Das Ikosaeder und die Gleichungen 5. Grades nach Felix Klein

J.-H. Eschenburg

0. Einführung

Für die Gleichungen 2., 3. und 4. Grades gibt es Formeln, die es gestatten, die Lösungen der Gleichung aus den Koeffizienten durch algebraische Umformungen und Wurzelziehen zu bestimmen. Für die allgemeine Gleichung 5. Grades kann es bekanntlich keine solche Formel geben, weil die Gruppe A_5 der geraden Permutationen der 5 Lösungen nicht auflösbar ist. Dieselbe Gruppe A_5 tritt auch als Symmetriegruppe des *Ikosaeders* auf, des Platonischen Körpers, der von 20 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Felix Klein hat nach Vorarbeiten vor allem von P.Gordon [G] um 1880 festgestellt, dass zwischen beiden Gegenständen, der Gleichung 5. Grades und dem Ikosaeder, ein enger Zusammenhang besteht: Dem Ikosaeder ist eine rationale Funktion vom Grad 60 zugeordnet, die *Ikosaederüberlagerung*, mit deren Umkehrung sowie algebraischen Umformungen man alle Gleichungen 5. Grades lösen kann. Damit wurden zwei Grundaufgaben der Mathematik in sehr konkreter Weise miteinander verknüpft: das Lösen von Gleichungen und die Untersuchung räumlicher Formen, Algebra und Geometrie. Das macht den Klein'schen Zugang auch heute noch sehr attraktiv.

Kleins zusammenfassendes Buch "Vorlesungen über das Ikosaeder" erschien 1884 und wurde 1993 wieder neu aufgelegt, versehen mit einer Einführung und ausführlichen Kommentaren von P. Slodowy [K]. Diese bieten dem heutigen Leser unschätzbare Hilfen zum Verständnis des Buches. Dennoch bleibt im Detail noch sehr viel Arbeit zu tun, um den Klein'schen Auflösungsprozess für die Hauptgleichung 5. Grades

$$x^5 + ax^2 + bx + c = 0$$

(auf die sich jede Gleichung 5. Grades reduzieren lässt) wirklich nachvollziehen zu können. Die vorliegende Darstellung möchte diese Arbeit leisten; sie diente als Hilfe für ein Seminar für Lehramtsstudenten an der Universität Augsburg über dieses Thema. Es wurden dabei nur Kenntnisse in Funktionentheorie und Grundkenntnisse in Algebra erwartet (keine Galoistheorie).

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen Beteiligten herzlich bedanken, ganz besonders bei Peter Slodowy, der mir immer wieder weitergeholfen hat.

1. Auflösung einer algebraischen Gleichung

Die Aufgabe, eine algebraische Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$$

zu lösen, bedeutet, aus den Koeffizienten $a_1, ..., a_n$ die Nullstellen ("Wurzeln") $x_1, ..., x_n$ des Polynoms $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_0$ zu bestimmen. Für $n = 2$ haben wir z.B. die bekannte Formel $x_{1,2} = (-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2})/2$. Für größere n ist dies schwer. Die Umkehraufgabe dagegen, aus den Nullstellen $x_1, ..., x_n$ die Koeffizienten $a_1, ..., a_n$ zu bestimmen, ist ganz einfach, denn durch Ausmultiplizieren folgt

$$p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = x^n - (\sum_i x_i)x^{n-1} + (\sum_{i<j} x_i x_j)x^{n-2} - ... + (-1)^n(\prod_i x_i).$$

Also gilt $a_i = (-1)^i \sigma_i(x_1, ..., x_n)$, wobei σ_i die sog. *elementarsymmetrischen Polynome* sind:

$$\sigma_1(x_1, ..., x_n) = \sum_i x_i \ , \ ... \ , \ \sigma_n(x_1, ..., x_n) = \prod_i x_i.$$

Allgemein ist ein *symmetrisches Polynom* ein Polynom in n Variablen, $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, das unter allen Permutationen der n Veränderlichen invariant ist, d.h.

$$\phi(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)}) = \phi(x_1, ..., x_n)$$

für alle Permutationen $\pi \in S_n$ und alle $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$. Die o.g. elementarsymmetrischen Polynome σ_i haben diese Eigenschaft, und ein Satz der Algebra besagt, dass sich *jedes* symmetrische Polynom selbst als algebraischer Ausdruck in den elementarsymmetrischen Polynomen schreiben läßt (van der Waerden [W], S.100 und S. 189).

Der Auflösungsprozess einer algebraischen Gleichung besteht nun einfach darin, geeignete symmetrische Polynome ϕ_i in den Wurzeln $x_1, ..., x_n$ zu finden, aus denen man die x_i durch bekannte Rechenverfahren wie Wurzelziehen zurückgewinnen kann. Die $\phi_i(x_1, ..., x_n)$ können wir ja als algebraische Ausdrücke in den elementarsymmetrischen Polynomen der x_i, also den Koeffizienten a_i schreiben und haben damit ein Verfahren, aus den a_i die x_i zu berechnen. Im Fall $n = 2$ ist ein solcher Ausdruck die *Diskriminante* $(x_1 - x_2)^2$ (offensichtlich ein symmetrisches Polynom in x_1, x_2). Diesen können wir durch elementarsymmetrische Polynome, also durch a_1 und a_2 folgendermaßen schreiben:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = \sigma_1^2(x_1, x_2) - 4\sigma(x_2, x_2) = a_1^2 - 4a_2,$$

und die Quadratwurzeln dieses Ausdrucks kommen in der Auflösungsformel vor. Für Gleichungen von beliebigem Grad spielt der entsprechende Ausdruck

$$D(x_1, ..., x_n) = \prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$$

ebenfalls eine große Rolle; er heißt *Diskriminate* ("Unterscheidende"), weil er genau dann ungleich Null ist, wenn die Wurzeln alle verschieden sind.

Stellvertretend wollen wir zunächst verstehen, wie der Auflösungsprozess für kubische Gleichungen ($n = 3$) funktioniert ([W], S. 191-193). Nach dem oben skizzierten Schema benötigen wir symmetrische Polynome in x_1, x_2, x_3, aus denen wir die x_i zurückgewinnen können. Dazu bilden wir für jede der drei dritten Einheitswurzeln w (also $w^3 = 1$) den Ausdruck

$$L_w(x_1, x_2, x_3) = x_1 + wx_2 + w^2x_3,$$

der als "Lagrange'sche Resolvente" bezeichnet wird ([W], S.183). Bei zyklischer Permutation $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1)$ geht L_w offensichtlich in L_w/w über, und somit ist L_w^3 invariant unter der Gruppe A_3 der geraden (hier: der zyklischen) Permutationen. A_n-Invarianten sind fast genauso gut wie symmetrische Polynome (S_n-Invarianten); sie lassen sich durch die Koeffizienten sowie eine Quadratwurzel der Diskriminante darstellen (siehe unten). Die L_w^3 erhalten wir also aus a_1, a_2, a_3 und $\sqrt{D}$, die L_w selber durch Ziehen der dritten Wurzel und aus den drei linearen Ausdrücken L_1, L_ρ, L_{ρ^2} in x_1, x_2, x_3 (wobei $\rho = e^{2\pi i/3} = (-1 + i\sqrt{3})/2$) erhalten wir die gesuchten Wurzeln x_1, x_2, x_3. Dies ergibt die bekannten Auflösungsformeln für Gleichungen dritten Gerades. Die Rechnung ist in [W], S. 192 unten für den Fall $a_1 = 0$ ausgeführt.

Geht man zu $n = 5$ über, so werden die Dinge komplizierter, weil A_5 eine sehr viel größere und kompliziertere Gruppe ist als A_3: Sie hat Ordnung 60 statt 3, ist nicht mehr zyklisch, nicht einmal mehr auflösbar, sie ist nämlich sogar *einfach*, d.h. sie enthält überhaupt keine Normalteiler ([W], S. 163ff); eine nicht-abelsche auflösbare Gruppe hätte wenigstens ihre Kommutatorgruppe als Normalteiler. Das führt dazu, dass der Auflösungsprozess nicht mehr nur mit Hilfe von Wurzelziehen (Umkehrungen der Potenzen) und den vier Grundrechenarten bewerkstelligt werden kann ([W], S.190); es ist eine neue Operation erforderlich: Statt der Umkehrung der dritten Potenz (Grad 3 = Ordnung von A_3) ist die Umkehrung einer rationalen Funktion vom Grad 60 (= Ordnung von A_5) erforderlich. Diese werden wir mit Hilfe des *Ikosaeders* beschreiben.

Es bleibt die Darstellung der A_n-invarianten Polynome nachzutragen. Jedes S_n-invariante Polynom auf $\mathbb{C}^n$ ("*symmetrisches Polynom*") lässt sich auf eindeutige Weise als Summe von Produkten der elementarsymmetrischen Polynome $\sigma_1, ..., \sigma_n$ schreiben ([W], S.100). Wie aber sehen die Polynome auf $\mathbb{C}^n$ aus, die nur unter A_n invariant sind? Jedes A_n-invariante Polynom f lässt sich zerlegen in ein symmetrisches Polynom $(f + f \circ \tau)/2$ und ein antisymmetrisches $(f - f \circ \tau)/2$, wobei $\tau \in S_n$ eine beliebige ungerade Permutation (z.B. eine Transposition) der Koordinaten ist; die antisymmetrischen Polynome sind A_n-invariant und wechseln unter ungeraden Permutationen das Vorzeichen (man beachte, dass sich zwei ungerade Permutationen um eine gerade unterscheiden). Ein spezielles antisymmetrisches Polynom ist offensichtlich

$$\nabla(x_1, ..., x_n) := \prod_{i<j}(x_i - x_j),$$

dessen Quadrat $D(x_1, ..., x_n) = \prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$ die Diskriminante ist. Dieses Polynom ∇ spielt eine besondere Rolle, denn man sieht leicht, dass *jedes* antisymmetrische Polynom a von ∇ geteilt wird.

Beweis: Für jedes Indexpaar $i < j$ ist $a(x) = 0$ wenn $x_i = x_j$, d.h. a verschwindet auf der Hyperebene $\{x \in \mathbb{C}^n;\ x_i - x_j = 0\}$. Nun gilt allgemein: Wenn ein Polynom a auf $\mathbb{C}^n$ auf einer Hyperebene $\{x \in \mathbb{C}^n;\ \sum_i \alpha_i x_i = 0\}$ verschwindet, so ist die Linearform $\phi(x) = \sum_i \alpha_i x_i$ ein Teiler von a. Nach Koordinatentransformation (Basiswechsel) kann man nämlich $\phi(x) = x_1$ annehmen und danach die Terme, die x_1 enthalten, abtrennen; es gilt also $a(x) = x_1 a'(x) + a''(x_2, ..., x_n)$. Da $a(x) = 0$ für $x_1 = 0$, folgt $a'' = 0$, und der Rest enthält den Teiler x_1. Somit ist ϕ, in unserem Fall also $x_i - x_j$, ein Teiler von a, also auch das Produkt aller $x_i - x_j$, d.h. ∇ teilt a.

Da a/∇ ein symmetrisches Polynom ist (bei ungeraden Permutationen wechseln Zähler *und* Nenner das Vorzeichen), lässt sich a/∇ eindeutig durch elementarsymmetrische Polynome schreiben, somit lässt sich jedes A_n-invariante Polynom eindeutig durch $\sigma_1, ..., \sigma_n$ und ∇ ausdrücken.

2. Das Ikosaeder und die Gruppe A_5

Das Ikosaeder ist der platonische Körper, der aus 20 gleichseitigen Dreiecken gebildet wird, wobei jeweils 5 Dreiecke um einen Eckpunkt herum angeordnet sind. Er besitzt 20 Flächen (Dreiecke), 30 Kanten und 12 Eckpunkte. Die Kanten bilden 5 Familien zu je 6 Kanten, von denen zwei nach geeigneter Drehung des Koordinatensystems in x_1-Richtung, zwei in in x_2-Richtung und zwei in x_3-Richtung zeigen. Die Mittelpunkte der Kanten einer Familie bilden die Ecken eines Oktaeders; es gibt also 5 solche einbeschriebenen Oktaeder im Ikosaeder. Die Drehgruppe des Ikoseders ("*Ikosaedergruppe*") besteht aus allen Drehungen im Raum $\mathbb{R}^3$, die ein fest gewähltes Ikosaeder (mit Mittelpunkt in O) in sich überführen. Die Ikosaedergruppe hat 60 Elemente, denn wir können jede der zwölf Ecken in jede andere überführen und zusätzlich noch um jede Ecke drehen, wobei die 5 angrenzenden Flächen zyklisch vertauscht werden, und wenn wir die Lage einer Ecke mit ihren fünf Flächen festgelegt haben, so ist die Lage des Ikosaeders vollständig bestimmt. In der Tat ist die Ikosaedergruppe isomorph zur Gruppe der geraden Permutationen von fünf Gegenständen, der A_5: Bei jeder Drehung werden nämlich die fünf Oktaeder permutiert, und durch gleichartiges Färben der Kanten einer jeden Familie kann man sich leicht überzeugen, dass genau die geraden Permutationen der fünf Oktaeder auftreten: Bis auf zyklische Vertauschungen gibt es genau 12 gerade Permutationen der fünf Farben, und jede kommt in den 12 Ecken genau einmal vor.

Die zwölf Ecken des Ikosaeders haben alle denselben Abstand vom Mittelpunkt O, liegen also auf einer Kugelfläche. Wenn wir die geraden Kanten zwischen den Eckpunkten durch die zugehörigen Großkreisbögen auf der Kugelfläche (Sphäre) ersetzen, so wird aus dem Ikoseder eine Zerlegung der Kugelfläche in 20 gleichseitige sphärische Dreiecke, und alle Symmetrie bleibt erhalten. Dies ist bequem für die algebraische Darstellung, denn die Sphäre lässt sich mit Hilfe der stereographischen Projektion mit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren:

$$\phi : \hat{\mathbb{C}} \to S^2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \phi(z) = \frac{1}{|z|^2+1}(2z, |z|^2 - 1)$$

wobei $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ aufgefasst wird und $\phi(\infty) = (0,1)$ (Nordpol) zu setzen ist (vgl. Klein [K], S.32, (7)). Die Ecken des Ikosaeders in Standard-Lage in $\hat{\mathbb{C}}$ sind dann

$$0,\ \infty,\ \epsilon^k(\epsilon + \epsilon^4),\ \epsilon^k(\epsilon^2 + \epsilon^3)$$

für $k = 0, 1, 2, 3, 4$, wobei $\epsilon = e^{2\pi i/5}$ die elementare 5. Einheitswurzel ist (vgl. [K], S.55, (54)).

Dies lässt sich rechnerisch folgendermaßen nachvollziehen: Wir können zwei antipodische Ecken in den Südpol und den Nordpol legen, also nach $0, \infty \in \mathbb{C}$. Die Nachbarecken des Südpols 0 liegen auf Grund der Symmetrie auf einem regelmäßigen Fünfeck mit Mittelpunkt 0, also o.E. in $t\epsilon^k$ für $k = 0, ..., 4$ für ein $t > 0$, und da diese 5 Punkte in der Südhalbsphäre liegen, die durch die Stereographische Projektion ϕ^{-1} auf den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ abgebildet wird, ist $t < 1$. Die gegenüberliegenden 5 Ecken auf der Nordhalbsphäre erhalten somit die Werte $-\epsilon^k/t$, denn der Antipodenabbildung auf der Sphäre entspricht unter ϕ^{-1} die Abbildung $z \mapsto -1/\bar{z} = -z/|z|^2$. Es bleibt also nur noch der Parameter t zu bestimmen.

Dafür machen wir von einer weiteren Symmetrie des Ikosaeders Gebrauch: Die Spiegelung an der Ebene durch eine fest gewählte Kante und den Ursprung führt das Ikosaeder in sich über. Auf der Sphäre ist dies die Spiegelung an dem Großkreis, der die gewählte Kante enthält. Unter der stereographischen Projektion ϕ^{-1} wird aus dem Großkreis eine Kreislinie in $\hat{\mathbb{C}}$, der die Einheitskreislinie in zwei gegenüberliegenden Punkten schneidet, und die Spiegelung wird zu einer Inversion an diesem Kreis. (Die "Kreislinie" ist eine Gerade, wenn sie durch den Punkt ∞ geht.) Speziell betrachten wir die Kante durch die Punkte $t\epsilon^2$ und $t\epsilon^3$, die symmetrisch zur reellen Achse liegen. Die zugehörige Kreislinie K enthält diese Punkte und zwei gegenüberliegende Punkte der Einheitskreislinie; aus Symmetriegründen sind dies die Punkte $\pm i$ (Fig. 2). Am Ikosaedermodell liest man ab, dass K auch die Kante zwischen den Antipodenpunkten von $t\epsilon^2$ und $t\epsilon^3$, nämlich $-\epsilon^2/t$ und $-\epsilon^3/t$ enthält. Das Dreieck $(t, -\epsilon^2/t, -\epsilon^3/t)$ wird durch die Inversion an K auf das Nachbardreieck $(-\epsilon^2/t, -\epsilon^3/t, \infty)$ abgebildet; insbesondere geht t in ∞ über und ist daher der Mittelpunkt von K (Fig. 1). Da die Strecke von i nach $-i$ eine Sehne von K ist, die vom K-Mittelpunkt den Abstand t hat (Fig. 2), ergibt sich der Radius r von K zu $r = \sqrt{1+t^2}$. Andererseits ist r aber auch der Abstand zwischen t und $t\epsilon^2$, also

$$r^2 = t^2|1 - \epsilon^2|^2 = t^2(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^3) = t^2(2 - \epsilon^2 - \epsilon^3)$$

(denn ϵ^3 ist das komplex Konjugierte zu ϵ^2 und $\epsilon^5 = 1$). Setzen wir $v = -(\epsilon^2 + \epsilon^3)$ (diese Zahl ist reell und positiv), so erhalten wir $1/t^2 = 1 + v$ aus den beiden Gleichungen für r. Die Zahl v ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $v^2 = 1 + v$ (also $v = (1 + \sqrt{5})/2)$), denn

$$v^2 = (\epsilon^2 + \epsilon^3)^2 = \epsilon^4 + \epsilon^6 + 2\epsilon^5 = \epsilon^4 + \epsilon + 2 = 1 + v$$

wegen $1 + \epsilon + \epsilon^2 + \epsilon^3 + \epsilon^4 = 0$. Also ist $1/t^2 = 1 + v = v^2$ und somit $1/t = v$, und das ist genau die Behauptung; es folgt nämlich auch $t = 1/v = \epsilon + \epsilon^4$, da

$$(\epsilon^2 + \epsilon^3)(\epsilon + \epsilon^4) = \epsilon^3 + \epsilon^6 + \epsilon^4 + \epsilon^7 = \epsilon^3 + \epsilon + \epsilon^4 + \epsilon^2 = -1.$$

Wir haben damit den Ikoseder als Zerlegung von $\hat{\mathbb{C}}$ in 20 Kreisbogen-Dreiecke dargestellt. Die Ikosaedergruppe A_5 wird nun (mit Hilfe der stereographischen Projektion) zu einer Gruppe von Transformationen von $\hat{\mathbb{C}}$, die diese Zerlegung bewahren. Im nächsten Kapitel werden wir eine rationale Funktion q auf $\hat{\mathbb{C}}$ konstruieren, die invariant unter allen diesen Transformationen ist. Somit wird q für A_5 dieselbe Rolle spielen wie die Funktion $z \mapsto z^3$ für A_3: auch diese ist ja invariant unter einer speziellen Darstellung der A_3 als Gruppe von Transformationen von $\hat{\mathbb{C}}$, nämlich unter der Darstellung durch die Transformationen $z \mapsto wz$, wobei w eine dritte Einheitswurzel ist (vgl. Kap.1). In der Tat wird die Umkehrung von q im Auflösungsprozess der Gleichungen 5. Grades eine analoge Rolle spielen wie die Dritte Wurzel (die Umkehrung von $z \mapsto z^3$) für die Auflösung der Gleichungen 3. Grades.

3. Die Ikosaeder-Überlagerung

Im letzten Kapitel haben wir das Ikosaeder als Zerlegung von $\hat{\mathbb{C}}$ in Kreisbogen-Dreiecke aufgefasst. Damit wird die Ikosaedergruppe A_5 als Transformationsgruppe von $\hat{\mathbb{C}}$ dargestellt: Jede Ikosaederdrehung ist Komposition einer geraden Anzahl von Spiegelungen an Kantenebenen, also im $\hat{\mathbb{C}}$-Modell Komposition einer geraden Anzahl von Kreisinversionen. Solche Abbildungen sind gebrochen-lineare Transformationen $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ von $\hat{\mathbb{C}}$ auf sich (mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad \neq bc$). Wir wollen nun eine meromorphe Funktion $q : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ konstruieren, die unter A_5 invariant ist, d.h. $q(g(z)) = q(z)$ für alle $g \in A_5$ und $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

Man sollte dazu $\hat{\mathbb{C}}$ wieder (mit Hilfe der stereographischen Projektion) als runde Sphäre im Raum auffassen - wir wechseln unsere Auffassung je nach Bequemlichkeit. Das Ikosaeder besteht also aus 20 gleichseitigen sphärischen Dreiecken. Jedes dieser Dreiecke zerlegen wir nun noch einmal durch seine Schwerelinien in 6 Teildreiecke, die wir *kleine Dreiecke* nennen wollen. Die Eckpunkte dieser feineren Zerlegung wollen wir *spezielle Punkte* nennen; es sind neben den bisherigen 12 Eckpunkten (Typ 1) noch zusätzlich die 30 Kantenmittelpunkte (Typ 2) sowie die 20 Flächenmittelpunkte (Typ 3) des Ikosaeders. Jedes der kleinen Dreiecke hat je einen Eckpunkt aus jeder der drei Typen von Punkten, und die Innenwinkel können wir aus der Zahl der kleinen Dreiecke ablesen, die an jedem Eckpunkt zusammenkommen: In den Ikosaederecken 10, in den Kantenmittelpunkten 4 und in den Flächenmittelpunkten 6. Also hat jedes der kleinen sphärischen Dreiecke die Winkel $\pi/5$, $\pi/2$, $\pi/3$; vgl. Slodowy [S], S. 85. Wir bilden nun ein solches kleines Dreieck Δ durch eine Abbildung q biholomorph auf die obere Halbebene $H_+ \subset \mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$ (= hintere Halbsphäre) ab. Dies ist z.B. nach dem Riemannschen Abbildungssatz stets möglich, denn beide Gebiete sind einfach zusammenhängende echte Teilmengen von $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Es gibt noch einen wichtigen Zusatz zum Riemannschen Abbildungssatz, den man z.B. bei Ahlfors [A] findet: Wenn die Gebiete durch Kreisbogenstücke (oder holomorphe Bilder davon) berandet sind, so lässt sich die biholomorphe Abbildung (also q und q^{-1} in beiden Richtungen stetig auf den Rand fortsetzen. [Wir werden aber bald sehen, dass der Riemannsche Abbildungssatz gar nicht wirklich gebraucht wird.] Als nächstes werden die drei Nachbardreiecke von Δ, die durch Spiegelung an den drei Kanten von Δ entstehen, folgendermaßen auf die untere Halbebene H_- (= vordere Halbsphäre) abgebildet: Ist σ die Inversion an einer der drei Kanten von Δ, so setzen wir

$$q(\sigma(z)) = \overline{q(z)}.$$

Diese Abbildung ist stetig auf der Vereinigung der vier abgeschlossenen Dreiecke (Δ und seine drei Nachbarn), und da σ antiholomorph ist, ist q im auch Inneren der Nachbardreiecke wieder holomorph. Dieses Verfahren lässt sich fortsetzen: Immer abwechselnd werden die kleinen Dreiecke auf H_+ und H_- abgebildet; in der Figur [S], S.88 oder [K], S. 261 sind die auf H_+ abgebildeten kleinen Dreiecke schraffiert und die auf H_- abgebildeten weiß gezeichnet. So entsteht eine stetige Abbildung $q : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, die im Inneren von jedem kleinen Dreieck, also nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz überall holomorph ist; eine holomorphe Abbildung nach $\hat{\mathbb{C}}$ nennt man bekanntlich *meromorphe Funktion.* Nach dem Identitätssatz gilt die obige Gleichung $q(\sigma(z)) = \overline{q(z)}$ für jede Kantenspiegelung und für alle $z \in \hat{\mathbb{C}}$. Da die Ikosaedergruppe A_5 durch Kompositionen von je zwei Kantenspiegelungen erzeugt wird, ist q damit invariant unter A_5. Die Winkel $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ in den Eckpunkten der kleinen Dreiecke werden alle auf π gestreckt, die Funktion q verhält sich also in den Punkten vom Typ 1 wie z^5, in denen vom Typ 2 wie z^2 und in denen vom Typ 3 wie z^3; in allen übrigen Punkten ist q "regulär", d.h. hat Ableitung $\neq 0$. Da die 120 kleinen Dreiecke abwechselnd auf die hintere und die vordere Halbsphäre verteilt werden, hat jeder reguläre Wert von q genau 60 Urbilder.

Soweit die Konstruktion und Beschreibung der A_5-invarianten Abbildung $q : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, die wir *Ikosaeder-Überlagerung* nennen wollen. Nun wissen wir aus der Funktionentheorie, dass die meromorphen Funktionen auf ganz $\hat{\mathbb{C}}$ genau die rationalen Funktionen sind. Auch q muss also eine rationale Funktion, d.h. ein Quotient von zwei Polynomen P und Q sein und lässt sich deshalb explizit bestimmen, was für konkrete Rechnungen auch dringend nötig ist. Bisher haben wir q allerdings noch nicht eindeutig bestimmt; das holen wir jetzt nach. Die Punkte vom Typ 1, 2 und 3 bilden jeweils eine Bahn unter der Ikosaedergruppe, d.h. spezielle Punkte vom selben Typ gehen durch eine Ikosaedertransformation auseinander hervor. Also haben alle speziellen Punkte vom selben Typ unter q dasselbe Bild, und da alle spezielle Punkte im Rand der kleinen Dreiecke liegen, ist ihr Bild nach Konstruktion in $\mathbb{R} \cup \infty$. Die drei Werte in $\hat{\mathbb{R}}$ sind verschieden, da $q : \mathrm{Clos}\,(\Delta) \to \mathrm{Clos}\ H_+$ ein Homöomorphismus ist. Wir können also folgendes annehmen (wenn nötig, durch Nachschalten eines Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$, also einer gebrochen-linearen Transformation):

(1) $q(a) = 0$ für Punkte a vom Typ 1,
(2) $q(b) = 1$ für Punkte b vom Typ 2,
(3) $q(c) = \infty$ für Punkte c vom Typ 3.

Damit ist $q = P/Q$ eindeutig festgelegt: Nehmen wir zunächst an, dass keiner der speziellen Punkte den Wert ∞ hat (was durch einen Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ erreichbar ist). Das Zählerpolynom P hat seine Nullstellen genau in den 12 Punkten vom Typ 1, jeweils mit Vielfachheit 5; es hat also Grad 60 und ist durch die Nullstellen bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt. Ebenso sind die Nullstellen des Nenners Q festgelegt; es sind die ∞-Stellen von q, die genau in den 20 Punkten vom Typ 3 angenommen werden, jeweils mit Vielfachheit 3; auch Q ist also vom Grad 60 und bis auf einen Faktor festgelegt. Somit ist q bis auf einen Faktor bestimmt, aber die noch nicht benutzte Bedingung (2) legt diesen Faktor fest. In der Tat gewinnen wir mehr aus (2), nämlich die Nullstellen des Polynoms $Q - P$: Sie werden in den 30 Punkten vom Typ 2 jeweils mit Vielfachheit 2 angenommen, denn die Nullstellen von $Q-P$ sind die 1-Stellen von P/Q (mit gleicher Vielfachheit); auch $Q - P$ ist also bis auf einen Faktor bestimmt. Die drei Polynome sind also folgende:

$$P(z) = A \cdot \prod_{i=1}^{12}(z - a_i)^5, \quad Q(z) = B \cdot \prod_{k=1}^{20}(z - c_k)^3, \quad (Q - P)(z) = C \cdot \prod_{j=1}^{30}(z - b_j)^2.$$

Aus der expliziten Kenntnis der Punkte a_i, b_j, c_k, die wir aus Kap.2 gewinnen können, erhalten wir also eine explizite Formel für q. Allerdings gibt es ein Problem: Unter den in Kap. 2 berechneten Ecken a_i ist auch der Punkt $a_2 = \infty$. Wir müssen daher den Faktor $(z - a_2)^5$ in der obigen Darstellung von P streichen. Dadurch hat P nur noch Grad 55, und da Q weiterhin vom Grad 60 ist, besitzt q in ∞ eine Nullstelle der Ordnung 5, wie es sein soll. Wir erhalten also für das Zählerpolynom: $P = f^5$ mit

$$\begin{aligned} f(z) &= z\prod_{k=0}^{4}(z - \epsilon^k(\epsilon + \epsilon^4))\prod_{k=0}^{4}(z - \epsilon^k(\epsilon^2 + \epsilon^3)) \\ &= z(z^5 - (\epsilon + \epsilon^4)^5)(z^5 - (\epsilon^2 + \epsilon^3)^5) \\ &= z(z^{10} + 11z^5 - 1), \end{aligned}$$

da $\prod_k(z - \epsilon^k w) = z^5 - w^5$ und da ferner

$$(a + a^{-1})^5 = (a^5 + a^{-5}) + 5(a^3 + a^{-3}) + 10(a + a^{-1})$$

und somit

$$(\epsilon + \epsilon^{-1})^5 + (\epsilon^2 + \epsilon^{-2})^5 = 4 - 5 - 10 = -11;$$

in Kap. 2 sahen wir bereits $(\epsilon + \epsilon^4)(\epsilon^2 + \epsilon^3) = -1$. Das Nennerpolynom können wir noch nicht hinschreiben, weil uns die Flächenmittelpunkte c_k fehlen. Wir sehen vorerst nur, dass Q proportional zu H^3 ist für ein Polynom H vom Grad 20. Im folgenden Kapitel werden wir die geometrisch nicht gerechtfertigte Sonderrolle des Punktes ∞ beenden, indem wir ein neues Modell für $\hat{\mathbb{C}}$ einführen: die projektive Gerade P^1. Dann werden wir auch das Nennerpolynom ohne große Mühe hinschreiben können.

4. Invariante binäre Formen und die Ikosaederüberlagerung

Wir wollen zunächst ein weiteres Modell für $\hat{\mathbb{C}}$ einführen, in dem der Punkt ∞ auf keine Weise mehr vor den anderen Punkten ausgezeichnet ist. Das war ja bereits im Modell der runden Sphäre $\hat{\mathbb{C}} = S^2$ der Fall, konnte aber für die Funktionentheorie noch nicht nutzbar gemacht werden. Das neue Modell ist die *Projektive Gerade* P^1. Allgemein ist der (komplexe) Projektive Raum P^n für beliebiges n die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$. Ein Element von P^n ist also ein Vektor $\neq 0$ "bis auf skalare Vielfache", d.h. zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren denselben Punkt in P^n (sind "äquivalent"), wenn sie sich nur um einen skalaren Faktor $\alpha \neq 0$ unterscheiden. Die Äquivalenzklasse eines Vektors $x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, also der zugehörige Punkt in P^n, wird mit $[x] = [x_1, ..., x_{n+1}]$ bezeichnet ("*homogener Vektor*"). Die Komponenten x_i von $[x]$ sind also nicht bestimmt, wohl aber deren Verhältnisse x_i/x_j, weshalb man manchmal auch $[x_1 : ... : x_{n+1}]$ für $[x]$ schreibt. Der *affine Raum* $\mathbb{C}^n$ lässt sich auf kanonische Weise in den Projektiven Raum P^n einbetten, nämlich durch $u = (u_1, ..., u_n) \mapsto [u_1, ..., u_n, 1]$. Das Bild dieser Einbettung enthält alle homogenen Vektoren $[x_1, ..., x_{n+1}]$ mit $x_{n+1} \neq 0$, denn diese lassen sich ja auch als $[x_1/x_{n+1}, ..., x_n/x_{n+1}, 1]$ schreiben. Der Rest $P^n \setminus \mathbb{C}^n$ besteht also aus den homogenen Vektoren vom Typ $[x_1, ..., x_n, 0]$.

Speziell lässt sich $\mathbb{C}$ in P^1 einbetten durch $z \mapsto [z, 1]$, und das Komplement des Bildes besteht nur aus einem einzigen Punkt, nämlich $[1, 0]$, dem wir den Namen "∞" geben können. Eine zweite Einbettung von $\mathbb{C}$ in P^1 ist $z \mapsto [1, z]$; sie enthält den Punkt $[1, 0] = \infty$ im Bild und lässt dafür den Punkt $[0, 1] = 0$ aus. P^1 lässt sich also genau wie $\hat{\mathbb{C}}$ durch zwei Karten überdecken, wobei die Übergangsabbildung wieder $z \mapsto 1/z$ ist, da $[z, 1] = [1, 1/z]$ für $z \neq 0$. Daher ist $P^1 = \hat{\mathbb{C}}$.

[Analytisch sauberer sieht man dies wieder mit Hilfe der stereographischen Projektion ϕ (vgl. Kap. 2). Substituieren wir dort z durch x/y und kürzen, so erhalten wir

$$\phi(x/y) = (\frac{2x\bar{y}}{x\bar{x} + y\bar{y}}, \frac{x\bar{x} - y\bar{y}}{x\bar{x} + y\bar{y}}). \qquad (*)$$

Diese Abbildung lässt sich kanonisch auf $P^1 \supset \mathbb{C}$ fortsetzen, indem wir $\phi([x, y])$ durch die rechte Seite von $(*)$ definieren, was auch noch für $y = 0$ noch sinnvoll ist. Ähnliches gilt für die Umkehrabbildung $\phi^{-1}(w, t) = w/(1 - t)$ (vgl. [K], S.32, (6)): Mit der Einbettung $\mathbb{C} \subset P^1$ wird wegen $w\bar{w} + t^2 = 1$

$$\frac{w}{1-t} = [\frac{w}{1-t}, 1] = [w, 1 - t] = [w(1 + t), 1 - t^2] = [w(1 + t), w\bar{w}] = [1 + t, \bar{w}],$$

was auch für den "Nordpol" $w = 0,\ t = 1$ noch sinnvoll definiert ist. Diese Fortsetzungen von ϕ und ϕ^{-1} definieren also einen Diffeomorphismus zwischen S^2 und P^1.]

Ein Vorteil des neuen Modells $\hat{\mathbb{C}} = P^1$ ist, dass die Automorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$, also die gebrochen-rationalen Funktionen $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc \neq 0$, einfach durch Anwenden der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf den homogenen Vektor dargestellt werden; in der Tat ist

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Die Matrix A ist durch die Funktion g allerdings nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt; wir können also annehmen, dass $\det A = ad - bc = 1$ gilt, also $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Damit ist A aber immer noch nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. Insbesondere wollen wir unsere Ikosaeder-Transformationen betrachten; jede von ihnen stellt eine gebrochen-lineare Transformation und mithin eine Matrix in $SL(2, \mathbb{C})$ dar. Wir erhalten damit einen Homomorphismus (eine *Darstellung*) der Ikosaedergruppe in die Matrizengruppe $SL(2, \mathbb{C})$. Genaugenommen wird aber wegen der Unbestimmtheit des Vorzeichens der zugehörigen Matrix (*zwei* Matrizen für jede Ikosaeder-Transformation) nicht die Gruppe A_5 selbst dargestellt, sondern eine Erweiterung vom Index 2 (Ordnung 120), die wir die *binäre Ikosaedergruppe* $\hat{A}_5$ nennen; diese ist also eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$.

Nun kehren wir zu unseren rationalen Funktionen zurück. Ein Polynom $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ in $\mathbb{C}$ lässt sich in ein homogenes Polynom $\hat{p}$ in 2 Variablen ("*binäre Form*") vom selben Grad umwandeln: $\hat{p}(z_1, z_2) = a_0 z_1^n + a_1 z_1^{n-1} z_2 + ... + a_n z_2^n$. (Kochrezept: Substituiere z_1 für z und multipliziere jeden Term mit der Potenz von z_2, die dem Term den Grad n gibt.) Umgekehrt erhält man p aus $\hat{p}$ zurück, denn $p(z) = \hat{p}(z, 1)$. Bei binären Formen vom Grad n darf allerdings auch $a_0 = 0$ sein. Leider lässt sich $\hat{p}$ nicht als Funktion auf P^1 definieren (etwa durch $\hat{p}([z_1, z_2]) := \hat{p}(z_1, z_2)$), denn bei Übergang von (z_1, z_2) zu $(\alpha z_1, \alpha z_2)$ ändert sich der Wert von $\hat{p}(z_1, z_2)$ um den Faktor α^n. Immerhin ist wenigstens die Nullstellenmenge $\{[z_1, z_2];\ \hat{p}(z_1, z_2) = 0\} \subset P^1$ wohldefiniert (insbesondere kann auch $[1, 0] = \infty$ Nullstelle sein, nämlich genau dann, wenn $a_0 = 0$). Der *Quotient* $\hat{p}/\hat{q}$ von zwei binären Formen $\hat{p}, \hat{q}$ von gleichem Grad definiert aber wirklich eine Funktion auf P^1, denn beim Übergang von (z_1, z_2) zu $(\alpha z_1, \alpha z_2)$ ändern sich Zähler und Nenner um den selben Faktor α^n. Wir können also eine rationale Funktion auf $P^1 = \hat{\mathbb{C}}$ statt als Quotient von zwei Polynomen auch als Quotient von zwei binären Formen von gleichem Grad schreiben, und diese Darstellung werden wir zur Beschreibung von q verwenden.

Wir setzen nun $z = [z_1, z_2] \in P^1 = \hat{\mathbb{C}}$ und schreiben $q(z)$ als Quotient zweier binärer Formen $\hat{P}, \hat{Q}$ vom Grad 60: $q(z) = \hat{P}(z_1, z_2)/\hat{Q}(z_1, z_2)$, wobei die Nullstellen von $\hat{P}$, $\hat{Q} - \hat{P}$ und $\hat{Q}$ genau in den Punkten von Typ 1 (Vielfachheit 5), Typ 2 (Vielfachheit 2) und Typ 3 (Vielfachheit 3) angenommen werden. Den Zähler kennen wir bereits aus Kap. 3; wir müssen ihn nur zu einer binären Form vom Grad 60 umformen und erhalten $\hat{P} = \hat{f}^5$ mit

$$\hat{f}(z_1, z_2) = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10})$$

(vgl. [K], S.56, (55)). Die Nullstellen dieser binäre Form auf P^1 liegen wirklich genau in den Ikosaederecken. Ferner wissen wir bereits, dass $\hat{Q}$ zu $\hat{H}^3$ und $\hat{Q} - \hat{P}$ zu $\hat{T}^2$ für binäre Form $\hat{H}$ und $\hat{T}$ mit Graden 20 und 30 proportional ist, die einfache Nullstellen genau in den Flächen- bzw. Kantenmittelpunkten (Typ 3 und Typ 2) haben. Aber wie finden wir die explizite Gestalt dieser binären Formen?

Wesentlich ist, dass $\hat{f}$, $\hat{H}$ und $\hat{T}$ unter der Ikosaedergruppe invariant sind. In der Tat gilt dies für jede binäre Form $\hat{p}$, deren Nullstellenmenge in P^1 gerade eine Bahn unter A_5 bildet, also von der Gestalt $\{g[x];\ g \in A_5\}$ (für festes $[x] \in P^1$) ist. Dann hat nämlich $\hat{p} \circ g$ für jedes $g \in A_5$ dieselben Nullstellen. Da g auf $\mathbb{C}^2$ eine lineare Abbildung ist (nämlich die der gebrochen-linearen Transformation zugeordnete Matrix), ist $\hat{p} \circ g$ wieder eine binäre Form vom selben Grad; da sie dieselben Nullstellen hat, gilt $\hat{p} \circ g = \chi_g \cdot \hat{p}$ für eine Konstante $\chi_g \in \mathbb{C}$. Aus der Gruppeneigenschaft von A_5 folgt $\chi_g \cdot \chi_h = \chi_{gh}$ für alle $g, h \in A_5$ und natürlich $\chi_e = 1$ für die Eins $e \in A_5$, also ist $g \mapsto \chi_g$ ein Gruppenhomomorphismus von A_5 nach $\mathbb{C}^*$ (ein sog. *Charakter*). Da $\mathbb{C}^*$ abelsch ist, liegt die Kommutatorgruppe von A_5 im Kern dieses Gruppenhomomorphismus, aber die Kommutatorgruppe von A_5 ist bereits die ganze Gruppe, denn A_5 ist einfach. Somit ist der Kern alles, d.h. $\chi_g = 1$ für alle $g \in A_5$ und damit ist $\hat{p}$ invariant unter A_5. [Dasselbe Argument würde für ein Polynom p in $\mathbb{C}$ statt der binären Form $\hat{p}$ nicht funktionieren, denn A_5 operiert auf $\hat{\mathbb{C}}$ durch gebrochen-lineare Transformationen, und daher ist $p \circ g$ kein Polynom mehr.]

Statt die Punkte b_j und c_k zu berechnen, finden wir Kandidaten für $\hat{H}$ und $\hat{T}$ mit Hilfe der Ableitungen der uns bereits bekannten Form $\hat{f} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ folgendermaßen: Da $\hat{f}$ Grad 12 hat, sind alle zweiten partiellen Ableitungen vom Grad 10. Die Determinante der Hessematrix, $\tilde{H} := D_1 D_1 \hat{f} \cdot D_2 D_2 \hat{f} - (D_1 D_2 \hat{f})^2$ hat also Grad 20 und ist natürlich immer noch eine unter A_5 invariante binäre Form. Daraus folgt bereits, dass $\tilde{H}$ und $\hat{H}$ proportional sind, denn sonst würde $\tilde{H}/\hat{H}$ eine A_5-invariante rationale Funktion vom Grad 20 auf $\hat{\mathbb{C}}$ sein; wir wissen aber, dass jede solche Funktion mindestens Grad 60 hat, denn das Bild jedes nicht speziellen Punktes hat mindestens 60 Urbilder (60 ist die Länge der Bahn eines nicht speziellen Punktes unter A_5). Eine invariante binäre Form von Grad 30 erhalten wir, indem wir die Determinante der Jacobimatrix von $(\hat{f}, \hat{H}) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ bilden (die Ableitungen von $\hat{f}$ haben Grad 11, die von $\hat{H}$ Grad 19, also hat die Determinante Grad $11 + 19 = 30$). Auf diese Weise erhalten wir durch leichte Rechnung die Formen H und T wie in [K], S.56 oder [S], S.90 (wir schreiben jetzt wieder f statt $\hat{f}$ etc.) sowie die Gleichung $T^2 = 1728 f^5 - H^3$ und die Darstellung $q = H^3/(1728 f^5)$.

5. Die Fläche der Hauptgleichungen

Mit zwei Tschirnhaus-Transformationen (vgl. [S], S.96) können wir unsere beliebige Gleichung 5. Grades so umformen, dass die ersten beiden Koeffizienten a_0 und a_1 verschwinden. Unsere Gleichung nimmt also (in Übereinstimmung mit der Bezeichnung in [K], S.182) die folgende Form an, die als *Hauptgleichung* bezeichnet wird:

$$x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0, \tag{1}$$

Wir wollen zu jeder Hauptgleichung, also für beliebige Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ die Lösungen (Wurzeln) $x_0, ..., x_4$ dieser Gleichung bestimmen. Wir werden dazu den in Kap.1 beschriebenen Weg verfolgen: Wir tun zunächst so, als hätten wir bereits die Wurzeln vorliegen und bilden daraus Ausdrücke, die A_5-invariant sind und sich daher nur mit Kenntnis von α, β, γ und der Quadratwurzel der Diskriminante ∇ berechnen lassen, aus denen aber andererseits die Wurzeln zurückberechnet werden können. Mit anderen Worten, wir suchen A_5-invariante Funktionen auf der Menge aller Lösungsquintetts $(x_0, ..., x_4)$ von Hauptgleichungen. Hauptgleichungen sind aber genau die Gleichungen, deren erste zwei Koeffizienten $a_1 = -\sum_i x_i$ und $a_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$ verschwinden. Daher sind die möglichen Quintetts $(x_0, ..., x_4) \in \mathbb{C}^5$ genau die Lösungen der beiden Gleichungen

$$\sum_i x_i = 0, \quad \sum_i x_i^2 = 0; \tag{2}$$

man beachte, dass unter der Voraussetzung $\sum_i x_i = 0$ die Gleichungen $\sum_{i<j} x_i x_j = 0$ und $\sum_i x_i^2 = 0$ äquivalent sind wegen

$$0 = (\sum_i x_i)^2 = \sum_i x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j.$$

Wir gehen nun von $\mathbb{C}^5$ zum Projektiven Raum P^4 über, d.h wir betrachten die Wurzelquintetts $(x_0, ..., x_4) \neq (0, ..., 0)$ nur "bis auf skalare Vielfache", also nur die *homogenen* Vektoren $[x_0, ..., x_4]$ (vgl. Kap. 4). Das ist kein großer Verlust, denn wenn wir die Wurzeln bis auf einen gemeinsamen Faktor kennen, d.h. wenn uns $\lambda x_0, ..., \lambda x_4$ bekannt sind (aber $\lambda \in \mathbb{C}$ unbekannt), so ist

$$\sigma_k(\lambda x_0, ..., \lambda x_4) = \lambda^k \sigma_k(x_0, ..., x_4) = (-1)^k \lambda^k a_k,$$

woraus λ berechnet werden kann. Die $[x_0, ..., x_4]$ bilden also die Menge

$$H = \{[x] \in P^4;\ \sum_i x_i = 0,\ \sum_i x_i^2 = 0\}. \tag{3}$$

Die erste der beiden Gleichungen ist linear, deshalb ist

$$\tilde{P}^3 = \{[x] \in P^4;\ \sum_i x_i = 0\}$$

ein projektiver Unterraum, der bei geeigneter Wahl von Koordinaten (s.u.) zu $P^3 \subset P^4$ isomorph ist. Somit ist H eine (komplexe) Fläche in einem dreidimensionalen projektiven Raum $\tilde{P}^3$, und zwar eine *Quadrik*, da sie durch die quadratische Gleichung $\sum_i x_i^2 = 0$ definiert ist.

Im Reellen kennen wir unter den Quadriken den einschaligen Hyperboloiden mit seinen zwei Regelscharen (Geradenscharen, die ganz auf dem Hyperboloiden verlaufen). Im Komplexen sehen alle regulären Quadriken gleich aus und besitzen daher immer zwei Regelscharen, mit deren Hilfe wir sie mit $P^1 \times P^1$ identifizieren können, wie wir gleich ausführen werden. Wir werden dabei sehen, dass die natürliche Operation der A_5 durch Permutation der fünf homogenen Koordinaten auf $H \subset P^4$ die beiden Faktoren von $P^1 \times P^1$ invariant lässt und auf jedem Faktor als Ikosaedergruppe operiert; durch Nachschalten der Ikosaederüberlagerung (vgl. Kap. 3) auf jedem Faktor werden wir also die gewünschten A_5-invarianten Funktionen auf H gewinnen.

Zunächst drehen wir das Koordinatensystem (die Basis) von $\mathbb{C}^5$ so, dass $\tilde{P}^3 \subset P^4$ gerade durch das Verschwinden einer Koordinate definiert ist. Wir müssen also den Normalenvektor $b_0 = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, 1)$ der Hyperebene $\{x \in \mathbb{C}^5;\ \sum x_i = 0\}$ zu einer Basis fortsetzen. Im Reellen gäbe es dafür viele gleichberechtigte Möglichkeiten, aber im Komplexen haben wir (bis auf Permutation der Komponenten) eine natürliche Wahl, nämlich $b_k = \frac{1}{5}(1, \epsilon^{4k}, \epsilon^{3k}, \epsilon^{2k}, \epsilon^k)$ für $k = 0, ..., 4$, wobei $\epsilon = e^{2\pi i/5}$ wieder die 5. Einheitswurzel ist. Dies ist (bis auf einen Faktor $\sqrt{5}$) eine unitäre Basis von $\mathbb{C}^5$ bezüglich des gewöhnlichen hermiteschen Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = \sum x_i \bar{y}_i$, denn $\langle b_j, b_k\rangle = \sum_{l=0}^4 \epsilon^{(k-j)l} = 0$ für $j \neq k$.

Die zu diesem Basiswechsel gehörige Koordinatentransformation ($x = \sum x_j e_j = \sum p_k b_k$ mit $p_k = \langle x, 5b_k\rangle$ und $x_j = \sum_k p_k \langle b_k, e_j\rangle$) ist

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{4} \epsilon^{jk} x_j, \quad 5x_k(p) = \sum_{j=0}^{4} \epsilon^{(5-j)k} p_j \tag{4}$$

(vgl. [K], S. 187, (10),(12)). Nun ist $\tilde{P}^3$ die durch Verschwinden der Koordinate $p_0 = \sum_j x_j$ definierte Hyperebene von P^4, und die zweite Gleichung $\sum x_i^2 = 0$ wird in den p-Koordinaten zu

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0 \tag{5}$$

denn wegen $\epsilon^4 = \epsilon^{-1}$ und $\epsilon^3 = \epsilon^{-2}$ ist $p_1 p_4 = \sum_{i<j} (\epsilon^{i-j} + \epsilon^{j-i}) x_i x_j$ und $p_2 p_3 = \sum_{i<j} (\epsilon^{2(i-j)} + \epsilon^{2(j-i)}) x_i x_j$, und weil außerdem $\epsilon^l + \epsilon^{-l} + \epsilon^{2l} + \epsilon^{-2l} = -1$ falls $l = i - j$ nicht Null oder ein Vielfaches von 5 ist, erhalten wir

$$p_1 p_4 + p_2 p_3 = -\sum_{i<j} x_i x_j + 2 \sum_j x_j^2 = \frac{5}{2} \sum_j x_j^2$$

falls $\sum x_j = 0$ (nämlich wieder wegen $(\sum x_j)^2 = \sum x_j^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j$).

Unsere "Hauptfläche" H ist demnach

$$H = \{[p_1, p_2, p_3, p_4] \in P^3;\ p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0\}. \tag{6}$$

Einen Isomorphismus zwischen $P^1 \times P^1$ und H erhalten wir durch die Abbildungen $F : H \to P^1 \times P^1$, $F([p]) = (\lambda, \mu)$ und $G = F^{-1} : P^1 \times P^1 \to H$, $G(\lambda, \mu) = [p]$ mit

$$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2] = [-p_1, p_2] = [p_3, p_4], \tag{7a}$$
$$\mu = [\mu_1, \mu_2] = [-p_2, p_4] = [p_1, p_3] \tag{7b}$$

sowie

$$[p] = [p_1, p_2, p_3, p_4] = [\lambda_1 \mu_1, -\lambda_2 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2 \mu_2] \tag{8}$$

(vgl. [K], S.188f, (14),(15),(16)). Die Abbildung $G : P^1 \times P^1 \to H \subset P^3$ wird auch *Segre-Einbettung* genannt. Die beiden Geradenscharen auf H sind genau Bilder der linearen Abbildungen $\lambda \mapsto F(\lambda, \mu)$ (für festes μ) sowie $\mu \mapsto F(\lambda, \mu)$ (für festes λ).

Die Symmetrische Gruppe S_5 wirkt durch Permutationen der Koordinaten x_i auf P^4 und lässt dabei H invariant, weil H durch symmetrische Polynome definiert ist. Wir wollen die Operation von S_5 und A_5 auf $H \cong P^1 \times P^1$ studieren. Da die S_5 durch lineare Abbildungen auf $\mathbb{C}^5$ operiert, werden Geraden in P^4 in ebensolche Geraden abgebildet, die Geradenschar auf H geht also auf eine andere Geradenschar auf H. Es gibt aber nur die zwei oben vorgestellten Regelscharen auf H und keine weiteren. Somit muss jede Abbildung in S_5 entweder beide Regelscharen invariant lassen oder sie vertauschen. Wir werden sehen, dass das letztere nur für ungerade Permutationen der Fall ist, während gerade Permutationen die Regelscharen invariant lassen. Somit operiert A_5 auf der Menge der Scharparameter der beiden Geradenscharen, also auf P^1 (in zweifacher Weise); wir werden sehen, dass A_5 auf beiden Parameterbereichen (beiden Faktoren von $P^1 \times P^1$) als Ikosaedergruppe, genauer gesagt als Symmetriegruppe unseres Standard-Ikosaeders in $S^2 = P^1 = \hat{\mathbb{C}}$ mit den in Kap. 2 angegebenen Eckpunkten operiert.

Dazu betrachten wir zunächst die zyklische Permutation $S = (01234) \in A_5$, also

$$x' := S(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_0).$$

Setzen wir $p'_k = p_k(x')$, so ergibt sich $p'_k = \epsilon^{-k} p_k$ (die p_k sind gerade die Lagrange'schen Resolventen für $n = 5$, vgl. Kap. 1) und damit (in "inhomogener Schreibweise" $\lambda = \lambda_1/\lambda_2 \in \hat{\mathbb{C}}$)

$$\lambda' = -p'_1/p'_2 = \epsilon\lambda.$$

Die Multiplikation mit ϵ ist eine Drehung des Standard-Ikosaeders, nämlich die 72-Grad-Drehung um den Nullpunkt.

Als nächstes betrachten wir die gerade Permutation $T = \tau = (12)(34)$, also

$$x' := T(x) = (x_0, x_2, x_1, x_4, x_3).$$

Aus den Ausdrücken für $p'_k = \sum_j \epsilon^{kj} x_{\tau j}$ sowie $\lambda' = -p'_1/p'_2$ lässt sich zunächst keine Transformation von λ herauslesen, da dazu die Definitionsgleichungen (2) von H in nicht offensichtlicher Weise verwendet werden müssen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, benutzen wir die Parametrisierung $G : P^1 \times P^1 \to H$; damit ist sichergestellt, dass wir $[x] = G(\lambda, \mu)$ wirklich nur auf der Fläche H variieren lassen. Aus (4) und (8) erhalten wir (bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Faktor, den wir zu Eins normieren):

$$5x_k = \epsilon^{4k}\lambda_1\mu_1 - \epsilon^{3k}\lambda_2\mu_1 + \epsilon^{2k}\lambda_1\mu_2 + \epsilon^k\lambda_2\mu_2. \tag{9}$$

Setzen wir dies in den obigen Ausdruck für p'_k ein, so ergibt sich

$$5p'_1 = (1 + 2t)\lambda_1\mu_1 - (3 - v)\lambda_2\mu_1 + (3 + t)\lambda_1\mu_2 + (1 - 2v)\lambda_2\mu_2, \tag{10a}$$
$$5p'_2 = (3 - v)\lambda_1\mu_1 - (1 - 2v)\lambda_2\mu_1 + (1 + 2t)\lambda_1\mu_2 + (3 + t)\lambda_2\mu_2, \tag{10b}$$

wobei $v = -(\epsilon^2 + \epsilon^3)$ und $t = \epsilon + \epsilon^4$ wie in Kap. 2 gesetzt ist. Daraus können wir den Wert von $\lambda' = [-5p'_1, 5p'_2]$ (gemäß (7a)) entnehmen, aber dieser Ausdruck scheint auf den ersten Blick nicht nur von $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]$, sondern auch von μ abzuhängen. Nach unserer geometrischen Überlegung sollte aber λ' die Transformation des λ-Geradenscharparameters und daher unabhängig von μ sein, d.h. es sollte

$$\lambda' = [a\lambda_1 + b\lambda_2, c\lambda_1 + d\lambda_2] \tag{11}$$

für konstante $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gelten. Wir könnten dann jedoch beide Komponenten der rechten Seite von (11) mit einem Skalar $m\mu + n$ (mit $m, n \in \mathbb{C}$) multiplizieren; dann würde $\lambda' = [\lambda'_1, \lambda'_2]$ mit

$$\lambda'_1 = am\lambda_1\mu_1 + bm\lambda_2\mu_1 + an\lambda_1\mu_2 + bn\lambda_2\mu_2,$$
$$\lambda'_2 = cm\lambda_1\mu_1 + dm\lambda_2\mu_1 + cn\lambda_1\mu_2 + dn\lambda_2\mu_2.$$

Offensichtlich gilt in diesem Fall

$$\frac{am}{an} = \frac{bm}{bn} = \frac{cm}{cn} = \frac{dm}{dn} = \frac{m}{n} =: r.$$

Wenn nun die entsprechenden Beziehungen für die Koeffizienten der Gleichungen (10) gelten, so können wir die μ-Anteile kürzen und somit λ' als unabhängig von μ erweisen. Diese Beziehungen gelten tatsächlich:

$$\frac{1+2t}{3+t} = -\frac{3-v}{1-2v} = \frac{3-v}{1+2t} = -\frac{1-2v}{3+t} =: r. \tag{12}$$

Wegen $v - t = 1$ (vgl. Kap.2) ist nämlich $1 - 2v = -(1 + 2t)$, so dass die äußeren und die inneren Ausdrücke in (12) gleich sind. Ferner folgt aus $v - t = 1$ und $vt = 1$, dass $(3 - v)(3 + t) = 5$ und $(1 - 2v)(1 + 2t) = -5$, somit ist

$$\frac{1+2t}{3+t} = \frac{1}{5}(1+2t)(3-v) = -\frac{3-v}{1-2v},$$

d.h. der erste und der zweite Ausdruck in (12) sind ebenfalls gleich und damit ist (12) bewiesen. Somit erhalten wir in der Tat, dass λ' die Form (11) hat mit

$$\begin{aligned} a &= \frac{1+2w}{r} = 3+t, \quad b = -\frac{3-v}{r} = -(1+2t), \\ c &= \frac{3-v}{r} = 1+2t, \quad d = -\frac{1-2v}{r} = 3+t. \end{aligned}$$

Wir wollen a, b, c, d noch durch $3 + t$ teilen. Es gilt $(3 + t)(2 - t) = 5$ (wegen $t^2 = 1 - t$, was aus $v^2 = 1+v$ und $t = 1/v$ folgt, vgl. Kap.2) und daher ist $(1+2t)/(3+t) = t$. Somit erhalten wir (in inhomogener Schreibweise)

$$\lambda' = -\frac{p_1'}{p_2'} = \frac{-\lambda+t}{t\lambda+1} \tag{13}$$

(Der in [K], S.185, (7) angegebene Ausdruck für T ist derselbe, wenn man beachtet, dass $(\epsilon + \epsilon^4)(\epsilon - \epsilon^4) = \epsilon^2 - \epsilon^3$ und daher $(\epsilon^2 - \epsilon^3)/(\epsilon - \epsilon^4) = \epsilon + \epsilon^4 = t$ ist.)

Der durch (13) gegebene Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ gehört in der Tat zur Ikosaedergruppe, wie wir gleich sehen werden. In Kap. 2 haben wir die Inversion am Kreis K mit Mittelpunkt t und Radius $r = \sqrt{1+t^2}$ betrachtet (vgl. Fig. 1). Diese Inversion liegt nicht in der Ikosaedergruppe, denn sie ist eine *Spiegelung* an einer Kante des Ikosaeders, keine (eigentliche) Drehung. Wir müssen eine zweite Kantenspiegelung nachschalten, am einfachsten die an der reellen Achse, d.h. die komplexe Konjugation. Dann erhalten wir die "*holomorphe* Inversion", die als Verkettung folgendermaßen definiert ist:

$$z \mapsto z - t \mapsto \frac{r^2}{z-t} \mapsto \frac{r^2}{z-t} + t.$$

Der letzte Ausdruck ist

$$\frac{r^2}{z-t}+t=\frac{1+t^2+t(z-t)}{z-t}=\frac{1+tz}{z-t},$$

also genau der negative Kehrwert des Ausdruckes für λ' in (13) (λ durch z substituiert). In Kap. 2 sahen wir, dass die Antipodenabbildung $z \mapsto -1/\bar{z}$ auch eine Ikosaedersymmetrie ist, und zwar ebenfalls eine Spiegelung; ihre Verkettung mit der Konjugation, $z \mapsto -1/z$, liegt also in der Ikosaedergruppe und somit auch die durch (13) definierte Abbildung $\lambda \mapsto \lambda'$. In der Tat dreht diese Abbildung das in Fig. 1 schraffierte Dreieck $(t, -\epsilon^3/t, -\epsilon^2/t)$ auf das Dreieck $(0, t\epsilon^3, t\epsilon^2)$ (mit entsprechenden Ecken).

Da die Permutationen $S = (01234)$ und $T = (12)(34)$ die volle Gruppe A_5 erzeugen (mit fünf Gegenständen nachprüfen!), haben wir nun gezeigt, dass die A_5 auf dem λ-Bereich als Ikosaedergruppe operiert, wobei S als Multiplikation mit ϵ und T durch die in (13) gegebene Transformation $z \mapsto \frac{t-z}{tz+1}$ dargestellt ist. Formal gesehen haben wir damit einen Gruppenhomomorphismus ("*Darstellung*") $\rho_\lambda : A_5 \to Aut(\hat{\mathbb{C}})$ mit

$$\lambda(g([x])) = \rho_\lambda(\lambda([x])) \tag{14}$$

für alle $g \in A_5$ und alle $[x] \in H$, und das Bild $\rho_\lambda(A_5) \subset Aut(\hat{\mathbb{C}})$ ist die Standard-Ikosaedergruppe.

Es bleiben noch die Transformationen des μ-Bereichs zu untersuchen. Dies ist nicht mehr schwierig: Vergleicht man die (inhomogenen) Ausdrücke für λ und μ, die sich aus (7) und (4) ergeben,

$$-\lambda = \frac{x_0+\epsilon^1x_1+\epsilon^2x_2+\epsilon^3x_3+\epsilon^4x_4}{x_0+\epsilon^2x_1+\epsilon^4x_2+\epsilon^1x_3+\epsilon^3x_4}, \quad -\mu = \frac{x_0+\epsilon^2x_1+\epsilon^4x_2+\epsilon^1x_3+\epsilon^3x_4}{x_0+\epsilon^4x_1+\epsilon^3x_2+\epsilon^2x_3+\epsilon^1x_4}, \tag{15}$$

so ergibt sich μ aus λ durch die (ungerade) 4-zyklische Permutation $P = (1342)$, also

$$\mu(x) = \lambda(Px) \tag{16a}$$

mit $Px := (x_0, x_3, x_1, x_4, x_2)$, und wenn wir dieselbe Permutation auf (den anderen Ausdruck von) μ angewenden, also auf

$$\mu = \frac{p_1}{p_3} = \frac{x_0+\epsilon^1x_1+\epsilon^2x_2+\epsilon^3x_3+\epsilon^4x_4}{x_0+\epsilon^3x_1+\epsilon^1x_2+\epsilon^4x_3+\epsilon^2x_4},$$

so ergibt bis auf das Vorzeichen den Kehrwert von λ, d.h.

$$-1/\lambda(x) = \mu(Px). \tag{16b}$$

Somit erhalten wir mit (14) für $[x] \in H$ und $g \in A_5$:

$$\mu(g[x]) = \lambda(Pg[x]) = \lambda(PgP^{-1}[Px]) = \rho_\lambda(PgP^{-1})\lambda([Px]) = \rho_\lambda(PgP^{-1})\mu([x])$$

(man beachte, dass PgP^{-1} wieder in A_5 liegt). Mit anderen Worten, $\mu(g[x])$ entsteht aus $\mu([x])$ durch Anwenden des Automorphismus $\rho_\mu(g) := \rho_\lambda(PgP^{-1}) \in Aut(\hat{\mathbb{C}})$. Die Gruppe A_5 operiert demnach auf dem μ-Bereich ähnlich wie auf dem λ-Bereich (vgl. (13)) durch die Darstellung $\rho_\mu : A_5 \to Aut(\hat{\mathbb{C}})$ mit

$$\mu(g([x]) = \rho_\mu(\mu([x]) \tag{17}$$

für alle $g \in A_5$ und $[x] \in H$, und zwischen ρ_λ und ρ_μ besteht die Beziehung

$$\rho_\mu(g) = \rho_\lambda(PgP^{-1}) \tag{18}$$

für alle $g \in A_5$. Insbesondere ist auch das Bild von ρ_μ die Standard-Ikosaedergruppe. Ein schneller Weg zur Berechnung von ρ_μ aus ρ_λ ergibt sich aus der Beobachtung, dass μ aus λ entsteht, wenn man überall ϵ durch ϵ^2 ersetzt (vgl. (15)); deshalb entsteht auch $\rho_\mu(g)$ aus $\rho_\lambda(g)$ durch dieselbe Ersetzung. (Wenn man diese Ersetzung in (9) vornimmt, werden die Komponenten x_i mit $P^{-1} = (1243)$ permutiert; die Permutation g geht damit in PgP^{-1} über.)

Wir haben nun die Hauptfläche H mit der Operation von A_5 vollständig verstanden: H ist (durch den Isomorphismus $F = (\lambda, \mu)$, vgl. (7)) isomorph zu $P^1 \times P^1$, und die Operation von A_5 auf H durch Permutation der homogenen Koordinaten $x_0, ..., x_4$ geht dabei über in die Operation (ρ_λ, ρ_μ) auf $P^1 \times P^1$. Die Funktionen λ und μ auf H werden in [S] *Ikosaederresolventen* genannt; die Funktionen $q \circ \lambda$ und $q \circ \mu$ auf H sind invariant unter A_5 (wobei q die in Kap. 3 eingeführte Ikosaederüberlagerung ist) und deshalb durch $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ ausdrückbar.

Die Ikosaederresolventen spielen für die Gleichungen 5.Grades dieselbe Rolle wie die Lagrange'schen Resolventen L_w für die Gleichungen 3. Grades: Beides sind Abbildungen L von der Menge aller Wurzelsätze (Tripletts bzw. Quintetts) aller zugelassener Gleichungen nach $\hat{\mathbb{C}}$, und das Transformationsverhalten unter geraden Permutationen der Tripletts bzw. Quintetts wird durch eine gut bekannte Darstellung $\rho : A = A_{3,5} \to Aut(\hat{\mathbb{C}})$ ausgedrückt. Bekannt ist außerdem eine rationale Funktion $q : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, die unter $\rho(A)$ invariant ist, nämlich die dritte Potenz $z \mapsto z^3$ bzw. die Ikosaederüberlagerung. Somit ist $q \circ L$ eine unter geraden Permutationen invariante Funktion der Wurzeln und daher durch die Koeffizienten der Gleichung und die Quadratwurzel der Diskriminante ausdrückbar; die Ausdrücke $q \circ L$ sind also bekannt. Invertiert man q, so erhält man aus $q \circ L$ die "Resolventen" L zurück, aus denen man die Wurzeln leicht berechnen kann. Im nächsten Kapitel werden wir $q \circ \lambda$ und $q \circ \mu$ durch Koeffizientenvergleich für A_5-invariante Polynome explizit als Funktion von α, β, γ und ∇ berechnen. Nehmen wir das Ergebnis bereits vorweg, so erhalten wir das folgende Verfahren zur Berechnung der Lösungen x_j, $j = 0, ..., 4$ für die Hauptgleichung (1):

$$x_j = t\tilde{x}_j$$

$$t = -\frac{c}{5b} \sum_j \frac{1}{\tilde{x}_j}$$

$$\tilde{x}_j = \epsilon^{4j}\lambda\mu - \epsilon^{3j}\mu + \epsilon^{2j}\lambda + \epsilon^j$$

$$\epsilon = \cos 72^o + i \sin 72^o$$

$$\lambda = q^{-1}(Z_+), \quad \mu = q^{-1}(Z_-)$$

$$Z_\pm = \frac{(48\alpha m^2 - 12\beta m - \gamma)^3}{64\alpha^2(12(\alpha\gamma - \beta^2)m - \beta\gamma)}$$

$$m = \frac{(11\alpha^3\beta + 2\beta^2\gamma - \alpha\gamma^2) \pm \alpha\nabla}{24(\alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma)}$$

$$\nabla^2 = 108\alpha^5\gamma - 135\alpha^4\beta^2 + 90\alpha^2\beta\gamma^2 - 320\alpha\beta^3\gamma + 256\beta^5 + \gamma^4$$

Probe:

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = -\gamma, \qquad \sum_j \frac{1}{x_j} = -\frac{5\beta}{\hat{\mathbb{C}}}, \qquad \sum_j x_j^3 = -15\alpha.$$

Es bleibt die Frage, wie q^{-1} praktisch zu berechnen ist. Klein beschreibt dazu ein Verfahren von H.A.Schwarz zur Invertierung von q: Jede Umkehrfunktion erhält man als Quotient zweier Lösungen einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, der sog. hypergeometrischen Differentialgleichung, deren Lösungen explizit (als Potenzreihen) bekannt sind. Die Ikosaedergrupp erhält dabei noch eine weitere Rolle: Bei der richtigen Wahl der Koeffizienten ist sie gerade die Monodromiegruppe dieser Differentialgleichung (cf. [Sz], [R]).

6. Das Bild der Ikosaederresolvente

Wir hatten im letzten Kapitel zwei rationale Funktionen $\lambda = -p_1/p_2$ und $\mu = p_1/p_3$ auf der Menge der Wurzelquintetts aller Hauptgleichungen

$$\hat{H} = \{x \in \mathbb{C}^5;\ \sum x_j = 0,\ \sum x_j^2 = 0\}$$

erklärt, wobei $p_k = \sum_{j=0}^4 \epsilon^{jk} x_j$ ist (vgl. (4)). Diese Funktionen nannten wir *Ikosaederresolventen.* Wir wollen im folgenden nur λ behandeln; für μ gelten analoge Aussagen. Das Bild von λ unter der Ikosaederüberlagerung, $q \circ \lambda$, ist eine unter der Gruppe A_5 aller geraden Permutationen invariante rationale Funktion auf $\hat{H}$, die in [K] bzw. [S] mit Z bzw. u bezeichnet wird. Wir wollen zunächst sehen, dass sich $q \circ \lambda$ in der Tat durch die Koeffizienten unserer Gleichung ausdrücken lässt. Als rationale Funktion ist $q \circ \lambda = a/b$ für zwei Polynome a, b auf $\mathbb{C}^5$. Für jede gerade Permutation $g \in A_5$ sind $a_g := a \circ g$ und $b_g := b \circ g$ wieder Polynome auf $\mathbb{C}^5$, und wegen der Invarianz von $q \circ \lambda$ gilt $a_g/b_g = a/b$ auf $\hat{H}$. Wir dürfen annehmen, dass das Nennerpolynom b bereits selbst A_5-invariant ist;

sollte dies nicht der Fall sein, ersetzen wir b etwa durch $\prod_{g\in A_5} b_g$, indem wir den Bruch a/b mit $\prod_{g\neq 1} b_g$ erweitern. Unter dieser Annahme ist $a|_{\hat{H}}$ invariant unter A_5. Nun ersetzen wir $a(x)$ durch seinen "A_5-Mittelwert" $\bar{a}(x) := \frac{1}{60}\sum_{g\in A_5} a_g(x)$. Das so definierte Polynom $\bar{a}$ ist offensichtlich A_5-invariant, und $\bar{a}/b$ stimmt auf $\hat{H}$ mit a/b überein. Also haben wir $q\circ\lambda$ als Einschränkung einer rationalen Funktion $\bar{a}/b$ auf $\hat{H}$ geschrieben, wobei Zähler und Nenner von $\bar{a}/b$ invariant unter A_5 sind und sich daher nach Kap. 1 als Polynome in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, ..., \sigma_5$ sowie der Diskriminanten-Quadratwurzel $\nabla = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$ schreiben lassen. Alle Terme, die σ_1 oder σ_2 enthalten, dürfen wir weglassen, da sie auf $\hat{H}$ verschwinden. Übrig bleibt ein Polynom in α, β, γ und ∇. Da die Diskriminante $\nabla^2 = \prod_{i\neq j}(x_i - x_j)$ ebenfalls ein symmetrisches Polynom, also auf $\hat{H}$ ein Polynom in α, β, γ ist, haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Für praktisch-rechnerische Zwecke ist das obige Verfahren aber ziemlich unbrauchbar; das Nennerpolynom b könnte im schlimmsten Fall nach der Erweiterung den Grad 3600 haben! F. Klein geht daher einen anderen Weg, der bereits durch eine frühere Arbeit von P. Gordon [G] (Math. Ann. 13 (1878), 375 - 404) vorgezeichnet war. Etwas vereinfacht gesagt: Statt λ und μ (mit Hilfe von F, vgl. (7)) als Funktion von $x \in \hat{H}$ zu beschreiben, werden x und die von x abhängigen Größen $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ mit Hilfe von G (vgl. (8)) als Funktionen von λ und μ dargestellt. Das ist allerdings so nicht richtig, denn G bildet $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ nach $H \subset P^4$, nicht nach $\hat{H} \subset \mathbb{C}^5$ ab. Aber G lässt sich zu einer Abbildung $\hat{G} : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \hat{H}$ "hochheben": Setzen wir nämlich $\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = (x_0, ..., x_4)$ für $\hat{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2)$ und $\hat{\mu} := (\mu_1, \mu_2)$, wobei

$$x_k = \epsilon^{4k}\lambda_1\mu_1 - \epsilon^{3k}\lambda_2\mu_1 + \epsilon^{2k}\lambda_1\mu_2 + \epsilon^k\lambda_2\mu_2 \qquad (*)$$

(vgl. (9); der Faktor 5 ist entbehrlich), so gilt

$$[\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})] = G(\lambda, \mu)$$

für die zugehörigen homogenen Vektoren $\lambda := [\hat{\lambda}]$ und $\mu := [\hat{\mu}]$. Durch Komposition mit $\hat{G}$ wird jedes homogene Polynom auf $\mathbb{C}^5$ in den Variablen $x_0, ..., x_4$ zu einem *bihomogenen* Polynom auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ in λ_1, λ_2 sowie μ_1, μ_2, wobei wegen $(*)$ die Grade in $\hat{\lambda}$ und in $\hat{\mu}$ gleich sein müssen, und jedes bihomogene gleichgradige Polynom auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ lässt sich so gewinnen.

Die Operation (ρ_λ, ρ_μ) von A_5 auf $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ wird zu einer Operation $(\hat{\rho}_\lambda, \hat{\rho}_\mu)$ der *binären Ikosaedergruppe* $\hat{A}_5$ auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ hochgehoben, wobei jede gebrochen-lineare Transformation von $\hat{\mathbb{C}}$ durch die zugörige Matrix in $SL(2, \mathbb{C})$ (mit Determinante Eins) ersetzt wird (vgl. Kap. 4). Die den erzeugenden Elementen S und T zugeordneten Matrizen auf dem $\hat{\lambda}$-Bereich sind also

$$\hat{S} = \epsilon^2 \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = ir^{-1} \begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. die Ausdrücke für λ' bei den Transformationen S und T in Kap. 5). Dabei ist wieder $t = \epsilon + \epsilon^4$ und $r = \sqrt{1 + t^2}$, und die Vorfaktoren machen die Determinante zu Eins. Die entsprechenden Matrizen für den $\hat{\mu}$-Bereich entstehen wieder durch Ersetzung von ϵ durch ϵ^2, wobei t zu $-v = \epsilon^2 + \epsilon^3$ wird.

Wir zeigen jetzt, dass die Abbildung $\hat{G}$ die $\hat{A}_5$-Operationen auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ und auf $\mathbb{C}^5$ ineinander transformiert, also $\hat{A}_5$-*äquivariant* ist, d.h. (unter Weglassen des Operationssymbols $(\hat{\rho}_\lambda, \hat{\rho}_\mu)$)

$$\hat{G}(\hat{g}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})) = g\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$$

für alle $\hat{g} \in \hat{A}_5$ mit zugehörigem $g \in A_5$. In der Tat, wegen der A_5-Äquivarianz von F und G (vgl. Kap.4) gilt für alle $\hat{g} \in \hat{A}_5$ und $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$

$$[\hat{G}(\hat{g}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}))] = G(g(\lambda, \mu)) = gG(\lambda, \mu) = [g\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}))]$$

Also ist $\hat{G}(\hat{g}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}))$ ein skalares Vielfaches von $g\hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$, also

$$g^{-1}\hat{G}(\hat{g}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})) = \chi_g \cdot \hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$$

für ein $\chi_g \in \mathbb{C}^*$ mit $\chi_1 = 1$ und $\chi_g \chi_h = \chi_{gh}$ für alle $g, h \in A_5$ ("*Charakter*", vgl. Kap. 4). Wie in Kap. 4 schließen wir $\chi_g = 1$ für alle $g \in A_5$, da A_5 keine abelschen Normalteiler besitzt, und somit ist $\hat{G}$ äquivariant.

Als nächstes berechnet Klein explizit $\alpha, \beta, \gamma, \nabla$ als Funktion von $\hat{\lambda}$ und $\hat{\mu}$ ([K], S. 196, (41)-(44)). Dies geschieht durch Einsetzen von $x = G(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ nach unserer obigen Gleichung $(*)$ in die entsprechenden A_5-invarianten Polynome auf $\mathbb{C}^5$. Dabei werden allerdings die elementarsymmetrischen Polynome σ_k (für $k = 3, 4, 5$) durch die Potenzsummen $\sum_j x_j^k$ ersetzt. Dies ist möglich, weil σ_1 und σ_2 auf $\hat{H}$ verschwinden; stellt man nämlich diese Potenzsummen nach dem in [W], S.100 beschriebenen Algorithmus durch Summen von Produkten von $\sigma_1, ..., \sigma_5$ dar, so sieht man, dass jeder Term mit Ausnahme des letzten (der ein Vielfaches von σ_k ist) σ_1 oder σ_2 als Faktor enthält. Bei der Berechnung von $\sum_j x_j^k$ mit Hilfe von $(*)$ treten lauter Faktoren vom Typ $\sum_{j=0}^4 \epsilon^{lj}$ für gewisse l auf; man beachte, dass ein solcher Faktor den Wert 5 hat, wenn l ein Vielfaches von 5 ist, und für alle anderen l verschwindet.

Nun kann $q(\hat{\lambda})$ mit Hilfe von $\alpha \circ G, \beta \circ G, \gamma \circ G$ und $\nabla \circ G$ dargestellt werden. Das Prinzip des Rechenverfahrens wird von Klein auf S. 199f beschrieben: Wir erweitern zunächst $q(\hat{\lambda})$ mit $f(\hat{\mu})^5$ und erhalten

$$q(\hat{\lambda}) = \frac{H(\hat{\lambda})^3 f(\hat{\mu})^5}{1728 f(\hat{\lambda})^5 f(\hat{\mu})^5} =: \frac{A}{B}$$

(die homogenen Polynome f und H auf $\mathbb{C}^2$ wurden in Kap. 4 definiert). Damit werden Zähler und Nenner von $q(\hat{\lambda})$ zu A_5-invarianten bihomogenen, gleichgradigen Polynomen auf $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$. Der Nenner B ist zusätzlich unter der Transformation $\hat{P}$ von $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$,

$$\hat{P}(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (\mu_1, \mu_2, \lambda_2, -\lambda_1) \qquad (**)$$

invariant, die unter $\hat{G}$ der ungeraden Permutation $P = (1342)$ entspricht (vgl. (14a),(14b) in Kap.5); deshalb muss B sich durch α, β, γ allein (ohne ∇) ausdrücken lassen. Dies wollen wir jetzt berechnen (vgl. [K], S.200f).

Die Ausdrücke für α, β, γ werden etwas übersichtlicher, wenn man die "inhomogene Schreibweise" verwendet, also $\lambda_2 = \mu_2 = 1$ setzt; das homogene Polynom lässt sich daraus durch Multiplikation jedes Terms mit den entsprechenden λ_2- und μ_2-Potenzen wieder rekonstruieren (vgl. Kap. 4). Dann erhalten wir aus [K], S. 196, (41)-(43):

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\lambda^3\mu^2 - \lambda^2 - \lambda\mu^3 + \mu, \\
\beta &= -\lambda^4\mu + \lambda^3\mu^4 + 3\lambda^2\mu^2 - \lambda + \mu^3, \\
\gamma &= -\lambda^5(\mu^5 + 1) + 10\lambda^4\mu^3 - 10\lambda^3\mu - 10\lambda^2\mu^4 - 10\lambda\mu^2 + \mu^5 - 1.
\end{aligned}$$

Da $f(\hat{\lambda})f(\hat{\mu})$ in beiden Variablen homogen vom Grad 12 ist, muss die Darstellung von $f(\lambda)f(\mu)$ aus Termen $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ vom Grad 12 bestehen. Wegen der Grade von α, β, γ muss demnach $3a + 4b + 5c = 12$ gelten. Die möglichen Lösungen (a, b, c) sind $(1, 1, 1)$, $(0, 3, 0)$ und $(4, 0, 0)$, d.h. $f(\hat{\lambda})f(\hat{\mu})$ ist eine Linearkombination von $\alpha\beta\gamma$, β^3 und α^4. Die Koeffizienten in dieser Linearkombination erhält man durch Vergleich der führenden Terme (lexikographisch geordnet):

$$\begin{aligned}
\alpha^4 &= \lambda^{12}\mu^8 + 4\lambda^{11}\mu^6 + ... \\
\beta^3 &= -\lambda^{12}\mu^3 + 3\lambda^{11}\mu^6 + ... \\
\alpha\beta\gamma &= -\lambda^{12}\mu^8 - \lambda^{12}\mu^3 + \lambda^{11}\mu^{11} + 10\lambda^{11}\mu^6 + ...
\end{aligned}$$

(Druckfehler in [K], S.201: Im Ausdruck für $\alpha\beta\gamma$ muss es im ersten Term $\mu_1^8\mu_2^4$ heißen; auch die Ausdrücke für $\alpha\gamma^2$ sowie $\beta^2\gamma$ sind nicht korrekt). Andererseits ist $f(\lambda) = \lambda^{11} + 11\lambda^6 - \lambda$ (vgl. Kap.3) und daher

$$f(\lambda)f(\mu) = \lambda^{11}\mu^{11} + 11\lambda^{11}\mu^6 + ...$$

Der Vergleich ergibt demnach

$$f(\lambda)f(\mu) = \alpha^4 - \beta^3 + \alpha\beta\gamma,$$

wie von Klein (S. 201, (56)) angegeben, womit der Nenner B von $q(\hat{\lambda})$ explizit bestimmt ist.

Der Zähler A ist leider wesentlich komplizierter, denn er ist keine Potenz eines Polynoms von niedrigerem Grad und außerdem nicht unter $\hat{P}$ invariant (vgl. $(**)$). Das letztere Problem löst Klein durch die Aufspaltung

$$A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}$$

mit $A^* := A \circ \hat{P}$. Der erste Summand dieser Aufspaltung ist invariant unter $\hat{P}$ und damit wieder durch α, β, γ darstellbar; der zweite dagegen wechselt unter der Transformation $\hat{P}$ sein Vorzeichen und ist daher durch ∇ teilbar, und $(A - A^*)/(2\nabla)$ ist wieder durch α, β, γ darstellbar (vgl. Kap.1). Wir wollen uns nur das Prinzip der Rechnung für $A + A^*$ klarmachen. In Kap. 4 sahen wir, wie man H berechnet; das Ergebnis ist

$$H(\lambda) = -(\lambda^{20} + 1) + 228(\lambda^{15} - \lambda^5) - 494\lambda^{10}$$

([K], S.56 oder [S], S.90). Ferner ist in unserer inhomogenen Schreibweise $A^*(\lambda,\mu) = \lambda^{60}A(\mu,-1/\lambda)$ (der Faktor λ^{60} dient zur Vermeidung negativer λ-Potenzen; 60 ist der Grad von A in jeder der beiden Variablen). Deshalb sind die führenden Terme von $A+A^*$ die folgenden:

$$(A+A^*)(\lambda,\mu) = \lambda^{60}(\mu^{11}+11\mu^6-\mu)^5 + O(\lambda^{55}\mu^{55})$$

Dies wollen wir als Linearkombination von Termen der Gestalt $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ vom Grad 60, also mit $3a+4b+5c = 60$ darstellen. Diese Gleichung hat 36 Lösungen (a,b,c), die wir "zulässige (a,b,c)" nennen wollen, und es wäre völlig hoffnungslos, diese alle auf einmal betrachten zu wollen. Aber wir können, ähnlich wie bei den symmetrischen Polynomen ([W], S.100), einen Term von $A+A^*$ nach dem anderen durch Addieren von geeigneten Vielfachen von $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ beseitigen. Wenn wir uns zunächst nur den $\lambda^{60}\mu^{55}$-Term vornehmen, so benötigen wir Terme $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ mit

$$3a+4b+5c = 60,$$
$$2a+b+5c = 55$$

(die untere Gleichung enthält die μ-Grade der höchsten Terme von α,β,γ). Es folgt $a+3b = 5$, also gibt es genau zwei Lösungen (a,b,c), nämlich $(5,0,9)$ und $(2,1,10)$. Die zweite Lösung $(2,1,10)$ ist nicht brauchbar, denn $\alpha^2\beta\gamma^{10}$ enthält einen Term $\lambda^{59}\mu^{58}$, der weder in $A+A^*$ noch in einem Term der Gestalt $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ für ein anderes zulässiges (a,b,c) vorkommt und daher nicht mehr beseitigt werden kann. Für $(5,0,9)$ dagegen ist der höchste neu entstehende Term vom Typ $lambda^{59}\mu^{53}$; diesen können wir im nächsten Schritt wieder beseitigen.

Für ein beliebiges zulässiges $\alpha^a\beta^b\gamma^c$ ist der führende Term $\lambda^{60}\mu^N$, wobei $N := 2a+b+5c = 60-(a+3b)$ ein Vielfaches von 5 ist, da $2a+b \equiv 3a+4b \equiv 60-5c \equiv 0 \bmod 5$. Dann ist

$$\pm\alpha^a\beta^b\gamma^c = \lambda^{60}(\mu^N+\ldots)-\lambda^{59}(b\mu^{N+3}+\ldots)+\lambda^{58}((\begin{matrix}b\\2\end{matrix})\mu^{N+6}+\ldots)-\lambda^{57}((\begin{matrix}b\\3\end{matrix})\mu^{N+9}+\ldots)+\ldots,$$

wobei die μ-Potenzen bei fester λ-Potenz in Fünferschritten absteigen. (Teilt man nämlich α,β,γ durch ihre führenden Terme, so erhält man jeweils die gleichen Potenzen modulo 5.) Wenn wir als nächstes den $\lambda^{60}\mu^{50}$-Term beseitigen wollen ($N = 50$), suchen wir zulässige (a,b,c) mit $a+3b = 10$; diese sind $(1,3,9)$, $(4,2,8)$, $(7,1,7)$ und $(10,0,6)$. Ist $b = 3$, so entsteht ein nicht wieder zu beseitigender $\lambda^{57}\mu^{59}$-Term, also ist $(1,3,9)$ unbrauchbar. Mit den verbleibenden drei termen beseitigen wir nacheinander (mit absteigendem b) die Terme mit den λ- und μ-Potenzen (58,56), (59,53) und (60,50). Mit den folgenden sechs Termen vom Typ $a+3b = 15$ beseitigen wir nacheinander die sechs Terme mit $N = 45$ (wobei b absteigt, λ ansteigt). So ist jeder Schritt bestimmt, und wir können auf diese Weise den λ^{60}-Anteil vollständig beseitigen. Dann sind wir bereits bei Null, denn jeder weitere Schritt würde einen neuen λ^{60}-Term erzeugen. Somit haben wir $A+A^*$ als Polynom in α,β,γ ausgedrückt. Die Rechnung wurde in [B] mit Maple durchgeführt.

F. Klein berechnet $q\circ\lambda$ und $q\circ\mu$ allerdings nicht direkt auf diese Weise, sondern führt eine Hilfsgrösse m ein (siehe Formeln am Schluss der vorigen Kapitels), derem Bedeutung erst durch ein etwas abgewandeltes Lösungsverfahren klar wird, das wir im folgenden Kapitel beschreiben.

7. Auflösung der Hauptgleichung durch Oktaederformen

In Kap. II,3, §5 ([K], S. 191 - 194) beschreibt Klein ein anderes Auflösungsverfahren der Hauptgleichung, das mit nur einer Inversion von q auskommt. Dies geschieht so, dass eine gegebene Hauptgleichung mit einer bereits gelösten identifiziert wird. Dazu macht Klein Gebrauch von den 5 Oktaedern $O_0, ..., O_4$, die in das Ikosaeder einbeschrieben sind, deren Eckpunkte jeweils auf den Mittelpunkten von 6 zueinander parallelen oder orthogonalen Kanten liegen, und die durch die Ikosaedergruppe A_5 permutiert werden (vgl. Kap. 2). Zu jedem Oktaeder O_j gehören zwei binäre Formen, die Klein t_j und W_j nennt ([K], S.103 f), die *Oktaederformen*. Die erste, t_j, ist die (bis auf einen Faktor eindeutige) binäre Form vom Grad 6, die ihre Nullstellen genau in den 6 Eckpunkten von O_j hat. Sie wird folgendermaën berechnet ([K], S. 103): Die Ecken des Oktaeders O_0 sind die Schnitte der Sphäre mit den Koordinatenachsen des $\mathbb{R}^3$. Mit anderen Worten: Es sind genau die Fixpunkte der drei 180-Grad-Drehungen um die Koordinatenachsen. Diese Abbildungen sind, als Automorphismen von $\hat{\mathbb{C}}$ aufgefasst,

$$T(z) = \frac{-z+t}{tz+1}, \quad U(z) = -\frac{1}{z}, \quad (T \circ U)(z) = \frac{tz+1}{z-t}$$

(vgl. Kap. 5, (13); dass dies die angegebenen Abbildungen sind, mache man sich mit Hilfe von Figur 1 sowie eines Ikosaedermodells klar). Ein Fixpunkt $z \in \hat{\mathbb{C}}$ einer beliebigen gebrochen-linearen Transformation $g(z) = (az+b)/(cz+d)$ (also $g(z) = z$) erfüllt die Gleichung $az + b = (cz + d)z$, ist also Lösung der quadratischen Gleichung

$$Q_g(z) := cz^2 + (d-a)z - b = 0.$$

Die gesuchte normierte Form, die in den Eckpunkten des Oktaeders Null ist, ist somit in inhomogener Schreibweise (wegen $-vt = 1$):

$$t_0 = -vQ_T Q_U Q_{TU} = (z^2 - 2vz - 1)(z^2 + 1)(z^2 - 2tz - 1)$$

Die binäre Form $\hat{t}_0$ entsteht daraus in der üblichen Weise (vgl. Kap. 4):

$$\hat{t}_0(z_1, z_2) = t_0(z_1/z_2)z_2^6 = (z_1^2 - 2vz_1z_2 - z_2^2)(z_1^2 + z_2^2)(z_1^2 - 2tz_1z_2 - z_2^2)$$

(vgl. [K], S. 103, (22), wobei statt der 5 in der ersten Formelzeile ϵ stehen muss). Da das Oktaeder O_j aus O_0 durch Anwendung der Abbildung $z \mapsto \epsilon^{-j}z$ (Drehung um den Winkel $-2\pi j/5$) hervorgeht, erhalten wir t_j, indem wir in der oberen Formel z durch $\epsilon^j z$ ersetzen. In homogener Schreibweise entspricht der Multiplikation mit ϵ^j die Anwendung der folgenden Matrix mit Determinante Eins:

$$\epsilon^{2j}\begin{pmatrix} \epsilon^j & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^{3j} & 0 \\ 0 & \epsilon^{2j} \end{pmatrix}.$$

Also ist z_1 durch $\epsilon^{3j}z_1$ und z_2 durch $\epsilon^{2j}z_2$ zu ersetzen; vgl. [K], S.104, (24). Die zweite Oktaederform W_j ist bis auf Normierung die Hessesche von $t_j : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, d.h. der Determinante der Hessematrix $D_1D_1t_j \cdot D_2D_2t_j - (D_1D_2t_j)^2$ (vgl. [K], S.104, (25)); der Grad von W_j ist also 8.

Mit Hilfe dieser Oktaederformen werden nun folgendermaßen Lösungen von Hauptgleichungen konstruiert: Da A_5 die Oktaeder O_j und damit die Formen W_j (und ebenso t_j) permutiert, sind $\sum_j W_j$ und auch $\sum_j W_j^2$ invariante Formen unter A_5 mit Graden 8 und 16. Aber solche Formen gibt es nicht: Die Nullstellenmenge einer A_5-invarianten Form ist eine Vereinigung von Bahnen von A_5, und jede Bahn hat Mächtigkeit 12, 20, 30 oder 60. Der Grad einer invarianten Form (die Anzahl der Nullstellen mit Vielfachheit) ist also eine Summe dieser vier Zahlen, was für 8 und 16 nicht zutrifft. Daher müssen $\sum_j W_j$ und $\sum_j W_j^2$ identisch verschwinden, d.h. für jedes $\hat{z} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ gilt

$$W(\hat{z}) := (W_0(\hat{z}), ..., W_4(\hat{z})) \in \hat{H}$$

(wobei wie früher $\hat{H} = \{x \in \mathbb{C}^5;\ \sum x_j = \sum x_j^2 = 0\}$). Für t_j anstelle von W_j gilt nichts Entsprechendes, denn der Grad von $\sum_j t_j^2$ ist 12 (in der Tat ist $\sum t_j^2$ ein Vielfaches von f). Aber für das Produkt $t_j W_j$ vom Grad 14 ist das obige Argument wieder richtig, denn 14 und 28 sind nicht durch 12 und 20 darstellbar. Deshalb ist für alle $\hat{z} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ auch

$$tW(\hat{z}) := (t_0(\hat{z})W_0(\hat{z}), ..., t_4(\hat{z})W_4(\hat{z})) \in \hat{H}.$$

Aus demselben Grund muss auch die Form $\sum t_j W_j^2$ vom Grad 22 verschwinden. Somit liegt eine beliebige Linearkombination

$$y := y(a, b, z) := a \cdot W(\hat{z}) + b \cdot tW(\hat{z}) \tag{$*$}$$

ebenfalls in $\hat{H}$, denn $\sum_j y_j = 0$ und

$$\sum_j y_j^2 = \sum_j (a^2 W_j^2 + b^2 (t_j W_j)^2 + 2ab t_j W_j^2) = 0.$$

Die $y(a, b, z)$ bilden also eine dreiparametrige Schar von Lösungen von Hauptgleichungen. Da die Menge $\hat{H}$ aller Lösungen von Hauptgleichungen selber dreiparametrig ist (sie wird ja durch 2 Gleichungen in $\mathbb{C}^5$ beschrieben), sollten wir mit den $y(a, b, z)$ (fast) ganz $\hat{H}$ überdecken können, und dies ist tatsächlich der Fall, wie wir sehen werden. Dies gibt eine Idee, wie eine (fast) beliebige Hauptgleichung

$$x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0 \tag{H}$$

zu lösen ist: Für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ und $z \in \hat{\mathbb{C}}$ berechnen wir zunächst die Koeffizienten $\alpha(a, b, z)$, $\beta(a, b, z)$ und $\gamma(a, b, z)$ der Hauptgleichung von $y(a, b, z)$, deren Lösungen also $y_0(a, b, z), ..., y_4(a, b, z)$ sind. Wenn wir dann $a, b \in \mathbb{C}$ und $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit

$$\alpha(a, b, z) = \alpha, \quad \beta(a, b, z) = \beta, \quad \gamma(a, b, z) = \gamma$$

bestimmen können, so sind $x_j = y_j(a, b, z)$ die gesuchten Lösungen von (H).

Dazu müssen wir zunächst die Koeffizienten der Hauptgleichung von $y(a, b, z)$ bestimmen, also die elementarsymmetrischen Polynome $\sigma_m(y_0, ..., y_4)$ für $m = 3, 4, 5$. Wie wir bereits in Kap. 6 sahen, können wir wegen des Verschwindens von $\sigma_1(y)$ und $\sigma_2(y)$ die $\sigma_m(y)$ für $m = 3, 4, 5$ durch Vielfache der Potenzsummen $\sum_j y_j^m$ ersetzen (vgl. [K], S. 196, (41) - (43)); diese sind einfacher zu berechnen: Wegen $y_j = aW_j + bt_jW_j$ ist

$$\sum_{j=0}^{4} y_j^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k} \sum_{j=0}^{4} t_j^{m-k} W_j^m,$$

und $\sum_j t_j^k W_j^m$ ist eine A_5-invariante Form vom Grad $6k+8m$. Diese Zahlen $6k+8m$ (mit $m = 3, 4, 5$ und $k = 0, ..., m$ lassen sich auf höchstens eine Weise als Summe mit Summanden 12, 20 oder 30 darstellen, und somit kann $\sum_j t_j^k W_j^m$ als Vielfaches von Produkten von f, H und T dargestellt werden (vgl. Kap.4), wobei der Koeffizient durch Vergleich der höchsten Terme bestimmt wird.

Beispiel: Für $k = 2$, $m = 4$ ist $6k + 8m = 44 = 20 + 2 \cdot 12$; die Form $\sum_j t_j^2 W_j^4$ muss daher ein Vielfaches von Hf^2 sein, denn ihre 44 Nullstellen müssen auf den Bahnen der Längen 12 (mit Vielfachheit 2) und 20 (mit Vielfachheit 1) liegen; dies sind aber gerade die Nullstellenmengen von H und f^2. Um das Vielfache zu berechnen, brauchen wir nur die höchsten Terme zu vergleichen: Nach [K], S.104 ist

$$t_j = \epsilon^{3j} z^6 + 2\epsilon^{2j} z^5 - 5\epsilon z^4 + ...$$
$$W_j = -\epsilon^{4j} z^8 + \epsilon^{3j} z^7 - 7\epsilon^{2j} z^6 + ...$$

und somit

$$t_j^2 = \epsilon^{6j} z^{12} + 4\epsilon^{5j} z^{11} + (-10 + 4)\epsilon^{4j} z^{10} + ...$$
$$W_j^4 = \epsilon^{16j} z^{32} - 4\epsilon^{15j} z^{31} + (6 + 28)\epsilon^{14j} z^{30} + ...$$

Da $\sum_j \epsilon^{nj}$ verschwindet, falls n nicht durch 5 teilbar ist, verschwinden in $\sum t_j^2 W_j^4$ die z^{44}-Terme (mit ϵ^{22j}) und die z^{43}-Terme (mit ϵ^{21j}). In der Tat ist ja Hf^2 als Polynom in z vom Grad 42. Die Terme vom Grad 42 von $t_j^2 W_j^4$ sind $\epsilon^{20j} z^{42}(-10 + 4 - 16 + 6 + 28) = 12z^{42}$; somit ist $\sum_j \binom{4}{2} t_j^2 W_j^4 = 5 \cdot 6 \cdot 12 \cdot z^{42} + ...$ Andererseits ist $H(z)f^2(z) = -z^{42} + ...$ Nach [K], S.196, (42) ist $\beta = -\frac{1}{20} \sum_j y_j^4$, also ist der Koeffizient von Hf^2 in β gleich 18, wie auch in [K], S.106, (31) angegeben (wo σ und τ anstelle von a und b stehen). Auf dieselbe Weise berechnen wir alle Terme der Gleichung (31).

Wir substituieren nun

$$a = \frac{12f(z)}{H(z)} \cdot m, \quad b = \frac{12^2 f(z)^3}{H(z)T(z)} \cdot n$$

(woraus sich m und n in Abhängigkeit von a, b, z ergibt). Damit erhalten wir (34), [K], S.106 mit $Z := q(z) = H(z)^3/(12^3 f(z)^5)$; wegen der Gleichung $T^2 = 12^3 f^5 - H^3$ (vgl. Kap. 4 und [S], S.91) gilt nämlich $1 - Z = T^2/(12^3 f^5)$. An die Stelle von $(*)$ tritt jetzt

$$y_j = m \cdot \frac{12f(z)W_j(z)}{H(z)} + n \cdot \frac{12^2 f(z)^3 t_j(z)W_j(z)}{H(z)T(z)}. \qquad (**)$$

Nun können wir die Koeffizienten α, β, γ der vorgelegten Gleichung (H) mit den Koeffizienten der Gleichung (34), [K], S.106 vergleichen und erhalten die Gleichungen (31) in [K], S.192. Da geschieht ein Wunder: Diese Gleichungen sind elementar auf eine quadratische Gleichung für m zurückführbar und somit nach m, n, Z auflösbar, wie in [K], S. 193 ausgeführt wird. Die Gleichung (32) (S.193) ergibt sich z.B. aus den Gleichungen (31) (nicht nur aus der ersten dieser Gleichungen; Druckfehler in [K]) direkt durch Vergleich von $12n^2\alpha$ mit $12m\beta + \gamma$. Die Gleichungen (35), (36), (37) (S. 193 in [K]) bestimmen m, n und $Z = q(z)$ als Funktionen von α, β, γ und ∇, wobei ∇^2 durch (3), S. 182 in [K] selbst eine Funktion von α, β, γ ist. (Die Vorzeichenbestimmung von ∇ auf S. 194 übergehen wir.)

Ist also eine Hauptgleichung (H) mit Koeffizienten α, β, γ gegeben, so berechnen wir zunächst m, n, Z mit (35), (36), (37), wobei wir wegen der Unbestimmtheit des Vorzeichens von ∇ (Wahl einer der beiden Quadratwurzeln) zwei verschiedene Lösungen m_i, n_i, Z_i (mit $i = 1, 2$) erhalten. Durch Invertierung von q erhalten wir aus Z_1 (und entsprechend aus Z_2) im allgemeinen Fall 60 verschiedene Urbilder $z \in \hat{\mathbb{C}}$ mit $q(z) = Z_1$; diese Urbilder bilden eine Bahn der Ikosaedergruppe. Setzen wir einen dieser Werte in $(**)$ ein (mit m_1, n_1 statt m, n), so erhalten wir 5 Werte $y_0, ..., y_4 \in \mathbb{C}$, und $x_j := y_j$ (für $j = 0, ..., 4$) sind die Lösungen unserer Gleichung. Hätten wir ein anderes Urbild z' gewählt ($q(z') = q(z) = Z_1$), so hätten wir dieselben Wurzeln in einer anderen, gerade permutierten Anordnung erhalten; ebenso, in ungerade permutierter Anordnung, wenn wir Z_2 statt Z_1 gewählt hätten, denn bei ungerader Permutation der Wurzeln wechselt ∇ das Vorzeichen, wie wir wissen. Wir brauchen also nur eine der beiden Lösungen (m, n, Z) von (31) und nur eine Lösung z der Ikosaedergleichung $q(z) = Z$, um die Gleichung (H) vollständig zu lösen.

8. Geometrie der Auflösung durch Oktaederformen

Das im letzten Kapitel beschriebene Auflösungsverfahren ist geometrisch noch unbefriedigend; es scheint lediglich auf einigen Rechentricks zu beruhen, und der Zusammenhang mit der Ikosaederresolvente erscheint eher zufällig, weil sich bei der Rechung die auftretenden A_5-Invarianten f, H, T eben zu $Z = q = H^3/(12^3 f^5)$ zusammenfügen. Ein Zusammenhang mit dem zuvor beschriebenen Auflösungsverfahren ist noch nicht erkennbar. Diesen wollen wir jetzt aufzeigen; Klein lässt ihn keinen Moment aus den Augen.

Wir hatten in Kap. 5 eine Parametrisierung $G : P^1 \times P^1 \to H$ für die Hauptfläche H angegeben (vgl. S.13), die sich zu einer polynomialen Abbildung $\hat{G} : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \hat{H}$ liften ließ (vgl. Kap. 6). In Kap. 7 haben wir eine andere polynomiale Abbildung $\hat{\eta} : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \hat{H}$ betrachtet; wir erhalten sie, indem wir Gleichung $(**)$ mit $HT/(12f)$ multiplizieren (und so den Nenner beseitigen):

$$\hat{\eta}(\hat{z}, m, n) = mT(\hat{z})W(\hat{z}) + 12nf^2(\hat{z})(tW)(\hat{z}).$$

(vgl. [K], S.190, (27) und [S], S.99), wobei $W = (W_0, ...W_4)$ und $tW = (t_0W_0, ..., t_4W_4)$ aus den im vorigen Kapitel definierten Oktaederformen besteht. Für jedes m, n ist $\hat{\eta}(m, n, \hat{z})$ eine binäre Form vom Grad 38 in $\hat{z}$. Dies ist die Motivation für den Übergang von $(*)$ zu

(**) in Kap. 7: Durch Multiplikation von W_j (Grad 8) mit T (Grad 30) und von $t_j W_j$ (Grad 14) mit f^2 (Grad 24) entstehen zwei Formen vom gleichen Grad 38. Die Abbildung $\hat{\eta}$ ist ebenfalls Lift einer rationalen Abbildung $\eta : P^1 \times P^1 \to H$:

$$\eta(z, [m, n]) = [mT(z)f(z)^2 W(z) + 12nf(z)^3(tW)(z)].$$

Diese ist allerdings nur dort definiert, wo der Wert von $mTW + 12nf^2tW$ nicht der Nullvektor ist (vgl. [S], S.99 sowie [K], S.291).

Die Parametrisierungen G und η von H haben vieles gemeinsam: Wie man sofort sieht, besteht auch für η eine Schar von Parameterlinien (nämlich $z = const$, also $[m, n] \mapsto \eta(z, [m, n])$ aus Geraden, also aus einer der beiden erzeugenden Geradenscharen für H. Klein beweist noch mehr (wir geben den Beweis am Ende dieses Kapitels wieder): Der Parameter z stimmt sogar mit dem Parameter λ dieser Geradenschar überein, es gilt also

$$\eta(\lambda, [m, n]) = G(\lambda, \mu(\lambda, [m, n]))$$

wobei die Abbildung $[m, n] \mapsto \mu(\lambda, [m, n]) : \; P^1 \to P^1$ für jedes feste λ von einer linearen Abbildung auf $\mathbb{C}^2$ herkommt. Geometrisch gesprochen: In den (λ, μ)-Koordinaten für H sind die Kurven $z \mapsto \eta(z, [m, n])$ Graphen über der λ-Achse. Damit wird die Abbildung η zwar kein Isomorphismus wie $G = F^{-1}$ (vgl. Kap. 6), aber wenigstens *birational*, d.h. η besitzt eine rationale Umkehrung (die nur fast überall auf H erklärt ist): Wir können nämlich die Vektorgleichung

$$\hat{\eta}(\hat{\lambda}, m, n) = \hat{G}(\hat{\lambda}, \hat{\mu}),$$

also die skalaren Gleichungen

$$\begin{aligned} y_j &= \epsilon^{4j}\lambda_1\mu_1 - \epsilon^{3j}\lambda_2\mu_1 + \epsilon^{2j}\lambda_1\mu_2 + \epsilon^j\lambda_2\mu_2, \\ y_j &= m \cdot \frac{12f(\hat{\lambda})W_j(\hat{\lambda})}{H(\hat{\lambda})} + n \cdot \frac{12^2 f(\hat{\lambda})^3 t_j(\hat{\lambda})W_j(\hat{\lambda})}{H(\hat{\lambda})T(\hat{\lambda})} \end{aligned}$$

für $j = 0, ..., 4$ nach m und n auflösen und erhalten m, n als rationale Funktionen von $(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ ([K], S.196 f, (46),(47),(48).)

Was aber gewinnen wir mit der viel komplizierteren Abbildung η gegenüber G? Der Vorteil ist: Für jedes feste $[m, n]$ sind die Parameterkurven $z \mapsto \eta(z, [m, n])$ von η invariant unter A_5, d.h. A_5 operiert nur auf dem Parameter z. Geometrisch ausgerückt: Die Kurven $z \mapsto \eta(z, [m, n])$ verbinden alle Punkte einer Bahn von A_5. Beide Abbildungen $G, \eta : \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \to H$ sind also äquivariant unter der Gruppe A_5, aber die Operationen von A_5 auf $\hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}}$ sind unterschiedlich: Bei G operiert A_5 auf *beiden* Faktoren als Ikosaedergruppe, wobei die beiden Operationen ρ_λ, ρ_μ durch Konjugation mit einer ungeraden Permutation verbunden waren (vgl. Kap. 5), d.h. für alle $g \in A_5$ ist

$$g(\lambda, \mu) = (\rho_\lambda(g)\lambda, \rho_\mu(g)\mu).$$

Bei η dagegen operiert A_5 nur auf dem ersten Faktor:

$$g(\lambda, [m, n]) = (\rho_\lambda(g)\lambda, [m, n]).$$

Wenn wir also η invertieren und m und n als Funktion von $\hat{\lambda}$ und $\hat{\mu}$ ausdrücken (siehe oben), so sind diese Funktionen invariant unter der binären Ikosaedergruppe $\hat{A}_5$. (Eigentlich ist ja nur $(\lambda, \mu) \mapsto [m, n]$ invariant unter A_5, aber mit einem ähnlichen Schluss wie auf S.9 und S.19 ist $(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \mapsto (m, n)$ invariant unter $\hat{A}_5$.)

Auf die drei $\hat{A}_5$-invarianten Funktionen $m(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$, $n(\hat{\lambda}, \hat{\mu})$ und $Z = q(\lambda)$ lässt sich nun das Verfahren von Kap. 6 anwenden, um m, n, Z als Polynome in α, β, γ und ∇ auszudrücken und damit (erneut) die Hauptgleichung zu lösen. (Man benötigt nur eine Inversion von q, nämlich zur Berechnung von λ aus $Z = q(\lambda)$). Dieses Verfahren wird von Klein für m beispielhaft durchgeführt (S.200 f). Die Ausdrücke für $\alpha\gamma^2$ und $\beta^2\gamma$ auf S. 201 sind dabei allerdings falsch wiedergegeben; es muss stattdessen lauten:

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma^2 &= -\lambda_1^{13}(\mu_1^{12}\mu_2 + 2\mu_1^7\mu_2^6 + \mu_1^2\mu_2^{11}) + \lambda_1^{12}\lambda_2(0),\\
\beta^2\gamma &= -\lambda_1^{13}(\mu_1^7\mu_2^6 + \mu_1^2\mu_2^{11}) + \lambda_1^{12}\lambda_2(0).
\end{aligned}$$

Es bleibt noch der Beweis für die Behauptung nachzutragen, dass die Parameter λ und z gleich sind, d.h.

$$\eta(\lambda, [m, n]) = G(\lambda, \mu(\lambda, [m, n]))$$

Dazu macht man die Beobachtung, dass sich W_j und $t_j W_j$ (vgl. [K], S.104, (24) und (25)) folgendermaßen schreiben lassen:

$$W_j = r_j f + s_j g, \quad t_j W_j = r_j h + s_j k,$$

wobei f, g, h, k von j unabhängige Formen sind und

$$r_j(\hat{z}) = \epsilon^{4j} z_1 - \epsilon^{3j} z_2, \quad s_j(\hat{z}) = \epsilon^{2j} z_1 + \epsilon^j z_2.$$

gilt (vgl. [K], S.189, (21),(22); Druckfehler in der zweiten Zeile von (22): $\epsilon^{2\nu}$ statt $\epsilon^{4\nu}$). Dann ist

$$y_j = aW_j + bt_j W_j = r_j R + s_j S$$

mit $R = af + bg$, $S = ah + bk$ und somit (vgl. Kap. 5)

$$\begin{aligned}
p_k = \sum_j \epsilon^{kj} y_j &= (\sum_j \epsilon^{kj} r_j)R + (\sum_j \epsilon^{kj} s_j)S\\
&= \sum_j ((\epsilon^{(k+4)j} z_1 - \epsilon^{(k+3)j} z_2)R + (\epsilon^{(k+2)j} z_1 + \epsilon^{(k+1)j} z_2)S.
\end{aligned}$$

Da $\sum_j \epsilon^{lj} = 0$ falls l nicht durch 5 teilbar ist, bleibt für jedes k nur einer dieser Terme übrig, und wir erhalten

$$p_1 = 5z_1 R, \quad p_2 = -5z_2 R, \quad p_3 = 5z_1 S, \quad p_4 = 5z_2 S$$

und somit

$$\lambda = -p_1/p_2 = p_3/p_4 = z_1/z_2 = z.$$

Literatur

[A] Ahlfors, L.W.: *Complex Analysis*, McGraw-Hill 1966

[B] Bauer, W.: *Eliminationsverfahren bei $\hat{A}_5$-invarianten Polnomen.* Numerik-Praktikum Augsburg 1998

[G] Gordon, P.: *Über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, Math. Ann. **13**, 375 - 404 (1878)

[K] Klein, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, herausgegeben und kommentiert von P. Slodowy, Birkhäuser 1993

[R] Riesenbeck, Emanuel: *Die hypergemetrische Differentialgleichung mit endlicher Monodromie*, Staatsexamensarbeit Augsburg 1999

[Sz] Schwarz, H.A.: *Über diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt*, J. Reine u. Angew. Math. 75 (1873), 292 - 335

[S] Slodowy, P.: *Das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades*, in: Mathematische Miniaturen 3, Arithmetik und Geometrie, Birkhäuser 1986

[W] van der Waerden, B.L.: *Algebra I*, Springer 1967

(Nov. 1997/Feb. 1999)

Institut für Mathematik
Universität Augsburg
86135 Augsburg