KOMMATA UND TONSYSTEME. ZUR GEOMETRIE DER TÖNE

T. BAUMEISTER, J.-H. ESCHENBURG

1. Einfürung

Wieviele Töne umfasst eine Oktave? Die vom Wort suggerierte Antwort (8) ist falsch, denn die Oktave umfasst 6 Ganzton- oder 12 Halbtonschritte. In reiner Stimmung sind diese Tonschritte aber keineswegs gleich groß, und es gäbe viele Möglichkeiten, aus ihnen neue Töne zusammenzusetzen, im Prinzip sogar unendlich viele. Dass man dennoch auf dem Klavier mit 12 Tönen auskommt, liegt an einem bereits von Pythagoras entdeckten numerischen Zufall, dass 12 Quinten ungefähr 7 Oktaven ergeben (Quintenzirkel). Von solchen Koinzidenzen, die in der Musik als Kommata bezeichnet werden, gibt es viele weitere. Einige führen zu ganz anderen endlichen Tonsystemen, z.B. zu einem mit 19 Tönen, das bereits im 16. Jahrhundert ernsthaft diskutiert wurde und sogar zum Bau von Instrumenten geführt hat [7]. Man kann diese Tonsysteme als Lösung von rationalen Approximationsproblemen verstehen, wie z.B. in [4]. Wir wählen einen mehr geometrischen Zugang und sehen die Kommata als Vektoren im Eulerschen Tonraum an. Sie bilden dort ein Gitter, das in jeder seiner Maschen (Fundamentalbereiche) nur endlich viele Töne enthält. Die Kommata selbst kommen zustande als Verhältnisse n/m für nahe benachbarte Zahlen n, m, die sich beide aus den wenigen Primzahlen zusammensetzen, die in der Musik Verwendung finden. Ein Katalog solcher Zahlenpaare findet sich in [3]. Wir diskutieren alle Möglichkeiten, die sich aus diesem Katalog ergeben, wobei wir neben den traditionell in der Musik verwendeten Primzahlen 2,3,5 auch die 7 diskutieren.

Die entstehenden Tonsysteme haben eine unterschiedliche Struktur und eignen sich teilweise wesentlich besser als das 12-Ton-System dazu, durch eine gleichschwebende Stimmung approximiert zu werden.

Die vorliegende Arbeit beruht auf den Zulassungsarbeiten [1], [6].

Date: 17. August 2009.

2. Tonverhältnisse

Die in der abendländischen Musik gängigen Tonintervalle in reiner Stimmung werden durch rationale Frequenzverhältnisse gegeben:

O	Oktave	2/1	G	großer Ganzton	9/8
Q	Quinte	3/2	g	kleiner Ganzton	10/9
q	Quarte	4/3	H	großer Halbton	16/15
T	große Terz	5/4	h	kleiner Halbton	25/24
t	kleine Terz	6/5	SK	Syntonisches Komma	81/80

Alle diese Verhältnisse sind von der Gestalt $(n+1)/n$, aber ihre Reihe enthält immer größere Lücken; es fehlen die Verhältnisse $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$; $\frac{11}{10}, \dots, \frac{15}{14}$; $\frac{17}{16}, \dots \frac{24}{23}$ usw. Die in unserer Musik vorherrschenden Tonverhältnisse sind ausschließlich aus den Primzahlen 2, 3 und 5 zusammengesetzt; die in der Tabelle angegebenen Verhältnisse bestehen vermutlich aus den einzigen Zahlenpaaren $(n+1, n)$, deren beide Komponenten nur diese Primteiler haben [3]. Die ersten der fehlenden Verhältnisse, $\frac{7}{6}$ und $\frac{8}{7}$, würden die Quarte in zwei annährend gleiche Intervalle unterteilen ($\frac{7}{6} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4}{3}$), sehr große Ganztöne oder sehr kleine Terzen. Das Intervall $\frac{7}{4}$, das $\frac{8}{7}$ zur Oktave ergänzt ($\frac{7}{4} \cdot \frac{8}{7} = 2$), ist als Naturseptime bekannt.

Die Oktave wird durch diese Intervalle in vielfacher Weise unterteilt: durch Quinte und Quarte ($\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$), die Quinte wiederum durch große und kleine Terz ($\frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{2}$), die Quarte dagegen durch große Terz und den großen Halbton ($\frac{5}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{4}{3}$) usw. Jedesmal sind die Faktoren der Zerlegung ungleich.

(1)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	O
(2)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2
(3)	-	-	-	-	-	-	Q	-	-	-	-	q
(4)	-	-	-	-	-	-	3/2	-	-	-	-	4/3
(5)	-	-	-	T	-	-	t	-	-	-	T	H
(6)	-	-	-	5/4	-	-	6/5	-	-	-	5/4	$\frac{16}{15}$
(7)	-	G	-	g	H	-	G	-	g	-	G	H
(8)	-	$\frac{6}{9}$	-	$\frac{9}{10}$	$\frac{16}{15}$	-	$\frac{9}{8}$	-	$\frac{10}{9}$	-	$\frac{9}{18}$	$\frac{16}{15}$
(9)	H	h'	H	h	H	h'	H	H	h	H	h'	H
(10)	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$
(11)	des	d	es	e	f	fis	g	as	a	b	h	c'
(12)	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2

Zeile (10) zerlegt die Oktave in 12 Halbtonschritte (vgl. [5]), von denen es drei verschiedene Sorten gibt:

großer Halbton	H	=	16/15
mittlerer Halbton	h'	=	135/128
kleiner Halbton	h	=	25/24

mit den Verhältnissen

H/h'	=	2048/2025	=	1,01136
h'/h	=	81/80	=	1,0125
H/h	=	128/125	=	1,024

3. Tonebene und reine Stimmung

Nach einer Idee von Leonhard Euler kann man diese Verhältnisse folgendermaßen geometrisch veranschaulichen. Jedes Tonverhältnis ist eine Zahl vom Typ $2^w 3^x 5^y$ für ganze Zahlen w, x, y. Dieses Zahlentripel (w, x, y) betrachten wir als die Koordinaten des Tonverhältnisses. Wenn wir Oktaven nicht beachten, bleiben die zwei Koordinaten x und y übrig, die Potenzen von 3 und von 5. Wir nennen sie Quint- und Terz-Koordinate, weil die Quinte 3/2 die Koordinaten $(x, y) = (1, 0)$ und die große Terz 5/4 die Koordinaten $(x, y) = (0, 1)$ besitzt. Wir können also jeden Ton als Punkt in der xy-Ebene mit ganzzahligen Koordinaten deuten; ein Schritt nach rechts entspricht einer Quinte, ein Schritt nach oben einer großen Terz. Die 12 Halbtonschritte einer Oktave von c bis c' haben dann folgende Position in der Eulerschen Tonebene, wobei c dem Ursprung des Koordinatensystems $x = y = 0$ entspricht:

	a	e	h	fis
b	f	c	g	d
	des	as	es	

Fig. 1

Die Tonebene lässt sich nach allen Seiten endlos fortsetzen und enthält demnach unendlich viele Töne, selbst innerhalb einer Oktave. Z.B. für ein rein gestimmtes G-Dur müsste man die C-Dur-Tabelle um Eins nach rechts versetzen,

C-Dur	a	e	h		
	f	c	g	d	
G-Dur		e	h	f̃	
		c	g	d	ã

wobei am rechten Rand zwei neue Töne f̃ und ã (reine Quinten über h und d) auftauchen; der alte Tonvorrat reicht also für die neue Tonart nicht mehr aus. Wie kann man ein Tonsystem schaffen, das nur aus endlich vielen Tönen besteht und doch möglichst nahe an der reinen Stimmung bleibt?

4. Die Pythagoräische Stimmung

Pythagoras von Samos (ca. 569 - 475 v.Chr.) war der erste, der die Beziehung zwischen Mathematik und Musik systematisch untersuchte. Ihm wird die Entdeckung zugeschrieben, dass 12 Quinten ungefähr 7 Oktaven entsprechen; das genaue Verhältnis ist das *Pythagoräische Komma*

$$\mathrm{PK} = (3/2)^{12}/2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524288} = 1,0136\ldots$$

Nach 12 Quinten kommt man also ungefähr wieder beim gleichen Ton (bis auf Oktavversetzung) an, bei fis statt ges:

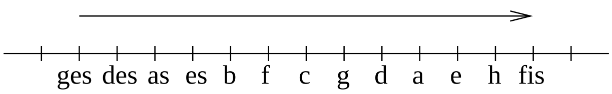

Fig. 2

Die unendliche Kette der Töne, die durch Quinten auseinander hervorgehen (der eindimensionale Eulerraum, Primzahl 3), wird also durch die Identifizierung (Zusammenlegung) von fis und ges zu einem Kreis mit 12 Punkten zusammengebogen, dem Quintenzirkel; oder anders gesagt, eine Verschiebung der Kette um 12 Töne wird als ein musikalisch unwesentlicher Effekt betrachtet. Alle 12 Töne des Klaviers lassen sich so durch eine Kette von 12 Quinten erzeugen, wenn man das Pythagoräische Komma P als vernachlässigbar ansieht.[1] Dieser Fehler muss irgendwie auf die 12 Tonschritte verteilt werden, d.h. das Frequenzverhältnis jedes Schrittes muss ein bisschen verschoben werden in der Absicht, dass das Frequenzverhältnis aller 12 Schritte zusammen nicht mehr 12 Quinten, sondern genau 7 Oktaven sind.

Allerdings enthält dieses Tonsystem keine reinen Terzen, was seit Ausgang des Mittelalters zunehmend als Problem empfunden wurde. Durch Hinzunahme der Terzen (Primzahl 5) gelangt man von der von der eindimensionalen Tonkette zur zweidimensionalen Tonebene (Ton-Netz) und benötigt nun ein zweites Komma, um weiterhin mit einen endlichen Tonvorrat arbeiten zu können.

[1] Zum Vergleich: der kleine Halbton h = 25/24 = 1,0417 hat eine über dreimal größere Abweichung von der Eins als PK = 1,0136

5. 12-tönige Stimmungen

Wir sind neben dem Pythagoräischen bereits einem weiteren Komma begegnet, dem *Syntonischen Komma*

$$\mathrm{SK} = \mathrm{G/g} = 3^4/(5 \cdot 2^4) = 81/80 = 1{,}0125.$$

Seine Koordinaten in der Eulerschen Tonebene sind $x = 4$, $y = -1$; also entspricht SK dem Vektor $(4, -1)$. Das Pythagoräische Komma PK $= 3^{12}/2^{19}$ entspricht dagegen dem Vektor (12,0). Die Summen ganzzahliger Vielfacher dieser beiden Vektoren bilden ein *Gitter* in der Eulerschen Tonebene, dessen Punkte in der nachfolgenden Figur schwarz eingezeichnet sind. Ihre Tonverhältnisse sind Produkte von Kommata; das sie ebenso wie ihre Faktoren nahe bei Eins liegen, können sie ebenfalls als Kommata angesehen werden. Die kleinen Zahlen in der Figur sind die zweite und dritte Nachkommastelle der Differenz des betreffenden Kommas zu Eins; die erste Nachkommastelle ist immer Null.[2]

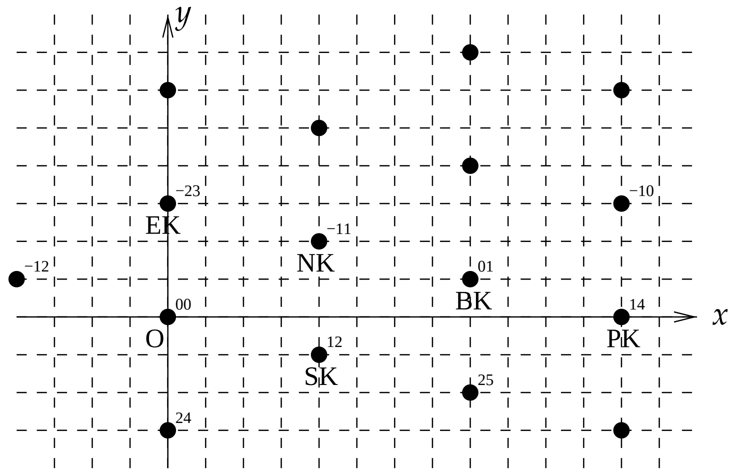

Fig. 3

Einige der neu entstehenden Kommata haben eigene Namen; das dem Vektor $(0, 3)$ zugehörige beschreibt das Verhältnis von drei großen Terzen und einer Oktave oder von kleinem und großem Halbton und wird *enharmonisches Komma* (EK) oder *kleine Diësis* genannt; es hat den recht großen Wert

$$\mathrm{EK} = \mathrm{h/H} = \frac{5^3}{2^7} = \frac{125}{128} = 1 - 0{,}0234, \quad 1/\mathrm{EK} = \frac{128}{125} = 1{,}024$$

[2]Diese Zahlen verhalten sich fast additiv, da $(1+\alpha)(1+\beta) - 1 = \alpha + \beta + \alpha\beta \approx \alpha + \beta$, wenn $\alpha, \beta << 1$. So addieren sich z.B. die den Kommavektoren EK und SK zugeordneten Zahlen -23 und 12 zu dem bei NK stehenden Wert 11 auf.

Besonders klein dagegen ist das von uns mit “BK” (“Bestes Komma”) bezeichnete Komma $(8,1)$, das das Verhältnis von 8 Quinten und einer großen Terz zu 5 Oktaven bezeichnet:

$$\mathrm{BK} = \frac{3^8 \cdot 5}{2^{15}} = \frac{32804}{32768} = 1{,}0010.$$

Das dazwischen liegende Komma $(4,2)$ nennen wir einfach “NK” (“Neues Komma”); es bezeichnet das Verhältnis von 4 Quinten und zwei Terzen zu 3 Oktaven:

$$\mathrm{NK} = \frac{3^4 \cdot 5^2}{2^{11}} = \frac{2025}{2048} = 1 - 0{,}0112.$$

Wir können nun in diesem System 12 nahe beieinander liegende Töne (ganzzahlige Vektoren) auswählen, wobei keiner der Differenzvektoren ein Kommavektor sein darf. Eine erste Möglichkeit dafür war in Fig. 1 angegeben. Allerdings müssen wir auch hier Fehler verteilen:

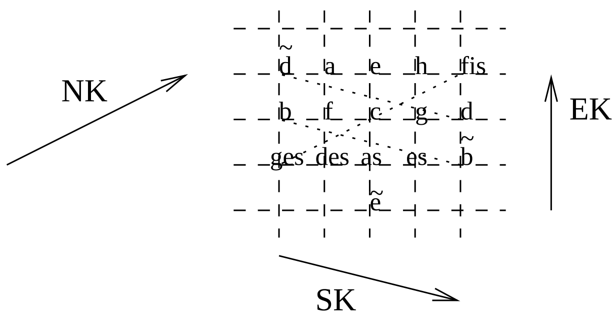

Fig. 4

Wenn wir z.B. von des aus noch eine Quinte abwärts (nach links) gehen, kommen wir zum ges, das mit fis identifiziert werden muss, wenn man bei 12 Tönen bleiben will. Der Differenzvektor zwischen fis und ges ist der Kommavektor NK = (4,2), dessen Fehler $-0{,}011$ verteilt werden muss. Wenn wir von a eine Quinte abwärts oder von es eine Quinte aufwärts gehen, so gelangen wir zu neuen Tönen $\tilde{\mathrm{d}}$ und $\tilde{\mathrm{b}}$, die sich von b und d durch den Kommavektor SK $= (4,-1)$ mit seinem Fehler von 0,0125 unterscheiden. Am schlimmsten ist es, wenn wir z.B. von as aus noch eine große Terz abwärts gehen wollen; dann landen wir bei einem Ton ẽ unterhalb von as, der sich von dem “richtigen” e um ein enharmonisches Komma mit seinem großen Fehler von 0,024 unterscheidet; auch dieser Fehler muss verteilt werden.

Etwas übersichtlicher werden die Fehler und ihre mögliche Verteilung, wenn wir die 12 Töne eines einzelnen Gitterparallelogramms auswählen, eines Parallelogramms, dessen Eckpunkte benachbarte Punkte des Kommagitters sind. Das Parallelogramm mit den Eckpunkten O, SK, BK, NK ist dafür besonders günstig, weil die Fehler dieser Kommata am kleinsten sind:

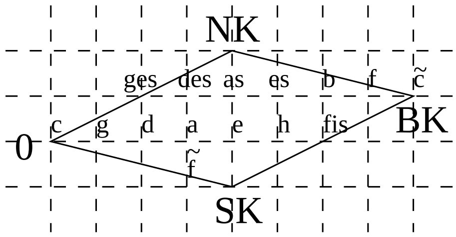

Fig. 5

Hier treten nur die Kanten- und Diagonalenvektoren des Parallelogramms als Kommavektoren auf. So unterscheiden sich c und c̃ um BK (Fehler 0,001), f̃ und f um NK (Fehler 0,011) sowie fis und ges um SK (Fehler 0,0125). Wenn man alle Kommafehler vernachlässigt, sind die drei Halbtöne h, h' und H nicht mehr unterschieden, und die 12 Töne bilden eine Sequenz von Halbtönen, wie in der folgenden Figur durch die diagonalen Linien (dem großen Halbton H $= (-1,-1)$ entsprechend) gekennzeichnet.

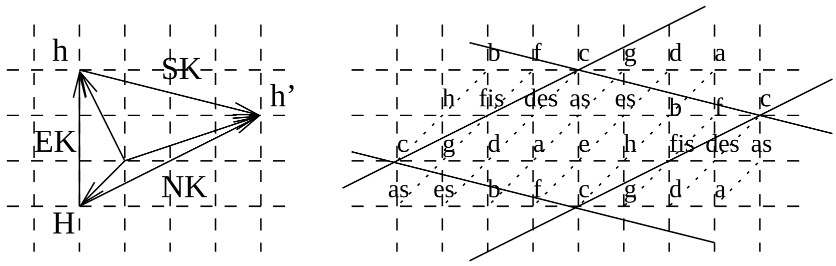

Fig. 6

Allerdings eignet sich keiner der drei Halbtöne besonders gut dazu, die Oktave gleichmäßig aufzuteilen; die Werte $(\frac{16}{15})^{12} = 2{,}169$ und $(\frac{135}{128})^{12} = 1{,}894$ und erst recht $(\frac{25}{24})^{12} = 1{,}632$ liegen weit ab von 2. In der gleichschwebenden Stimmung ersetzt man man die Halbtöne durch $\sqrt[12]{2} \approx 1{,}059$, womit das Problem gelöst ist, aber auch alle die musikalisch vielleicht bedeutsamen Unterschiede eingeebnet sind. Wir werden sehen, dass andere Tonsysteme diese Schwierigkeit in viel geringerem Maß aufweisen.

6. Die 19-Ton-Stimmung

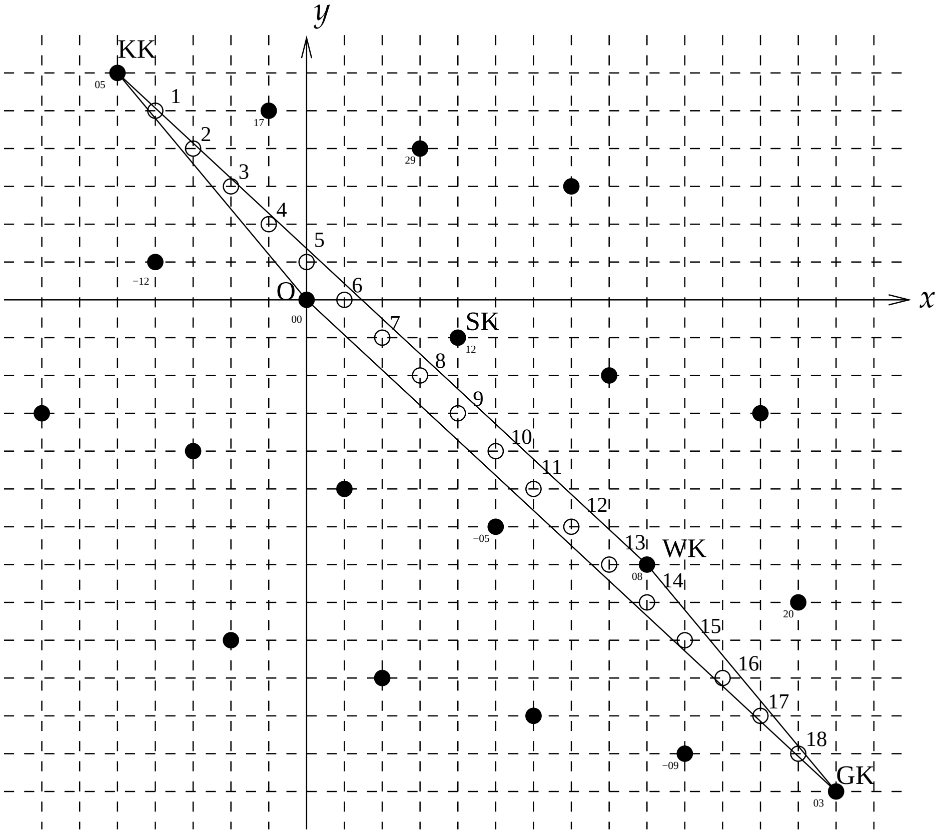

Fig. 7

Es gibt ein sehr kleines Komma, das nicht zum Kommagitter der 12-Ton-Stimmung gehört: 6 große Terzen und eine Oktave ergeben ungefähr 5 Quinten. Wir wollen es einfach als "kleines Komma" KK bezeichnen:

$$\mathrm{KK} = (-5, 6) = \frac{5^6}{3^5 \cdot 2^6} = \frac{15625}{15552} = 1{,}0047.$$

Zusammen mit dem syntonischen Komma SK erzeugt es ein Kommagitter, das in jeder Masche 19 Töne enthält. Allerdings ist $\mathrm{SK} = (4, -1)$ ein ziemlich grobes Komma (Fehler 0,012). Viel besser die Linearkombination $-2\mathrm{KK} + \mathrm{SK} = (10, -12) + (4, -1) = (14, -13)$, die wir einfach als "gutes Komma" (GK) bezeichnen wollen:

$$\mathrm{GK} = (14, -13) = \frac{81 \cdot (15552)^2}{80 \cdot 15625^2} = 1{,}0031.$$

Statt KK und SK betrachten wir KK und GK als Basis des Kommagitters und benutzen die Töne in der Masche mit den Eckpunkten 0, KK, GK und dem weiteren Komma WK = KK + GK = SK − KK = $(4,-1)+(5,-6)=(9,-7)$,

$$\mathrm{WK} = (9,-7) = \frac{81\cdot 15552}{80\cdot 15625} = 1{,}0078.$$

Die neue Skala (Fig. 7) wird erzeugt von der kleinen Terz t = 6/5 = $(1,-1)$; in der Tat ist $(\frac{6}{5})^{19} = 31{,}948 \approx 32 = 2^5$; mithin entsprechen 19 kleine Terzen ziemlich genau 5 Oktaven. Natürlich ist die kleine Terz nicht der kleinste Tonschritt der Skala; dieser ist vielmehr der Ton 4, den wir als *Drittelton* D bezeichnen können:[3]

$$\mathrm{D} = (6/5)^4/2 = \frac{648}{625} = 1{,}0368.$$

Die 19-fache Anwendung des Tonschrittes D ist sehr nahe bei der Oktave 2/1, denn $1{,}0368^{19} = 1{,}987$, oder anders ausgedrückt, D ist sehr nahe bei $\sqrt[19]{2} = 1{,}0372$. Die Skala ist also nahezu gleichschwebend gestimmt. Die folgende Tabelle zeigt die Skala in aufsteigender Reihenfolge mit und die entsprechenden Töne der C-Dur-Tonleiter in reiner Stimmung:

Ton	w	x	y	Tonverh.	C-Dur	Tonverh.	Fehler
4	−3	−1	2	1.0417			
8	0	3	−2	1,08			
12	3	7	−6	1,1197	d = $\frac{9}{8}$	1,125	0,0053
16	6	11	−10	1,16095			
1	−5	−4	5	1,2056			
5	−2	0	5	1,25	e = $\frac{5}{4}$	1,25	0
9	1	4	−3	1,296			
13	4	8	−7	1,3437	f = $\frac{4}{3}$	1,3333	0,0104
17	7	12	−11	1,3931			
2	−4	−2	4	1,4468			
6	−1	1	0	1,5	g = $\frac{3}{2}$	1,5	0
10	2	5	−4	1,5552			
14	5	9	−8	1,6124			
18	8	13	−12	1,6718	a = $\frac{5}{3}$	1,6667	0,0051
3	−3	−2	3	1,7361			
7	0	2	−1	1,8			
11	3	6	−5	1,8662	h = $\frac{15}{8}$	1,875	−0,0088
15	6	10	−9	1,9349			
19	1	0	0	2	c	2	0

[3] Die 3. Potenz des Tonverhältnisses D ist $1{,}0368^3 = 1{,}1145$, was ungefähr dem kleinen Ganzton g = 10/9 = 1,1111 entspricht, daher die Bezeichnung Drittelton.

Die Töne der C-Dur-Tonleiter lassen sich also recht gut in das 19-Ton-System einordnen. Aber auch die Naturseptime s = 7/4 = 1,75 passt hinein; sie wird durch den Ton $3 = (-2, 3)$ approximiert (zum Vergleich: b = 16/9 = 1,7778 ist wesentlich weiter entfernt). Verantwortlich dafür ist ein Komma im 3-5-7-Raum, das wir als Zusatzkomma, ZK, bezeichnen wollen:

$$\mathrm{ZK} = (2, -3, 1) = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7}{5^3} = \frac{126}{125} = 1{,}008.$$

Erweitern wir die Tonebene zum Tonraum durch Hinzunahme einer weiteren Koordinate z, die die Potenz der Primzahl 7 bezeichnet, so gilt $3 + ZK = (0, 0, 1) = s$ und somit unterscheidet sich der Ton 3 von der Naturseptime nur um das Zusatzkomma.

Literatur

[1] Tina Baumeister: *Zahlen in der Musik*, Zulassungsarbeit Augsburg 2008

[2] Jon Behrens: *Quantitative Analyse der Güte des Harmonievorrats gleichstufiger Tonsysteme*, http://www.magnetkern.de/microtone/equal-temperament.html

[3] Jonas Eschenburg: *Kommata in der Musik*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu

[4] P. Giesl: *Stimmung und Kettenbrüche*, in: Mikrotöne und mehr. Auf György Ligetis Hamburger Pfaden, Manfred Stahnke (Hrsg.), von Bockel Verlag, Hamburg, 2005, 243-263.

[5] G. Mazzola: *Geometrie der Töne*, Birkhäuser 1990

[6] Cornelia Miller: *Kommata und Tonsysteme*, Zulassungsarbeit Augsburg 2009

[7] G. Zarlino: *Le institutione harmoniche*, 1573, zitiert nach Wikipedia: *Neunzehnstufige Stimmung*