuster realisiert.¹⁹ Die beiden nachstehenden Beispielmuster haben unterschiedlichen Symmetrietyp.²⁰



Unsere neue Rechenwelt der Gruppen hat jedoch noch einen Schönheitsfehler: Wie können wir mit Gruppenelementen praktisch *rechnen*, d.h. die Gruppenoperation wirklich ausführen? Wir haben ja noch nicht einmal geeignete Bezeichnungen für die einzelnen Gruppenelemente zur Verfügung; wir können ja nicht gut sagen: „Man verknüpfe die 60° -Drehung um den ersten schwarzen Punkt von rechts in der mittleren Reihe des linken Musters mit der 120° -Drehung um den Mittelpunkt des

¹⁷Die Umkehrabbildung $f^{-1} : G' \rightarrow G$ ist dann ebenfalls ein Isomorphismus.

¹⁸http://encyclopedia.laborlawtalk.com/Wallpaper_group
<http://mathmuse.sci.ibaraki.ac.jp/pattn/PatternE.html>
http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group

¹⁹<http://www.spsu.edu/math/tile/grammar/moor.htm>

²⁰Die schwarzen Punkte im linken Bild sind *Drehzentren der Ordnung 6*, d.h. Zentren von 60° -Drehungen; wiederholt man diese sechsmal, so erreicht man wieder die ursprüngliche Lage. Solche Drehzentren gibt es im rechten Bild nicht; dort sind die schwarzen Punkte Drehzentren der Ordnung 4, die es wiederum im linken Bild nicht gibt.

ersten Dreiecks von links in der zweiten Reihe!“²¹ Wir werden im Laufe unserer Vorlesung noch geeignete Bezeichnungen einführen. Solche Probleme sind uns gar nicht fremd. Kinder müssen auch das Rechnen mit Zahlen erst lernen, und in früheren Zeiten waren die Schwierigkeiten unvergleichlich viel größer: Versuchen Sie mal, die römischen Zahlen MCMLXXI und MDCCCXLIV ohne Umrechnung zu addieren oder gar zu multiplizieren!²²

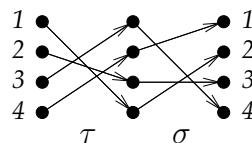
Viel einfacher ist das Rechnen in der Gruppe der *Permutationen*,²³ für die wir ja bereits eine vergleichsweise effektive Bezeichnungsweise gefunden haben: 4132 bezeichnet die Abbildung $1234 \mapsto 4132$ oder genauer $1 \mapsto 4, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 2$. Wir wollen für diese Abbildung ein eigenes Symbol einführen, einen griechischen Buchstaben, z.B. σ (Sigma), d.h. 4132 ist die Abbildung $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$(4) \quad \sigma(1) = 4, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 2.$$

Wenn uns nun eine zweite Permutation τ (Tau) gegeben ist, z.B. $\tau = 4312$,

$$\tau(1) = 4, \tau(2) = 3, \tau(3) = 1, \tau(4) = 2,$$

dann können wir die Komposition von σ und τ , die Permutation $\sigma * \tau = \sigma \circ \tau = \sigma\tau$ leicht berechnen: $\sigma\tau(1) = \sigma(4) = 2, \sigma\tau(2) = \sigma(3) = 3, \sigma\tau(3) = \sigma(1) = 4, \sigma\tau(4) = \sigma(2) = 1$, also $\sigma\tau = 2341$.²⁴



Ebenso bestimmt man $\tau\sigma = 2413 \neq \sigma\tau$; die Gruppe ist also nicht kommutativ. Auch das Inverse σ^{-1} zu σ lässt sich leicht berechnen;

²¹Mit zwei gleichartigen Folien, auf denen das Muster aufgezeichnet ist, ist diese Aufgabe ganz gut lösbar.

²²Daran lässt sich der gewaltige Fortschritt ermessen, den die Einführung der von den Arabern übernommenen indischen Ziffern in Europa mit sich gebracht hat. Das erste erhaltene Zeugnis dieser Übernahme stammt aus Spanien aus dem Jahr 976 (www.geocities.com/rmllyra/arabic.html); in Spanien bestand ja bis 1492 der engste Kontakt zwischen der christlichen und der muslimischen Kultur. Weitere Verbreitung fanden die „arabischen Zahlen“ erst ab dem 13. Jahrhundert in Italien, besonders durch das 1202 und 1228 geschriebene „liber abaci“ von *Leonardo Pisano Fibonacci*, der ungefähr von 1170 bis 1250 in Pisa lebte. Siehe auch www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Arabicnumerals.html

²³Die Gruppe der Permutationen von n Gegenständen heißt *Symmetrische Gruppe*; sie wird meist mit dem Symbol S_n bezeichnet.

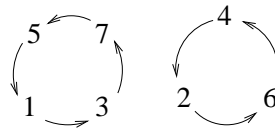
²⁴Man beachte, dass man Abbildungen von rechts nach links anwendet: $\sigma\tau$ bedeutet: Erst τ anwenden, und danach σ auf das Bild von τ anwenden.

man muss nur die Wertetabelle (4) oder die Pfeile auf der rechten Seite der obigen Figur von rechts nach links lesen:

$$\sigma^{-1}(1) = 2, \sigma^{-1}(2) = 4, \sigma^{-1}(3) = 3, \sigma^{-1}(4) = 1,$$

also $\sigma^{-1} = 2431$.

Es gibt noch eine andere gebräuchliche Schreibweise für Permutationen: die *Zyklenschreibweise*. Sie lässt sich leichter an einem etwas größeren Beispiel erklären: Die Permutation $1234567 \mapsto 3672145$ lässt sich so darstellen: $1 \mapsto 3 \mapsto 7 \mapsto 5 \mapsto 1$, $2 \mapsto 6 \mapsto 4 \mapsto 2$, wofür wir kurz $(1375)(264)$ schreiben.

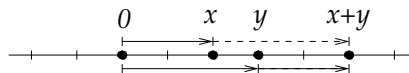


Permutationen, die auf einer gewissen Menge von Zahlen (oder Gegenständen) einen Ringtausch vornehmen und alles übrige ungeändert lassen, nennt man *Zyklen*. Die Permutation 3672145 wurde in zwei solche Zyklen zerlegt, $3672145 = (1375)(264)$, und zwar sind diese Zyklen *disjunkt*, d.h. keine der Zahlen kommt in beiden Zyklen vor. Deshalb stören sie sich nicht gegenseitig und können in beliebiger Reihenfolge verkettet werden: $(1375)(264) = (264)(1375)$.²⁵ Für die beiden weiter oben betrachteten Permutationen $\sigma = 4132$ und $\tau = 4312$ gilt in der Zyklenschreibweise $\sigma = (142)(3)$ und $\tau = (1423)$.

5. STRECKENADDITION

Kommutative (abelsche) Gruppen sind uns bereits durch das Zahlenrechnen vertraut. Die *reellen Zahlen* zum Beispiel bilden eine solche Gruppe, wobei die Gruppenoperation die *Addition* ist. Nur die Schreibweise ist anders: Die Gruppenoperation $*$ heißt hier $+$ (*Addition*) das Neutralelement e ist die Null 0 , und für das Inverse von x schreiben wir nicht x^{-1} , sondern $-x$. Statt $x + (-y)$ schreibt man $x - y$ (*Subtraktion*).

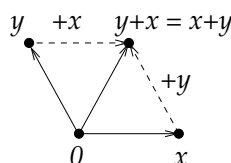
Geometrisch können wir uns die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen als eine Gerade veranschaulichen, auf der ein Punkt als Null markiert ist. Die Addition von zwei Zahlen x, y geschieht durch Aneinanderlegen der Strecken von 0 nach x und nach y .



²⁵Anders ist es, wenn zwei Zyklen gemeinsame Zahlen enthalten; z.B. gilt $(12)(23) = (123)$ und $(23)(12) = (132)$, bitte nachrechnen!

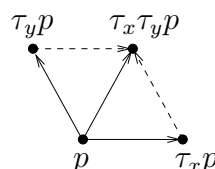
Ganz analog kann man Streckenaddition auch in der Ebene (und im Raum) einführen: Man zeichnet einen Punkt aus und nennt ihn *Ursprung* x, y durch Aneinanderlegen der Strecken $\overline{0x}$ und $\overline{0y}$ in beliebiger Reihenfolge. Statt von *Streckenaddition* spricht man aber besser von *Vektoraddition*; ein *Vektor* ist eine Strecke mit Richtungsangabe.²⁶ Das Arbeiten mit Vektoren statt mit einfachen Strecken drückt sich in unseren Figuren durch die Pfeile aus, deren Richtungen beim Zusammenlegen zu beachten sind. Wir werden in der Bezeichnung nicht unterscheiden zwischen dem *Punkt* x und dem *Vektor* von 0 nach x .

Die so definierte „Vektoraddition“ ist offensichtlich kommutativ.²⁷



Eigentlich haben wir damit die Verkettung von zwei *Translationen* oder *Verschiebungen* τ_x und τ_y beschrieben: Die Translationen τ_x und τ_y sind die Abbildungen, die jeden Punkt p der Ebene um die Strecken $\overline{0x}$ bzw. $\overline{0y}$ verschieben. Wie die folgende Figur zeigt, ist ihre Komposition $\tau_y \circ \tau_x$ (kurz: $\tau_y\tau_x$) wieder eine Verschiebung, und zwar um die Strecke $\overline{0, x+y}$.

$$(5) \quad \tau_y \circ \tau_x = \tau_{x+y}.$$



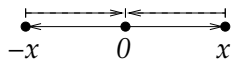
Die Punkte der Ebene (und ebenso die des Raumes) bilden damit wieder eine kommutative Gruppe;²⁸ die Gruppenoperation $*$ ist die

²⁶Der Begriff *Vektor* (von lat. vehere, vectus, führen, ziehen) geht zurück auf den irischen Mathematiker Sir William Rowan Hamilton, 1805 - 1865 (Dublin), der damit eine Größe beschrieb, die in eine räumliche Richtung weist. In der Physik waren solche Größen (Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte) schon lange bekannt. Vgl. E. Brieskorn, Lineare Algebra I, Abschnitt „Zur Entstehung des Vektorraumbegriffs“ (S. 333-336)

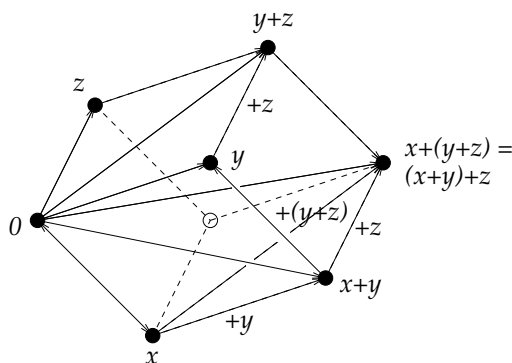
²⁷Man kann die Vektoraddition auch so beschreiben: Der Vektor $x+y$ ist die von 0 ausgehende Diagonale des Parallelogramms $(0, x, y, x+y)$, dagegen ist der Vektor $x-y$ die andere Diagonale in diesem Parallelogramm, die von y nach x läuft.

²⁸Diese Gruppe ist nach Gleichung (5) *isomorph* zur Translationsgruppe. Die Beziehung zwischen Translationen und Punkten der Ebene ist ganz analog wie die zwischen Lagen und Drehungen des Würfels (vgl. Fußnote S. 8): Erst wenn man

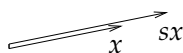
Streckenaddition (sie wird mit $+$ bezeichnet), das Neutralelement e ist der Ursprung 0 , und das Inverse zu x ist der Punkt $-x$, der auf der Geraden $0x$ im gleichen Abstand von 0 auf anderen Seite liegt.



Die Assoziativität folgt aus (5), weil die Verkettung von Abbildungen assoziativ ist, vgl. S. 10. Sie entspricht der folgenden Figur:



Diese kommutative Gruppe hat eine Besonderheit: Es gibt außer den Gruppenoperationen, Addition und Subtraktion, noch eine weitere Operation, die Verlängerung oder Verkürzung eines Vektors durch einen Zahlenfaktor $s \in \mathbb{R}$ zu einem neuen Vektor $s \cdot x$ oder kurz sx . Zahlenfaktoren werden in der Vektorrechnung auch als *Skalare* bezeichnet,²⁹ daher heißt diese Operation *Skalarmultiplikation*, genauer: *Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar*.

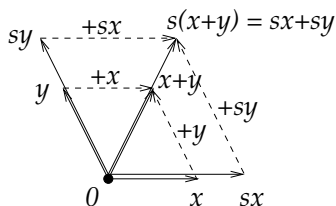


Die Rechenregeln dieser Operation kann man ähnlich wie die Rechenregeln der kommutativen Gruppe auf vier Grundregeln zurückführen: Für alle Skalare s, t und alle Vektoren x, y gilt:

- S1:** $1 \cdot x = x$,
- S2:** $s(tx) = (st)x$,
- S3:** $(s + t)x = sx + tx$,
- S4:** $s(x + y) = sx + sy$.

einen Punkt (den Ursprung 0) oder eine Lage (die Anfangslage) ausgewählt hat, kann man Translationen mit Punkten und Drehungen mit Lagen identifizieren.

²⁹Das Wort kommt von dem lateinischen Wort *scala* = Leiter. Damit wird daran erinnert, dass man Skalare (reelle Zahlen) nach ihrer Größe ordnen kann, wie die Stufen einer Leiter. Vektoren dagegen können in verschiedene Richtungen zeigen und entziehen sich damit der Anordnung auf einer Skala.



Es gibt noch viele weitere Rechenregeln, aber wir brauchen sie unter den Grundregeln nicht aufzuführen, weil sie sich logisch aus ihnen und den Regeln des Zahlenrechnens ergeben. Beispiele:

S5: $0 \cdot x = 0$ (Skalar 0 mal x gleich Vektor 0),

denn $0 \cdot x = (0+0) \cdot x \stackrel{S3}{=} 0 \cdot x + 0 \cdot x$, und durch *Subtraktion* von $0 \cdot x$ (Addition von $-(0 \cdot x)$) auf beiden Seiten folgt $0 = 0 \cdot x$.

S6: $(-s)x = -(sx)$,

denn $(-s)x + sx \stackrel{S3}{=} (-s+s)x = 0 \cdot x \stackrel{S5}{=} 0$, und durch *Subtraktion* von sx (Addition von $-(sx)$) auf beiden Seiten folgt unsere Behauptung $(-s)x = -(sx)$.

S7: $(-1) \cdot x = -x$,

denn $(-1) \cdot x \stackrel{S6}{=} -(1 \cdot x) \stackrel{S1}{=} -x$.

Die Skalarmultiplikation ist damit eine Erweiterung der Gruppeninversion $x \mapsto -x$, die wir jetzt als Skalarmultiplikation mit dem Skalar -1 ansehen können.

Kommutative Gruppen mit Skalarmultiplikation werden uns in dieser Vorlesung noch oft begegnen; wir werden sie *Vektorräume* nennen.

6. KOORDINATEN

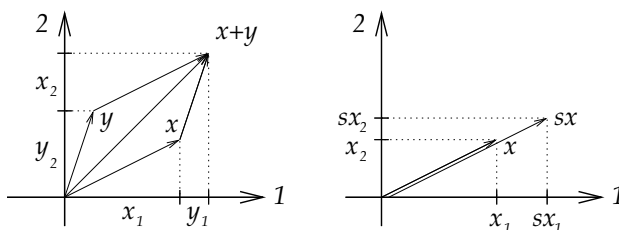
Wie kommen Zahlen in die Geometrie? In der Antike kannte man bereits Verhältnisse von Abständen zwischen Punkten und konnte messen, wie oft eine Strecke in einer anderen aufgeht (vgl. „Zahl und Funktion“, S. 18). Aber erst Descartes³⁰ fand eine Möglichkeit, jeden Punkt x in der Ebene durch zwei Zahlen genau festzulegen, nämlich durch die Abstände x_1 und x_2 zu zwei senkrechten Geraden, den *Koordinatenachsen*.³¹ Die Zahlen x_1 und x_2 nennen wir zu seinen Ehren die *kartesischen*

³⁰René Descartes, lat. Cartesius, 1596 (La Haye, heute Descartes, Touraine, Frankreich) - 1650 (Stockholm), entwickelte die Idee der Koordinaten 1637 in seiner Schrift „La Géométrie“, die er als Anhang zu seinem Werk „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences“ veröffentlichte.

³¹Descartes selbst hat nur mit positiven Zahlen gearbeitet. Damit ist aber nur ein Quadrant der Ebene erfasst. Um jeden Punkt der Ebene so zu beschreiben, müssen wir die Geraden mit einer Richtung (Pfeil) versehen und die Abstände x_1 und x_2 negativ zählen, falls der Punkt x auf der anderen Seite der entsprechenden Achse liegt. Außerdem braucht man eine Einheitslänge, damit Abstände durch Zahlen

Koordinaten oder *Komponenten* von x . Heutzutage unterscheiden wir schon gar nicht mehr zwischen dem Punkt x der Ebene und dem *Zahlenpaar* (x_1, x_2) ; wir schreiben einfach $x = (x_1, x_2)$. Die Ebene ist für uns damit *dasselbe* wie das *kartesische Produkt* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Menge der reellen Zahlen mit sich selber. Die folgenden Figuren zeigen, dass die beiden geometrisch definierten Operationen Addition und Skalarmultiplikation in dieser Darstellung sehr einfach durch Zahlenrechnung zu bestimmen sind, nämlich durch die Addition der Komponenten bzw. ihre Multiplikation mit dem Skalar:

$$(6) \quad \begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ s \cdot (x_1, x_2) &= (sx_1, sx_2). \end{aligned}$$



Wir haben mit der Koordinatenidee von Descartes eine ganze Reihe von Vorteilen gewonnen. Die Eigenschaften G0-G3 und S1-S4 der kommutativen Gruppe und der Skalarmultiplikation ergeben sich jetzt ganz von selbst aus den Regeln für das Zahlenrechnen (siehe den folgenden Abschnitt). Erst jetzt können wir eigentlich klar sagen, was wir unter „der Ebene“ verstehen: Nicht die Idealisierung der Tischplatte mit unendlicher Ausdehnung (so dürfen wir uns auch weiterhin „die Ebene“ vorstellen, aber es ist schwierig, in präzisen Worten auszudrücken, was wir damit meinen), sondern das zweifache kartesische Produkt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Menge der reellen Zahlen.³²

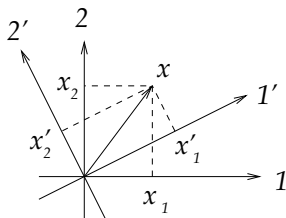
Wir können dasselbe Konzept sofort auch auf den Raum anwenden; er besteht demnach aus allen *Zahlentripeln* $x = (x_1, x_2, x_3)$ und ist damit das dreifache kartesische Produkt $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Schließlich kann

ausdrückbar sind. Für Punkte im *Raum* benötigt man nicht zwei, sondern drei Zahlen, die (mit Vorzeichen versehenen) Abstände von drei sich senkrecht schneidenden Ebenen, den *Koordinatenebenen*.

³²Für den elementaren Geometrieunterricht an der Schule wäre diese Abstraktion allerdings ein gefährlicher Schritt. Die dadurch gewonnene sprachliche Präzision ist für die Schulgeometrie vermutlich gar nicht nutzbar; ihre Erkenntnisse lassen sich ebenso gut in dem naiven Bild der (unendlichen) Tischplatte begründen. Die Gefahr der Formalisierung ist, dass das naive Vorverständnis von Geometrie zerstört werden kann. Die Einführung von Koordinaten ist ein wichtiger Schritt, aber nicht unbedingt die Auffassung der Ebene als \mathbb{R}^2 ; siehe dazu auch die auf S. 19 diskutierten Nachteile dieser Auffassung.

mit Hilfe der Koordinatenidee sogar die anschauliche Dimensionszahl 3 überwunden werden. Der 5-dimensionale Raum z.B. ist nicht gut vorstellbar, aber wir haben keine Probleme, Paare oder Tripel durch Quintetts von Zahlen zu ersetzen. Wir können die Dimensionszahl auch variabel halten und n nennen; der n -dimensionale Raum ist das n -fache kartesische Produkt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n Faktoren); er besteht aus allen Folgen („ n -Tupeln“) (x_1, x_2, \dots, x_n) von jeweils n reellen Zahlen.³³ Was auf den ersten Blick wie eine Spielerei aussehen mag, erweist sich als außerordentlich wertvoll. Viele Vorgänge in Anwendungsbereichen der Mathematik sind von einer großen Anzahl von Variablen abhängig; man denke nur an die vielen Produzenten und Konsumenten, die den Marktpreis einer Ware bestimmen oder gar an die $6 \cdot 10^{23}$ Gasmoleküle, die zu Druck und Temperatur beitragen. Diese vielen Variablen können zu einem einzigen „Punkt“ eines n -dimensionalen Raumes zusammengefasst werden, und da viele Gesetze der anschaulichen Dimensionen 2 und 3 für beliebige Dimensionszahl n erhalten bleiben, kann so indirekt die anschauliche Geometrie für diese hochkomplexen und gar nicht mehr anschaulichen Probleme nutzbar gemacht werden.

Aber der Ersatz der anschaulichen Ebene durch die Menge \mathbb{R}^2 der Zahlenpaare hat auch Nachteile. Die Koordinatenachsen, die wir in der Anschauungsebene gewählt haben, sind ja unsere eigene Zutat und nicht durch die Geometrie begründet. Wir könnten das Koordinatenkreuz beliebig drehen und dadurch demselben Punkt x ein anderes Zahlenpaar (x'_1, x'_2) zuordnen.



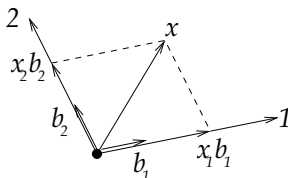
Welches ist dann das „richtige“ Paar, das wir dem Punkt x zuordnen sollen, (x_1, x_2) oder (x'_1, x'_2) ? Das lässt sich nicht entscheiden; die beiden sind völlig gleichberechtigt.³⁴ Wir werden deshalb im Prinzip alle möglichen Paare von Koordinatenachsen einbeziehen, sogar *schiefwinklige*. Außerdem ist auf jeder Achse ein Bezugspunkt b_1 bzw. b_2

³³Diesen Schritt tat Hermann Günter Grassmann, 1809-1877 (Stettin). Er schrieb 1844 das Buch „Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik“, in dem er die Idee eines n -dimensionalen Raums ausarbeitete.

³⁴Dass das eine der beiden Koordinatenkreuze in der Figur „schief“ erscheint, ist nur durch den Vergleich mit der Schrift und dem Rand des Papiers bedingt und hat nichts mit der Ebene zu tun.

festzulegen, der die Einheitsstrecke auf dieser Achse markiert.³⁵ Zu jedem Punkt x gibt es dann Zahlen x_1, x_2 („Koordinaten“ von x) mit

$$(7) \quad x = x_1 b_1 + x_2 b_2.$$



7. DIE VIER GRUNDRECHENARTEN; KÖRPER

Wir haben gelernt, dass man Vektoren addieren und mit Skalaren multiplizieren kann. Was aber sind Skalare? „Zahlen“, haben wir gesagt, aber was sind Zahlen? Wie schon beim Gruppenbegriff kommt es nicht so sehr darauf an, was Zahlen wirklich *sind*, sondern welche Gesetze sie erfüllen, welche Regeln das Rechnen mit ihnen bestimmt. Wir wollen deshalb die vertrauten vier *Grundrechenarten* der Zahlen ebenso behandeln wie die neu eingeführten Rechenarten für Symmetrien oder Vektoren: Die bekannten Rechenregeln werden auf wenige Grundregeln zurückgeführt. Diese Grundregeln heißen *Körperaxiome*, und ihre Geltungsbereiche nennt man *Körper*.³⁶

Definition: Ein *Körper* ist eine Menge \mathbb{K} mit zwei voneinander verschiedenen ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in \mathbb{K}$ (*Null* und *Eins*) und mit Abbildungen $+, \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (genannt *Addition* und *Multiplikation*) sowie³⁷ $- : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ und $()^{-1} : \mathbb{K}^* \rightarrow \mathbb{K}^*$ für $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- K1:** (*Addition*) $(\mathbb{K}, 0, +, -)$ ist eine kommutative Gruppe (Neutralelement 0, Gruppenoperation $+$, Inversion $-$),
- K2:** (*Multiplikation*) $(\mathbb{K}^*, 1, \cdot, ()^{-1})$ ist eine kommutative Gruppe (Neutralelement 1, Gruppenoperation \cdot , Inversion $()^{-1}$),
- K3:** (*Distributivgesetz*) Für alle $r, s, t \in \mathbb{K}$ gilt:

$$r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t, \quad (s + t) \cdot r = s \cdot r + t \cdot r.$$

³⁵Stillschweigend haben wir auch schon auf den rechtwinkligen Koordinatenachsen eine Einheitsstrecke vorgegeben; einer Strecke allein können wir grundsätzlich keine Zahl zuordnen, sondern nur dem Verhältnis zweier Strecken.

³⁶Der Begriff wurde von *R. Dedekind* in seinen Zahlentheorie-Vorlesungen von 1858 in Göttingen und Zürich eingeführt (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831 - 1916, Braunschweig).

³⁷Das Minuszeichen hat bekanntlich in den beiden Ausdrücken $5 - 3$ und -2 ganz unterschiedliche Bedeutung (Differenz und Negatives); hier ist letzteres gemeint.

Die beiden noch fehlenden Rechenarten *Subtraktion* und *Division* werden folgendermaßen definiert:

$$(8) \quad r - s := r + (-s),$$

$$(9) \quad r : s = r/s = \frac{r}{s} := r \cdot s^{-1}$$

für alle $(\forall)^{38}$ $r, s \in \mathbb{K}$ mit $s \neq 0$ in (9). Mit diesen Axiomen haben wir noch keineswegs alle wichtigen Rechengesetze aufgeschrieben, doch die fehlenden ergeben sich logisch aus diesen Grundregeln. Zum Beispiel:

K4: *Irgendwas mal Null gleich Null:* $r \cdot 0 = 0 = 0 \cdot r \quad \forall r \in \mathbb{K}$,
denn $r \cdot 0 \stackrel{K1}{=} r \cdot (0 + 0) \stackrel{K3}{=} r \cdot 0 + r \cdot 0$, und durch Subtraktion von $r \cdot 0$ (Addition von $-(r \cdot 0)$) auf beiden Seiten folgt $0 = r \cdot 0$.

K5: *Minus mal Plus gleich Minus:* $(-r) \cdot s = -(r \cdot s) \quad \forall r, s \in \mathbb{K}$,
denn $(-r) \cdot s + r \cdot s \stackrel{K3}{=} ((-r) + r) \cdot s \stackrel{K1}{=} 0 \cdot s \stackrel{K4}{=} 0$, und durch Subtraktion von $r \cdot s$ (Addition von $-(r \cdot s)$) auf beiden Seiten folgt $(-r) \cdot s = -(r \cdot s)$.

K6: *Minus mal Minus gleich Plus:* $(-r) \cdot (-s) = r \cdot s \quad \forall r, s \in \mathbb{K}$,
denn $(-r) \cdot (-s) + (-r \cdot s) \stackrel{K5}{=} (-r) \cdot (-s) + (-r) \cdot s \stackrel{K3}{=} (-r) \cdot ((-s) + s) \stackrel{K1}{=} (-r) \cdot 0 \stackrel{K4}{=} 0$, woraus durch Addition von $r \cdot s$ auf beiden Seiten die Behauptung folgt.

Warum führen wir den neuen Begriff „Körper“ ein, statt weiterhin einfach von Zahlen und ihren Rechenregeln zu reden? Der Grund ist, dass es sehr unterschiedliche Körper gibt, und nicht alle bestehen aus „Zahlen“ im üblichen Sinn. Doch sie alle sind als „Skalare“ in der Linearen Algebra zugelassen! Selbst bei den „üblichen“ Zahlen kennen Sie bereits zwei verschiedene Körper: die *rationalen* und die *reellen* Zahlen.

Beispiel 1: *Rationale Zahlen* \mathbb{Q} .³⁹ Das sind die *Brüche* (*Verhältnisse*) ganzer Zahlen z/n ; die Zahl z heißt der *Zähler* und die Zahl n der *Nenner* des Bruches z/n . Die Menge der rationalen Zahlen ist demnach

$$(10) \quad \mathbb{Q} = \{z/n; z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$

wobei $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ die Menge der *ganzen Zahlen* bezeichnet. Die Anwendung der Grundrechenarten ergibt sich aus den Regeln des

³⁸Das Symbol \forall (umgekehrtes A wie „Alle“) werden wir von jetzt an als Abkürzung für die Worte „für alle“ verwenden.

³⁹Das Wort „rational“ kommt von „ratio“ (lat. und engl.) = Verhältnis

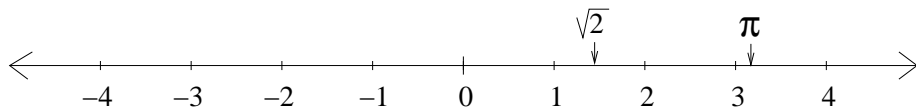
Bruchrechnens, mit denen die Schüler ab der 5. Klasse (nicht Sie) geplagt werden:⁴⁰

$$(11) \quad \frac{z}{n} \pm \frac{w}{m} = \frac{zm}{nm} \pm \frac{wn}{mn} = \frac{zm \pm wn}{nm},$$

$$\frac{z}{n} \cdot \frac{w}{m} = \frac{zw}{nm}, \quad \frac{z}{n} : \frac{w}{m} = \frac{zm}{nw}.$$

Wichtig für uns ist nur, dass auf der rechten Seite jedesmal wieder rationale Zahlen (Brüche ganzer Zahlen) stehen; die Grundrechenarten führen also nicht aus der Menge \mathbb{Q} hinaus.

Beispiel 2: *Reelle Zahlen* \mathbb{R} : Schon um 500 v.Chr. erkannte man, dass bereits bei einfachsten geometrischen Figuren *irrationale* Streckenverhältnisse auftreten, d.h. solche, die nicht mehr als Verhältnisse ganzer Zahlen ausgedrückt werden können, z.B. das Verhältnis $\sqrt{2}$ von Diagonale und Seitenlänge im Quadrat (vgl. „Zahl und Funktion“, S. 25) oder das Verhältnis π von Umfang zu Durchmesser im Kreis. Geometrisch war damit die Vorstellung des Zahlenstrahls geboren, später der Zahlengerade (unter Einschluss negativer Verhältnisse), in dem alle Streckenverhältnisse vorkommen, bezogen auf eine Einheitsstrecke:



Um solche Verhältnisse als Zahlen zu beschreiben, musste man über die rationalen Zahlen hinausgehen zu den *reellen Zahlen*, die wir heute z.B. durch unendliche Dezimalbrüche beschreiben können. Natürlich kann man mit unendlichen Dezimalbrüchen nicht wirklich rechnen; man kann sie ja nicht einmal aufschreiben. Man muss sie an irgendeiner Stelle hinter dem Komma (sagen wir: an der n -ten Stelle) abschneiden, wobei die Zahl umso genauer wiedergegeben wird (nämlich höchstens mit Abweichung von $1/10^n$ nach unten), je größer die Stellenzahl n ist. Wenn die Eingangsdaten der Rechnung auf n Stellen genau sind, sollte auch das Ergebnis auf n oder wenigstens $n - k$ Stellen genau sein, für konstantes k . Dass dies tatsächlich so ist, musste man sich erst klar

⁴⁰In der ersten dieser Gleichungen kann man bekanntlich die rechte Seite noch durch den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von z und n kürzen und damit das Produkt nm durch das kleinste gemeinsame Vielfache (den „kleinsten gemeinsamen Nenner“) von n und m ersetzen. Das macht vermutlich den Hauptteil der Schwierigkeiten beim Bruchrechnen aus. In der letzten Gleichung muss man $w \neq 0$ voraussetzen.

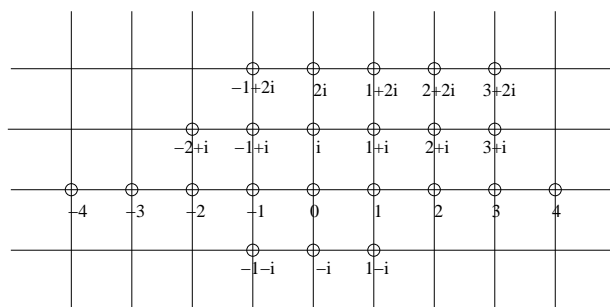
machen.⁴¹ Beispiel für eine solche Überlegung:

$$(12) \quad (r - 10^{-n}) \cdot (s - 10^{-n}) = r \cdot s - 10^{-n} \cdot (s + r) + 10^{-2n}.$$

Bei positiven reellen Zahlen r, s mit $r + s \leq 10^k < 10^n$ weicht daher das mit n Stellen hinter dem Komma errechnete Produkt vom wahren Wert von $r \cdot s$ nach um höchstens $10^{-(n-k)}$ nach unten ab. Das Ergebnis ist also auf $n - k$ Stellen hinter dem Komma genau.

Beispiel 3: Komplexe Zahlen \mathbb{C} : Im 16. Jahrhundert fanden italienische Mathematiker die *Cardanosche Formel*⁴² zur Lösung von Gleichungen der Form $x^3 + ax = b$ (*kubische Gleichungen*, vgl. „Zahl und Funktion“, S. 48). Diese war jedoch nicht immer anwendbar; in manchen Fällen kamen in der Nebenrechnung Größen mit negativem Quadrat vor. Solche Zahlen „gibt es nicht“; Quadrate reeller Zahlen sind durchweg positiv oder Null. Um 1570 fand R. Bombelli⁴³ einen Ausweg: Er stellte sich einfach vor, es gäbe doch Zahlen mit negativem Quadrat, wandte die üblichen Rechenregeln an und kam zu korrekten (reellen) Lösungen der kubischen Gleichung. Genau genommen brauchte er nur eine einzige neue Zahl, nämlich die, deren Quadrat -1 ist; sie wurde später mit dem Buchstaben i (für „*imaginär*“) bezeichnet. Da es auf der Zahlengeraden für i keinen Platz gibt, muss man sich i neben der Zahlengeraden vorstellen, also in einer zweiten Dimension. Aus der Zahlengeraden wird so die *Gaußsche Zahlenebene*.⁴⁴ Insgesamt erhält man damit die Menge der *komplexen Zahlen* (vgl. „Zahl und Funktion“, S. 51)

$$(13) \quad \mathbb{C} = \{s + ti; s, t \in \mathbb{R}\}.$$



⁴¹Die Überlegungen dazu gehen im Grundsatz auf *Eudoxos von Knidos* zurück, (ca. 408-355 v.Chr., Knidos, Kleinasien). Er und *Archimedes von Syrakus* (287-212 v.Chr) waren die bedeutendsten Mathematiker der Antike.

⁴²Girolamo Cardano (1501-1576, Mailand, Pavia) hat diese Formel im Jahre 1545 zum ersten Mal veröffentlicht; gefunden wurde sie von Scipione del Ferro (1465-1526, Bologna) und Nicolo Tartaglia (1499-1557, Brescia, Venedig).

⁴³Raffaele Bombelli, 1526 (Bologna) - 1572 (vermutlich Rom)

⁴⁴Johann Carl Friedrich Gauß, 1777-1855, Braunschweig, Göttingen

Mit den üblichen Rechenregeln sowie $i \cdot i = -1$ ergibt sich:⁴⁵

$$(14) \quad \begin{aligned} (s + ti) \pm (u + vi) &= s \pm u + (t \pm v)i, \\ (s + ti) \cdot (u + vi) &= su - tv + (sv + tu)i, \\ (s + ti)^{-1} &= \frac{s}{s^2 + t^2} + \frac{-t}{s^2 + t^2}i. \end{aligned}$$

Beispiel 4: *Rationale Funktionen* $\mathbb{R}(x)$: Nicht nur mit Zahlen kann man rechnen, sondern auch mit Funktionen. Die rechnerisch einfachsten Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die *Polynome*, z.B. $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 1$, allgemein

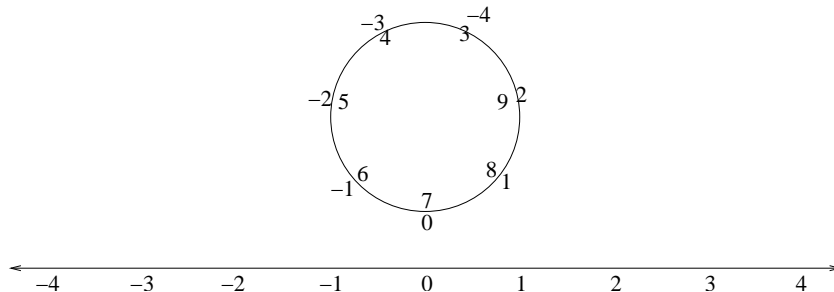
$$(15) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit gegebenen Zahlen („*Koeffizienten*“) $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Man kann sie addieren, subtrahieren und miteinander multiplizieren, aber die Division ist nicht immer möglich; Quotienten von Polynomen f/g sind gewöhnlich keine Polynome mehr. Sie bilden vielmehr eine größere Funktionenklasse, die *rationalen Funktionen*; in den Nullstellen des Nenners können sie *Pole* besitzen. Die Menge der rationalen Funktionen

$$(16) \quad \mathbb{R}(x) := \{f/g; f, g \text{ Polynome}\}$$

bildet wieder einen Körper; es gelten dieselben Rechenregeln (11) wie für rationale Zahlen.

Beispiel 5: *Endliche Körper* \mathbb{F}_p : Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ bilden keinen Körper: Man kann ganze Zahlen zwar beliebig addieren, subtrahieren und miteinander multiplizieren, aber nicht beliebig dividieren; $1/4$ oder $2/3$ sind keine ganzen Zahlen mehr. Erstaunlicherweise kann sich dieser Befund ändern, wenn wir die ganzen Zahlen nicht wie gewöhnlich auf einer Geraden anordnen, sondern im Kreis, so dass nach einer Runde immer zwei Zahlen aufeinanderfallen, wobei wir Zahlen, die auf der Kreislinie an derselben Stelle stehen, als „gleich“ ansehen.



⁴⁵Wir verzichten jetzt oft auf den Punkt \cdot beim Produkt.

Auf dem Kreis in unserer Figur wird jede siebte Zahl als gleich angesehen, also beispielsweise 1 und 8 oder 2 und 9, wie bei den Wochentagen: Jeder siebte Tag hat den gleichen Namen (z.B. Freitag). Mit diesem „Trick“ finden wir dann doch eine ganze Zahl x mit „ $4 \cdot x = 1$ “, nämlich $x = 2$, weil $4 \cdot 2 = 8$ und 8 nach unserer Regel dasselbe ist wie 1. Ebenso erfüllt $y = 3$ die Gleichung „ $3 \cdot y = 2$ “, denn $3 \cdot 3 = 9$, und 9 wird mit 2 gleichgesetzt. Man nennt dies eine Rechnung *modulo* 7. In diesem Sinne (modulo 7) gelten die merkwürdigen Gleichungen „ $4 \cdot 2 = 1$ “ und „ $3 \cdot 3 = 2$ “ oder gar „ $1/4 = 2$ “ und „ $3/2 = 5$ “. Aus verständlichen Gründen schreibt man das meistens nicht so, sondern führt dafür ein neues Symbol ein: $4 \cdot 2 \equiv 1 (7)$ und $3 \cdot 3 \equiv 2 (7)$ (sprich: $4 \cdot 2$ ist *kongruent zu 1 modulo 7* und $3 \cdot 3$ ist *kongruent zu 2 modulo 7*).

Dass jede siebte Zahl als gleich angesehen wird, kann man auch so ausdrücken: Zwei Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ werden modulo 7 genau dann als gleich (kongruent) angesehen ($p \equiv q (7)$), wenn $p - q$ ein ganzes Vielfaches von 7 ist, oder noch anders ausgedrückt, wenn p und q bei Division durch 7 den gleichen Rest lassen, zum Beispiel $2 : 7 = 0$ Rest 2 und $9 : 7 = 1$ Rest 2. Die Mengen kongruenter Zahlen modulo 7, wie beispielsweise $\{\dots, -10, -3, 4, 11, \dots\}$, werden deshalb oft auch als *Restklassen modulo 7* bezeichnet.

Für jede natürliche Zahl⁴⁶ p kann man „modulo p “ rechnen; statt unendlich vieler Zahlen gibt es dann nur noch p Restklassen modulo n . Einen Körper erhält man dann und nur dann, wenn p eine *Primzahl* ist, also durch keine kleinere natürliche Zahl außer der Eins teilbar ist.⁴⁷ Man bezeichnet diesen Körper mit \mathbb{F}_p .⁴⁸

Jeder Körper hat mindestens zwei verschiedene Elemente, 0 und 1, und in der Tat gibt es einen kleinsten Körper, der kein weiteres Element mehr enthält, nämlich \mathbb{F}_2 . Die Rechenregeln sind denkbar einfach: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Die Zahlen 0 und 1 stehen hier für die beiden Restklassen modulo 2, „gerade“ und „ungerade“, und deren Rechenregeln kennen wir schon lange: gerade + gerade = gerade, gerade + ungerade = ungerade usw. Ganz ähnlich gibt es auch einen Körper $\mathbb{F}_3 = \{1, 0, -1\}$ mit drei Elementen und der etwas merkwürdigen Rechenregel $1 + 1 = -1$. Die drei Zahlen 0, 1, -1 stehen für die drei Restklassen modulo 3: die durch 3 teilbaren Zahlen wie z.B. 0, 3, 6, 9, die um Eins darüberliegenden wie 1, 4, 7, 10 und die um Eins darunterliegenden wie -1, 2, 5, 8.

⁴⁶Die *natürlichen Zahlen* sind die positiven ganzen Zahlen. Ihre Menge wird mit \mathbb{N} bezeichnet: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

⁴⁷Preisaufgabe für Weihnachten: Man zeige dies!

⁴⁸Der Buchstabe \mathbb{F} steht für die englische Bezeichnung „field“ für „Körper“.

8. VEKTORRÄUME

Definition: Ein *Vektorraum über einem Körper* \mathbb{K} (kurz: \mathbb{K} -Vektorraum) ist eine abelsche Gruppe $(V, 0, +, -)$ mit Skalarmultiplikation über \mathbb{K} , d.h. mit einer Abbildung $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$, $(s, v) \mapsto s \cdot v = sv$ mit den Rechenregeln

- S1:** $1 \cdot v = v$,
S2: $s(tv) = (st)v$,
S3: $(s + t)v = sv + tv$,
S4: $s(v + w) = sv + sw$

für alle $v, w \in V$ und $s, t \in \mathbb{K}$.

Definition: Ein *Unterraum* eines Vektorraums V (über dem Körper \mathbb{K}) ist eine Teilmenge $U \subset V$, die selbst ein Vektorraum (über \mathbb{K}) ist, weil sie unter der Addition und der Skalarmultiplikation erhalten bleibt: Für alle Elemente $u, u' \in U$ und alle $s \in \mathbb{K}$ gilt:

- UR1:** $0 \in U$,
UR2: $u + u' \in U$,
UR3: $su \in U$.

Beispiel 0: Die Punkte der Ebene und des Raumes mit einem ausgezeichneten Punkt, dem Ursprung („Origo“) 0 , bilden jeweils einen Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen. Die Gesetze der abelschen Gruppe G0-G3 sowie der Skalarmultiplikation S1-S4 folgen aus der Geometrie, wie wir teilweise gesehen haben. Es ist zwar nicht leicht präzise auszudrücken, was genau unter „Ebene“ und „Raum“ zu verstehen ist (obschon wir alle in etwa die gleiche Vorstellung davon zu haben scheinen); dennoch wird dieses Beispiel uns begleiten, denn allgemeingültige Sätze über Vektorräume und deren Beweisideen lassen sich daran am besten veranschaulichen.

Beispiel 1: Das n -fache kartesische Produkt eines Körpers \mathbb{K} , d.h. die Menge⁴⁹

$$(17) \quad \mathbb{K}^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}\},$$

ist ein \mathbb{K} -Vektorraum:

$$(18) \quad \begin{aligned} 0 &= (0, \dots, 0) \\ (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ s \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (sx_1, \dots, sx_n) \end{aligned}$$

für alle $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $s \in \mathbb{K}$. Die Vektorraum-Gesetze folgen unmittelbar aus den Körperaxiomen: G0-G3 aus K1

⁴⁹Rekursive Definition: $\mathbb{K}^1 = \mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{n+1} = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

sowie S1, S2 aus K2 und S3, S4 aus K3. Im Abschnitt 6 ist dieser Vektorraum für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ schon einmal vorgekommen und diente für $n = 2$ und $n = 3$ als Modell für Ebene und Raum mit Hilfe kartesischer *Koordinaten*, vgl. (6). Wir werden sehen, dass *jeder* (endlich erzeugte) Vektorraum über \mathbb{K} auf dieses Modell zurückgeführt werden kann.

Beispiel 2: Für eine beliebige Menge T wollen wir mit $F(T)$ die Abbildungen von T in den Körper \mathbb{K} („*Funktionen* auf T “) bezeichnen:

$$(19) \quad F(T) = \{f; f : T \rightarrow \mathbb{K}\}$$

Die Menge $F(T)$ ist ein \mathbb{K} -Vektorraum: Das Neutralelement ist die Konstante⁵⁰ 0 , und die Summe $f + g$ von zwei Funktionen $f, g \in F(T)$ und das Produkt sf mit der Konstanten $s \in \mathbb{K}$ sind wie üblich definiert:

$$(20) \quad \begin{aligned} 0(t) &= 0, \\ (f + g)(t) &= f(t) + g(t), \\ (sf)(t) &= s \cdot f(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in T$. Die Vektorraum-Gesetze folgen sofort aus den Rechengesetzen für \mathbb{K} , da $f(t), g(t) \in \mathbb{K}$ für alle $t \in T$. Ist $T = \{1, \dots, n\}$, dann ist $F(T) = \mathbb{K}^n$; wir haben lediglich die Funktionen anders benannt, x statt f , und ihre Werte heißen x_1, \dots, x_n statt $x(1), \dots, x(n)$.

Beispiel 3: Ein *Polynom vom Grad $\leq n$* ist eine Funktion $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, also $f \in F(\mathbb{K})$, das folgendermaßen definiert ist:

$$(21) \quad f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

für alle $t \in \mathbb{K}$, wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ Konstanten sind, genannt die *Koeffizienten* des Polynoms (vgl. (15)). Die Polynome vom Grad $\leq n$ bilden einen *Unterraum* $P_n(\mathbb{K})$ von $F(\mathbb{K})$: Die Konstante 0 gehört dazu (alle ihre Koeffizienten sind Null), mit f ist auch $sf \in P_n(\mathbb{K})$, da

$$(sf)(t) = sa_n t^n + \dots + sa_1 t + sa_0$$

und mit $f, g \in P_n(\mathbb{K})$ ist auch $f + g \in P_n(\mathbb{K})$, denn falls $g(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$, so ist

$$(f + g)(t) = (a_n + b_n)t^n + \dots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0).$$

9. BASIS UND DIMENSION

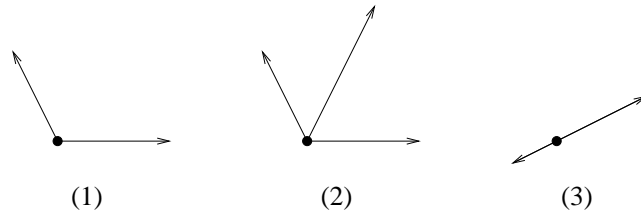
Definition 1: Eine endliche Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ eines \mathbb{K} -Vektorraums V heißt *Erzeugendensystem*, wenn sie den ganzen Raum

⁵⁰Eine *Konstante* ist eine Funktion, die alles auf einen einzigen Wert abbildet.

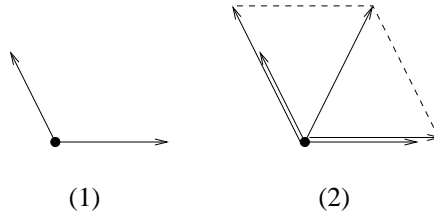
V „aufspannt“, das heißt, wenn jeder Vektor $v \in V$ Summe von skalaren Vielfachen von a_1, \dots, a_r ist:

$$(22) \quad v = s_1 a_1 + \dots + s_r a_r$$

mit $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{K}$.⁵¹ Die rechte Seite von (22) nennt man eine *Linearkombination* der Vektoren a_1, \dots, a_r . Ein Erzeugendensystem A von V ist also dadurch gekennzeichnet, dass jeder Vektor $v \in V$ sich als Linearkombination der Elemente von A schreiben lässt.



In der vorstehenden Figur sind (1) und (2) Erzeugendensysteme der Ebene, (3) aber nicht: Der Aufspann von (3) ist nicht der ganze Raum, sondern ein echter *Unterraum*, in diesem Fall eine Gerade. Aber auch zwischen (1) und (2) gibt es einen Unterschied: Das Erzeugendensystem (2) ist nicht *minimal*, kann noch verkleinert werden; es enthält sozusagen überflüssige Vektoren, denn es bleibt ein Erzeugendensystem auch nach Entfernen von einem der drei Vektoren. Dieser kann nämlich durch die anderen beiden erzeugt werden, d.h. er ist selbst Linearkombination der beiden anderen und somit überflüssig.



Das gilt allgemein: Wenn ein Erzeugendensystem nicht minimal ist, dann ist mindestens ein Element überflüssig, nämlich selbst Linearkombination der übrigen Elemente.

Definition 2: Eine Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_r\} \subset V$ heißt *linear abhängig*, wenn sich mindestens ein Element von A als Linearkombination der übrigen Elemente schreiben lässt, oder mit anderen Worten,

⁵¹Für Summen mit vielen Summanden wie $s_1 a_1 + \dots + s_r a_r$ verwendet man gerne die abkürzende Schreibweise $\sum_{i=1}^r s_i a_i$ („Summe $i = 1$ bis n $s_i a_i$). Der Index i ist dabei ein Platzhalter für die Zahlen $1, \dots, r$, die nacheinander für i eingesetzt werden; die so entstehenden Terme $s_1 a_1, s_2 a_2$ usw. werden dann alle addiert.

wenn es Skalare $s_1, \dots, s_r \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, mit

$$(23) \quad s_1 a_1 + \dots + s_r a_r = 0.$$

Der Gegenbegriff ist *linear unabhängig*: Die Menge A ist *linear unabhängig*, wenn es *keinen* solchen Satz von Skalaren s_1, \dots, s_r mit (23) gibt, oder anders ausgedrückt, eine *lineare Beziehung* der Form (23), $\sum_{i=1}^r s_i a_i = 0$, kann nur *trivial* sein, d.h. alle $s_i = 0$.

Definition 3: Eine *Basis* von V ist ein linear unabhängiges (d.h. minimales) Erzeugendensystem.

Satz 9.1. *Wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt, dann gibt es auch eine Basis.*

Beweis. Wir entfernen aus einem Erzeugendensystem A solange überflüssige Elemente, bis es linear unabhängig wird und wir deshalb kein weiteres Element mehr entfernen können ohne die Eigenschaft „Erzeugendensystem“ zu verletzen. \square

Satz 9.2. *Alle Basen eines Vektorraums V haben gleich viele Elemente.*

Beweis. Gegeben zwei Basen $B, C \subset V$ mit⁵² $|B| = n \leq |C|$. Wir wollen alle Elemente von B eins nach dem anderen durch Elemente von C ersetzen und doch immer ein Erzeugendensystem behalten. Weil B eine Basis ist, lässt sich jedes Element von V , also auch $c_1 \in C \subset V$ als Linearkombination (der Elemente) von B schreiben:

$$(24) \quad c_1 = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n.$$

Da $c_1 \neq 0$, ist wenigstens eine der Zahlen s_1, \dots, s_n ungleich Null. Ohne Einschränkung (ggf. nach Umnummerierung der Elemente von B) sei $s_1 \neq 0$. Dann können wir die Gleichung (24) nach b_1 auflösen und somit umgekehrt b_1 durch c_1, b_2, \dots, b_n darstellen:

$$(25) \quad b_1 = s_1^{-1} \cdot (c_1 - s_2 b_2 - \dots - s_n b_n).$$

Also lässt sich b_1 aus B entfernen und durch c_1 ersetzen; die so veränderte Menge $B_1 = \{c_1, b_2, \dots, b_n\}$ bleibt ein Erzeugendensystem, denn jedes Element von B liegt im Aufspann⁵³ von B_1 . Diesen Schritt wiederholen wir nun mit B_1 anstelle von B : Da B_1 Erzeugendensystem ist, können wir c_2 als Linearkombination von B_1 darstellen:

$$(26) \quad c_2 = t_1 c_1 + t_2 b_2 + \dots + t_n b_n.$$

⁵²Die Anzahl der Elemente einer Menge M bezeichnen wir mit $|M|$.

⁵³Der *Aufspann* von B_1 besteht aus allen Linearkombinationen von B_1 .

Wenigstens eine der Zahlen t_2, \dots, t_n ist ungleich Null, denn sonst bestünde die nicht triviale lineare Beziehung $c_2 = t_1 c_1$, aber C ist linear unabhängig! Wieder dürfen wir (nach Ummummerierung) annehmen, dass $t_2 \neq 0$ ist. Damit können wir die Gleichung (26) nach b_2 auflösen,

$$(27) \quad b_2 = t_2^{-1} \cdot (c_2 - t_1 c_1 - t_3 b_3 - \dots - t_n b_n),$$

und b_2 ist im Aufspann von $B_2 := \{c_1, c_2, b_3, \dots, b_n\}$. Also ist B_2 Erzeugendensystem, denn jedes Element von B_1 liegt in B_2 oder seinem Aufspann. Diesen Austauschprozess wiederholen wir nun solange, bis alle Elemente von B durch solche von C ersetzt sind; jedesmal bleibt die Menge ein Erzeugendensystem mit n Elementen. Nach n Schritten erhalten wir also ein Erzeugendensystem $B_n = \{c_1, \dots, c_n\} \subset C$. Gäbe es ein weiteres Element $c_{n+1} \in C$, so wäre dieses bereits Linearkombination von B_n und C wäre nicht linear unabhängig! Also ist $|C| = |B|$. \square

Satz 9.3. *Ist $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ eine Basis, so gibt es für jeden Vektor $v \in V$ eindeutig bestimmte Elemente $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}$ mit*

$$(28) \quad v = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n,$$

wir können also die Skalare s_1, \dots, s_n als Koordinaten des Vektors v auffassen.

Beweis. Weil B ein Erzeugendensystem ist, lässt sich v in der Form (28) darstellen. Gibt es eine zweite solche Darstellung,

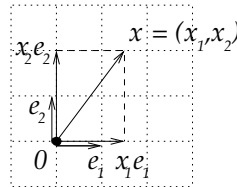
$$v = t_1 b_1 + \dots + t_n b_n,$$

dann ergibt die Differenz dieser Gleichung zu (28):

$$(t_1 - s_1)b_1 + \dots + (t_n - s_n)b_n = 0.$$

Weil aber B linear unabhängig ist, müssen dann die Skalare $t_i - s_i$ alle gleich Null sein und damit gilt $t_i = s_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Beispiel: Die *Standardbasis* E im Vektorraum $V = \mathbb{K}^n$ besteht aus den Vektoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ (*Standard-Einheitsvektoren*). E ist ein Erzeugendensystem, denn für jedes $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,⁵⁴



⁵⁴In der Figur ist $x_1 = 3/2$ und $x_2 = 2$.

und E ist linear unabhängig, denn wenn eine lineare Beziehung $0 = s_1e_1 + \dots + s_n e_n = (s_1, \dots, s_n)$ besteht für irgendwelche $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}$, dann ist $(s_1, \dots, s_n) = 0$ und damit $s_1 = \dots = s_n = 0$.

Eine Basis definiert uns ein Koordinatensystem für den Vektorraum V , wie wir es für die Ebene bereits im Abschnitt 6 gesehen haben. Die Anzahl der Koordinaten ist gleich der Anzahl der Basiselemente; z.B. 2 für die Ebene und 3 für den Raum. Allgemein heißt diese Zahl die *Dimension* von V .

Definition 4: Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum, so bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer (beliebigen) Basis als *Dimension*, $\dim V$. Der triviale Vektorraum $\{0\}$ hat die Dimension Null. Wenn ein Vektorraum kein endliches Erzeugendensystem besitzt, nennen wir ihn *unendlich-dimensional*.⁵⁵

Satz 9.4. Basisergänzungssatz: *V sei ein Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem A . Dann lässt sich jede linear unabhängige Teilmenge $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ mit Elementen von A zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. Wenn C schon ein Erzeugendensystem ist, sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein Element $a_1 \in A$, das nicht im Aufspann von C liegt. Dann ist $C_1 := C \cup \{a_1\}$ immer noch linear unabhängig, d.h. jede lineare Beziehung zwischen den Elementen von C_1 der Form

$$sa_1 + s_1c_1 + \dots + s_r c_r = 0 \quad (*)$$

mit $s, s_1, \dots, s_r \in \mathbb{K}$ muss trivial sein: $s = s_1 = \dots = 0$. Wäre nämlich $s \neq 0$, dann könnten wir $(*)$ umschreiben zu

$$a_1 = s^{-1} \cdot (s_1c_1 + \dots + s_r c_r)$$

und a_1 läge doch im Aufspann von C . Also ist $s = 0$ und $(*)$ wird zu

$$s_1c_1 + \dots + s_r c_r = 0,$$

aber da C linear unabhängig ist, muss auch $s_1 = \dots = s_r = 0$ gelten.

Diesen Schritt wiederholen wir nun mit der linear unabhängigen Menge C_1 anstelle von C : Entweder ist C_1 bereits ein Erzeugendensystem und damit eine Basis, oder eine Erweiterung $C_2 := C_1 \cup \{a_2\}$ durch ein zweites Element $a_2 \in A$ ist immer noch linear unabhängig, usw. Da A nur endlich viele Elemente enthält, sind wir nach einer endlichen Zahl von Schritten fertig, d.h. wir haben C zu einer Basis von V erweitert. \square

⁵⁵Beispiele unendlich dimensionaler Vektorräume sind der Raum aller Polynome (ohne Beschränkung des Grades) und der Raum $F(T)$ aller Funktionen $f : T \rightarrow \mathbb{K}$, falls die Menge T unendlich ist.

10. UNTERRÄUME UND KOMPLEMENTE

Satz 10.1. Für jeden echten⁵⁶ Unterraum $U \subset V$ gilt $\dim U < \dim V$.

Beweis. Andernfalls gäbe es in U eine linear unabhängige Teilmenge $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ mit $n = |C| = \dim V$. Diese könnte nach Satz 9.4 mit Hilfe eines Erzeugendensystems A von V zu einer Basis von V ergänzt werden, die damit mehr als n Elemente hätte, Widerspruch!⁵⁷ \square

Satz 10.2. Sind $U, W \subset V$ Unterräume, so sind auch $U \cap W$ und $U + W$ Unterräume, wobei

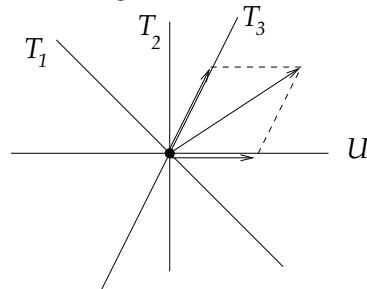
$$(29) \quad U + W := \{u + w; u \in U, w \in W\} \subset V.$$

Beweis. Für $U + W$: Es ist $0 = 0 + 0 \in U + W$. Mit $u + w, \tilde{u} + \tilde{w} \in U + W$ ist auch $u + w + \tilde{u} + \tilde{w} = (u + \tilde{u}) + (w + \tilde{w}) \in U + W$, und mit $u + w \in U + W$ und $s \in \mathbb{K}$ ist $s(u + w) = su + sw \in U + W$. \square

Definition: Ein (Vektorraum-)Komplement eines Unterraums $U \subset V$ ist ein Unterraum $T \subset V$ mit

$$(30) \quad U \cap T = \{0\}, \quad U + T = V.$$

Man schreibt dann oft $V = U \oplus T$.



Verschiedene Komplemente zu U

Satz 10.3. Jeder Unterraum U eines endlich dimensionalen Vektorraums V besitzt ein Komplement T , und für jedes Komplement T gilt:

$$(31) \quad \dim V = \dim U + \dim T.$$

⁵⁶„echt“ soll heißen, dass U nicht bereits ganz V ist.

⁵⁷Genau genommen müssen wir den Beweis an einer Stelle ergänzen. Es wäre ja zunächst denkbar, dass U unendlich dimensional ist, obwohl V endliche Dimension hat. Aber dann gäbe es für jede natürliche Zahl k eine linear unabhängige Teilmenge $C \subset U$ mit $|C| = k$: Eine endliche linear unabhängige Teilmenge $C \subset U$ wäre ja noch keine Basis von U und könnte daher durch ein weiteres Element $u \in U$ (das nicht im Aufspann von C liegt) zu einer linear unabhängigen Teilmenge $C' = C \cup \{u\}$ mit einem Element mehr vergrößert werden. Insbesondere enthielte U eine linear unabhängige Teilmenge mit n Elementen, und das ist die Eigenschaft, die wir im Beweis verwenden.

Beweis. Mit Satz 9.4 ergänzen wir eine Basis $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ von U zu einer Basis $B = C \cup \{a_1, \dots, a_m\}$ von V , indem wir Elemente a_1, \dots, a_m aus einer beliebigen Basis von V hinzunehmen. Wir definieren T als den Aufspann von $\{a_1, \dots, a_m\}$. Dann gilt $U + T = V$, denn der Unterraum $U + T$ enthält die Basis B von V . Andererseits ist $U \cap T = \{0\}$, denn jedes $v \in U \cap T$ besitzt zwei Darstellungen: $v = s_1c_1 + \dots + s_kc_k \in U$ und $v = t_1a_1 + \dots + t_ma_m \in T$, und somit gilt zwischen den Elementen der Basis B die lineare Beziehung

$$(32) \quad s_1c_1 + \dots + s_kc_k = t_1a_1 + \dots + t_ma_m.$$

Daher müssen die Skalare s_1, \dots, s_k und t_1, \dots, t_m alle gleich Null sein, also ist $v = 0$ und wir haben $U \cap T = \{0\}$ gezeigt.

Ist nun T irgendein Komplement zu U und A eine Basis von T , so ist $B := C \cup A$ eine Basis von V : Da $V = U + T$, ist B ein Erzeugendensystem. Wenn eine lineare Beziehung der Form (32) zwischen den Elementen von B besteht, so ist die linke Seite in U , die rechte in T , somit liegen beide Seiten von (32) in $U \cap T = \{0\}$ und sind daher gleich Null. Damit haben wir lineare Beziehungen $s_1c_1 + \dots + s_kc_k = 0$ zwischen den Elementen von C und $t_1a_1 + \dots + t_ma_m = 0$ zwischen den Elementen von A ; weil beide Mengen linear unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten s_1, \dots, s_k und t_1, \dots, t_m gleich Null sein. Daher ist B linear unabhängig, also eine Basis. \square

Satz 10.4. *Sind U und W endlich dimensionale Unterräume eines Vektorraums V , so gilt*

$$(33) \quad \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

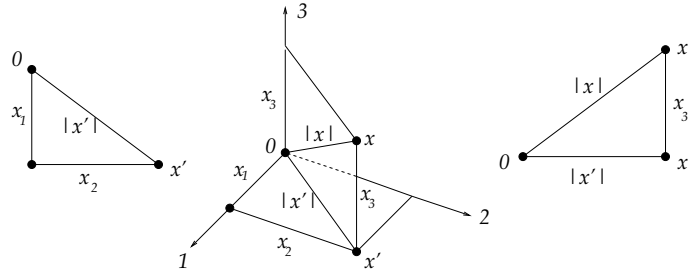
Beweis. Im Vektorraum U wählen wir ein Komplement T zum Unterraum $U \cap W \subset U$, also (a) $U = T \oplus (U \cap W)$. Dann ist T zugleich ein Komplement zum Unterraum W im Vektorraum $U + W$, d.h. es gilt auch (b) $U + W = T \oplus W$. Denn $T + W = T + (U \cap W) + W = U + W$ und $T \cap W = \{0\}$, weil $T \cap W \stackrel{T \subset U}{=} T \cap U \cap W = \{0\}$. Mit dem voranstehenden Satz folgt aus (b) $\dim(U + W) = \dim T + \dim W$ und aus (a) $\dim U = \dim T + \dim(U \cap W)$, also $\dim T = \dim U - \dim(U \cap W)$. Dies in $\dim(U + W) = \dim T + \dim W$ eingesetzt ergibt (33). \square

Beispiel: Zwei Ebenen U, W durch den Ursprung im Raum $V = \mathbb{R}^3$ sind entweder gleich oder sie haben eine Schnittgerade. Denn da $U \subset U + W \subset V$, folgt $2 = \dim U \leq \dim U + W \leq \dim V = 3$. Ist $\dim U + W = 2$, so ist $U + W = U$ und damit $W \subset U$, also $W = U$ (gleiche Dimension). Ist $\dim(U + W) = 3$, also $U + W = V$, folgt $\dim U \cap W = 1$ aus (33).

11. SKALARPRODUKTE

Im Abschnitt 5 haben wir den Vektorraumbegriff aus der Geometrie der Ebene abstrahiert. Dabei wurden geometrische Konzepte wie Punkt, Gerade, Parallele verwendet. Ein wesentlicher Bereich der Geometrie blieb aber noch weitgehend unberücksichtigt, das Messen von Abständen und Winkeln. Dazu ist ein weiterer Begriff erforderlich, das *Skalarprodukt*.

In der Ebene oder im Raum ist der *Abstand* eines Punktes x vom Ursprung 0 , die *Länge* der Strecke $\overline{0x}$ oder des Vektors x , wird mit $|x|$ bezeichnet und nach dem Satz des *Pythagoras*⁵⁸ aus den Koordinaten von x berechnet: Für einen ebenen Vektor $x = (x_1, x_2)$ ist $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Für einen räumlichen Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)$ berechnen wir erst die Länge des „Schattens“ (der *Projektion*) x' von x in der x_1x_2 -Ebene,



$|x'| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, und dann die Länge von x aus dem rechtwinkligen Dreieck $(0, x', x)$:

$$|x| = \sqrt{|x'|^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

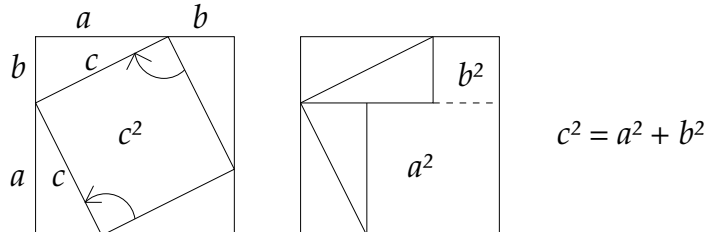
Analog definieren wir die *Länge eines Vektors* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(34) \quad |x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

mit der Abkürzung

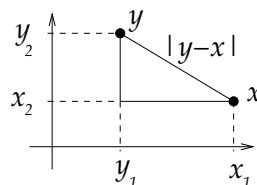
$$(35) \quad x \cdot y := x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

⁵⁸Hier der indische Beweis:

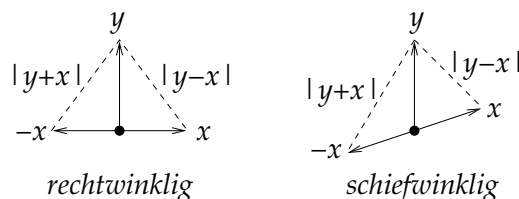


für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$. Der *Abstand* von zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ wird als Länge des Differenzvektors definiert:

$$(36) \quad |y - x| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$



Die eben eingeführte Hilfsgröße $x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ wird als *Skalarprodukt* der Vektoren x und y bezeichnet; es ist eine merkwürdige Operation, die zwei Vektoren x, y einen *Skalar* (eine reelle Zahl) $x \cdot y$ zuordnet. Damit lassen sich nicht nur Längen und Abstände berechnen, sondern auch *Winkel*. Besonders einfach sieht man das beim rechten Winkel (90°). Aus der Geometrie wissen wir, wann zwei Vektoren x und y *senkrecht* (*orthogonal*, *rechtwinklig*) sind, $x \perp y$, nämlich wenn die Abstände von y zu x und zu $-x$ gleich sind, $|y-x| = |y-(-x)| = |y+x|$.



Dies lässt sich sehr einfach mit Hilfe des Skalarprodukts ausdrücken: $x \perp y \iff |y+x|^2 = |y-x|^2 \iff (y+x) \cdot (y+x) = (y-x) \cdot (y-x) \iff y \cdot y + x \cdot x + 2y \cdot x = y \cdot y + x \cdot x - 2y \cdot x \iff y \cdot x = 0$. Wir werden deshalb zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ *senkrecht* oder *orthogonal* nennen, wenn $x \cdot y = 0$.

Beim Berechnen des Skalarprodukts werden wir im Folgenden gar nicht mehr auf die Definition (35) zurückgreifen, sondern nur noch auf die grundlegenden Eigenschaften (*Rechenregeln*), die sofort daraus abgeleitet werden können: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{SP1: } x \cdot y = y \cdot x,$$

$$\text{SP2: } (sx) \cdot y = s(x \cdot y) = x \cdot (sy),$$

$$\text{SP3: } (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

$$\text{SP4: } x \cdot x \geq 0 \text{ und } [x \cdot x = 0 \iff x = 0].$$

Definition: Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Ein *Skalarprodukt auf V* ist eine Abbildung $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften SP1 - SP4 für alle $x, y, z \in V$ und $s \in \mathbb{R}$.

Beispiele:

- (1) $V = \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ (*kanonisches Skalarprodukt*).
- (2) $V =$ Unterraum von \mathbb{R}^n : Das Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist auch ein Skalarprodukt auf jedem Unterraum V .
- (3) $V = P_n(\mathbb{R})$, $f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Definition: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so definieren wir für jedes $v \in V$ die *Länge* oder *Norm* $|v|$ als

$$(37) \quad |v| := \sqrt{v \cdot v}.$$

Wir nennen zwei Elemente $v, w \in V$ *orthogonal* (*senkrecht*), wenn ihr Skalarprodukt gleich Null ist:

$$(38) \quad v \perp w : \iff v \cdot w = 0.$$

Satz 11.1. Cauchy-Schwarz-Ungleichung: *Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so gilt für alle $v, w \in V$ die Ungleichung*

$$(39) \quad v \cdot w \leq |v| |w|.$$

Beweis. Wir erinnern zunächst an quadratische Funktionen (Parabeln): Wann liegt die Parabel $y = ax^2 + 2bx + c$ mit $a > 0$ oberhalb der x -Achse, d.h. wann ist $y \geq 0$ (oder noch besser $ay \geq 0$) für alle $x \in \mathbb{R}$? Wir können die Nullstellen berechnen oder gleich die rechte Seite mit Hilfe der quadratischen Ergänzung b^2 in Quadrate zerlegen:

$$\begin{aligned} ay &= a^2x^2 + 2bax + ac \\ &= a^2x^2 + 2bax + b^2 - b^2 + ac \\ &= (ax + b)^2 + ac - b^2 \end{aligned}$$

und damit $y \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $ac - b^2 \geq 0$.

Dies wenden wir an auf den quadratischen Ausdruck

$$y = |sv + w|^2 = (sv + w) \cdot (sv + w) = |v|^2s^2 + 2(v \cdot w)s + |w|^2,$$

in dem s die Rolle der Variablen x spielt, mit den Koeffizienten $a = |v|^2$, $b = v \cdot w$, $c = |w|^2$. Wir dürfen $v \neq 0$ voraussetzen (sonst sind beide Seiten von (39) gleich Null), also ist $a = |v|^2 > 0$. Da $y \geq 0$ für alle s , folgt $ac - b^2 \geq 0$, d.h. $|v|^2|w|^2 - (v \cdot w)^2 \geq 0$, also $|v|^2|w|^2 \geq (v \cdot w)^2$ und damit auch $|v||w| \geq v \cdot w$.⁵⁹

Satz 11.2. Dreiecksungleichung: *Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so gilt für alle $v, w \in V$ die Ungleichung*

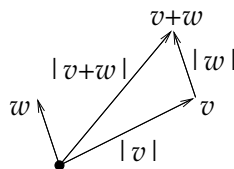
$$(40) \quad |v + w| \leq |v| + |w|.$$

⁵⁹Wir sehen auch, wann in der Ungleichung Gleichheit eintritt, $|v|^2|w|^2 = (v \cdot w)^2$ oder $ac = b^2$: Das gilt genau dann, wenn die Parabel y die x -Achse berührt, d.h. $sv + w = 0$ für ein $s \in \mathbb{R}$, also wenn w ein skalares Vielfaches von v ist, $w = -sv$.

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus dem vorigen Satz wegen

$$\begin{aligned} |v+w|^2 &= |v|^2 + |w|^2 + 2v \cdot w, \\ (|v| + |w|)^2 &= |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w|. \end{aligned}$$

□



12. ORTHONORMALSYSTEME

Die Standardbasisvektoren e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n haben eine besondere Eigenschaft in Hinblick auf das Skalarprodukt: Sie haben alle die Länge Eins und stehen aufeinander senkrecht. Wir werden sehen, dass es viele Basen mit dieser Eigenschaft gibt, und zwar nicht nur in \mathbb{R}^n , sondern in *jedem* endlich dimensionalen Vektorraum V mit Skalarprodukt. Sie sind für Rechnungen besonders angenehm, wie sich zeigen wird.

Definition: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt, so heißt eine Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset V$ *Orthonormalsystem*, wenn alle Vektoren die Länge Eins haben und aufeinander senkrecht stehen: $a_i \cdot a_i = 1$, $a_i \cdot a_j = 0$ für $i \neq j$.⁶⁰ Ein Orthonormalsystem ist *linear unabhängig*, denn aus einer linearen Beziehung $s_1 a_1 + \dots + s_k a_k = 0$ folgt zum Beispiel

$$0 = (s_1 a_1 + \dots + s_k a_k) \cdot a_1 = s_1,$$

weil $a_1 \cdot a_1 = 1$ und $a_2, \dots, a_k \perp a_1$. Also gilt $s_1 = 0$, und ebenso $s_2 = 0, \dots, s_k = 0$. Ein Orthonormalsystem, das gleichzeitig eine Basis (also ein Erzeugendensystem) ist, nennen wir eine *Orthonormalbasis*.

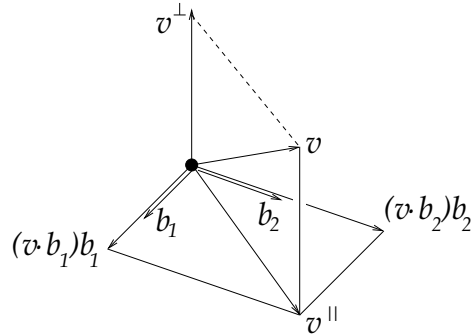
Lemma 12.1. *Es sei $B = \{b_1, \dots, b_k\} \subset V$ ein Orthonormalsystem, Für jeden Vektor $v \in V$ setzen wir*

$$(41) \quad v^{\parallel} := (v \cdot b_1)b_1 + \dots + (v \cdot b_k)b_k,$$

$$(42) \quad v^{\perp} := v - v^{\parallel}.$$

Dann steht v^{\perp} senkrecht auf b_1, \dots, b_k .

⁶⁰Kurzschreibweise: $a_i \cdot a_j = \delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$



Beweis. $v - (v \cdot b_1)b_1 \perp b_1$, denn mit $b_1 \cdot b_1 = 1$ (*) folgt

$$(v - (v \cdot b_1)b_1) \cdot b_1 = v \cdot b_1 - (v \cdot b_1)(b_1 \cdot b_1) \stackrel{(*)}{=} 0.$$

Damit gilt auch $v^\perp \perp b_1$, weil $b_2, \dots, b_k \perp b_1$. Auf die gleiche Weise zeigt man $v^\perp \perp b_2, \dots, b_k$. \square

Satz 12.1. *Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum mit Skalarprodukt und einer Orthonormalbasis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Ist $v = s_1b_1 + \dots + s_nb_n \in V$, so lassen sich die Skalare s_1, \dots, s_n leicht berechnen:*

$$(43) \quad s_j = v \cdot b_j$$

für $j = 1, \dots, n$. Das Skalarprodukt von v mit jedem Vektor $w = t_1b_1 + \dots + t_nb_n \in V$ lässt sich nach derselben Formel wie das kanonische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n berechnen:

$$(44) \quad v \cdot w = s_1t_1 + \dots + s_nt_n.$$

Beweis. Ist $v = v_1b_1 + \dots + v_nb_n$, so ist z.B. $v \cdot b_1 = v_1(b_1 \cdot b_1) + v_2(b_2 \cdot b_1) + \dots = v_1$, da $b_1 \cdot b_1 = 1$ und $b_1 \perp b_2, \dots, b_n$. Ebenso folgt $v \cdot b_j = v_j$. Für $w = w_1b_1 + \dots + w_nb_n$ gilt:⁶¹

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (v_1b_1 + \dots + v_nb_n) \cdot (w_1b_1 + \dots + w_nb_n) \\ &= v_1w_1(b_1 \cdot b_1) + v_1w_2(b_1 \cdot b_2) + \dots + v_2w_1(b_2 \cdot b_1) + \dots \\ &= v_1w_1 + \dots + v_nw_n \quad \square \end{aligned}$$

Satz 12.2. Orthonormalisierung nach Gram-Schmidt:⁶² *Zu jeder linear unabhängigen Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von V gibt es ein Orthonormalsystem $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit $\text{Aufspann}\{a_1, \dots, a_k\} =$*

⁶¹Kurzschreibweise: $v \cdot w = (\sum_i v_i b_i) \cdot (\sum_j w_j b_j) = \sum_{i,j} v_i w_j (b_i \cdot b_j) = \sum_i v_i w_i$, da $b_i \cdot b_j = \delta_{ij}$.

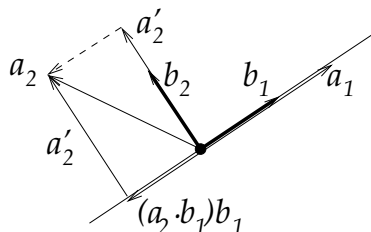
⁶²Jorgen Pedersen Gram, 1850 (Nustrup, Dänemark) - 1916 (Kopenhagen).
Erhard Schmidt, 1876 (Dorpat, jetzt Tartu, Estland) - 1959 (Berlin).
Das Verfahren stammt eigentlich bereits von
Pierre-Simon Laplace, 1749 (Beaumont-en-Auge, Normandie) - 1827 (Paris)

Aufspann $\{b_1, \dots, b_k\}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere besitzt jeder endlich dimensionale Unterraum von V eine Orthonormalbasis.⁶³

Beweis. Wir beginnen mit $b_1 = \frac{1}{|a_1|}a_1$, dann ist $\{b_1\}$ bereits ein Orthonormalsystem mit $k = 1$, und der Aufspann von b_1 (die Gerade $\mathbb{R}b_1$) ist der Aufspann von a_1 . Wie kann man weitere Vektoren b_i hinzufügen? Wenn schon ein Orthonormalsystem $\{b_1, \dots, b_{k-1}\}$ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden ist, dann definieren wir $b_k := \frac{1}{|a'_k|}a'_k$, wobei

$$a'_k = a_k - ((a_k \cdot b_1)b_1 + \dots + (a_k \cdot b_{k-1})b_{k-1}).$$

Die Vektoren a'_k und b_k stehen senkrecht auf b_1, \dots, b_{k-1} (Lemma 12.1), und damit ist auch $\{b_1, \dots, b_k\}$ ein Orthonormalsystem, das denselben Unterraum aufspannt wie $\{a_1, \dots, a_k\}$. \square



Beispiel: $V = \mathbb{R}^3$, $a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (2, 2, 1)$, $a_3 = (1, -1, 1)$. Dann ist $|a_1|^2 = 1 + 1 + 4 = 6$ und damit $b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$. Damit ist

$$\begin{aligned} a'_2 &= (2, 2, 1) - \frac{1}{6}((2, 2, 1) \cdot (1, 1, 2))(1, 1, 2) \\ &= (2, 2, 1) - \frac{1}{6}(2 + 2 + 2)(1, 1, 2) \\ &= (2, 2, 1) - (1, 1, 2) = (1, 1, -1). \end{aligned}$$

Da $|a'_2| = \sqrt{3}$ ist $b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$. Nun ist

$$\begin{aligned} (a_3 \cdot b_1)b_1 &= \frac{1}{6}((1, -1, 1) \cdot (1, 1, 2))(1, 1, 2) = \frac{1}{3}(1, 1, 2), \\ (a_3 \cdot b_2)b_2 &= \frac{1}{3}((1, -1, 1) \cdot (1, 1, -1))(1, 1, -1) = -\frac{1}{3}(1, 1, -1), \end{aligned}$$

und damit

$$a'_3 = (1, -1, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 2) + \frac{1}{3}(1, 1, -1) = (1, -1, 0),$$

also ist $|a'_3| = \sqrt{2}$ und $b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$.

Satz 12.3. Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subset V$ ein endlich dimensionaler Unterraum, so ist die Menge

$$(45) \quad U^\perp := \{v \in V; v \cdot u = 0 \ \forall u \in U\}$$

⁶³Die letzte Aussage bekommt man auch billiger: Man wählt irgendeinen Vektor $a_1 \in U \setminus \{0\}$, setzt $b_1 = a_1/|a_1|$ und $U_1 = (\mathbb{R}a_1)^\perp \cap U$, wählt $a_2 \in U_1 \setminus \{0\}$, setzt $b_2 = a_2/|a_2|$ und $U_2 = (\mathbb{R}a_1 + \mathbb{R}a_2)^\perp \cap U$ usw. Nach n Schritten hat man eine Orthonormalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von U .

ebenfalls ein Unterraum, und zwar ein Komplement zu U , genannt das orthogonale Komplement zu U .

Beweis. Es gilt⁶⁴ $0 \cdot u = 0$ für alle $u \in U$, also ist $0 \in U^\perp$. Mit $v, w \in U^\perp$ ist $v+w \in U^\perp$, denn für alle $u \in U$ gilt $(v+w) \cdot u = v \cdot u + w \cdot u = 0+0 = 0$. Ist schließlich $v \in U^\perp$ und $s \in \mathbb{R}$, so ist $v \cdot u = 0$ für alle $u \in U$ und damit $(sv) \cdot u = s(v \cdot u) = 0$, also ist $sv \in U^\perp$.

Weiterhin ist $U \cap U^\perp = \{0\}$, denn ein Vektor $v \in U \cap U^\perp$ erfüllt $v \cdot v = 0$, also $v = 0$ nach SP4. Außerdem gilt $U + U^\perp = V$, denn nach Lemma 12.1 (angewandt auf eine Orthonormalbasis von U) lässt sich jedes $v \in V$ schreiben als $v = v^\parallel + v^\perp$ mit $v^\parallel \in U$ und $v^\perp \in U^\perp$, also gilt $v \in U + U^\perp$. Damit ist U^\perp ein Komplement zu U . \square

13. LINEARE ABBILDUNGEN

Abbildungen in der Mathematik sind Zuordnungen zwischen den Elementen von zwei Mengen X und Y : Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ordnet (meist durch einen Rechenprozess) jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zu; die Zuordnungsvorschrift schreiben wir $x \mapsto f(x)$. Beispiele haben wir schon viele gesehen: die Funktionen in der Analysis (wobei X, Y Teilmengen von \mathbb{R} oder \mathbb{C} waren), die *Polynome* über einem Körper \mathbb{K} (mit $X = Y = \mathbb{K}$ und einer Zuordnungsvorschrift der Form $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$) oder auch Abbildungen endlicher Mengen, z.B. *Permutationen* wie 2413; hier ist $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$ und die Zuordnungsvorschrift $1 \mapsto 2, 2 \mapsto 4, 3 \mapsto 1, 4 \mapsto 3$. Auf jeder Menge X gibt es eine besonders langweilige Abbildung, die *identische Abbildung (Identität)* $\text{id}_X : X \rightarrow X$ mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto x$ (jedes Element wird auf sich selbst abgebildet). Für Abbildungen gibt es eine besondere Rechenoperation, die *Verkettung (Komposition)*: Zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ lassen sich zu einer neuen Abbildung $g \circ f : X \rightarrow Z$ mit der Zuordnungsvorschrift $x \mapsto g(f(x))$ *verketten*. Die identische Abbildung spielt dabei die Rolle des Neutralelements: Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist $f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f$.

Warum sind Abbildungen in der Mathematik wichtig? Ein Grund ist die *Gleichungslehre*: Dabei ist eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gegeben (z.B. $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$) sowie ein Element $y \in Y$ (z.B. $y = 1$); gesucht ist $x \in X$ mit $f(x) = y$ (im Beispiel: $x^2 - x = 1$).⁶⁵ Ein solches x (im Beispiel: $x = (1 \pm \sqrt{5})/2$) heißt *Lösung der Gleichung* $f(x) = y$.

⁶⁴In der Tat ist $0 \cdot v = 0$ für alle $v \in V$, denn $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$, also $0 \cdot v = 0$.

⁶⁵Man nennt y das *Bild* oder den *Wert* von x und x ein *Urbild* von y unter f .

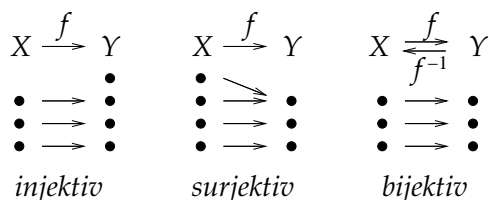
Das Auffinden von Lösungen von Gleichungen ist eine der Grundaufgaben der Mathematik. Neben der Entwicklung von Rechenverfahren sind dabei stets auch grundlegendere Fragen zu beantworten:

- Kann es mehr als eine Lösung geben? (*Eindeutigkeit*)
- Gibt es überhaupt eine Lösung? (*Existenz*)
- Gibt es genau eine Lösung? (*Existenz und Eindeutigkeit*)

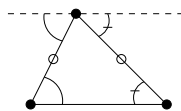
Diese Fragen spiegeln sich in Eigenschaften der Abbildung f wieder: Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt⁶⁶

- *injektiv*, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ höchstens eine Lösung $x \in X$ hat:
Ist $f(x) = y$ und $f(x') = y$, so ist $x = x'$,
- *surjektiv*, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ mindestens eine Lösung $x \in X$ hat:
Es gibt $x \in X$ mit $f(x) = y$,
- *bijektiv*, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ genau eine Lösung $x \in X$ hat,
d.h. wenn f gleichzeitig injektiv und surjektiv ist.

Im letzten Fall gibt es eine eindeutige Rück-Zuordnung $y \mapsto x$ (wobei x die Lösung der Gleichung $f(x) = y$ ist); diese definiert also eine zweite Abbildung $g : Y \rightarrow X$, $g(y) = x$, mit $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ oder $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$. Man nennt sie die *Umkehrabbildung von f* und schreibt dafür statt g meist f^{-1} . Sie macht den Rechenprozess f rückgängig.



Eine gänzlich andere Rolle spielen Abbildungen in der *Geometrie*. Oft werden sie benutzt, um geometrische Beziehungen einzusehen, etwa in unserem Eingangsbeispiel mit der Winkelsumme im Dreieck (Abschnitt 2, S. 4), wo die 180° -Drehung um die weiß markierten Punkte der Figur die Gleichheit der Winkel an der Basis und an der Parallelen zeigte.



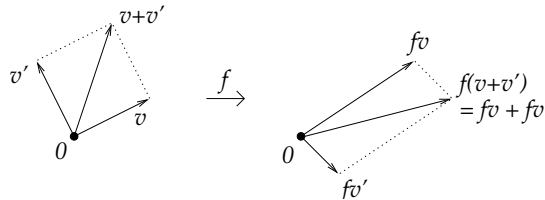
⁶⁶vgl. „Zahl und Funktion“, S. 71f

Dafür eignen sich nur Abbildungen, die die *geometrischen Strukturen* (Geraden, Parallelen, Winkel, Abstände) erhalten, wie etwa Drehungen, Spiegelungen usw. Bei Mustern und anderen geometrischen Konfigurationen dienen uns solche Abbildungen zur Präzisierung des Begriffes der *Symmetrie* (Abschnitt 3, S. 7).

Ganz entsprechend interessieren wir uns in der *linearen Algebra* für Abbildungen auf Vektorräumen, die die *Vektorraum-Struktur* erhalten, d.h. die Addition und die Skalarmultiplikation:

Definition: Gegeben seien zwei \mathbb{K} -Vektorräume V und W . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt *linear* (oder *Homomorphismus von Vektorräumen*), wenn für alle $v, v' \in V$ und $s \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(46) \quad f(v + v') = f(v) + f(v'), \quad f(sv) = s f(v)$$



Beispiel: $V = W = \mathbb{R}^2$,

$$(47) \quad f(x, y) = (x + y, x)$$

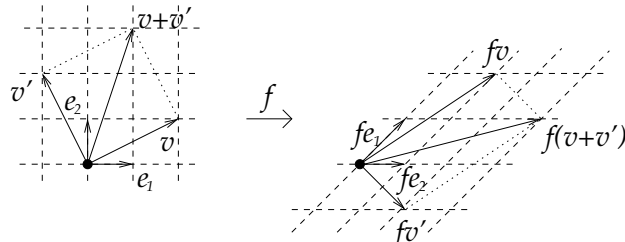
für alle $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Eigenschaft (46) ist leicht nachzurechnen: Für $v = (x, y)$ und $v' = (x', y')$ gilt:

$$\begin{aligned} f(v + v') &= f(x + x', y + y') \\ &= (x + x' + y + y', x + x'), \\ f(v) + f(v') &= (x + y, x) + (x' + y', x') \\ &= (x + y + x' + y', x + x'), \end{aligned}$$

die beiden Ergebnisse sind gleich. Dasselbe für die Skalarmultiplikation:

$$\begin{aligned} f(sv) &= f(sx, sy) = (sx + sy, sx), \\ sf(v) &= s(x + y, x) = (sx + sy, sx), \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.



Die Figur zeigt die geometrische Wirkung der Abbildung f : Das quadratische Koordinatengitter wird schief gezogen und die beiden Achsen werden vertauscht; die Bilder finden sich nun in dem schiefen Gitter an der entsprechenden Stelle wieder wie ihre Urbilder im Ausgangsgitter. Zur vollständigen Kenntnis von f reicht es deshalb, die Bilder der Basiselemente $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ zu bestimmen, also die Vektoren $f(1, 0) = (1, 1)$ und $f(0, 1) = (1, 0)$.^{67 68}

Satz 13.1. *Ist $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis⁶⁹ von V , so ist f bereits durch die n Werte $w_j := f(b_j) \in W$ für $j = 1, \dots, n$ eindeutig festgelegt. Gibt man umgekehrt n beliebige Elemente $w_1, \dots, w_n \in W$ vor, so bestimmen diese eindeutig eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $f(b_j) = w_j$ für $j = 1, \dots, n$.*

Beweis. Jeder Vektor $v \in V$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $v = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n$ mit $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}$. Ist $f : V \rightarrow W$ linear, so ist $f(v) = f(s_1 b_1 + \dots + s_n b_n) = s_1 f(b_1) + \dots + s_n f(b_n)$, also

$$(48) \quad f(v) = s_1 w_1 + \dots + s_n w_n.$$

Umgekehrt definiert (48) auch eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$; die Bedingung (46) ist nachzurechnen (Übung)! \square

14. MATRIZEN

Wir haben gesehen (Satz 13.1): Ist V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung in einen anderen Vektorraum W , so wird f bereits durch die n Vektoren

$$w_1 = f(b_1), \dots, w_n = f(b_n) \in W$$

bestimmt: Ist $v = s_1 b_1 + \dots + s_n b_n = \sum_i s_i b_i$, so ist

$$(49) \quad f(v) = s_1 f(b_1) + \dots + s_n f(b_n) = \sum_{i=1}^n s_i f(b_i).$$

⁶⁷In Zukunft werden wir die Elemente des \mathbb{R}^n nicht mehr als Zeilen, z.B. (x, y) , sondern als *Spalten* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ schreiben: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wenn wir die resultierenden Spalten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nebeneinander schreiben, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die *Matrix* von f , mit der wir alle Werte von f nach der Regel "Zeile mal Spalte" bequem berechnen können: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$; vgl. Abschnitt 14.

⁶⁸Lineare Abbildungen der Ebene lassen sich auch geometrisch kennzeichnen, nämlich als diejenigen Abbildungen, die den Nullpunkt fest lassen und Geraden in Geraden und Parallelen in Parallelen überführen. Da die Vektorsumme durch Parallelogramme definiert wird, ist z.B. sofort klar, dass eine solche Abbildung die Summe erhält: $f(v + v') = f(v) + f(v')$.

⁶⁹Wir fassen eine Basis oft nicht einfach als n -elementige Menge $\{b_1, \dots, b_n\}$, sondern als n -Tupel von Vektoren (b_1, \dots, b_n) auf, wenn es nämlich auf die Reihenfolge ankommt.

Wenn nun auch W eine Basis $C = (c_1, \dots, c_m)$ besitzt, lässt sich jeder Vektor $f(b_j)$ (für $j = 1, \dots, n$) in dieser Basis darstellen; seine Koeffizienten nennen wir a_{1j}, \dots, a_{mj} :

$$(50) \quad f(b_j) = a_{1j}c_1 + \dots + a_{mj}c_m = \sum_{i=1}^m a_{ij}c_j.$$

Wenn die Basen B und C gegeben sind, bestimmen die $m \cdot n$ Zahlen a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ die Vektoren $f(b_j)$, $j = 1, \dots, n$ und damit nach (49) die lineare Abbildung f . Wir schreiben diese Zahlen in ein rechteckiges Schema der Form

$$(51) \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

genannt *Matrix von f bezüglich der Basen B und C* . Weil dieses Schema m Zeilen und n Spalten hat, nennen wir es eine $m \times n$ -Matrix. Die Menge der $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{K} nennen wir $\mathbb{K}^{m \times n}$.

Merkregel:

In der j -ten Spalte der Matrix stehen die Koeffizienten des Bildes des j -ten Basisvektors.

Speziell betrachten wir die Vektorräume $V = \mathbb{K}^n$ und $W = \mathbb{K}^m$ und eine lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$. Als Basen B und C wählen wir die Standardbasen (e_1, \dots, e_n) von \mathbb{K}^n und (e_1, \dots, e_m) von \mathbb{K}^m . Abweichend von der bisherigen Schreibweise werden wir die Koeffizienten der Vektoren in \mathbb{K}^n (und ebenso in \mathbb{K}^m) nicht mehr neben- sondern untereinander schreiben, also als einspaltige Matrix („Spalte“):⁷⁰

$$(52) \quad \mathbb{K}^n = \left\{ x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

⁷⁰Da die Schreibweise $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ drucktechnisch ungünstig ist, schreibt man dafür

oft auch $(x_1, \dots, x_n)^T$; dabei bedeutet $()^T$ („transponiert“), dass die Zeile in der Klammer als Spalte gelesen werden soll.

Dann ist

$$(53) \quad f(e_i) = a_{1i}e_1 + \cdots + a_{mi}e_m = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Vereinfachte Merkregel:

In der j -ten Spalte der Matrix steht das Bild des j -ten Basisvektors, $f(e_j)$:

$$(54) \quad A = (f(e_1), \dots, f(e_i), \dots, f(e_n)).$$

Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$. Dann ist $f(e_1) = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f(e_2) = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; die zugehörige Matrix A setzt sich also aus diesen beiden Spalten zusammen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Warum ist diese Schreibweise nützlich? Aus der Matrix allein können wir sehr leicht das Bild jedes Vektors berechnen. Im Fall des Beispiels:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}$$

In der Mitte steht eine neue Operation: Die *Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor* ergibt einen andern Vektor. Die Multiplikationsvorschrift ist folgende: Man multipliziert jeden Zeilenvektor der Matrix mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wie beim Skalarprodukt, d.h. man bilde die Summe der Komponentenprodukte. Die erste Komponente $x+y$ auf der rechten Seite ist daher das Skalarprodukt der ersten Matrixzeile $(1, 1)$ mit (x, y) oder besser mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, und die zweite Komponente x ist das Skalarprodukt der zweiten Zeile $(1, 0)$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Ein anderes Beispiel für diese Multiplikation „Zeile mal Spalte“:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+3 \\ 4+1+3 \\ 2+1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Satz 14.1. Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ habe (bezüglich der Standardbasen von \mathbb{K}^n und \mathbb{K}^m) die Matrix A wie in (51). Dann gilt

für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$:

$$(55) \quad f(x) \stackrel{!}{=} A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_i x_i a_{mi} \end{pmatrix}$$

Beweis. Für jeden Vektor $x = \sum_i x_i e_i$ können wir $f(x)$ mit Hilfe von (53) berechnen:

$$f(x) = \sum_i x_i f(e_i) = \sum_i x_i \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i x_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_i x_i a_{mi} \end{pmatrix} = A \cdot x. \quad \square$$

Zum Beispiel hat die *identische Abbildung* $\text{id} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $\text{id}(e_i) = e_i$ als Matrix die *Einheitsmatrix*, deren i -te Spalte der Vektor e_i selbst ist:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenso können wir mit Hilfe von Matrizen die Verkettung von zwei linearen Abbildungen $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $g : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ berechnen: Wenn A die Matrix von f und B die von g ist, dann ist

$$f(g(e_j)) = A \cdot g(e_j) = A \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = A \cdot (B \cdot e_j)$$

Die eben beschriebene Operation „Matrix mal Vektor“ ist also auf jede

Spalte $Be_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ der Matrix B anzuwenden. Wir haben damit

gesehen:

Satz 14.2. Die Matrix C der Komposition $f \circ g$ ist das Matrixprodukt $C = A \cdot B$, das nach der folgenden Regel gebildet wird: Der Matrixkoeffizient in der i -ten Zeile und der k -ten Spalte ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B :

$$(56) \quad c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}.$$

Wenn $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ invertierbar ist, ist mit Umkehrabbildung g , so erfüllen die Matrizen A zu f und B zu g demnach die Gleichungen

$$(57) \quad A \cdot B = I = B \cdot A.$$

Die Matrix B wird auch *Umkehrmatrix* zu A genannt und oft mit $B = A^{-1}$ bezeichnet. Wir werden in den Abschnitten 17 und 19 Verfahren zur Berechnung der Umkehrmatrix kennenlernen.

In Zukunft werden wir zwischen einer linearen Abbildung $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ und ihrer Matrix A nicht mehr unterscheiden, denn die Abbildung f hat die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto A \cdot x$. In diesem Sinn sind lineare Abbildungen von \mathbb{K}^n nach \mathbb{K}^m dasselbe wie $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbb{K} .

15. ISOMORPHISMEN

Wir haben gesehen, dass eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ durch die Bilder einer Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V festgelegt wird, also durch $w_j = f(b_j) \in W$ für $j = 1, \dots, n$. Wenn diese Vektoren (w_1, \dots, w_n) ihrerseits wieder eine Basis von W bilden, dann nennt man f einen *Isomorphismus*. Isomorphismen kann es also nur zwischen Vektorräumen gleicher Dimension geben. Beispiel: $f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist ein Isomorphismus, denn die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f(e_1)$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_2)$ bilden eine Basis des \mathbb{R}^2 .

Wenn $f : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus ist, können wir eine weitere lineare Abbildung $g : W \rightarrow V$ definieren durch ihre Bilder auf der Basis (w_1, \dots, w_n) , nämlich

$$(58) \quad g(w_i) = b_i$$

Die Komposition $g \circ f$ ist nun eine lineare Abbildung mit $(g \circ f)(b_j) = g(f(b_j)) = g(w_j) = b_j$, also bildet $g \circ f$ jedes Element der Basis B von V auf sich selbst ab, und damit wird überhaupt jedes Element $v = \sum_j s_j b_j \in V$ auf sich abgebildet, d.h. $g \circ f = \text{id}_V$. Aus dem gleichen Grund gilt $f \circ g = \text{id}_W$, denn $(f \circ g)(w_i) = f(g(w_i)) = f(b_i) = w_i$. Also ist g die Umkehrabbildung zu f , und g ist ebenfalls ein Isomorphismus, weil g eine lineare Abbildung ist, die die Basis (w_1, \dots, w_n) von W auf die Basis (b_1, \dots, b_n) von V abbildet.

Satz 15.1. *Es seien V, W Vektorräume gleicher Dimension, $\dim V = \dim W = n$. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist Isomorphismus genau dann, wenn es eine lineare Abbildung $g : W \rightarrow V$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_W$, und dann ist g die Umkehrabbildung von f ; es gilt also auch $g \circ f = \text{id}_V$.*

Beweis. Wir müssen noch zeigen: Wenn es eine lineare Abbildung $g : W \rightarrow V$ gibt mit $f \circ g = \text{id}_W$, dann ist f Isomorphismus. Wir suchen dazu eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V derart, dass $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ eine Basis von W ist. Dazu gehen wir von einer Basis (c_1, \dots, c_n) von W aus und setzen $b_j = g(c_j)$. Wir müssen zunächst zeigen, dass (b_1, \dots, b_n) überhaupt eine Basis ist. Da $\dim V = n$, genügt zu zeigen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Es sei also eine lineare Relation

$$(59) \quad s_1 b_1 + \dots + s_n b_n = 0$$

gegeben. Dann gilt auch $f(s_1 b_1 + \dots + s_n b_n) = 0$. Mit $b_j = g(c_j)$ und $f \circ g = \text{id}_W$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= f(s_1 g(c_1) + \dots + s_n g(c_n)) \\ &= s_1 f(g(c_1)) + \dots + s_n f(g(c_n)) \\ &= s_1 c_1 + \dots + s_n c_n. \end{aligned}$$

Weil (c_1, \dots, c_n) linear unabhängig ist, sind alle $s_i = 0$, also die Relation (59) trivial und somit (b_1, \dots, b_n) linear unabhängig, also eine Basis. Außerdem ist $f(b_j) = f(g(c_j)) = c_j$, somit ist $(f(b_1), \dots, f(b_n))$ eine Basis und f ein Isomorphismus. Insbesondere besitzt eine Umkehrabbildung f^{-1} . Aus $\text{id}_W = f \circ g$ folgt durch Verkettung beider Seiten mit f^{-1} die Gleichung $f^{-1} = f^{-1} \circ f \circ g = g$. \square

Wichtige Beispiele von Isomorphismen werden durch *Basen* gegeben: Wir können eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ eines Vektorraums V auch als (gleichfalls mit B bezeichnete) lineare Abbildung von \mathbb{K}^n nach V ansehen, definiert durch seine Bilder auf der Standardbasis:

$$(60) \quad B(e_j) = b_j.$$

Das Bild eines beliebigen Vektors $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ unter der Abbildung B können wir nach dem Prinzip Zeile mal Spalte ausrechnen:

$$(61) \quad Bx = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_i b_i x_i = \sum_i x_i b_i.$$

Weil (b_1, \dots, b_n) eine Basis ist, ist B ein Isomorphismus. Mit seiner Hilfe können wir stets von dem abstrakten Vektorraum V zu dem konkreten \mathbb{K}^n übergehen.⁷¹ Insbesondere können wir jede lineare Abbildung

⁷¹Vektorräume, die durch einen Isomorphismus verbunden sind, heißen *isomorph*; V und \mathbb{K}^n sind also isomorph. Isomorphe Vektorräume werden als gleich angesehen. Deshalb können wir so viele Züge der abstrakten linearen Algebra an dem konkreten Modell "Ebene" oder "Raum" aufzeigen: Es gibt zu jeder Dimension bis auf Isomorphie nur einen Vektorraum.

$f : V \rightarrow W$ mit Hilfe von Basen B von V und C von W (das sind Isomorphismen $B : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ und $C : \mathbb{K}^m \rightarrow W$) auf eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, also eine $(m \times n)$ -Matrix zurückführen:

$$(62) \quad C \circ A = f \circ B \quad \text{oder} \quad A = C^{-1} \circ f \circ B.$$

Das ist die gleiche Beziehung wie (50):

$$f(b_j) = f(Be_j) = C(Ae_j) = C\left(\sum_i a_{ij}e_i\right) = \sum_i a_{ij}Ce_i = \sum_i a_{ij}c_j.$$

Etwas anschaulicher können wir die Beziehung zwischen f und A durch ein *Diagramm* von Abbildungen verdeutlichen, in dem auch die Definitions- und Wertebereiche der Abbildungen eingetragen sind:

$$(63) \quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ B \uparrow & & \uparrow C \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m. \end{array}$$

Dieses Diagramm will sagen: Es ist egal, ob ich von \mathbb{K}^n nach W über V laufe (mit $f \circ B$) oder über \mathbb{K}^m (mit $C \circ A$); wir erhalten beide Male die gleiche Abbildung: $C \circ A = f \circ B$. Das Diagramm (63) sagt also genau dasselbe wie Gleichung (62).⁷²

Um einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ eine Matrix A zuzuordnen, benötige ich also Basen B von V und C von W ; dann drücken (62) oder (63) die Beziehung zwischen f und A aus. Diese Beobachtung ist auch dann nützlich, wenn ich eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ nicht in den Standardbasen, sondern in anderen Basen B von \mathbb{K}^n und C von \mathbb{K}^m ausdrücken (“transformieren”) will. Für die neue Matrix A' erhalten wir nach (62) oder (63):

$$(64) \quad \begin{array}{ccc} & A' = C^{-1}AB, & \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \\ B \uparrow & & \uparrow C \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A'} & \mathbb{K}^m. \end{array}$$

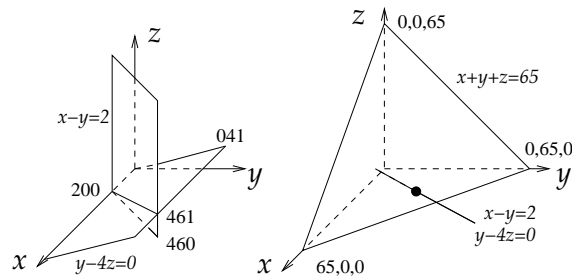
16. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Eingangsbeispiel: (Vgl. Abschnitt 1) Nach ein paar Jahren treffen wir Xaver und Yvonne wieder. Sie sind jetzt verheiratet und haben einen Sohn namens Zacharias. Xaver ist bekanntlich zwei Jahre älter

⁷²Man nennt manchmal ein solches Diagramm aus Pfeilen, in dem alle Wege die gleiche Abbildung bezeichnen, ein *kommutatives Diagramm*.

als Yvonne, und die ist viermal so alt wie Zacharias; alle drei zusammen sind sie jetzt 65. Wie alt sind Xaver, Yvonne und Zacharias?

$$\begin{array}{rcl} (1) & x - y & = 2 \\ (2) & & y - 4z = 0 \\ (3) & x + y + z & = 65 \end{array}$$



Wie die Graphiken zeigen, können wir die Lösung als Schnittpunkt von drei Ebenen ansehen: Die Ebenen $E_1 = \{(x, y, z); x - y = 2\}$ und $E_2 = \{(x, y, z); y - 4z = 0\}$ schneiden sich in einer Gerade (linke Figur), die wiederum die dritte Ebene $E_3 = \{(x, y, z); x + y + z = 65\}$ in dem gesuchten Lösungspunkt schneidet. Bei dem Lösungsverfahren ändern sich die Ebenen, aber nicht ihr Schnittpunkt.

Wir gehen beim Lösen systematisch vor⁷³ und entfernen zunächst die Variable x in Gleichung (3) durch Subtraktion von (1):

$$\begin{array}{rcl} (1) & x - y & = 2 \\ (2) & & y - 4z = 0 \\ (3) & & 2y + z = 63 \end{array}$$

In der dritten Gleichung entfernen wir nun die Variable y durch Subtraktion von $2 \cdot (2)$:

$$\begin{array}{rcl} (1) & x - y & = 2 \\ (2) & & y - 4z = 0 \\ (3) & & 9z = 63 \end{array}$$

Die jetzt erreichte Form heißt *Zeilenstufenform*: Jede neue Zeile enthält mindestens eine Variable weniger als die vorige. Jetzt können wir das

⁷³Das muss keineswegs der schnellste Weg sein. Z.B. könnte man für x und y die früheren Werte 21 und 19 benutzen und die Anzahl v der seitdem vergangenen Jahre als neue Variable einführen; dann wäre jetzt $x = 21 + v$ und $y = 19 + v$, also $x + y = 40 + 2v$. Aus $x + y + z = 65$ folgt dann $z = 65 - (x + y) = 25 - 2v$, und mit $4z = y = 19 + v$ folgt $100 - 8v = 19 + v$ und damit $9v = 81$, also $v = 9$, $z = 25 - 18 = 7$, $y = 19 + 9 = 28$, $x = 21 + 9 = 30$. Der Vorteil des systematischen Verfahrens ist, dass man nicht über den Einzelfall nachdenken muss, der Nachteil, dass man mögliche Vereinfachungen übersehen kann.

Gleichungssystem von der letzten zur ersten Gleichung auflösen:

$$\begin{aligned} (3) \quad 9z &= 63 && \Rightarrow z = 7 \\ (2) \quad y &= 4z = 4 \cdot 7 && \Rightarrow y = 28 \\ (1) \quad x &= 2 + y = 2 + 28 && \Rightarrow x = 30 \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wird oft nach Gauß⁷⁴ benannt (*Gaußsches Eliminationsverfahren*). In Wahrheit war es zur Zeit von Gauß schon seit langem bekannt; es wird bereits in einem fast 2000 Jahre alten chinesischen Rechenbuch beschrieben.⁷⁵ Hier ist die Beschreibung in aller Allgemeinheit: Gesucht sind die Lösungen x_1, \dots, x_n des *linearen Gleichungssystems*

$$(65) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

wobei die Zahlen $a_{ij}, b_k \in \mathbb{K}$ gegeben sind. Mit den Abkürzungen

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

wird aus (65) die einfache *Vektorgleichung*⁷⁶

$$(66) \quad A \cdot x = b.$$

So ist in unserem Eingangsbeispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 65 \end{pmatrix},$$

und anstelle von x haben wir $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geschrieben. Mit Hilfe der drei *elementaren Transformationen*,

I: Vertauschen zweier Gleichungen,

⁷⁴Johann Carl Friedrich Gauß, 1777-1855, Braunschweig, Göttingen

⁷⁵Das Buch heißt auf chinesischesch "Jiuzhang suanshu" = "Neun Bücher arithmetischer Technik", von einem unbekanntem Verfasser. Uns ist nur eine von dem chinesischen Mathematiker Liu Hui kommentierte Ausgabe aus dem Jahre 263 n. Chr. erhalten geblieben (vgl. H.-W. Alten et al.: 4000 Jahre Algebra, Springer 2003).

⁷⁶Auf beiden Seiten der Gleichung stehen nicht Zahlen, sondern Vektoren, Elemente des \mathbb{K}^m .

II: Addition eines Vielfachen einer anderen Gleichung,

III: Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$,

können wir das Gleichungssystem (65) oder (66) umformen („*transformieren*“) zu

$$(67) \quad \tilde{A} \cdot x = \tilde{b},$$

wobei \tilde{A} die „*Zeilenstufenform*“ hat:

$$(68) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} * & \cdots & & & & \\ & & * & \cdots & & \\ & & & & * & \cdots \\ & & & & & \vdots \end{pmatrix}$$

Jeder Stern bedeutet eine Zahl $\neq 0$, links davon ist alles Null, rechts aber beliebig. Jede neue Zeile fängt also etwas später an als ihre Vorgängerin. Für die letzte (m -te) Zeile von \tilde{A} gibt es nun zwei Möglichkeiten:

A: Die Zeile besteht nur aus Nullen. Die letzte Gleichung lautet damit

$$0 = \tilde{b}_m.$$

Wenn $\tilde{b}_m \neq 0$, liegt ein Widerspruch vor; die Gleichung (67) und damit auch die ursprüngliche Gleichung (66) sind in sich widersprüchlich und besitzen keine Lösung.

B: Die Zeile besteht nicht nur aus Nullen. Die letzte Gleichung lautet dann

$$\tilde{a}_{mq}x_q + \cdots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m.$$

mit $\tilde{a}_{mq} \neq 0$. Wenn $q = n$, dann ist $x_n = \tilde{b}_m / \tilde{a}_{mn}$. Wenn $q < n$, dann können wir x_{q+1}, \dots, x_n ganz beliebig wählen und $x_q = \frac{1}{\tilde{a}_{mq}}(\tilde{b}_m - \tilde{a}_{m,q+1}x_{q+1} - \cdots - \tilde{a}_{mn}x_n)$.

Die Ergebnisse für x_q, \dots, x_n setzen wir nun in die vorletzte ($(m-1)$ -te) Gleichung ein und behandeln diese ganz entsprechend.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$(69) \quad \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 7x_4 - x_5 = 0 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{array}$$

Wir schreiben immer nur die jeweiligen Koeffizienten auf. Ganz rechts steht die Transformation, die als nächstes durchgeführt werden soll; zwei Pfeile bedeuten die Vertauschung der betreffenden Zeilen.

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (2) & -4 & -6 & 2 & 7 & -1 & 0 & +2 \cdot (1) \\ (3) & 6 & 9 & 3 & 8 & 3 & 8 & -3 \cdot (1) \\ (4) & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 & 2 & -(1) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (2) & 0 & 0 & 4 & 9 & 1 & 2 & \leftarrow \\ (3) & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ (4) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & \leftarrow \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (2) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ (3) & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ (4) & 0 & 0 & 4 & 9 & 1 & 2 & -4 \cdot (2) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (2) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ (3) & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 5 & -7 & -2 & -(3) \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccccc|c} (1) & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (2) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ (3) & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ (4) & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \end{array}$$

Nun hat die Matrix Zeilenstufenform, und wir haben das Gleichungssystem (69) umgeformt zu

$$(70) \quad \begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \\ + + 5x_4 = 5 \\ + + - 7x_5 = -7 \end{array}$$

Dieses können wir leicht von unten nach oben auflösen:

$$\begin{array}{r} x_5 = 1 \\ x_4 = 1 \\ x_3 = 1 - x_4 - 2x_5 = 1 - 1 - 2 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 = 1 - x_3 - x_4 - x_5 = 1 + 2 - 1 - 1 = 1 \end{array}$$

und zur Lösung der letzten Gleichung können wir $x_2 = s$ setzen für eine beliebige Zahl $s \in \mathbb{R}$ und erhalten $x_1 = \frac{1}{2}(1 - 3x_2) = \frac{1}{2}(1 - 3s)$.

Soweit die “Praxis”, die Rechenmethode zum Lösung eines linearen Gleichungssystems: Wir haben mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren das System auf Zeilenstufenform gebracht; jede weitere Gleichung enthält wenigstens eine Variable weniger als ihre Vorgängerin. Dann können wir das Gleichungssystem von hinten nach vorne auflösen, indem jedesmal die schon berechneten Variablen in die weiter oben stehenden Gleichungen eingesetzt werden. Dann können wir eine Gleichung nach der anderen lösen; wenn sie mehr als eine noch nicht berechnete Variable enthält, dann können wir alle weiteren Variablen beliebig wählen (wir bezeichnen sie als “*Parameter*”); nur eine der neuen Variablen ist durch die Gleichung und die gewählten Parameter bestimmt. Die Anzahl der Parameter ist also die Breite der Stufen Minus Eins. Nur wenn die letzte Zeile links die Nullzeile ist und rechts ein Wert ungleich Null steht, ist das Gleichungssystem in sich widersprüchlich und besitzt keine Lösung; in allen anderen Fällen können wir alle Lösungen auf diese Weise berechnen.

17. DER LÖSUNGSRAUM

Wir möchten noch einmal theoretisch untermauern, was wir da herausbekommen haben. Bei jeder Gleichung stellen sich zwei Fragen: Gibt es überhaupt eine Lösung? Wenn ja, wieviele Lösungen gibt es? Oder besser: Wie sieht die Menge aller Lösungen (der *Lösungsraum*) insgesamt aus? Unser Verfahren beantwortet alle diese Fragen, aber es ist vielleicht unbefriedigend, erst nach langer Rechnung, erst bei der letzten Zeile herauszufinden, dass es gar keine Lösung gibt und damit die ganze Rechnung wertlos ist.

Dazu brauchen wir zwei neue Begriffe, zwei Mengen, die mit einer linearen Abbildung oder einer Matrix $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ verbunden sind: Der *Kern* und das *Bild* von A . Der Kern von A , abgekürzt $\ker A$, ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = 0$ (rechte Seite gleich Null), das manchmal auch als da zu $Ax = b$ gehörige *homogene Gleichungssystem* bezeichnet wird, während Bild A aus den Vektoren $y \in \mathbb{K}^m$ besteht, die sich als Ax für ein $x \in \mathbb{K}^n$ darstellen lassen:

$$(71) \quad \ker A = \{x \in \mathbb{K}^n; Ax = 0\} \subset \mathbb{K}^n,$$

$$(72) \quad \text{Bild } A = \{Ax; x \in \mathbb{K}^n\} \subset \mathbb{K}^m.$$

Beides sind nicht nur Teilmengen, sondern *Unterräume*⁷⁷ von \mathbb{K}^n bzw. von \mathbb{K}^m . Für $\ker A$ sieht man das so: $0 \in \ker A$, weil $A(0) = 0$, Falls $x, x' \in \ker A$, dann folgt $x + x' \in \ker A$, weil $A(x + x') = Ax + Ax' = 0 + 0 = 0$, und für $s \in \mathbb{K}$ und $x \in \ker A$ gilt $sx \in \ker A$, weil $A(sx) = sAx = s \cdot 0 = 0$. Und für Bild A : Da $0 = A(0)$, ist $0 \in \text{Bild } A$. Mit $Ax, Ax' \in \text{Bild } A$ ist auch $Ax + Ax' = A(x + x') \in \text{Bild } A$ und $sAx = A(sx) \in \text{Bild } A$ für alle $s \in \mathbb{K}$.

Für den Unterraum $\text{Bild } A \subset \mathbb{K}^m$ haben wir sogar ein Erzeugendensystem, nämlich die Bilder der Basisvektoren Ae_j , die Spalten der Matrix A . Denn offensichtlich wird jeder Vektor $Ax \in \text{Bild } A$ durch die Spalten Ae_j dargestellt: $Ax = A(\sum_j x_j e_j) = \sum_j x_j Ae_j$. Allerdings sind die Spalten von A nicht unbedingt linear unabhängig. Die Dimension von $\text{Bild } A$, also die Anzahl der linear unabhängigen Spalten, nennt man den *Rang* der Matrix A .

Satz 17.1. Gegeben sei eine Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Das Gleichungssystem

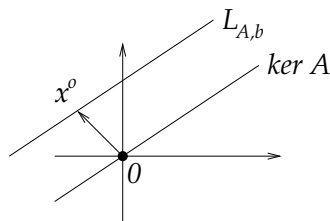
$$(73) \quad Ax = b$$

besitzt eine Lösung x genau dann, wenn

$$b \in \text{Bild } A = \text{Aufspann}(a_1, \dots, a_n).$$

Ist x^o eine Lösung von (73), dann hat die Menge aller Lösungen, der „Lösungsraum“ $L_{A,b} = \{x \in \mathbb{K}^n; Ax = b\}$ die folgende Form:

$$(74) \quad L_{A,b} = x^o + \ker A := \{x^o + v; Av = 0\}$$



Beweis. Wenn eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ existiert, $Ax = b$, dann folgt

$$b \in \text{Bild } A = \text{Aufspann}\{Ae_1, \dots, Ae_n\} = \text{Aufspann}\{a_1, \dots, a_n\}.$$

Nun sei x^o eine Lösung, $x^o \in L_{A,b}$. Für jede weitere Lösung $x \in L_{A,b}$ setzen wir $v = x - x^o$; dann gilt $Av = A(x - x^o) = Ax - Ax^o = b - b = 0$, also $v \in \ker A$ und damit $x \in x^o + \ker A$. Ist umgekehrt $x = x^o + v$ mit $v \in \ker A$, so ist $Ax = Ax^o + Av = b + 0 = b$ und damit $x \in L_{A,b}$. \square

⁷⁷ $\ker A$ und $\text{Bild } A$ sind nicht nur irgendwelche Unterräume, sondern *jeder* Unterraum wird entweder in der Form $\ker A$ (Gleichungsform) oder in der Form $\text{Bild } A$ (Parameterform) dargestellt; es gibt keine andere Möglichkeit.

In unserem Beispiel $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & 2 & 7 & -1 \\ 6 & 9 & 3 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

haben wir berechnet:

$$L_{A,b} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-3s) \\ s \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \ker A$$

$$\text{wobei } \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Begriff ‘‘Rang’’ können wir die Bedingung für die Existenz einer Lösung noch etwas anders ausdrücken:

Satz 17.2. *Das Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt eine Lösung genau dann, wenn die um die Spalte b erweiterte Matrix (A, b) den gleichen (also keinen größeren) Rang besitzt wie die Matrix A ,*

$$(75) \quad \text{rg}(A, b) = \text{rg } A.$$

Beweis. Der Rang ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten. Deshalb sagt (75) genau, dass b von den Spalten von A linear abhängig ist, also im Bild von A liegt, also ein x mit $Ax = b$ existiert. \square

Dieser Satz wäre nur eine wenig hilfreiche Umformulierung von Bekanntem, wenn es nicht effektive Methoden zur Rangberechnung gäbe. Nach Definition ist der Rang die Anzahl der linear unabhängigen *Spalten* (‘‘Spaltenrang’’), aber man kann zeigen, dass die Anzahl der linear unabhängigen *Zeilen* (‘‘Zeilenrang’’) die gleiche Zahl ist. Das sieht man zum Beispiel, indem man die Matrix mit dem Gaußverfahren auf Zeilenstufenform bringt, wobei sich weder der Zeilen- noch der Spaltenrang ändern. Dann ist leicht zu sehen, dass sowohl der Zeilen- als auch der Spaltenrang gleich der Anzahl der Stufen ist: Die Zeilen bei Zeilenstufenform sind linear unabhängig (von unten nach oben enthält jede neue Zeile mindestens eine weitere Koordinate), also ist der Zeilenrang einfach gleich der Anzahl der Zeilen, und die Spalten, die zur selben Stufe gehören, sind linear abhängig (die Spalten der ersten Stufe spannen \mathbb{K}^1 auf, die der ersten und zweiten Stufe \mathbb{K}^2 usw.), also ist auch der Spaltenrang gleich der Anzahl der Stufen.

Wie groß aber ist die Anzahl der Parameter, die Dimension des Kernes? Auch diese kann man aus dem Rang entnehmen:

Satz 17.3. Für jede lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ gilt:

$$(76) \quad \dim \ker A + \operatorname{rg} A = n.$$

Beweis. Die Anzahl der Parameter pro Stufe ist die Stufenbreite minus Eins, die Stufenbreiten aufsummiert ergeben n , und die Anzahl der Stufen ist der (Zeilen-)Rang. Also ist die Anzahl der Parameter gleich der Summe der Stufenbreiten minus der Anzahl der Stufen, d.h. $\dim \ker A = n - \operatorname{rg} A$. \square

18. BILD UND KERN

Der jetzt folgende Abschnitt ist weitgehend eine Wiederholung des vorigen Abschnitts in einem anderen Begriffsrahmen, in der Sprache der linearen Abbildungen statt der Matrizen. Insbesondere sind die Sätze 17.3 und 18.3 praktisch identisch, aber mit recht unterschiedlichen Beweisen.

Definition Für eine beliebige lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen \mathbb{K} -Vektorräumen definieren wir:

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild} f &:= \{f(v); v \in V\} \subset W, \\ \ker f &:= \{v; f(v) = 0\} \subset V, \end{aligned}$$

wir nennen $\operatorname{Bild} f$ das *Bild* und $\ker f$ den *Kern* von f .

Satz 18.1. $\operatorname{Bild} f$ und $\ker f$ sind Unterräume (von W bzw. von V).⁷⁸

Beweis. $0 = f(0) \in \operatorname{Bild} f$, und mit $f(v), f(v') \in \operatorname{Bild} f$ und $s \in \mathbb{K}$ ist $f(v) + f(v') = f(v + v') \in \operatorname{Bild} f$ und $s \cdot f(v) = f(sv) \in \operatorname{Bild} f$.

Da $f(0) = 0$, ist $0 \in \ker f$. Für $v, v' \in \ker f$ (also $f(v) = 0$ und $f(v') = 0$) ist auch $v + v' \in \ker f$, denn $f(v + v') = f(v) + f(v') = 0 + 0 = 0$. Für $v \in \ker f$ und $s \in \mathbb{K}$ ist auch $sv \in \ker f$, denn $f(sv) = s \cdot f(v) = s \cdot 0 = 0$. \square

Satz 18.2. Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist

- a) *surjektiv* $\iff \operatorname{Bild} f = W$,
- b) *injektiv* $\iff \ker f = 0$.

Beweis. Teil a) gilt direkt nach Definition der Surjektivität.

Teil b): „ \implies “: Ist $v \in \ker f$, so ist $f(v) = 0 = f(0)$ und daher $v = 0$ wegen der Injektivität von f .

⁷⁸In der Tat wurden *alle* in dieser Vorlesung aufgetretenen Unterräume als Kern oder als Bild einer linearen Abbildung dargestellt. Finden Sie Beispiele!

„ \Leftarrow “: Ist $f(v) = f(v')$ so gilt $f(v - v') = f(v) - f(v') = 0$, also $v - v' \in \ker f = \{0\}$ und damit $v = v'$. Also ist f injektiv. \square

Satz 18.3. *Es sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $T \subset V$ ein Komplement zu dem Unterraum $\ker f \subset V$. Dann ist die Einschränkung von f auf T , genauer $\bar{f} = f|_T : T \rightarrow \text{Bild } f$ ein Isomorphismus. Insbesondere gilt*

$$(77) \quad \dim \ker f + \dim \text{Bild } f = \dim V.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \bar{f} surjektiv ist; wir müssen also $\text{Bild } f = \text{Bild } \bar{f}$ oder $f(V) = f(T)$ zeigen. Weil $V = T + \ker f$, zerlegt sich jedes $v \in V$ als $v = v' + v''$ mit $v' \in T$ und $v'' \in \ker f$, d.h. $f(v'') = 0$. Damit ist $f(v) = f(v' + v'') = f(v') + f(v'') = f(v') \in f(T)$, und somit ist $f(v) \in f(T)$ für jedes $v \in V$, also $f(V) = f(T)$.⁷⁹

Die Injektivität von \bar{f} folgt mit Satz 18.2, denn

$$\ker \bar{f} = \{v \in T; f(v) = 0\} = T \cap \ker f = \{0\}.$$

Also ist $\bar{f} : T \rightarrow \text{Bild } f$ bijektiv (ein Isomorphismus). Dann folgt $\dim T = \dim \text{Bild } f$, und nach Satz 10.3 ist $\dim T + \dim \ker f = \dim V$; daraus ergibt sich die behauptete Gleichung (77). \square

Bemerkung: Die zwei einfachsten linearen Abbildungen sind die *Projektion* und die *Inklusion*. Die *Projektion* vergisst einfach eine Komponente: Ist $U \subset V$ ein Unterraum und $T \subset V$ ein Komplement zu U (man schreibt dafür auch $V = U \oplus T$), dann lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig zerlegen als $v = v_U + v_T$ mit $v_U \in U$ und $v_T \in T$. Die zugehörige *Projektion* auf T ist die Abbildung $p_T : V \rightarrow T$, $v = v_U + v_T \mapsto v_T$. Die *Inklusion* i_U eines Unterraums $U \subset V$ bildet jeden Vektor von U auf sich selbst ab, fasst ihn dann aber als Element des großen Raums V auf: $i_U : U \rightarrow V$, $u \mapsto u$. Der Satz 18.3 zeigt, dass jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ als Verkettung einer Projektion mit einem Isomorphismus und einer Inklusion dargestellt werden kann: $f = i_U \circ \bar{f} \circ p_T$, wobei $T \subset V$ ein Komplement von $\ker f \subset V$ ist und $U = \text{Bild } f \subset W$.

19. INVERTIEREN VON MATRIZEN

Eine weitere Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist das *Invertieren* von Matrizen, d.h. die Berechnung der *inversen* Matrix, sofern die gegebene $(n \times n)$ -Matrix A invertierbar (ein Isomorphismus) ist. Nach Satz 15.1 müssen wir eine $(n \times n)$ -Matrix B finden mit $AB = I$. Dabei sind gleichzeitig n Gleichungssysteme zu lösen,

⁷⁹Aus $f(v) \in f(T) \forall v \in V$ folgt zunächst nur $f(V) \subset f(T)$, aber die andere Inklusion $f(T) \subset f(V)$ gilt ohnehin, da $T \subset V$.

nämlich $ABe_i = e_i$ oder $Ax^{(i)} = e_i$ für $i = 1, \dots, n$, wobei $x^{(i)} = Be_i$ die i -te Spalte der gesuchten Matrix B beschreibt. Das machen wir mit dem beschriebenen Verfahren simultan für $i = 1, \dots, n$, indem wir die e_1, \dots, e_n rechts nebeneinanderstellen; die linke Seite (A) hat sich ja ohnehin nicht geändert. Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcc|ccc}
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow \\
 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow \\
 \hline
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \cdot (1) \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 \hline
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 0 & -7 & 1 & 0 & 1 & -2 & \leftarrow \\
 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \leftarrow \quad (-) \\
 \hline
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\
 0 & -7 & 1 & 0 & 1 & -2 & +7 \cdot (2) \\
 \hline
 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \cdot (2) \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & -2 & \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & 1 & -7 & 1 & -2 &
 \end{array}$$

Wir haben dabei die linke Seite nicht nur auf Zeilenstufenform gebracht (bei invertierbaren Matrizen ist das eine obere *Dreiecksmatrix*, die unterhalb ihrer Diagonale lauter Nullen hat und auf der Diagonalen nur Koeffizienten ungleich Null), sondern wir haben mit Hilfe der Diagonalelemente (Transformationen vom Typ II) auch die Elemente oberhalb der Diagonale zu Null und schließlich mit Transformationen vom Typ III die Diagonalelemente selbst zu Eins gemacht. Damit ist das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = e_i$ umgewandelt in $\tilde{A}x = \tilde{b}$ mit $\tilde{A} = I$ (Einheitsmatrix), also erhalten wir direkt die Lösung $x = \tilde{b}$, d.h. die i -te Spalte der inversen Matrix. Am Anfang stand links die gegebene Matrix A und rechts die Einheitsmatrix I , am Ende steht die Einheitsmatrix links und die Inverse A^{-1} rechts.

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 10-3-7 & 0+0+1 & 2+0-2 \\ 5-5+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix}.$$

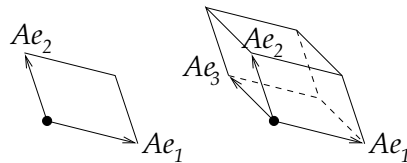
Bemerkung: Wir können das Gaußsche Eliminationsverfahren auch so beschreiben: Die gegebene Gleichung $Ax = b$ wird durch Multiplikation mit einer invertierbaren $n \times n$ -Matrix S umgeformt zu $SAx = Sb$, wobei $\tilde{A} = SA$ einfacher sein sollte als A . Ist S die Matrix der linearen Abbildung, die nur die Basiselemente e_i und e_j vertauscht und alle anderen Basiselemente auf sich abbildet, z.B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so erhalten wir die elementare Transformation vom Typ I (Vertauschen zweier Zeilen von A). Ist S eine Matrix von der Art $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (wobei wir nur die Teilmatrix $\begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} \\ s_{ji} & s_{jj} \end{pmatrix}$ von S hinschreiben), dann liegt eine Transformation vom Typ II vor (Addition des λ -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile), und wenn S eine Diagonalmatrix ist mit $s_{ii} = \lambda \neq 0$ und $s_{jj} = 1$ für alle $j \neq i$, dann haben wir es mit einer Transformation vom Typ III zu tun (Multiplikation der i -ten Zeile mit einem Faktor $\lambda \neq 0$).

20. DETERMINANTEN

Wie kann man erkennen, ob eine lineare Abbildung (Matrix) $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ein Isomorphismus ist? Auf jeden Fall müssen die Dimensionen übereinstimmen, $m = n$. Schränken wir uns also gleich ein auf $n \times n$ -Matrizen, d.h. lineare Abbildungen $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$. Welche unter diesen sind Isomorphismen? Wir haben bereits ein notwendiges und hinreichendes Kriterium gesehen: Das Bild einer Basis ist wieder eine Basis. Wir können uns auf die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) beschränken und testen, ob (Ae_1, \dots, Ae_n) wieder linear unabhängig ist.⁸⁰ Für $n = 2$ und $n = 3$ (und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) müssen die Vektoren Ae_1, Ae_2 wirklich eine Ebene (nicht nur eine Gerade) und Ae_1, Ae_2, Ae_3 einen Raum (nicht nur eine Ebene) aufspannen. Der *Flächeninhalt* des von Ae_1, Ae_2 aufgespannten *Parallelogramms* $\{s_1Ae_1 + s_2Ae_2; s_1, s_2 \in [0, 1]\}$ bzw. der *Rauminhalt* des von Ae_1, Ae_2, Ae_3 aufgespannten *Spats*⁸¹ $\{s_1Ae_1 + s_2Ae_2 + s_3Ae_3; s_1, s_2, s_3 \in [0, 1]\}$

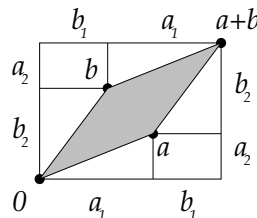
⁸⁰Wir nennen ein n -Tupel von Vektoren (w_1, \dots, w_n) *linear unabhängig*, wenn jede lineare Relation $s_1w_1 + \dots + s_nw_n = 0$ trivial ist, d.h. $s_1 = \dots = s_n = 0$. Im Gegensatz zu einer Menge kann bei einem n -Tupel ein Element mehrfach vorkommen; solch ein n -Tupel ist natürlich linear abhängig.

⁸¹Ein *Spat* (abgeleitet von der Kristallform des „Feldspats“, einer der Gesteinsarten, aus denen der Granit zusammengesetzt ist) oder *Parallelepiped* ist ein dreidimensionales Parallelogramm, ein schief gezogener Quader.



ist ein Maß dafür, ob die Vektoren tatsächlich linear unabhängig sind; diese Größen messen sogar gewissermaßen den *Grad*, in welchem die Vektoren linear unabhängig sind, weil sie umso kleiner sind, je näher die Vektoren Ae_1, Ae_2 und Ae_1, Ae_2, Ae_3 daran sind, auf einer Geraden bzw. in einer Ebene zu liegen.

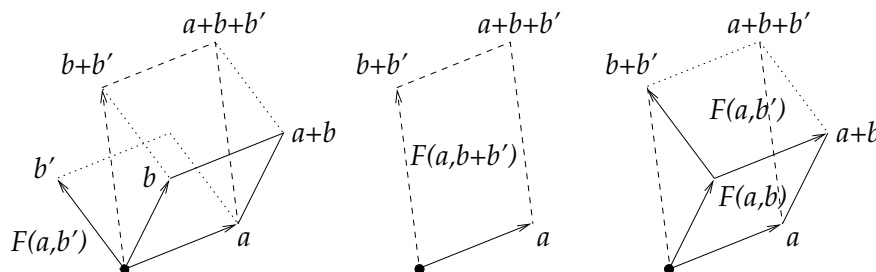
Aber wie berechnen wir diese Größen? Und was machen wir bei mehr als drei Dimensionen? Gibt es dann immer noch eine Art Rauminhalt, und wie kann man diesen berechnen? Dazu müssen wir uns nur den Flächeninhalt etwas genauer ansehen; seine Eigenschaften lassen sich dann ohne weiteres in höhere Dimensionen übertragen.



Sind zwei Vektoren $a = (a_1, a_2)^T$ und $b = (b_1, b_2)^T$ in der Ebene gegeben, so ergibt sich der Flächeninhalt $F(a, b)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms aus der Figur (zumindest dann, wenn beide Vektoren im ersten Quadranten liegen):

$$(78) \quad \begin{aligned} F(a, b) &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - 2b_1a_2 - b_1b_2 - a_1a_2 \\ &= a_1b_2 - b_1a_2. \end{aligned}$$

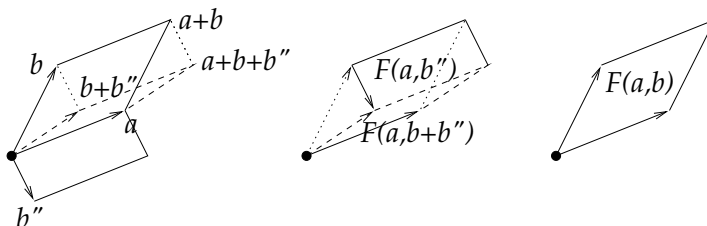
Interessanter als die explizite Formel sind die Eigenschaften dieses Ausdrucks: Wenn ein dritter Vektor b' gegeben ist, dann finden wir die folgende Regel:



$$(79) \quad F(a, b + b') = F(a, b) + F(a, b')$$

In der Tat unterscheidet sich die mittlere Figur mit dem Flächeninhalt $F(a, b + b')$ von der rechten $F(a, b) + F(a, b')$ nur durch ein Dreieck, das links abgetrennt und rechts wieder angesetzt worden ist; der Flächeninhalt ist also derselbe.

Aber mit einem anderen Vektor b'' anstelle von b' scheint diese Regel nicht mehr zu stimmen:



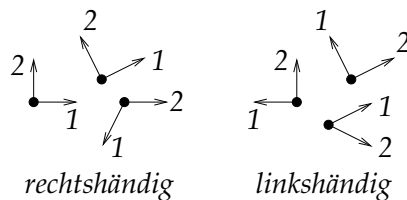
Anstelle von (79) gilt jetzt $F(a, b + b'') + F(a, b'') = F(a, b)$ und damit

$$(80) \quad F(a, b + b'') = F(a, b) - F(a, b'').$$

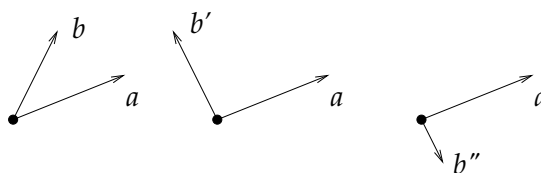
Das Ergebnis sollte uns zum Staunen bringen. Was ist bei b'' so grundsätzlich anders als bei b' ? Das hat mit einem Begriffspaar zu tun, das Kinder erst sehr spät verstehen: *Rechts und Links*. Um dies zu erklären müssen wir zunächst den Begriff „Basis“ präzisieren. Spätestens jetzt soll eine *Basis* als *geordnet* angesehen werden. Während eine *Menge* nicht davon abhängt, in welcher Reihenfolge ihre Elemente aufgezählt werden, soll bei einer *geordneten Menge* (n -Tupel) die Reihenfolge der Elemente vorgegeben sein; im Prinzip dürfen sich bei geordneten Mengen sogar Elemente wiederholen, allerdings ist das bei einer Basis wegen der linearen Unabhängigkeit nicht erlaubt. Eine Basis der Ebene ist also von jetzt an ein *Paar* von linear unabhängigen Vektoren, eine Basis des Raums ein *Tripel*, und allgemein ist eine Basis eines n -dimensionalen Vektorraums V ein n -Tupel von linear unabhängigen Elementen von V .

In der Ebene gibt es dann zwei Sorten von Basen: Der erste und der zweite Basisvektor können wie Daumen und Zeigefinger meiner *rechten* Hand liegen (wobei die Handfläche mir zugewandt ist) - in dem Fall sprechen wir von *rechtshändigen* oder (*rechts*)*orientierten* Basen - oder eben wie Daumen und Zeigefinger der *linken Hand* (*linkshändige* oder *linksorientierte* Basen).⁸² Durch Vertauschen der beiden Basiselemente wird aus einer rechtshändigen eine linkshändige Basis.

⁸²Dasselbe gilt für den Raum: Erstes, zweites und drittes Element der Basis können sich verhalten wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger meiner *rechten* Hand (*rechtshändige Basis*) oder meiner linken Hand (*linkshändige Basis*).



Nun haben wir den Grund für die unterschiedlichen Ergebnisse (79) und (80) gefunden: Offensichtlich sind (a, b) und (a, b') rechtshändige Basen, während die Basis (a, b'') linkshändig ist.



Wir können deshalb die beiden scheinbar widerstreitenden Ergebnisse (79) und (80) zu einer konsistenten Regel zusammenfassen, wenn wir einen neuen Begriff einführen: Den Flächeninhalt mit Vorzeichen, der *Determinante* genannt wird:

$$(81) \quad \det(a, b) := \begin{cases} F(a, b) & \text{falls } (a, b) \text{ rechtsorientiert} \\ -F(a, b) & \text{falls } (a, b) \text{ linksorientiert} \end{cases}$$

Dann gilt in allen Fällen:

$$(82) \quad \det(a, b + b') = \det(a, b) + \det(a, b').$$

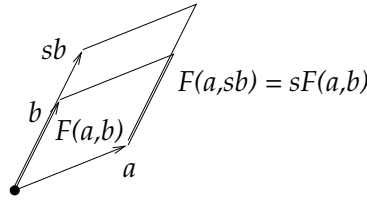
Sie sehen aber wohl ein, dass es bei der Definition (81) „mit Händen und Füßen“ nicht gut bleiben kann. Wir gehen dabei genauso vor wie in vielen anderen Fällen (Vektoren, Zahlen, Grundrechenarten ...): Dieser anschaulich definierte Begriff hat ein paar leicht einzusehende Eigenschaften, die wir zur Grundlage einer mathematisch besser handhabbaren Definition machen können: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt:

- d1: Linearität:** $\det(a, sb + b') = s \det(a, b) + \det(a, b')$,
- d2: Antisymmetrie:** $\det(b, a) = -\det(a, b)$,
- d3: Normiertheit:** $\det(e_1, e_2) = 1$

In d1 sind eigentlich zwei Regeln enthalten: Im Spezialfall $s = 1$ erhält man (82) und im Spezialfall $b' = 0$ folgt

$$(83) \quad \det(a, sb) = s \det(a, b)$$

für alle $s \in \mathbb{R}$, was man ebenfalls sofort sieht:



Umgekehrt folgt d1 sofort aus (82) und (83):

$$\det(a, sb + b') \stackrel{82}{=} \det(a, sb) + \det(a, b') \stackrel{83}{=} s \det(a, b) + \det(a, b').$$

Regel d2 folgt aus (81), weil durch Vertauschen von a und b eine rechtehändige in eine linkshändige Basis übergeht und umgekehrt. Regel d3 legt den *Maßstab* für die Flächenberechnung fest: Der Flächeninhalt des Einheitsquadrats ist gleich Eins. Wegen der Antisymmetrie folgt die Linearität auch im ersten Argument:⁸³

$$(84) \quad \det(sa + a', b) = s \det(a, b) + \det(a', b),$$

denn $\det(sa + a', b) \stackrel{d2}{=} -\det(b, sa + a') \stackrel{d1}{=} -(s \det(b, a) + \det(b, a')) \stackrel{d2}{=} s \det(a, b) + \det(a', b)$. Wir können für a und b auch linear abhängige Vektoren zulassen, z.B. $b = a$; mit der Regel d2 folgt nämlich sofort $\det(a, a) = -\det(a, a)$ und damit

$$(85) \quad \det(a, a) = 0,$$

was ja auch der Anschauung entspricht: Der Vektor a allein kann kein Flächenstück aufspannen.

Nun können wir in der Tat aus den Regeln (*Axiomen*) d1, d2, d3 den Wert der Determinante berechnen: Für $a = a_1e_1 + a_2e_2$ und $b = b_1e_1 + b_2e_2$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \det(a, b) &= \det(a_1e_1 + a_2e_2, b) \\
 &\stackrel{84}{=} a_1 \det(e_1, b) + a_2 \det(e_2, b) \\
 &= a_1 \det(e_1, b_1e_1 + b_2e_2) + a_2 \det(e_2, b_1e_1 + b_2e_2) \\
 &\stackrel{d1}{=} a_1b_1 \det(e_1, e_1) + a_1b_2 \det(e_1, e_2) \\
 (86) \quad &+ a_2b_1 \det(e_2, e_1) + a_2b_2 \det(e_2, e_2) \\
 &\stackrel{85}{=} a_1b_2 \det(e_1, e_2) + a_2b_1 \det(e_2, e_1) \\
 &\stackrel{d2}{=} a_1b_2 \det(e_1, e_2) - a_2b_1 \det(e_1, e_2) \\
 &\stackrel{d3}{=} a_1b_2 - a_2b_1.
 \end{aligned}$$

Großartig! Da sind wir also mit vieler Mühe wieder bei der Gleichung (78) angekommen, die wir anfangs einfach aus der Figur ablesen konnten!

⁸³Das Wort „Argument“ hat in der Mathematik verschiedene Bedeutungen; u.a. bezeichnet es die Variablen einer Funktion. Die Determinante $\det(a, b)$ ist als eine Funktion von zwei Variablen oder „Argumenten“ a und b anzusehen.

Wo bitte liegt der Fortschritt? Wozu die Plackerei? Für die Berechnung des Flächeninhalts des Parallelogramms sicher nicht, aber was wir jetzt gemacht haben, können wir für alle Körper \mathbb{K} und für alle Dimensionen n verallgemeinern:

Definition Mit $\mathbb{K}^{n \times n}$ bezeichnen wir das n -fache kartesische Produkt von \mathbb{K}^n mit sich selber, also die Menge der $n \times n$ -Matrizen oder n -Tupel (a_1, \dots, a_n) von Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^n$. Die *Determinante* ist eine Abbildung

$$\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \det(a_1, \dots, a_n)$$

mit folgenden Eigenschaften:

D1: Linearität in jedem Argument:⁸⁴

$$\det(\dots, sa + a', \dots) = s \det(\dots, a, \dots) + \det(\dots, a', \dots),$$

D2: Antisymmetrie:

$$\det(\dots, b, \dots, a, \dots) = -\det(\dots, a, \dots, b, \dots),$$

D3: Normiertheit:

$$\det(e_1, \dots, e_n) = 1.$$

Genau wie in (86) können wir daraus den Wert der Determinante tatsächlich berechnen. Die Methode ist, die Matrizen mit *elementaren Spaltentransformationen* zu vereinfachen und zu beachten, wie sich dabei die Determinante verändert:

I Vertauschen zweier Spalten,

II Addieren eines Vielfachen einer anderen Spalte,

III Multiplizieren eine Spalte mit einer Zahl $s \neq 0$.

Bei Typ I ändert die Determinante ihr Vorzeichen (D2), bei II bleibt sie wegen D1 und D2 ungeändert:

$$\det(\dots, a + sb, \dots, b, \dots) = \det(\dots, a, \dots, b, \dots),$$

und bei III verändert sie sich nach D1 um den Faktor s .

Beispiel:

$$\begin{aligned} \det A &:= \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &=: \det(a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &\stackrel{I}{=} -\det(a_2, a_1, a_3, a_4) \end{aligned}$$

⁸⁴Die Punkte \dots bedeuten, dass in den übrigen Argumenten auf der linken und rechten Seite der Gleichung dasselbe steht.

$$\begin{aligned}
&\stackrel{II}{=} -\det(a_2, a_1 + 2a_2, a_3, a_4) \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{I}{=} -\det(b_1, b_2, b_3, b_4) \\
&\stackrel{I}{=} \det(b_1, b_3, b_2, b_4) \\
&\stackrel{II}{=} \det(b_1, b_3, b_2 + 3b_3, b_4) \\
&= \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{I}{=} \det(c_1, c_2, c_3, c_4) \\
&\stackrel{I}{=} -\det(c_1, c_2, c_4, c_3) \\
&\stackrel{II}{=} -\det(c_1, c_2, c_4, c_3 + 4c_4) \\
&= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie wir gleich sehen werden, können wir aus der jetzt erreichten Form den Wert der Determinante direkt ablesen:

Immer, wenn eine Matrix in Dreiecksform ist (oberhalb oder unterhalb der Diagonale nur noch Nullen), ist die Determinante das Produkt ihrer Diagonalelemente.

Im vorliegenden Fall erhalten wir also $\det A = -(-1)^3 \cdot 5 = 5$. Der Grund dafür ist, dass wir sukzessive mit Transformationen vom Typ II die Elemente unterhalb der Diagonale „abräumen“ (zu Null machen) und das verbleibende Diagonalelement mit Typ III vorziehen können:

$$\begin{aligned}
\det A &= -\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{III}{=} -5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{II} &= -5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underline{III,II} &= 5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underline{III,II} &= -5 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underline{III} &= 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{D3}{=} 5
\end{aligned}$$

Nun wollen wir die allgemeine Formel für die Determinante herleiten. Gegeben sei also eine $n \times n$ -Matrix $A = (a_1, \dots, a_n)$ mit $a_i = \sum_j a_{ji} e_j$.⁸⁵ Zu berechnen ist $\det(a_1, \dots, a_n) = \det(\sum_j a_{j1} e_j, \dots, \sum_j a_{jn} e_j)$. Mit der Linearität in jedem Argument (D1) können wir die Summen und die Koeffizienten nach vorne ziehen (D1 lässt sich natürlich auf beliebig große Summen verallgemeinern):

$$(87) \quad \det(\dots, \sum_j a_{ji} e_j, \dots) = \sum_j a_{ji} \det(\dots, e_j, \dots).$$

Die mit j bezeichneten Indizes im ersten, zweiten, \dots , n -ten Argument sind ganz unabhängig voneinander; wir sollten ihnen deshalb auch unterschiedliche Namen geben: j_1, j_2, \dots, j_n . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(a_1, \dots, a_n) &= \sum_{j_1} a_{j_1 1} \det(e_{j_1}, a_2, \dots, a_n) \\
&= \sum_{j_1} a_{j_1 1} \left(\sum_{j_2} a_{j_2 2} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, a_3, \dots, a_n) \right) \\
&= \sum_{j_1, j_2} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, a_3, \dots, a_n) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})
\end{aligned}$$

⁸⁵Alle Summen gehen von 1 bis n , m.a.W. \sum_j heißt $\sum_{j=1}^n$.

Die meisten Summanden in der zuletzt genannten Summe sind allerdings gleich Null, zum Beispiel alle Summanden mit $j_1 = j_2 =: j$, denn nach D2 ist $\det(e_j, e_j, \dots) = -\det(e_j, e_j, \dots)$, also ist dieser Ausdruck Null. Dasselbe geschieht, wenn $j_p = j_q$ für irgendwelche $p \neq q$ ist. Somit überleben nur diejenigen Summanden, für die j_1, \dots, j_n alle verschieden sind, d.h. für die die Abbildung $p \mapsto j_p : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv ist, eine *Permutation*. Wir brauchen daher nicht mehr über alle j_1, \dots, j_n zu summieren, sondern nur noch über die Permutationen $\pi \in S_n$, wobei S_n wie bisher die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet.

$$(88) \quad \det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} \det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}).$$

Der Ausdruck $\det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)})$ enthält alle Basisvektoren, allerdings nicht in der richtigen Reihenfolge. Durch eine Reihe von Vertauschungen - ihre Anzahl heiße v - kann man sie in die richtige Reihenfolge bringen; bei jeder Vertauschung wechselt die Determinante das Vorzeichen:

$$(89) \quad \det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) \stackrel{D2}{=} (-1)^v \det(e_1, \dots, e_n) \stackrel{D3}{=} (-1)^v.$$

Die Anzahl v der Vorzeichenwechsel hängt natürlich von der Permutation π ab; man nennt $(-1)^v$ das *Vorzeichen* (*Signum*) $\operatorname{sgn}(\pi)$ der Permutation π . Die Zahl v selbst ist durch π nicht eindeutig bestimmt; wir können π auf ganz unterschiedliche Weisen als Verkettung von Vertauschungen (*Transpositionen*) schreiben, und dabei kann auch die Anzahl der benötigten Transpositionen wechseln. Aber die *Parität* (gerade oder ungerade) von v ist eindeutig: Wenn wir eine Permutation als Verkettung einer geraden Anzahl von Transpositionen darstellen können, dann hat *jede* solche Darstellung eine gerade Anzahl von Transpositionen,⁸⁶ und damit ist $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^v$ eindeutig definiert. Aus (88)

⁸⁶Um dies zu sehen, betrachtet man zunächst anstelle von v eine andere Zahl, die einer Permutation π eindeutig zuzuweisen ist, nämlich die Anzahl f der *Fehlstände*: Ein *Fehlstand* von π ist ein Paar $(\pi(i), \pi(j))$ mit $i < j$, aber $\pi(i) > \pi(j)$. Zum Beispiel hat die Permutation $\pi = 3142$ die folgenden Fehlstände: $(3,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$, also ist $f = 3$. Man definiert $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^f$. Verkettet man π nun mit einer *Nachbarvertauschung* $\tau = (i \leftrightarrow i+1)$, so wird für $\pi\tau$ genau ein Fehlstand, nämlich $(\pi(i), \pi(i+1))$, entweder aufgelöst oder neu erzeugt; die Zahl f ändert sich also um ± 1 und $\operatorname{sgn}(\pi\tau) = -\operatorname{sgn}(\pi)$. Eine Vertauschung τ von zwei beliebigen (nicht mehr notwendig benachbarten) Plätzen $(i \leftrightarrow i+k)$ ist eine Verkettung einer ungeraden Anzahl $(k + (k-1))$ von Nachbarvertauschungen.

und (89) erhalten wir die folgende, von Leibniz⁸⁷ stammende explizite Formel für die Determinante:

$$(90) \quad \det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} \operatorname{sgn}(\pi)$$

Diese Formel könnten wir zur Definition der Determinante erheben und damit die definierenden Gesetze D1, D2, D3 beweisen.

$n = 2$: Dann gibt es nur zwei Permutationen, die identische 12 und die Vertauschung 21. Wenn wir die Vektoren wieder mit a, b anstelle von a_1, a_2 bezeichnen, erhalten wir die alte Formel zurück:

$$\det(a, b) = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

$n = 3$: Dann gibt es sechs Permutationen, je drei mit positivem und negativem Vorzeichen:

$$\det(a, b, c) = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1.$$

$$\begin{array}{c}
 + \qquad \qquad - \\
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & b_1 & c_1 \\
 a_2 & b_2 & c_2 \\
 a_3 & b_3 & c_3
 \end{array}
 \end{array}$$

(The diagram shows a 3x3 grid of terms. The first two columns are crossed out with dashed lines. The terms $a_1 b_2 c_3$ and $b_1 c_2 a_3$ are marked with a '+' sign, and the terms $a_3 b_2 c_1$ and $b_3 c_2 a_1$ are marked with a '-' sign.)

Das ist die *Regel von Sarrus*,⁸⁸ manchmal auch *Jägerzaunregel* genannt.

$n = 4$: Hier gibt es bereits 24 Permutationen, je 12 mit positivem und negativem Vorzeichen. Spätestens jetzt sollte man besser die elementaren Transformationen benutzen.

Auch wenn die Formel (90) für praktische Zwecke ab $n = 4$ wenig brauchbar ist, hat sie doch nützliche Konsequenzen. Zum Beispiel können wir die Faktoren des Produkts $a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n}$ nach dem ersten Index umordnen:

$$a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n} = a_{1\rho(1)} \dots a_{n\rho(n)}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 i-1 & i & i+1 & & i+k-1 & i+k & i+k+1 \\
 \hline
 i-1 & i+k & i & i+1 & & i+k-1 & i+k+1 \\
 \hline
 i-1 & i+k & i+1 & & i+k-1 & i & i+k+1
 \end{array}
 \end{array}$$

(The diagram shows three rows of indices. The first row has indices $i-1, i, i+1, i+k-1, i+k, i+k+1$. The second row has indices $i-1, i+k, i, i+1, i+k-1, i+k+1$. The third row has indices $i-1, i+k, i+1, i+k-1, i, i+k+1$. Curved arrows indicate the mapping from the first row to the second and third rows.)

Deshalb gilt immer noch $\operatorname{sgn}(\tau\pi) = -\operatorname{sgn}(\pi)$. Wenn man π nun irgendwie als Komposition $\pi = \tau_1 \dots \tau_v$ von v Vertauschungen schreiben kann, so hat $\tau_v \dots \tau_1 \pi = \operatorname{id}$ das Vorzeichen $(-1)^v \operatorname{sgn}(\pi)$, und da $\operatorname{sgn}(\operatorname{id}) = 1$ (kein Fehlstand), folgt $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^v$.

⁸⁷Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 (Leipzig) - 1716 (Hannover)

⁸⁸Pierre Frédéric Sarrus, 1798 - 1861 (Saint-Affriques, Frankreich)

mit $\rho := \pi^{-1}$. Da $\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\pi)$, ist (90) äquivalent zu

$$(91) \quad \det(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\rho \in S_n} a_{1\rho(1)} \cdots a_{n\rho(n)} \operatorname{sgn}(\rho)$$

Diese Formel hat die gleiche Gestalt wie (90) mit dem einzigen Unterschied, dass die Zeilen- und Spaltenindizes vertauscht sind. Die Matrix mit vertauschten Indizes nennt man die *Transponierte*: Wenn eine Matrix A die Koeffizienten a_{ji} hat (man schreibt kurz $A = (a_{ji})$), dann hat die *transponierte Matrix* $B = (b_{ij})$ die Koeffizienten $b_{ij} := a_{ji}$; statt B schreibt man meistens A^T („ A transponiert“). Die Zeilen von A werden also zu Spalten von A^T und umgekehrt. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich von (90) und (91) sieht man nun

$$(92) \quad \det A^T = \det A.$$

Insbesondere können wir die Determinante genauso gut mit Zeilen- wie mit Spaltentransformationen berechnen.

21. DIE CRAMERSCHE REGEL

Wir wollen zum Schluss eine wichtige Anwendung der Determinanten besprechen: die Cramersche Regel,⁸⁹ nach der lineare Gleichungssysteme bei n Gleichungen mit n Unbekannten aufgelöst und Matrizen invertiert werden können. Wenn eine beliebige Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathbb{K}^n gegeben ist, können wir jeden Vektor $v = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{K}^n$ mit Hilfe dieser Basis darstellen: $v = \sum_i s_i b_i$. Wie aber berechnen wir die Zahlen s_i ? Wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und B eine *Orthonormalbasis* ist, geht das leicht: $s_j = v \cdot b_j$ (vgl (43)). Aber wie ist es im Allgemeinen? Da hilft uns die Determinante: In dem Ausdruck $\det B = \det(b_1, \dots, b_j, \dots, b_n)$ ersetzen wir die Spalte b_j durch $v = \sum_i s_i b_i$ und erhalten:

$$\begin{aligned} & \det(b_1, \dots, b_{j-1}, v, b_{j+1}, \dots, b_n) \\ &= \det(b_1, \dots, b_{j-1}, \sum_i s_i b_i, b_{j+1}, \dots, b_n) \\ &\stackrel{D1}{=} \sum_i s_i \det(b_1, \dots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\det(b_1, \dots, b_{j-1}, b_i, b_{j+1}, \dots, b_n)$ ist nur dann ungleich Null, wenn $i = j$ ist, denn sonst verschwindet diese Determinante nach

⁸⁹Gabriel Cramer, 1704 (Genf) - 1752 (Bagnols-sur-Cèze, Frankreich)

D2, weil in zwei Spalten derselbe Vektor b_i steht. Es bleibt also nur der Summand mit der Nummer j stehen:

$$\begin{aligned} & \det(b_1, \dots, b_{j-1}, v, b_{j+1}, \dots, b_n) \\ &= s_j \det(b_1, \dots, b_{j-1}, b_j, b_{j+1}, \dots, b_n) \\ &= s_j \det B. \end{aligned}$$

Satz 21.1. *Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von \mathbb{K}^n , so hat jeder Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ bezüglich dieser Basis die Darstellung $v = \sum_j s_j b_j$ mit*

$$(93) \quad s_j = \frac{\det B^{v,j}}{\det B},$$

mit $B^{v,j} := (b_1, \dots, b_{j-1}, v, b_{j+1}, \dots, b_n)$. □

Die Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ für eine invertierbare $n \times n$ -Matrix (= Basis) $A = (a_1, \dots, a_n)$ stellt genau dieselbe Aufgabe: Der Vektor b (bisher: v) soll als Linearkombination der Basis A (bisher: B) dargestellt werden; die Koeffizienten heißen jetzt x_j (bisher s_j):

$$b = \sum_j x_j b_j.$$

Mit dem obigen Satz erhalten wir also:

Satz 21.2. Cramersche Regel: *Ist A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix mit Spalten a_1, \dots, a_n , so hat die Lösung $x = A^{-1}b$ des Gleichungssystems $Ax = b$ die Komponenten*

$$(94) \quad x_j = \frac{\det A^{b,j}}{\det A}$$

für $j = 1, \dots, n$, wobei $A^{b,j} := (a_1, \dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \dots, a_n)$. □

Setzen wir speziell $b = e_i$, so erhalten wir die Spalten $A^{-1}e_i$ der Umkehrmatrix A^{-1} :

Satz 21.3. *Ist A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix mit Spalten a_1, \dots, a_n ,*

so hat $A^{-1} =: B = (b_{ij})$ die Spalten $A^{-1}e_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$ mit

$$(95) \quad b_{ji} = \frac{\det A^{i,j}}{\det A} = (-1)^{i+j} \frac{\det \bar{A}^{i,j}}{\det A}$$

wobei $A^{i,j} := (a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$ und $\bar{A}^{i,j}$ die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix ist, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht.

Bei der Berechnung von $\det A^{i,j} = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$ ist nämlich zu beachten, dass man durch Addition eines Vielfachen von e_i zu jeder Spalte (elementare Spaltentransformation vom Typ II) dafür sorgen kann, dass die i -te Komponente jedes Spaltenvektors verschwindet, ohne Veränderung anderer Koeffizienten. Wenn man nun das e_i in der j -ten Spalte ganz nach rechts verschiebt (Vertauschung mit den $n - j$ Spalten a_{j+1}, \dots, a_n) und anschließend die i -te Zeile ganz nach unten (Vertauschung mit den $n - i$ Zeilen mit den Nummern $i + 1, \dots, n$), haben wir insgesamt $(n - j) + (n - i) = 2n - (i + j)$ Vorzeichenwechsel vorgenommen, was so gut ist wie $i + j$ Vorzeichenwechsel ($(-1)^{2n-(i+j)} = (-1)^{2n}(-1)^{i+j} = (-1)^{i+j}$), daher das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$. \square

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist

$$\begin{aligned} \det A^{1,1} &= \det \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = d, \\ \det A^{2,1} &= \det \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = -b, \\ \det A^{1,2} &= \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} = -c \\ \det A^{2,2} &= \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} = a. \end{aligned}$$

Mit $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ erhalten wir also:

$$(96) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Man kann (95) auch als Regel zur Berechnung von Determinanten verstehen: Wegen $A \cdot B = I$ gilt ja $\sum_j a_{ij}b_{jk} = \delta_{ik}$ und insbesondere $\sum_j a_{ij}b_{ji} = 1$, somit

Satz 21.4. Laplacescher Entwicklungssatz:⁹⁰

$$(97) \quad \det A = \sum_j a_{ij} \det A^{i,j} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det \bar{A}^{i,j}$$

wobei $\bar{A}^{i,j}$ die $(n - 1) \times (n - 1)$ -Matrix ist, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht („Entwicklung nach der i -ten Zeile“). \square

Weil $\det A^T = \det A$, gilt die gleiche Formel (97) auch mit \sum_i statt \sum_j (Entwicklung nach der j -ten Spalte).

⁹⁰Pierre-Simon Laplace, 1749 (Beaumont-en-Auge, Normandie) - 1827 (Paris)

INDEX

- Abbildung, 40
Abel, 10
abelsch, 10
Abstand, 34, 35
abstrahieren, 2, 10
Abstraktion, 3, 11
Addition, 14, 15, 20
Antisymmetrie, 65
Archimedes, 23
Argument, 64
Assoziativgesetz, 10
Aufspann, 29, 33, 39, 55

Basis, 29, 43, 47, 48, 62
Basistransformation, 49
bijektiv, 10, 41
Bild, 40, 54, 57, 58
Bruchrechnung, 22

Cardano, 23
Cramer, 70

Descartes, 2
Determinante, 63, 65
Diagramm, 49
Dimension, 19, 31, 32, 57, 58
disjunkt, 14
Distributivgesetz, 20
Division, 21
Dodekaeder, 6
Drehsymmetrie, 7
Drehung, 8, 9
Drehzentrum, 12
Dreiecksmatrix, 59, 66

Ebene, 18, 26, 50
Eindeutigkeit, 41
Einheitsmatrix, 46
Eins, 20
Elementare Transformationen, 51,
60, 65
endliche Körper, 24
Erzeugendensystem, 27
Eudoxos, 23
Existenz, 1, 41

Fakultät, 9
Fibonacci, 13

Flächeninhalt, 60
Form, 1

Ganze Zahlen, 21
Gaußverfahren, 51, 58, 60
Gauß, 23
Geometrie, 41, 42
Gleichungslehre, 40
Gleitspiegelung, 7
Gram-Schmidt-Verfahren, 38
Grassmann, 19
Gruppe, 1, 9, 10, 13, 15, 20, 26
Gruppenoperation, 10

Hamilton, 15
Hintereinanderschaltung, 9
Homogenes Gleichungssystem, 54
Homomorphismus, 3, 42

Identische Abbildung, 11, 40, 46
Ikosaeder, 6
imaginär, 23
injektiv, 41, 57
Inklusion, 58
Inverse Matrix, 58, 71
Inversion, 10
invertierbar, 10, 47
irrational, 22
Islamische Kunst, 8
Isometrie, 7
isomorph, 11, 12, 15, 48
Isomorphie, 1
Isomorphismus, 11, 12, 47, 48, 58, 60

kanonisches Skalarprodukt, 36, 38
Kartesisches Produkt, 18, 26
Kern, 54, 57, 58
Koeffizient, 24
kommutativ, 10
Kommutativgesetz, 10
Komplement, 32, 40, 58
Komplexe Zahlen, 23
Komponente, 18
Komposition, 9, 40, 46
Kongruenzabbildung, 7
Konstante, 27
Koordinaten, 27, 30

- Koordinatenachse, 17
- Koordinatenebene, 18
- Körper, 20

- Lage, 8, 15
- Länge, 34, 36
- Laplace, 72
- Leibniz, 69
- linear, 2
- linear abhängig, 28
- linear unabhängig, 29, 37, 60
- Lineare Abbildung, 3, 42–44, 48, 57, 58, 60
- Lineare Beziehung, 29, 31
- Lineares Gleichungssystem, 3, 49, 71
- Linearität, 40, 42, 65
- Linearkombination, 28
- linkshändig, 62
- linksorientiert, 62
- Lösungsraum, 54, 55
- Lösung, 40, 50

- Matrix, 43–45, 49, 58, 66, 71
- Matrix-Inversion, 58
- Matrixprodukt, 46
- Minuszeichen, 20
- modulo, 25
- Möglichkeit, 1
- Multiplikation, 20

- Natürliche Zahlen, 25
- Neutralement, 10
- Norm, 36
- Normiertheit, 65
- n -Tupel, 19, 43
- Null, 20

- Ordnung, 12
- orientiert, 62
- Origo, 26
- orthogonal, 35, 36
- orthogonales Komplement, 40
- Orthonormalbasis, 37, 70
- Orthonormalisierung, 38
- Orthonormalsystem, 37

- Parallelepiped, 60
- Parallelogramm, 60
- Parameter, 54
- periodische Muster, 7

- Permutation, 8, 13, 40, 68
- Plato, 6
- Platonische Körper, 6, 8
- Pol, 24
- Polynom, 24, 27, 40
- Primzahl, 25
- Projektion, 34, 58
- Punkt, 15
- Pythagoras, 6, 34

- Rang, 55, 56
- Rationale Funktion, 24
- Rationale Zahlen, 21
- Raum, 18, 26
- Rauminhalt, 60
- Rechnen, 12
- rechtshändig, 62
- rechtsorientiert, 62
- Reelle Zahlen, 14, 21, 22
- regelmäßig, 5
- Restklasse, 25

- Sarrus, 69
- schief, 19
- senkrecht, 35
- Signum, 68
- Skalar, 16, 35
- Skalarmultiplikation, 16
- Skalarprodukt, 34, 35
- Spalte, 44
- Spalten, 43
- Spat, 60
- Spiegelsymmetrie, 7
- Spiegelung, 9
- Standard-Einheitsvektoren, 30
- Standardbasis, 30
- Strecke, 2, 34
- Streckenaddition, 15
- Subtraktion, 14, 17, 21
- surjektiv, 41, 57
- Symmetrie, 1, 7, 8, 42
- Symmetriegruppe, 10
- Symmetrietransformation, 1
- Symmetrische Gruppe, 13

- Theaitetos, 6
- Translation, 7, 9, 11, 15
- Translationsgruppe, 15
- Transponierte, 44, 70

Transposition, 68

Umkehrabbildung, 11, 41, 47
umkehrbar, 10
Umkehrmatrix, 47, 58, 71
unendlich-dimensional, 31
Untergruppe, 10
Unterraum, 26, 28, 55, 57
Urbild, 40
Ursprung, 15, 16, 26

Vektor, 15
Vektoraddition, 15
Vektorraum, 2, 17, 26, 42
Verhältnis, 17, 20–22
Verkettung, 9, 40, 46
Verschiebung, 2, 7, 15
Vieleck, 5
Vorzeichen, 68

Wert, 40
Winkel, 35
Winkelsumme, 5

Zahl, 1, 13, 17, 20, 35
Zeile mal Spalte, 45
Zeilenstufenform, 52
Zyklenschreibweise, 14
Zyklus, 14

INHALTSVERZEICHNIS

Vorbemerkung	1
1. Wie alt sind Xaver und Yvonne?	3
2. Was gibt es? Was gibt es nicht?	4
3. Symmetrie	7
4. Gruppen	9
5. Streckenaddition	14
6. Koordinaten	17
7. Die vier Grundrechenarten; Körper	20
8. Vektorräume	26
9. Basis und Dimension	27
10. Unterräume und Komplemente	32
11. Skalarprodukte	34
12. Orthonormalsysteme	37
13. Lineare Abbildungen	40
14. Matrizen	43
15. Isomorphismen	47
16. Lineare Gleichungssysteme	49
17. Der Lösungsraum	54
18. Bild und Kern	57
19. Invertieren von Matrizen	58
20. Determinanten	60
21. Die Cramersche Regel	70
Index	73