

# Geometrie

## Vorlesung Universität Augsburg

### SS 2003, WS 2011

J.-H. Eschenburg

## 0 Was ist Geometrie?

Das Wort Geometrie kommt aus dem Griechischen und heißt eigentlich Erd-Vermessung. Geometrische Erkenntnisse gab es in allen Kulturen, aber erst im antiken Griechenland wurde daraus eine Wissenschaft in unserem heutigen Sinn: Eine systematische Art der Gewinnung gesicherter Erkenntnis. Im ursprünglichen Sinn ist der Inhalt der Geometrie die Untersuchung räumlicher Formen.<sup>1</sup> Die dabei entwickelten Ideen und sprachlichen Mittel lassen sich aber über den anschaulich-räumlichen Anwendungsbereich hinaus auf andere Problemkreise übertragen; ein bereits aus den Anfängervorlesungen vertrautes Beispiel ist der  $n$ -dimensionale Raum. Geometrie im heutigen Wortsinn ist die Betrachtung der Mathematik aus dem Blickwinkel dieses aus der Raumanschauung gewonnenen Ideenkreises.

Was bedeutet “Anschauung”, und welche Rolle spielt sie im Rahmen der Mathematik, speziell der Geometrie? Sie betrifft zunächst die in der *Realität* vorhandenen räumlichen Formen und ihre vertrauten oder verborgenen Beziehungen. Die Formen werden der Realität aber nicht einfach entnommen, sondern sie werden *idealisiert*, zu einer *Idee* im Sinne Platons umgeformt. In der Realität gibt es mehr oder weniger kreisförmige Gegenstände; in unserer Vorstellung wird daraus die Idee des (perfekten) Kreises gebildet, und dies geschieht bereits bei Vorschulkindern. Die *Mathematik* schließlich fasst die Idee in Worte; aus dem Kreis wird *die Menge aller Punkte der Ebene, die*

---

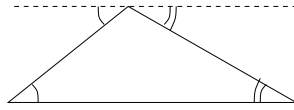
<sup>1</sup>Damit hat sie eine starke Beziehung zur Bildenden Kunst, die wir nicht ganz vernachlässigen wollen.

von einem festen Punkt (dem Zentrum) einen konstanten Abstand haben, den wir *Radius* nennen. Die Beziehung zwischen Idee und mathematischer Formalisierung in Form einer *Definition* sollte perfekt sein, d.h. genau diese Idee in Worte fassen, nicht mehr und nicht weniger:

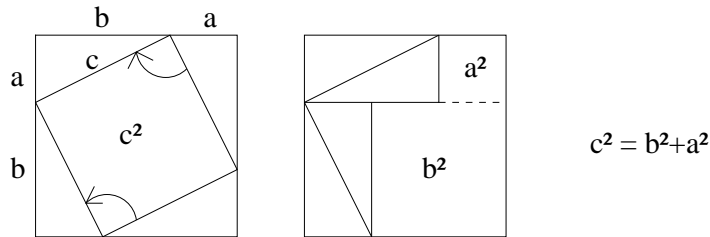
Wirklichkeit  $\longrightarrow$  Idee  $\longleftrightarrow$  Mathematischer Begriff

Die Idee wird damit in einen bestimmten Begriffsrahmen eingebettet und logischer Weiterverarbeitung zugänglich gemacht. Das Beispiel des Kreises zeigt aber auch die Problematik dieses Vorgehens. Aus der jedem Kind verständlichen Idee des Kreises wird ein Satz-Ungetüm, das neue Worte enthält, die selbst wieder erklärt werden müssen: Menge, Punkte, Ebene, Abstand. Außerdem drückt die Definition lange nicht alles aus, was in dem Wort "Kreismittgedacht wird, z.B. die gleichmäßige Rundung (*Krümmung*). Es bedarf weiterer Begriffe (*Kurve, zweite Ableitung*), um diesen Aspekt in die mathematische Sprache zu übersetzen. Andererseits können wir ohne diese begriffliche Durchdringung nicht zu gesicherten Erkenntnissen gelangen, denn die Anschauung (der "Augenschein") kann trügen.

Daraus ergeben sich sowohl didaktische als auch fachliche Konsequenzen. Soll man z.B. im Schulunterricht das intuitive Erfassen einer Idee in allen ihren Aspekten ("der Kreis ist rund") opfern, um nach langer Analyse womöglich zum selben Ergebnis zu gelangen? Dies wäre wahrlich kein Gewinn, denn das intuitive Erkennen ist von großem Wert. Aber es gibt auch Situationen, zu deren Verständnis die Intuition nicht mehr ausreicht und die eine präzise Definition erfordern, zum Beispiel wenn wir die Schnittpunkte zweier Kreise bestimmen wollen; da lässt sich dann der Wert der Formalisierung aufzeigen. Uns Mathematikern ergeht es andererseits genau wie den Schulkindern, sobald wir vor ungelösten Problemen stehen. Das Erkenntnismittel in der Geometrie in einer solchen Situation ist oft nicht der logische Schluss, sondern die *Figur*, die eigentlich (als Bleistift- oder Kreidezeichnung) in unserem Schema ganz links in der "Wirklichkeit" angesiedelt ist, aber eine ideale Situation symbolisieren soll. Die Erkenntnis des *Verborgenen* durch seine Rückführung auf das *Offensichtliche* (diese Rückführung nennt man *Beweis*) geschieht in seinem wesentlichen Teil anhand der Figur, im einfachsten Fall durch Einführung geeigneter Hilfslinien. Als Beispiel für die "Kraft der Figur" betrachten wir die Bestimmung der Winkelsumme im Dreieck durch Einführung der Parallelen



oder den Beweis des Satzes von Pythagoras durch Einführung des schrägen Quadrats



Die Übertragung des Beweises auf die rechte Seite in unserem Schema, die *Formalisierung*, ist danach ein rein mechanischer Prozess, der zu Recht oft weggelassen wird, weil er zu langweilig ist.

Aber was soll als das “Offensichtliche” gelten? Wir können uns darüber jeweils einigen. In der Figur zur Winkelsumme des Dreiecks zum Beispiel sollte die Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen “offensichtlich” sein, denn durch eine Drehung der Figur geht der eine in den anderen über. Dies ist eigentlich eine *Symmetriebetrachtung*: Die Winkel sind gleich, weil es eine winkeltreue Abbildung (eine *Symmetrieabbildung*) gibt, die sie verbindet. Solche Argumente haben eine starke intuitive Kraft, weil wir Drehungen, Verschiebungen und Spiegelungen aus der täglichen Erfahrung gut kennen.

Die Mathematiker haben diesen Einigungsprozess ein für alle Mal vorgenommen, indem sie sich auf *Axiome* verständigt haben, mathematische Aussagen, die sie allen weiteren Schlüssen zugrunde legten. Dies geschah zuerst in Euklids “Elementen”, die um ca. 300 v.Chr. das damalige geometrische Wissen zusammenfasste. In modernerer Form wurde diese Aufgabe für die Geometrie in den “Grundlagen der Geometrie” von D.Hilbert (1899) geleistet. Die Welle der *Axiomatisierung* erfasste in der Folge dieses Buches alle Gebiete der Mathematik; für die Analysis (Axiome der reellen Zahlen) und die Lineare Algebra (Vektorraum-Axiome) haben Sie das in den Grundvorlesungen gelernt. Auf dieses Wissen wollen wir uns auch jetzt stützen. Wir wollen also kein eigenes Axiomensystem für die Geometrie aufstellen, sondern lieber auf die vertrauten Axiome der Analysis und Linearen Algebra zurückgreifen. Der mathematische Begriffsrahmen, die rechte Seite unseres Schemas, ist bereits fertig gezimmert; wir müssen nur die Geometrie damit in Verbindung

bringen. Dazu werden wir zeigen, wie sich geometrische Begriffe und Sachverhalte in die Sprechweise dieser Gebiete übersetzen lassen. Wir möchten damit einerseits die Brücke von Ihrer neuerworbenen Hochschulmathematik zur Alltags- und Schulgeometrie verstärken, andererseits einen sicheren Rahmen für neue geometrische Erkenntnisse zur Verfügung haben.

Die Begriffe der Geometrie sind von ganz unterschiedlicher Natur; sie bezeichnen sozusagen verschiedene Schichten geometrischen Denkens: Manche Argumente verwenden nur Begriffe wie *Punkt*, *Gerade* und *Inzidenz* (die Aussage, dass ein bestimmter Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt), andere verwenden *Abstands-* oder *Symmetrie-*Überlegungen. Jedes dieser Begriffsfelder bestimmt ein eigenes Teilgebiet der Geometrie:

- |                            |                                       |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1. Inzidenz:               | Projektive Geometrie                  |
| 2. Parallelität:           | Affine Geometrie                      |
| 3. Winkel:                 | Konforme Geometrie                    |
| 4. Abstand:                | Metrische Geometrie                   |
| 5. Krümmung:               | Differentialgeometrie                 |
| 6. Winkel als Abstandsmaß: | Sphärische u. hyperbolische Geometrie |
| 7. Symmetrie:              | Abbildungsgeometrie                   |

Die Begriffsfelder durchdringen sich natürlich gegenseitig: Geraden minimieren den Abstand und haben Krümmung Null, Parallelen haben konstanten Abstand, die Abstände bestimmen auch die Winkel usw. Das letzte Begriffsfeld "Symmetrie" durchzieht alle anderen; *Felix Klein*<sup>2</sup> hat in seinem "Erlanger Programm" von 1872 das Augenmerk auf die Beziehungen zwischen Geometrie und Symmetriegruppen gelenkt. Die Liste der Teilgebiete der Geometrie ist nicht vollständig, wenn man höhere Dimensionszahlen zulässt; erst *J. Tits*<sup>3</sup> hat um 1960 (nach Vorarbeiten von *W. Killing*, *S. Lie*, *E. Cartan*, *H. Weyl* u.a.) die vollständige Liste gefunden.<sup>4</sup>

Wir werden auf jeder Stufe mit der linken Seite unseres Schemas, der Anschauung beginnen und dabei alles benutzen, was wir aus der anschaulichen Geometrie wissen. Dies wird zu einer Einbettung des Sachverhalts in unser mathematisches Modell führen. Erst in diesem Rahmen geben wir mathematisch exakte Definitionen und Beweise. Wir beginnen dabei mit der affinen

---

<sup>2</sup>Felix Christian Klein, 1849 (Düsseldorf) - 1925 (Göttingen)

<sup>3</sup>Jaques Tits, geb. 1930 in Uccle / Ukkel bei Brüssel

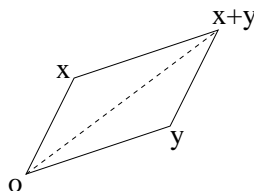
<sup>4</sup>cf. J. Tits: *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Springer Lecture Notes in Math. 386 (1974)

Geometrie, da sie Ihnen vertrauter ist als die projektive Geometrie. Als wichtigste Literatur nenne ich Ihnen zwei Bücher: Zunächst das wunderschöne Buch von D. Hilbert und S. Cohn-Vossen: “Anschauliche Geometrie”, das zuerst um 1930 veröffentlicht wurde; ein Mathematikbuch fast ohne Formeln, aber mit umso mehr Bildern. Wesentlich umfassender ist M. Berger: “Geometry”; charakteristisch für dieses Buch ist, dass die geometrischen Argumente oft nur angedeutet werden; Sie müssen darüber nachdenken, um sie auszuführen, sehen dann aber, dass alle wesentlichen Informationen dafür gegeben worden sind.

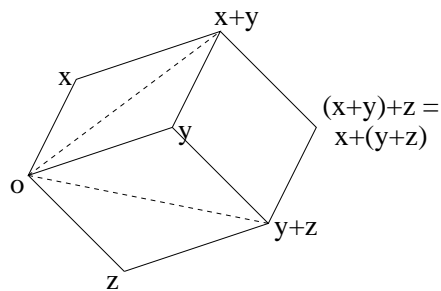
## 1 Parallelität: Affine Geometrie

### 1.1 Von der affinen Geometrie zur Linearen Algebra

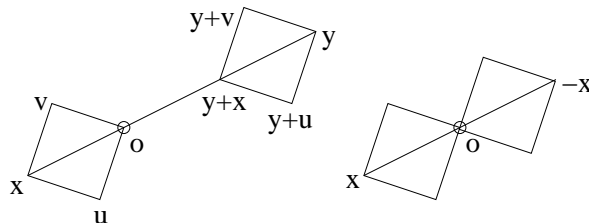
Die *affine Geometrie* destilliert aus der uns bekannten anschaulichen Geometrie der Ebene oder des Raums (die wir beide mit  $X$  bezeichnen wollen) genau die Vektorraum-Struktur heraus. Ihre Grundbegriffe sind Punkt, Gerade und Parallelität. Die Grundidee ist die Parallelogramm-Konstruktion: Wir zeichnen einen Punkt  $o \in X$  willkürlich aus und nennen ihn *Ursprung*. Sind nun zwei andere Punkte  $x, y \in X$  gegeben, so dass  $o, x, y$  nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen (nicht *kollinear* sind), so bezeichnen wir den vierten Eckpunkt des von  $o, x, y$  erzeugten Parallelogramms als  $x + y$ .



Offensichtlich ist diese Operation kommutativ ( $x + y = y + x$ ) und auch assoziativ:  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .



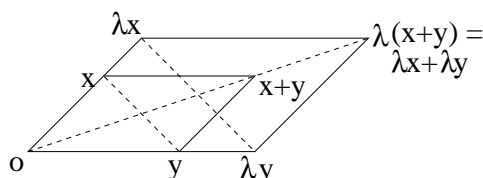
Man kann die Konstruktion auch anders beschreiben: Der Punkt  $x + y$  ist der Endpunkt der Strecke, die durch Parallelverschieben der Strecke  $ox$  in den Anfangspunkt  $y$  entsteht (oder umgekehrt durch Verschieben von  $oy$  in den Anfangspunkt  $x$ ). Diese neue Beschreibung hat den Vorteil, dass sie auch noch auf kollineare  $o, x, y$  zutrifft; sie entspricht nämlich der geometrischen Addition von Werten auf einer Skala, also der Addition von Zahlen. Der Nachteil ist, dass man die Kommutativität nicht so unmittelbar ablesen kann. Hier sieht man bereits ein allgemeines Prinzip der Geometrie: In niedrigen Dimensionen (hier: Dimension Eins) werden manche Schlüsse schwieriger als bei höherer Dimensionszahl (hier: Zwei); die Geometrie entfaltet ihre wahren Eigenschaften erst, wenn genügend Raum zur Verfügung steht. Eine andere Möglichkeit, die Addition kollinearere Punkte  $o, x, y$  zu definieren, besteht darin, die zweite Dimension wirklich zu benutzen und den Punkt  $x$  bereits als  $u + v$  zu beschreiben, wobei  $o, u, v$  nicht kollinear sein sollen; dann kann man die Parallelogrammkonstruktion für  $x + y = u + (v + y)$  wieder benutzen.



Insbesondere finden wir einen Punkt, der auf der Geraden  $ox$  auf der anderen Seite von  $o$  in gleichem Abstand wie  $x$  liegt und den wir  $-x$  nennen, denn es gilt  $x + (-x) = o$ . (*Figur Inverses*). Damit wird  $(X, +)$  zu einer *abelschen Gruppe*, wobei der Punkt  $o$  die Rolle des Neutralelements  $0$  spielt:  $x + o = x = o + x$ . Die gerichtete Strecke  $\vec{ox}$  nennen wir *Vektor* und die eben beschriebene Operation die *Vektoraddition*.

Um aus  $X$  einen Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen zu machen, müssen wir zusätzlich die Multiplikation mit *Skalaren*, also reellen

Zahlen, geometrisch definieren: Ist  $x \in X$ , so sei  $|o\vec{x}|$  der Abstand zwischen  $o$  und  $x$ . Für jede Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda x$  der Punkt auf dem Strahl  $ox$  im Abstand  $|\lambda| \cdot |o\vec{x}|$  zu  $o$ , und zwar auf der Seite von  $x$ , wenn  $\lambda > 0$ , andernfalls auf der Gegenseite.<sup>5</sup> Jetzt sind die Vektorraum-Axiome alle erfüllt; z.B. ergibt sich das Distributivgesetz  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$  aus der folgenden Figur:



Diese Konstruktion beruht auf zwei Sorten von Abbildungen von  $X$  und ihren Eigenschaften: den *Translationen* oder *Parallelverschiebungen* einerseits, nämlich den Abbildungen  $x \mapsto x + y$ , und den zentrischen Streckungen andererseits, den Abbildungen  $x \mapsto \lambda x$ . Beide sind *Kollineationen*, d.h. sie überführen Geraden in Geraden, und sie sind *richtungstreu*, d.h. jede Gerade geht in eine parallele Gerade über.

## 1.2 Definition des affinen Raums

Wir haben aus der affinen Geometrie (der Geometrie von Geraden und Parallelen) die Lineare Algebra rekonstruiert; affine Geometrie spielt sich demnach in einem Vektorraum ab. Allerdings war unsere Auszeichnung des Punktes  $o$  sehr willkürlich; wir hätten ebenso gut jeden anderen Punkt von  $X$  als Ursprung wählen können. Wir definieren daher (zunächst noch etwas unpräzise) einen *affinen Raum* als einen Vektorraum  $X$  “ohne Auszeichnung des Ursprungs  $0$ ” (was immer das genau heißt). Dabei gehen wir in zweifacher Hinsicht über die Anschauung hinaus:

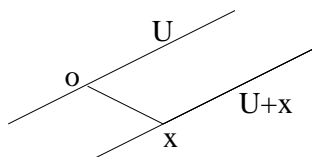
- Die Dimension  $n$  von  $X$  kann beliebig sein, nicht nur 2 oder 3; selbst die Dimension  $\infty$  ist zugelassen.
- $X$  kann ein Vektorraum über einem *beliebigen Körper*  $\mathbb{K}$  sein, nicht nur über  $\mathbb{R}$ . Wir denken etwa an  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}(z)$  (der Körper der

<sup>5</sup>Die Konstruktion ist vielleicht etwas verwunderlich, denn die Begriffe *Abstand* oder *Streckenlänge* gehören nicht in die affine, sondern in die metrische Geometrie und sind hier nur ausgeborgt. Was aber in die affine Geometrie gehört, ist das *Verhältnis* zweier kollinearere Strecken, wie wir noch sehen werden, und nur dieses wird hier gebraucht:  $y = \lambda x$  erfüllt  $|oy| : |ox| = |\lambda|$ .

rationalen Funktionen in einer komplexen Variablen  $z$ ) oder  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$  (der Körper mit  $p$  Elementen für eine Primzahl  $p$ ).<sup>6</sup>

Hier kommt also die eingangs erwähnte allgemeinere Bestimmung von Geometrie zum Tragen: Wir benutzen die in der Ebene und dem Raum der Anschauung entwickelten Vorstellungen zum Verstehen nicht mehr anschaulicher Zusammenhänge wie der Struktur von  $\mathbb{K}^n$ .

Der fehlende Auszeichnung des Nullpunktes kommt in der Definition der *affinen Unterräume* zum Ausdruck, die diesen Punkt meist gar nicht enthalten: Ein  $k$ -dimensionaler *affiner Unterraum* ist eine Menge von der Form  $U+x = \{u+x; u \in U\}$ , wobei  $U \subset X$  ein  $k$ -dimensionaler *Untervektorraum* oder *linearer Unterraum* von  $X$  ist,<sup>7</sup> und zwei affine Unterräume der Form  $U+x$  und  $U+y$  zum selben Untervektorraum  $U$  heißen *parallel*. Durch jeden Punkt  $x \in X$  geht genau einer der zu  $U$  parallelen affinen Unterräume, nämlich  $U+x$ , und nur  $U = U+0$  selbst geht durch 0.



Affine Unterräume der Dimension  $k = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 2$  und  $k = n - 1$  (falls  $\dim X = n$ ) heißen *Punkte*, *Geraden*, *Ebenen*, und *Hyperebenen*.

Damit haben wir die Grundbegriffe der affinen Geometrie durch solche der Linearen Algebra ausgedrückt: Punkte, Geraden und andere affine Unterräume, Parallelität. Die beiden Klassen von Kollineationen, die wir im letzten Abschnitt betrachteten, *Translationen* und *zentrische Streckungen*, haben nun eine algebraische Definition: Es sind die Abbildungen

$$T_v : X \rightarrow X, \quad x \mapsto v + x \tag{1}$$

$$S_\lambda : X \rightarrow X, \quad x \mapsto \lambda x \tag{2}$$

für beliebige  $v \in X$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Die Definition des affinen Raumes hat allerdings noch einen Schönheitsfehler: Was soll "ohne Auszeichnung des Nullpunktes" heißen? Und noch schlimmer:

<sup>6</sup>Wir können für  $\mathbb{K}$  sogar einen *Schiefkörper* wählen, bei dem die Multiplikation nicht kommutativ ist; vgl. Übungsaufgabe 4. Ein Beispiel sind die *Quaternionen*, auf die wir noch verschiedentlich zurückkommen; vgl. Aufgabe 38.

<sup>7</sup>d.h.  $0 \in U$ ,  $u + u' \in U$ ,  $\lambda u \in U$  für alle  $u, u' \in U$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$



ein affiner Unterraum sollte ja insbesondere selbst ein affiner Raum sein, aber er ist i.A. gar kein Vektorraum, denn er enthält den Nullpunkt nicht; wie soll man überdies etwas nicht auszeichnen, was gar nicht darin liegt? Die “richtige” Definition vermeidet diese Schwierigkeiten; sie lautet: Ein *affiner Raum* ist eine Menge  $X$ , auf der eine *Vektorgruppe*  $V$  *einfach transitiv operiert*.

Wie immer bezahlen wir die Genauigkeit mit der Einführung von mehr Terminologie: Eine *Vektorgruppe* ist die zu einem Vektorraum  $V$  gehörige kommutative Gruppe  $(V, +)$ . Eine Gruppe  $(V, +)$  *operiert* auf einer Menge  $X$ , wenn es eine Abbildung  $w : V \times X \rightarrow X$  gibt (genannt *Wirkung* oder *Operation von  $V$  auf  $X$* ) mit den Eigenschaften

$$w(0, x) = x, \quad w(a + b, x) = w(a, w(b, x)) \quad (3)$$

für alle  $a, b \in V$  und  $x \in X$ . Insbesondere gilt  $w(a, w(-a, x)) = w(0, x) = x$ , und daher ist die Abbildung  $w_a : X \rightarrow X$ ,  $x \mapsto w(a, x)$  bijektiv mit Umkehrabbildung  $w_{-a}$ . Wir können die die Wirkung  $w$  deshalb auch als eine Abbildung  $w : V \rightarrow B(X)$ ,  $a \mapsto w_a$  in die Gruppe  $B(X)$  der bijektiven Abbildungen auf  $X$  (mit der Komposition als Gruppenverknüpfung) auffassen, und die Gleichung (3) sagt genau, dass  $w$  ein *Homomorphismus von Gruppen* ist:

$$w_0 = \text{id}_X \quad w_a w_b = w_{a+b} \quad (4)$$

für alle  $a, b \in V$ . Eine Gruppenwirkung  $w$  von  $V$  auf  $X$  heißt *transitiv*, wenn je zwei Punkte  $x, y \in X$  durch eine der Abbildungen  $w_a$  aufeinander abgebildet werden, und sie heißt *einfach transitiv*, wenn dies nur durch eine einzige solche Abbildung geschieht, d.h. wenn die Abbildung  $w^x : V \rightarrow X$ ,  $v \mapsto w(v, x)$  bijektiv ist. Wenn wir ein Element  $o \in X$  auswählen, können wir demnach  $X$  und  $V$  mit Hilfe der bijektiven Abbildung  $w^o$  identifizieren.

Ein Vektorraum  $V$  ist in diesem Sinne ein affiner Raum, denn  $(V, +)$  operiert auf  $X = V$  durch  $w(a, x) = a + x$ . In diesem Fall ist  $w_a$  also die Translation  $T_a$ ; wir werden diese spezielle Wirkung daher lieber  $T$  statt  $w$  nennenn. Sie ist in der Tat einfach transitiv, denn je zwei Punkte  $x, y$  lassen sich ja durch genau einen Vektor  $a$  verbinden, nämlich  $a = y - x$  (also  $y = x + a$  oder  $y = T_a x$ ). Aber auch jeder affine Unterraum  $U + x$  ist nach der neuen Definition selbst ein affiner Raum, denn die Vektorgruppe  $(U, +)$  operiert darauf einfach transitiv durch

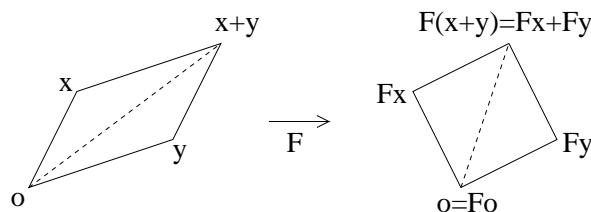
$$U \times (U + x) \ni (u, u' + x) \mapsto u + u' + x \in U + x.$$

Die Untergruppe  $(U, +) \subset (V, +)$  operiert ja auf ganz  $V$ , nämlich durch die Einschränkung  $T|_U$  der Wirkung  $T : V \rightarrow B(V)$ , und die Teilmengen  $U + x$  sind unter  $T|_U$  *invariant*, d.h. die Elemente von  $x + U$  werden durch sämtliche Abbildungen  $T_u$ ,  $u \in U$  wieder nach  $x + U$  abgebildet. Die Wirkung  $T|_U$  auf  $V$  ist nicht mehr transitiv; deshalb zerfällt  $X$  in eine disjunkte Vereinigung von *Transitivitätsbereichen* oder *Bahnen* von  $U$ , nämlich die parallelen affinen Unterräume  $U + x$ ,  $x \in V$  (vgl. Übungsaufgabe 2).

Wir werden im Folgenden immer voraussetzen, dass unser affiner Raum  $X$  ein Vektorraum ist, d.h. dass wir einen Ursprung  $o \in X$  gewählt haben. Wir werden uns aber bei jeder Aussage der affinen Geometrie klarmachen, dass sie unabhängig von der Wahl von  $o$  ist, also erhalten bleibt, wenn wir eine Translation anwenden. Die Translationen sind wiederum nur ein Spezialfall der parallelentreuen Abbildungen, die wir im folgenden Abschnitt untersuchen wollen. Wir werden außerdem stets  $\dim X \geq 2$  voraussetzen.

### 1.3 Paralleltreue und semiaffine Abbildungen

Wir betrachten weiterhin einen Vektorraum  $X$ , den wir als affinen Raum auffassen; der Körper  $\mathbb{K}$  möge beliebig sein. Geraden und Parallelen sind die Grundbegriffe der affinen Geometrie; deshalb sind die Automorphismen oder Symmetrien der affinen Geometrie genau die umkehrbaren Abbildungen  $F : X \rightarrow X$ , die Geraden und Parallelen erhalten, also Geraden bijektiv auf Geraden und Parallelen auf Parallelen abbilden (*parallelentreue Abbildungen*). Wir wollen diese geometrische Beschreibung in eine algebraische umformen. Dazu betrachten wir zunächst nur solche parallelentreuen Abbildungen  $F$ , die zusätzlich den Ursprung festlassen:  $F(o) = o$ . Ein von zwei beliebigen Vektoren  $x, y$  aufgespanntes Parallelogramm wird dann in das von  $F(x)$  und  $F(y)$  aufgespannte überführt, also ist  $F(x) + F(y)$  das  $F$ -Bild von  $x + y$  und  $F$  ist damit *additiv*:  $F(x + y) = F(x) + F(y)$  für alle  $x, y \in X$ .



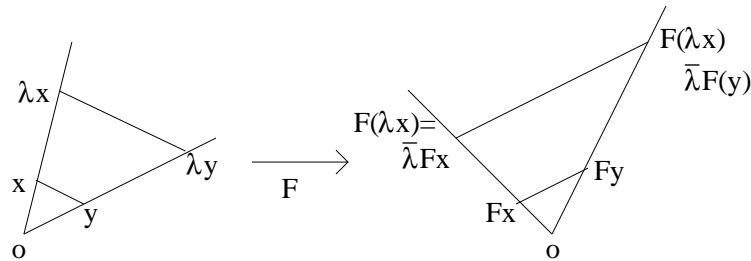
Sind  $x, y$  linear abhängig, so müssen wir wieder auf eine Darstellung  $y = u + v$  für linear unabhängige  $u, v$  zurückgreifen.

Ist  $F$  vielleicht sogar *linear*, d.h. gilt auch  $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ ? Für jedes  $x \neq 0$  wird jedenfalls die Gerade  $ox = \mathbb{K}x$  bijektiv auf die Gerade  $F(o)F(x) = oF(x) = \mathbb{K}F(x)$  abgebildet. Also gibt es für jedes  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein  $\bar{\lambda} \in \mathbb{K}$  mit

$$F(\lambda x) = \bar{\lambda}F(x). \quad (5)$$

Betrachten wir einen zweiten, linear unabhängigen Vektor  $y$ , so ist  $\lambda y$  der Schnittpunkt der Geraden  $oy$  mit der Parallelen zu  $xy$  durch den Punkt  $\lambda x$ . Wegen der Parallelentreue von  $F$  ist der Bildpunkt  $F(\lambda y)$  ganz ähnlich gekennzeichnet, nämlich als der Schnitt der Geraden  $oF(y)$  mit der Parallelen zu  $F(x)F(y)$  durch den Punkt  $\bar{\lambda}F(x)$ . Gemäß der geometrischen Kennzeichnung zentrischer Streckungen als richtungstreuer Abbildungen ist dies der Punkt  $\bar{\lambda}y$ , also erhalten wir für alle  $y \in X$ :

$$F(\lambda y) = \bar{\lambda}F(y). \quad (6)$$



(Ein von  $x$  linear abhängiger Vektor  $y$  muss wieder als Summe von zwei linear unabhängigen Vektoren geschrieben werden,  $y = u + v$ .) Der Skalar  $\bar{\lambda}$  in (5) hängt also nur von  $\lambda$  ab, nicht von  $x$ , d.h.  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  definiert eine bijektive Abbildung  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ .

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung ein *Körperautomorphismus* ist, d.h.

$$\overline{\lambda + \mu} = \bar{\lambda} + \bar{\mu}, \quad (7)$$

$$\overline{\lambda \cdot \mu} = \bar{\lambda} \cdot \bar{\mu}. \quad (8)$$

Die Gleichung (7) folgt aus der schon bewiesenen Additivität:

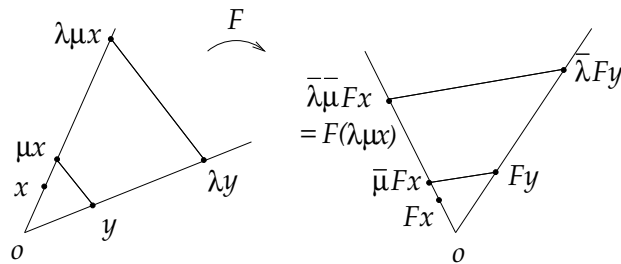
$$\begin{aligned} F(\lambda x + \mu x) &= F(\lambda x) + F(\mu x), \\ F((\lambda + \mu)x) &= (\bar{\lambda} + \bar{\mu})F(x), \\ F(\lambda x) + F(\mu x) &= (\bar{\lambda} + \bar{\mu})F(x). \end{aligned}$$

Die Gleichung (8) folgt, weil wir auch die Multiplikation  $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda(\mu x)$  geometrisch beschreiben können: Gegeben  $x, \lambda x, \mu x$  auf der Geraden  $ox$  und

ein zu  $x$  linear unabhängiger Vektor  $y$ , dann ist  $\lambda y$  der Schnittpunkt der Geraden  $oy$  mit der Parallelen zu  $xy$  durch den Punkt  $\lambda x$ , und  $\lambda(\mu x)$  ist der Schnitt der Geraden  $ox$  mit der Parallelen durch  $\lambda y$  zur Geraden  $\mu x \vee y$ , dabei ist  $x \vee y$  eine andere Bezeichnung für die Gerade  $xy$  durch die Punkte  $x$  und  $y$ . Da  $F$  diese Figur in eine ganz entsprechende mit  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$  anstelle von  $\lambda, \mu$  überführt, folgt

$$(\bar{\lambda} \cdot \bar{\mu})F(x) = F((\lambda \cdot \mu)x) = (\bar{\lambda} \cdot \bar{\mu})F(x)$$

und damit Gleichung (8).



Solche Abbildungen  $F$  nennt man *semilinear*: Sind  $X, Y$  zwei Vektorräume über einem Körper  $\mathbb{K}$ , so heißt eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  *semilinear*, wenn es einen Körperautomorphismus  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$  gibt mit

$$F(x + y) = F(x) + F(y), \quad F(\lambda x) = \bar{\lambda}F(x). \quad (9)$$

Jede lineare Abbildung ist insbesondere semilinear, denn die identische Abbildung  $\bar{\lambda} = \lambda$  auf  $\mathbb{K}$  ist natürlich auch ein Körperautomorphismus. Wenn man  $F$  noch um eine Konstante erweitert, kommt man zu den (semi)affinen Abbildungen:  $F : X \rightarrow Y$  heißt (*semi*-)affin, wenn es eine (semi-)lineare Abbildung  $F_o : X \rightarrow Y$  und eine Translation  $T_a, a \in Y$  gibt mit  $F = T_a F_o$ , d.h.

$$F(x) = F_o(x) + a \quad (10)$$

für alle  $x \in X$ . Der folgende Satz ist schon fast bewiesen:

**Satz 1.** Für eine umkehrbare Abbildung  $F : X \rightarrow X$  gilt:  $F$  ist parallelen-treu genau dann, wenn  $F$  semiaffin ist.

**Beweis:** Eine semilineare Abbildung  $F$  ist parallelen-treu: Ist  $U = \mathbb{K}x \subset X$  ein eindimensionaler Unterraum, so ist  $F(\lambda x) = \bar{\lambda}F(x) \in \mathbb{K}F(x)$ , also ist  $F(U) = F(\mathbb{K}x) = \mathbb{K}F(x) =: U'$  wieder ein eindimensionaler Unterraum, und

jede zu  $U$  parallele Gerade wird auf eine zu  $U'$  parallele Gerade abgebildet, denn  $F(U + y) = F(U) + F(y) = U' + F(y)$ . Eine Translation ist ebenfalls paralleleentreu, also sind semiaffine Abbildungen (die Kompositionen von semiaffinen Abbildungen mit Translationen) paralleleentreu.

Umgekehrt haben wir bereits gesehen, dass eine paralleleentreue Abbildung  $F_o$  mit  $F_o(o) = o$  semilinear ist. Ist jetzt  $F$  eine beliebige paralleleentreue Abbildung mit  $F(o) = a$ , so bildet  $F_o = T_{-a}F$  den Punkt  $o$  wieder auf  $o$  ab, denn  $F_o(o) = F(o) - a = a - a = o$ . Also ist  $F_o$  semilinear und  $F = T_a F_o$  semiaffin.  $\square$

Welche semilinearen Abbildungen gibt es, die nicht bereits linear sind? Dazu müssen wir nur die Automorphismen eines Körpers  $\mathbb{K}$  kennen. Jeder Automorphismus von  $\mathbb{K}$  erhält die ausgezeichneten Elemente 0 und 1 und damit auch alle Summen  $1 + 1 + \dots + 1$  und ihre additiven und multiplikativen Inversen. Deshalb haben die Körper  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$  keine Automorphismen außer der Identität. Der Körper  $\mathbb{R}$  hat viele Automorphismen, die aber alle rationalen Zahlen fest lassen müssen. Wenn wir daher zusätzlich annehmen, dass der Automorphismus *stetig* ist, also mit Grenzwerten vertauscht, dann gibt es wieder nur die Identität, weil  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  *dicht* liegt, d.h. jede reelle Zahl Grenzwert von rationalen Zahlen ist. Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  kennen wir bereits einen nichttrivialen Automorphismus, die Konjugation, und es gibt auch keine weiteren stetigen Automorphismen, da ein solcher jede reelle Zahl festhält und  $i$  auf eine Zahl  $j \in \mathbb{C}$  mit  $j^2 = -1$  abbildet, also auf  $j = \pm i$ .<sup>8</sup>

## 1.4 Parallelprojektionen

Wir wollen ein ähnliches Ergebnis wie im vorigen Abschnitt auch für Abbildungen zwischen *verschiedenen* Vektorräumen  $X, Y$  herleiten. Dazu müssen wir den Begriff *paralleleentreu* etwas abändern, denn wenn  $F$  nicht mehr invertierbar ist, kann eine Gerade auch auf einen Punkt abgebildet werden. Wir wollen daher eine Abbildung  $F : X \rightarrow Y$  *paralleleentreu* nennen, wenn  $F$  jede Gerade entweder auf einen Punkt oder bijektiv auf eine Gerade abbildet und dabei zwei parallele Geraden in  $X$  auf zwei (nicht notwendig verschiedene) parallele Geraden oder zwei Punkte in  $Y$  gehen. Zunächst benötigen wir eine geometrische Kennzeichnung von Unterräumen:

---

<sup>8</sup>Der Quaternionen-Schiefkörper  $\mathbb{K} = \mathbb{H}$  besitzt eine sehr große Gruppe von Automorphismen, nämlich alle Abbildungen  $\lambda \mapsto \mu\lambda\mu^{-1}$  für festes  $\mu \neq 0$ .

**Lemma.** *Es sei  $X$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit  $1 + 1 \neq 0$  ( $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ ). Eine nichtleere Teilmenge  $U \subset X$  ist ein affiner Unterraum genau dann, wenn für alle  $u, v \in U$  die Gerade  $uv$  ganz in  $U$  enthalten ist.*

**Beweis:** Ist  $U \subset X$  ein affiner Unterraum, also  $U = U_o + x$  für einen linearen Unterraum  $U_o$ , und sind  $u, v$  verschiedene Punkte in  $U$ , so ist  $u = x + u_o$  und  $v = x + v_o$  für  $u_o, v_o \in U_o$ , und die Gerade  $uv = x + \mathbb{K}(u_o - v_o)$  liegt ganz in  $U$ . Beim Beweis der Umkehrung dürfen wir  $o \in U$  voraussetzen; nötigenfalls müssten wir  $U$  verschieben. Mit jedem  $u \in U$  ist dann die Gerade  $ou = \mathbb{K}u \subset U$ , also  $\lambda u \in U$  für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Für zwei verschiedene Punkte  $u, v \in U$  liegt auch die Gerade  $uv$  ganz in  $U$ . Diese besteht aus Punkten der Form  $v + \lambda(u - v) = \lambda u + (1 - \lambda)v$ ; insbesondere ist  $\frac{1}{2}(u + v) \in uv \subset U$  und damit  $u + v = 2 \cdot \frac{1}{2}(u + v) \in U$ . Also ist  $U$  ein linearer Unterraum.  $\square$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  ist diese Kennzeichnung falsch: Die Punktmenge  $\bar{U} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\} \subset \mathbb{K}^2$  erfüllt das Kriterium, ist aber kein Unterraum, da  $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin \bar{U}$ .

**Satz 2.** *Für Vektorräume  $X, Y$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  mit  $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$  gilt:  $F : X \rightarrow Y$  ist parallelentreu genau dann, wenn  $F$  semiaffin ist.<sup>9</sup>*

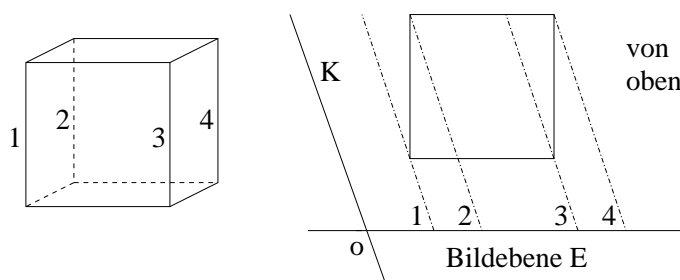
**Beweis:** Ist  $F$  semiaffin, also  $F(x) = F_o(x) + a$  für eine semilineare Abbildung  $F_o$ , dann bildet  $F_o$  jeden eindimensionalen Unterraum  $U_o$  entweder auf den Nullraum oder einen eindimensionalen Unterraum  $V_o \subset Y$  ab. Also wirft  $F$  zwei parallele Geraden  $U_o + x$  und  $U_o + x'$  auf die Punkte  $F(x)$  und  $F(x')$  oder auf die parallelen Geraden  $V_o + F(x)$  und  $V_o + F(x')$  und ist damit parallelentreu.

Umgekehrt sei  $F$  parallelentreu. Nach unserem Lemma ist Bild  $F \subset Y$  ein affiner Unterraum, denn mit zwei verschiedenen Punkten  $y_1 = F(x_1)$  und  $y_2 = F(x_2)$  ist auch die Gerade  $y_1y_2 = F(x_1x_2)$  in Bild  $F$  enthalten. Nach demselben Kriterium ist  $F^{-1}(y)$  für jedes  $y \in \text{Bild } F$  ein affiner Teilraum: Sind  $x_1, x_2 \in F^{-1}(y)$  verschieden, so ist  $F|_{x_1, x_2}$  nicht injektiv, da  $F(x_1) = F(x_2) = y$ ; nach Definition der Parallelentreue ist daher Bild der Geraden  $x_1x_2$  ein Punkt, nämlich  $y$ , und damit ist  $x_1x_2 \subset f^{-1}(y)$ . Auch jeder zu  $U = f^{-1}(y)$  parallele Unterraum  $U'$  wird von  $F$  auf einen Punkt abgebildet, denn jede Gerade in  $U'$  durch einen festen Punkt  $x' \in U'$  ist parallel zu einer Geraden in  $U$  und wird deshalb wie diese auf einen

<sup>9</sup>Problem: Gilt der Satz auch für  $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ ?

Punkt, also auf  $y' = F(x')$  abgebildet. Deshalb ist  $U' \subset F^{-1}(y')$  und insbesondere  $\dim F^{-1}(y') \geq \dim F^{-1}(y)$ . Da  $y$  und  $y'$  gleichberechtigt sind, gilt auch die umgekehrte Ungleichung und damit Dimensionsgleichheit; also ist  $U' = F^{-1}(y')$  und daher sind alle Urbilder parallele affine Unterräume. Wählen wir nun einen Unterraum  $X_1 \subset X$  komplementär zu  $U = F^{-1}(y)$  und setzen  $Y_1 = \text{Bild } F$ , so ist  $F_1 = F|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$  bijektiv (denn  $X_1$  schneidet jedes  $F^{-1}(y)$ , und zwar genau einmal) und damit semiaffin nach Satz 1. Wir dürfen annehmen, dass  $X_1$  und  $U$  lineare Unterräume sind und  $X = X_1 \oplus U$ . Bezeichnen wir mit  $p_1 : X \rightarrow X_1$  die Projektion auf den direkten Summanden  $X_1$  und mit  $i_1 : Y_1 \rightarrow Y$  die Inklusionsabbildung, so ist  $F = i_1 F_1 p_1$ . Die Abbildung ist also als Komposition von semiaffinen Abbildungen selbst semiaffin.  $\square$

Bekannteste Beispiele solcher Abbildungen sind die *Parallelprojektionen*, die häufigste Form zweidimensionaler Zeichnungen von dreidimensionalen Gegenständen in der Mathematik.



Dazu zerlegt man den Raum  $\mathbb{R}^3$  in die Bildebene  $E$  und ein beliebiges (schräges) eindimensionales Vektorraum-Komplement  $K$  und betrachtet die Projektion auf den direkten Summanden  $E$  mit dem Kern  $K$  (*Projektion entlang  $K$* ).

## 1.5 Affine Koordinaten und Schwerpunkt

Es sei  $X$  ein  $n$ -dimensionaler affiner Raum über  $\mathbb{K}$ . Eine *affine Basis* von  $X$  ist ein  $(n+1)$ -Tupel von Punkten  $a_0, a_1, \dots, a_n \in X$  mit der Eigenschaft, dass die Vektoren  $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$  linear unabhängig sind; solche Punkte nennt man auch affin unabhängig.<sup>10</sup> Dann lässt sich jeder Punkt  $x \in X$  eindeutig

<sup>10</sup>Wir behalten die Sprache bei, als wäre  $X$  ein Vektorraum. Eigentlich gibt es ja einen von  $X$  unterschiedenen Vektorraum  $V$ , dessen additive Gruppe mit Hilfe einer Wirkung

darstellen als

$$x = \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1. \quad (11)$$

Weil nämlich die Vektoren  $b_i = a_i - a_0$  eine Vektorraum-Basis bilden, hat der Vektor  $x - a_0$  eine Darstellung  $x - a_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i - (\sum_{i=1}^n \lambda_i) a_0$  und damit ist  $x = \sum_{j=0}^n \lambda_j a_j$  mit  $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Die Zahlen  $\lambda_0, \dots, \lambda_n$  heißen die *affinen Koordinaten* von  $x$  bezüglich der affinen Basis  $a_0, \dots, a_n$ .

Interessant an dieser Darstellung ist ihre Invarianz unter affinen Abbildungen: Ist  $Y$  ein zweiter affiner Raum über  $\mathbb{K}$  und  $F : X \rightarrow Y$  eine affine Abbildung, also  $F(x) = F_o(x) + a$  für eine lineare Abbildung  $F_o$ , dann bleiben diese Zahlen erhalten: Für  $x = \sum_j \lambda_j a_j$  mit  $\sum_j \lambda_j = 1$  ist

$$\begin{aligned} F(x) = \sum_j \lambda_j F_o(a_j) + a &= \sum_j \lambda_j F_o(a_j) + \sum_j \lambda_j a \\ &= \sum_j \lambda_j (F_o(a_j) + a) = \sum_j \lambda_j F(a_j). \end{aligned} \quad (12)$$

Der Punkt  $F(x)$  hat also dieselbe Position bezüglich der Punkte  $F(a_j)$  wie der Punkt  $x$  bezüglich  $a_j$ . Insbesondere bleiben die Positionen von Punkten auf einer Geraden (die Verhältnisse von gleichgerichteten Strecken) unter affinen Abbildungen erhalten.<sup>11</sup>

Linearkombinationen der Form  $\sum_j \lambda_j a_j$  mit  $\sum_j \lambda_j = 1$  ergeben auch dann noch Sinn (und sind immer noch affin invariant), wenn die erzeugenden Punkte  $a_j$  nicht mehr affin unabhängig sind; allerdings ist dann die Darstellung nicht mehr eindeutig. Ein wichtiger Spezialfall ist der *Schwerpunkt*, bei dem alle affinen Koordinaten gleich sind, also  $\lambda_j = \frac{1}{n+1}$  für  $j = 0, \dots, n$ .

---

$(v, x) \mapsto T_v x$  einfach transitiv auf  $X$  wirkt, und  $a_1 - a_0$  ist der eindeutig bestimmte Vektor  $v \in V$  mit  $T_v a_0 = a_1$ . Wir schreiben aber weiterhin  $v = a_1 - a_0$  und  $T_v a_0 = v + a_0$ . Die Unterscheidung von  $X$  und  $V$  wird nur in den Bezeichnungen "Punkte" und "Vektoren" deutlich: *Punkte* sind Elemente von  $X$ , *Vektoren* sind Elemente von  $V$ .

<sup>11</sup>Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist affin dasselbe wie parallelentreu (semiaffin), wobei wir immer Stetigkeit voraussetzen. Wenn  $\mathbb{K}$  ein beliebiger Körper ist, so wollen wir eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{K}$  *reell* nennen, wenn sie aus den "natürlichen Zahlen"  $1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots$  nur mit Hilfe der vier Grundrechenarten sowie ggf. Grenzwertbildung entsteht. Sind die affinen Koordinaten eines Punktes in diesem Sinne reell, so bleiben sie auch unter stetigen parallelentreuen Abbildungen erhalten. Insbesondere gilt das für den Schwerpunkt  $x = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n a_j$ .



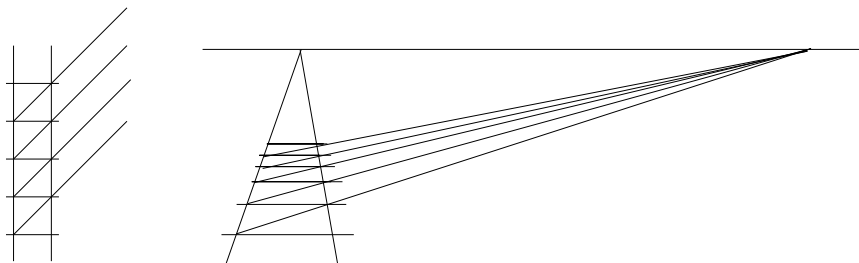
## 2 Inzidenz: Projektive Geometrie

### 2.1 Zentralperspektive

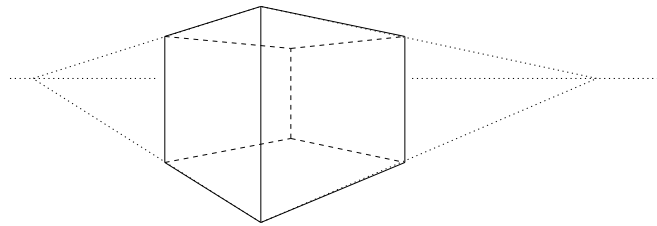
Gibt es Abbildungen, die Geraden in Geraden abbilden, aber nicht parallelen-treu (affin) sind? Solche Abbildungen sind uns von Fotos her bestens bekannt: perspektivische Bilder. Um Perspektive richtig zu konstruieren, braucht man nur drei einfache Regeln:

1. Geraden werden in Geraden abgebildet,
2. Bilder von Parallelen sind wieder parallel oder haben einen gemeinsamen Schnittpunkt,
3. Die Schnittpunkte der Bilder von Parallelen zu Geraden einer festen Ebene liegen auf einer gemeinsamen Geraden, dem *Horizont* der Ebene.

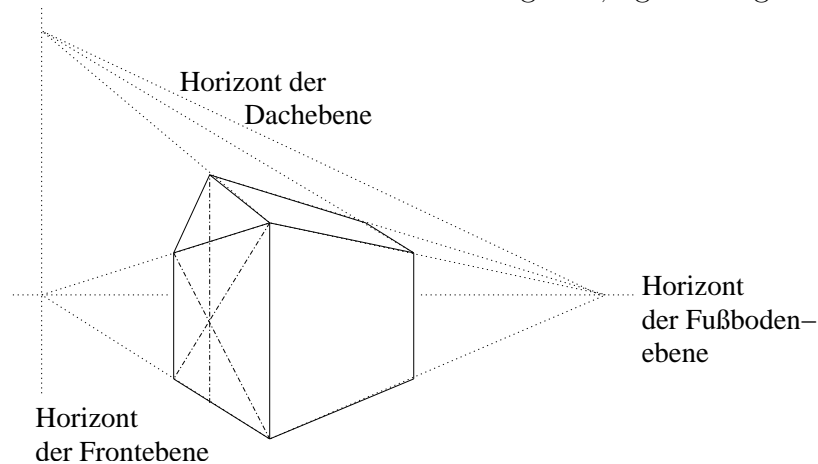
Die einfachste Übung im perspektivischen Zeichnen ist eine Eisenbahnstrecke, die gerade auf den Horizont zuläuft und deren Schwellen gleichmäßige Abstände haben. Dann muss man im Bild nur den Horizont, die beiden Gleise und die ersten zwei Schwellen vorgegen; die Bilder der anderen Schwellen lassen sich konstruieren, denn alle von den Gleisen und zwei benachbarten Schwellen gebildeten Rechtecke haben parallele Diagonalen, deren Bilder sich (bei geradliniger Verlängerung) auf dem Horizont schneiden.



Das Bild eines einzelnen Rechtecks, das ein beliebiges konvexes Viereck sein kann, legt jeden anderen Bildpunkt derselben Ebene eindeutig fest. Dieselben Prinzipien gelten auch für Zeichnungen räumlicher Objekte, z.B. eines Quaders. Die vertikalen Kanten werden meistens ebenfalls vertikal gezeichnet (diese Schar paralleler Geraden wird also auf Parallelen abgebildet). Wenn wir das Bild des vorderen und eines der Seitenrechtecke vorgeben, ist alles andere bestimmt.



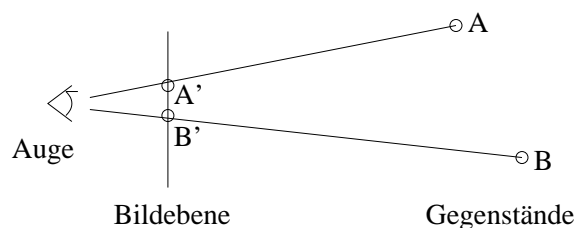
Durch Aufsetzen eines Daches entsteht das Bild eines Giebelhauses; wir müssen nur noch die Höhe des vorderen Giebels vorgeben, vgl. Übung 11.



Heute ist uns die Perspektive von der Photographie her vertraut, aber die Menschen früherer Jahrhunderte hatten keine solche Möglichkeit. Unser Sehen ist nicht wirklich perspektivisch, denn durch die Beidäugigkeit und die Anpassung der Augenlinse an die Entfernung erhält unser Gehirn eine zusätzliche Tiefeninformation. Perspektivisch gesehen müsste ja ein Gegenstand scheinbar größer werden, wenn wir uns ihm nähern, aber im Nahbereich ist das keineswegs der Fall; der Gegenstand scheint durchaus seine Größe beizubehalten. Perspektivische Darstellung setzt also eine gewisse Abstraktion des natürlichen Sehens voraus. Sie ist eine Entdeckung der Frührenaissance, wohl der erste bedeutende mathematische Beitrag Europas seit der Antike. Es hat zwar schon von der Antike an Versuche gegeben, die räumliche Tiefe durch schräge und konvergente Linien wiederzugeben, aber die genaue Konstruktion blieb verborgen. Sie gelang erst um 1410 dem späteren Baumeister des Doms von Florenz, *Filippo Brunelleschi* (1377 - 1440), dessen Zeichnungen wir aber nur aus Berichten kennen. Die ersten uns überlieferten perspektivischen Darstellungen stammen von einem Freund Brunelleschis, dem Maler *Masaccio* (eigentlich Tomaso di Giovanni di Simone, 1401 - 1428). Besonders

berühmt ist sein Fresco “Dreifaltigkeit” (1426) in der Florenzer Kirche Santa Maria Novella, in dem die Perspektive eine wichtige Funktion für die Aussage des Bildes bekommt, weil der Standort des Betrachters miteinbezogen wird. Das erste Lehrbuch der Perspektive schrieb der Genueser Gelehrte *Leon Battista Alberti* (1404 - 1472).

In der affinen Geometrie hatten wir die *Parallelprojektionen* kennengelernt. Perspektivische Bilder dagegen sind *Zentralprojektionen*. Auch bei ihnen ist der Bildpunkt der Schnitt der Bildebene mit einer durch den Urbildpunkt gehenden Geraden, der *Projektionsgeraden*, aber diese sind nicht mehr parallel, sondern gehen alle durch einen festen Punkt, das *Projektionszentrum*. Beim perspektivischen Sehen ist das Auge selbst das Projektionszentrum; die Projektionsgeraden sind die Lichtstrahlen, die vom Gegenstand ausgehend das Auge erreichen, und der Bildpunkt ist der Schnitt dieses Strahls mit der Bildebene, die man sich zwischen Auge und Gegenstand denkt.

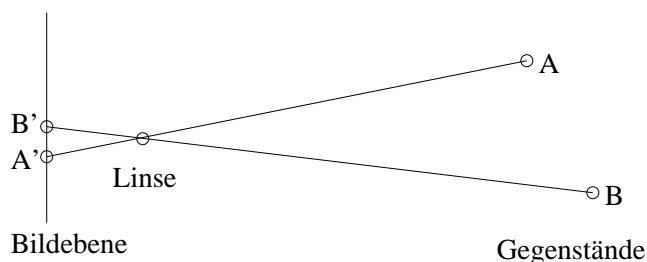


*Albrecht Dürer* zeigt in seinem Lehrbuch “Unterweysung der Messung” von 1525, wie man den Bildpunkt auf einer zwischen Auge und Gegenstand befindlichen Glasscheibe bestimmt, indem man den Gegenstand durch ein Loch in einem fest montiertes Gestell anpeilt. Er beschreibt auch ein rein mechanisches Verfahren zur Erzeugung eines perspektivischen Bildes (wir haben nur die Schreibweise modernisiert):

“Bist du in einem Saal, so schlag eine große Nadel mit einem weiten Ohr, die dazu gemacht ist, in eine Wand und setz das für ein Auge. Dadurch zeuch einen starken Faden und häng unten ein Bleigewicht daran. Danach setz einen Tisch oder Tafel so weit von dem Nadelöhr, darin der Faden ist, als du willst. Darauf stellst einen aufrechten Rahmen ..., der ein Türlein habe, das man auf und zu mag tun. Dies Türlein sei deine Tafel, darauf du malen willst. Danach nagel zwei Fäden, die als lang sind als der aufrechte Rahmen lang und breit ist, oben und mitten in den Rahmen und den anderen auf einer Seite auch mitten in den Rahmen und

lass sie hängen. Danach mach einen langen Stift, der vorne an der Spitze ein Nadelöhr habe. Darein fädel den langen Faden, der durch das Nadelöhr an der Wand gezogen ist, und fahr mit der Nadel und dem langen Faden durch den Rahmen hinaus und gib sie einem anderen in die Hand, und warte du der anderen zwei Fäden, die an dem Rahmen hängen. Nun gebrauche dies also: Leg eine Laute, oder was dir sonst gefällt, so fern von dem Rahmen als du willst, und dass sie unverrückt bleibt, solange du ihrer bedarfst, und lass deinen Gesellen die Nadel mit dem Faden hinausstrecken auf die nötigsten Punkte der Laute, und so oft er auf einer Stelle hält und den langen Faden anstreckt, so schlag allweg die zwei Fäden an dem Rahmen kreuzweis gestreckt an den langen Faden und kleb sie an beiden Orten mit einem Wachs an den Rahmen, und heiß deinen Gesellen seinen langen Faden nachlassen. Danach schlag das Türlein zu und zeichne dieselben Punkte, da die Fäden kreuzweise übereinander gehen, auf die Tafel. Danach tu das Türlein wieder auf und tu mit einem anderen Punkt aber also bis dass du die ganze Laute gar an die Tafel punktierst. Dann zeuch alle Punkte, die auf der Tafel von der Laute worden sind, mit Linien zusammen, so siehst du, was daraus wird. Also magst du andere Dinge auch abzeichnen.”

Beim Fotoapparat oder seinem Vorgänger, der Lochkamera (Camera Obscura) ist es etwas anders: Das Projektionszentrum ist der Linsenmittelpunkt oder das Loch, und die Bildebene befindet sich dahinter auf der Rückwand der Kamera:



Die Bildebene ist also nicht mehr zwischen Gegenstand und Projektionszentrum, sondern erst hinter dem Projektionszentrum. Der Unterschied ist jedoch gering; eine Parallelverschiebung der Bildebene bewirkt lediglich eine zentrische Streckung  $S_\lambda$  des Bildes. Wird die Bildebene wie im vorliegenden

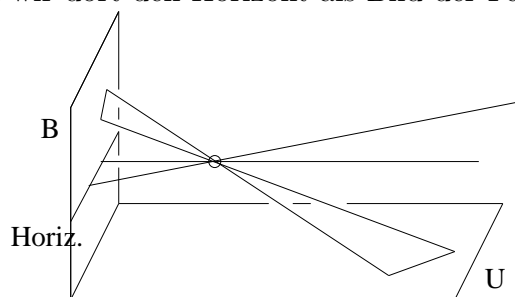
Fall auf die andere Seite des Projektionszentrums verschoben, so ist  $\lambda$  negativ. Das Bild wird daher im Fotoapparat um  $180^\circ$  gedreht, steht also auf dem Kopf.

## 2.2 Fernpunkte und Projektionsgeraden

Der französische Festungsbaumeister *Gerard Desargues* (1591 - 1661) entwickelte eine Idee, die sich als sehr weit tragend erweisen sollte. In einem perspektivischen Bild einer Ebene gibt es eine Gerade, auf der sich die Bilder paralleler Geraden treffen, den Horizont. Ihm entspricht aber keine Gerade der abgebildeten Ebene. Sollte man nicht die Urbildebene um neue, "im Unendlichen liegende" Punkte erweitern, sogenannte *Fernpunkte* oder *ideale*, d.h. nur der Idee nach vorhandene Punkte, die man als Urbilder der Horizontpunkte ansehen könnte? Die Fernpunkte müssten zusammen eine neue Gerade bilden, die *Ferngerade*, das Urbild des Horizonts. Dann wäre man endlich den lästigen Sonderfall der affinen Geometrie los, dass zwei Geraden einer Ebene leider nicht immer einen Schnittpunkt haben, sondern manchmal parallel sind: Die parallelen Geraden würden sich eben in den neu hinzugekommenen Punkten, den Fernpunkten treffen, und zu jeder Klasse paralleler Geraden würde genau ein solcher Fernpunkt gehören. Ebenso könnte man im Raum von einer (hinzugedachten) *Fernebene* sprechen, die die Schnittpunkte paralleler Geradenscharen im Raum enthalten und die Ferngeraden aller Ebenen des Raumes enthalten müsste. Dass es solche Punkte nicht wirklich gibt, störte die Mathematiker wenig; es war eben eine Erweiterung der üblichen affinen Geometrie, ähnlich wie man die Zahlen durch Hinzunahme gedachter neuer Zahlen (z.B.  $\infty$ ) erweitern konnte; man nannte sie *projektive Geometrie*. Als der französische Mathematiker *Jean Victor Poncelet* (1788 - 1867) als Soldat unter Napoleon 1812 in russische Kriegsgefangenschaft geriet und viel Zeit, aber keine Bücher zur Verfügung hatte, entwickelte er systematisch die Gesetze dieser Geometrie.

Was aber sind diese Fernpunkte wirklich? Auch dazu geben die perspektivischen Abbildungen, d.h. die Zentralprojektionen den Schlüssel. Wir beschreiben sie nochmal mit den Begriffen der räumlichen affinen Geometrie. Jeder Punkt  $x$  der Urbildebene  $U$  bestimmt ja genau eine Gerade  $ox$  durch das Projektionszentrum  $o$ , und sein Bildpunkt ist der Schnitt dieser Geraden mit der Bildebene  $B$ . Eigentlich können wir die Punkte  $x$  der Urbildebene ganz vergessen und durch ihre Projektionsgeraden  $ox$  ersetzen. Eine Menge von

Projektionsgeraden, deren Bilder (Schnitte mit  $B$ ) auf einer gemeinsamen Geraden in  $B$  liegen, sind in einer gemeinsamen Ebene enthalten, nämlich der von der Bildgeraden und dem Projektionszentrum aufgespannten Ebene. Wir haben daher eine Art Lexikon gefunden: Punkte entsprechen Projektionsgeraden, Geraden entsprechen Ebenen durch  $o$ . Aber einige Geraden durch  $o$  treffen die Urbildebene  $U$  gar nicht, nämlich die zu  $U$  parallelen; ihnen entspricht also kein Punkte von  $U$ . Das sind die neuen “idealen” Punkte von  $U$ , die nach unserem Lexikon wirklich auf einer gemeinsamen “Geraden” (der Ferngeraden) liegen, denn sie sind ja alle in der zu  $U$  parallelen Ebene durch  $o$  enthalten. Sie können dagegen sehr wohl die Bildebene  $B$  schneiden, deshalb sehen wir dort den Horizont als Bild der Ferngeraden.



Die ebene Projektive Geometrie ist daher nichts anderes als die Geometrie des “Büschels” der Geraden durch einen festen Punkt  $o$  im Raum, wobei wir nur neue Worte benutzen: Eine Gerade durch  $o$  nennen wir “Punkt” und eine Ebene durch  $o$  “Gerade”. Wenn wir den affinen Raum mit dem ausgezeichneten Punkt  $o$  wieder als Vektorraum mit Ursprung  $o$  auffassen, dann ist dieses Geradenbüschel nicht anderes als die Menge aller eindimensionalen linearen Unterräume.

### 2.3 Projektiver und Affiner Raum

Allgemein wollen wir einen beliebigen Vektorraum  $V$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  betrachten und den *projektiven Raum*  $P_V$  über  $V$  als die Menge der eindimensionalen linearen Unterräume von  $V$  definieren.<sup>12</sup> Wir sagen, dass  $P_V$  die Dimension  $n$  hat, wenn  $\dim V = n + 1$ . Jedem  $k + 1$ -dimensionalen linearen Unterraum  $W \subset V$  entspricht der  *$k$ -dimensionaler projektiver Unterraum*

<sup>12</sup> Ebenso kann man auch für jede andere Dimension  $k$  zwischen 1 und  $\dim V$  die Menge aller  $k$ -dimensionalen linearen Unterräume von  $V$  betrachten. Dies ist die *Grassmann-Mannigfaltigkeit*  $G_k(V)$ ; sie spielt in vielen Anwendungen eine Rolle. Insbesondere ist  $G_1(V) = P_V$ .

$P_W \subset P_V$ , dessen Elemente die eindimensionalen Unterräumen von  $W$  sind. Insbesondere besteht eine *Gerade* in  $P(V)$  aus den eindimensionalen linearen Unterräumen eines zweidimensionalen Untervektorraums von  $V$ .

Man kann  $P_V$  auch folgendermaßen beschreiben: Zwei Vektoren  $v, w \in V_* := V \setminus \{0\}$  heißen *proportional*,  $v \sim w$ , wenn es eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  gibt mit  $w = \lambda v$ . Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation, und sie hängt wie in Aufgabe 2 mit einer Gruppenwirkung  $S$  zusammen, nämlich mit der Wirkung  $S$  der Gruppe  $\mathbb{K}^*$  auf  $V$  durch Multiplikation mit Skalaren,  $S : \mathbb{K}^* \times V \rightarrow V$ ,  $S(\lambda, v) = S_\lambda(v) = \lambda v$ . Die *Bahn* eines Vektors  $v \in V_*$  unter dieser Gruppenwirkung, die Äquivalenzklasse  $[v]$ , ist der von  $v$  erzeugte eindimensionale Untervektorraum (geschnitten mit  $V_*$ , also ohne den Ursprung) und damit ein (typisches) Element von  $P_V$ . Wir erhalten also

$$P_V = \{[v] = K^*v; v \in V_*\}. \quad (13)$$

Die Äquivalenzklasse  $[v]$  ist der Vektor  $v$  “bis auf Vielfache”; man nennt  $[v]$  auch einen *homogenen Vektor*. Mit  $\pi : V_* \rightarrow P_V$ ,  $\pi(v) = [v]$  bezeichnen wir die kanonische Projektion.

In welcher Weise ist  $P_V$  eine Erweiterung des affinen Raums? Als affinen Raum betrachten wir eine Hyperebene  $H \subset V$ , die nicht durch den Ursprung geht:

$$H = W + v_o,$$

wobei  $W \subset V$  ein linearer Unterraum der Kodimension Eins ist. Die meisten eindimensionalen linearen Unterräume in  $V$  schneiden  $H$  (und zwar genau einmal), nur die zu  $H$  parallelen, d.h. in  $W$  enthaltenen schneiden nicht. Diese bilden die projektive Hyperebene  $P_W$ , die wir die (zu  $H$  gehörige) *Fernhyperebene* nennen wollen. Alle übrigen bilden die Teilmenge

$$A_H = \pi(H) = \{[v] \in P_V; v \in H\} \subset P \quad (14)$$

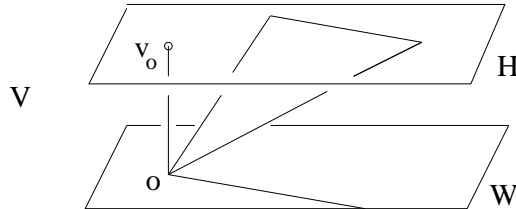
die wir als *affinen Raum* in  $P$  betrachten; in der Tat ist  $\pi|_H$  bijektiv und geradentreu, d.h. Geraden in  $H$  (Schnitte von  $H$  mit einem zweidimensionalen transversalen<sup>13</sup> Unterraum  $E$ ) werden auf projektive Geraden abgebildet, soweit diese in  $A_H$  verlaufen, und umgekehrt. Wir haben also eine disjunkte

---

<sup>13</sup>Zwei Unterräume von  $V$  heißen *transversal*, wenn sie zusammen den ganzen Raum  $V$  aufspannen.

Zerlegung des Projektiven Raumes  $P_V$  in den affinen Raum  $A_H$  und die Fernhyperebene  $P_W$ :

$$P_V = A_H \dot{\cup} P_W \quad (15)$$



**Satz 3.** Projektive Geraden  $g_1, g_2 \subset P_V$  schneiden sich in einem Punkt  $p \in P_W$  genau dann, wenn  $g_1 \setminus \{p\}$  und  $g_2 \setminus \{p\}$  parallele Geraden in  $A_H$ , d.h. Bilder unter  $\pi|_H$  von parallelen Geraden in  $H$  sind.

**Beweis:** Es seien  $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$  parallele Geraden in  $H$ , also  $\tilde{g}_i = U + v_i$  für einen eindimensionalen linearen Unterraum  $U = \mathbb{K}v$ ; weil  $g_i \subset H$ , muss  $U \subset W$  gelten. Dann ist  $\tilde{g}_i = H \cap E_i$ , wobei  $E_i$  der von  $v$  und  $v_i$  aufgespannte zweidimensionale Unterraum ist, und  $\pi(g_i) \subset g_i := \pi(E_i)$ . Da  $E_1 \cap E_2 = U$ , ist  $g_1 \cap g_2 = \pi(U) = \{p\}$  mit  $p = [v]$ , und außerdem gilt  $\{p\} = g_i \setminus \pi(\tilde{g}_i)$ . Umgekehrt seien  $g_1 = \pi(E_1)$  und  $g_2 = \pi(E_2)$  Geraden in  $P_V$  mit einem Schnittpunkt  $p \in P_W$ . Dann ist  $p = \pi(U)$  für einen eindimensionalen linearen Unterraum  $U \subset W$ , und  $U = E_1 \cap E_2$ . Die Ebene  $E_i$  wird von  $U$  und einem Vektor  $v_i \notin W$  aufgespannt, und ein Vielfaches von  $v_i$  trifft die zu  $W$  parallele Hyperfläche  $H$ , denn  $W$  und  $v_i$  erzeugen  $V$ . Wir können also  $v_i \in H$  annehmen, und  $H \cap E_i = U + v_i =: \tilde{g}_i$ . Dies sind parallele Geraden in  $H$ , und  $\pi(\tilde{g}_i) = \pi(E_i) = g_i$ .  $\square$

Die reelle Projektive Ebene als die Menge aller Geraden durch den Ursprung  $0$  im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  kann man sich noch ganz gut vorstellen: Wenn wir die Kugelfläche (*Sphäre*)  $S$  um den Ursprung betrachten, so schneidet jede Gerade diese Fläche in zwei gegenüberliegenden (*antipodischen*) Punkten; wir können uns die Projektive Ebene also als Menge der antipodischen Punktpaare der Sphäre vorstellen. Anders gesagt, wir erhalten die projektive Ebene, indem wir die Nordhalbkugel so auf die Südhalbkugel kleben, dass gerade die antipodische Punkte miteinander verklebt werden. Wenn wir von der Sphäre zunächst nur ein Band um den Äquator betrachten, so lässt sich diese Verklebung praktisch durchführen; das Ergebnis ist



das *Möbiusband*, ein geschlossenes Band mit einem Twist um eine halbe Drehung ( $180^\circ$ ). Danach bleiben von der Sphäre noch die beiden Polkappen übrig, die wir leicht antipodisch zu einer einzigen Kappe verkleben können. Diese Kappe muss nun wieder an das Möbiusband angeklebt werden, das ja wie die Kappe von einer einzigen geschlossenen Linie berandet wird. Dieses Verkleben lässt sich praktisch nicht mehr durchführen, aber mathematisch ist das kein Problem.<sup>14</sup> Die Projektive Ebene ist also ein Möbiusband mit angeklebter Kappe.

Das Sphärenmodell gibt auch die Geometrie der projektiven Ebene gut wieder. Projektive Geraden entsprechen ja Ebenen durch 0, und diese schneiden die Sphäre in *Großkreisen*, die also projektiven Geraden entsprechen. Je zwei Großkreise schneiden sich in einem antipodischen Punktepaar, dem Schnittpunkt der zugehörigen Geraden. Der Affine Raum  $A \subset P$  besteht aus den Geraden, die eine feste Ebene  $H$  mit  $0 \notin H$  schneiden, z.B.  $H = \{x \in \mathbb{R}^3; x_3 = 1\}$ ; im Sphärenmodell ist das eine offene Halbsphäre, z.B.  $\{x \in S; x_3 > 0\}$ . Darin sehen wir wieder die affine Geometrie: Zwei Großkreisbögen in einer Halbsphäre schneiden sich, oder sie haben ein antipodisches Punktepaar auf dem zugehörigen Äquator, dem Rand der Halbsphäre, gemeinsam. Der letztere Fall entspricht einem parallelen Geradenpaar; der Äquator ist die Ferngerade.

## 2.4 Semiprojektive Abbildungen und Kollineationen

Wir betrachten weiterhin einen Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{K}$  und den zugehörigen projektiven Raum  $P = P_V$ . Wir wollen die *geradentreuen* umkehrbaren Abbildungen  $F : P \rightarrow P$  kennenlernen; wir nennen sie kurz *Kollineationen*. Die invertierbaren semilinearen Abbildungen auf  $V$  definieren solche Abbildungen, denn sie bilden Untervektorräume auf Untervektorräume gleicher Dimension ab; insbesondere erhalten sie die Menge der Geraden und Ebenen durch den Ursprung. Jede semilineare Abbildung  $L : V \rightarrow V$  definiert also eine Kollineation  $F = [L] : P \rightarrow P$ , nämlich

$$[L][v] = [Lv] \tag{16}$$

---

<sup>14</sup>Man betrachtet die disjunkte Vereinigung des Möbiusbandes  $M$  mit der Kappe  $K$ , bildet mit einer bijektiven Abbildung  $f$  den Rand von  $M$  auf den Rand von  $K$  ab und betrachtet Punkte im Rand von  $M$  als identisch mit ihrem Bild auf dem Rand von  $K$ . Das geschieht mit einer Äquivalenzrelation auf  $M \dot{\cup} K$ , gemäß derer ein Punkt nur zu sich selbst oder ggf. zu seinem Bild oder Urbild unter  $f$  äquivalent ist.

für alle  $v \in V_*$ . Wir wollen solche Abbildungen *semiprojektive Abbildungen* nennen, und wenn  $L$  linear ist (nicht nur semilinear), sollen sie *projektive Abbildungen* heißen.

Wir denken uns wieder den affinen Raum als Teilmenge des projektiven Raums, indem wir eine Hyperebene  $H = W + v_o$ , die nicht durch den Ursprung geht, auszeichnen und  $A_H = \pi(H)$  definieren; dabei ist  $W \subset V$  ein Untervektorraum der Kodimension Eins. Im Fall  $V = \mathbb{K}^{n+1}$  (in diesem Fall schreiben wir  $P^n$  statt  $P_V$ ) wählt man gerne  $W = \mathbb{K}^n \subset \mathbb{K}^{n+1}$  und  $v_o = e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ , also  $H = \mathbb{K}^n + e_{n+1}$  und

$$A_H = A^n := \{[x, 1]; x \in \mathbb{K}^n\} \cong \mathbb{K}^n. \quad (17)$$

Diese Einbettung des affinen in den projektiven Raum gibt uns eine natürliche Fortsetzung jeder auf  $\mathbb{K}^n \cong A^n \subset P^n$  definierten semiaffinen Abbildungen  $\tilde{F}$  zu einer semiprojektiven Abbildung  $F$  auf  $P^n$ : Ist  $\tilde{F}(x) = \tilde{L}(x) + a$  für eine invertierbare semilineare Abbildung  $\tilde{L}$  auf  $\mathbb{K}^n$  (mit  $L(\lambda x) = \bar{\lambda}L(x)$ ) und  $a \in \mathbb{K}^n$ , so erhalten wir die Zuordnung

$$\begin{aligned} [x, 1] &\mapsto [\tilde{F}(x), 1], \\ [x, \xi] &= [\xi^{-1}x, 1] \mapsto [\tilde{F}(\xi^{-1}x), 1] = [\bar{\xi}^{-1}\tilde{L}(x) + a, 1] = [\tilde{L}(x) + \bar{\xi}a, \bar{\xi}] \end{aligned}$$

für alle  $\xi \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Aber die Zuordnungsvorschrift  $[x, \xi] \mapsto [\tilde{L}(x) + \bar{\xi}a, \bar{\xi}]$  ist auch noch im Fall  $\xi = 0$  definiert. Setzen wir daher

$$L(x, \xi) = (\tilde{L}(x) + \bar{\xi}a, \bar{\xi}), \quad (18)$$

so haben wir damit eine invertierbare semilineare Abbildung  $L$  auf  $\mathbb{K}^{n+1}$  definiert, und die zugehörige semiprojektive Abbildung  $F = [L]$  auf  $P^n$  ist auf  $A^n$  die vorgegebene semiaffine Abbildung  $\tilde{F}$ . Ist  $\tilde{L}$  sogar linear, so auch  $L$ , und in Matrixschreibweise ist  $L = \begin{pmatrix} \tilde{L} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Satz 4.** *Die Kollineationen von  $P^n$  sind genau die semiprojektiven Abbildungen: Zu jeder Kollineation  $F$  von  $P^n$  gibt es eine umkehrbare semilineare Abbildung  $L$  auf  $V$  mit  $F([v]) = [Lv]$  für alle  $v \in V_*$ .*

**Beweis:** Wir führen die Behauptung auf den entsprechenden Satz der affinen Geometrie zurück (Satz 1), indem wir zunächst nur solche Kollineationen  $F$  betrachten, die den affinen Raum  $A^n \subset P^n$  invariant lassen,  $F(A^n) = A^n$ . Solche bijektive Abbildung lässt auch die Fernhyperebene  $P^{n-1} = P^n \setminus A^n$

invariant. Damit ist  $\tilde{F} := F|_{A^n}$  nicht nur geradentreu, sondern auch parallelentreu, denn Parallelen in  $A^n$  sind ja genau die Geradenpaare, die sich in einem Punkt der Fernhyperebene  $P^{n-1}$  schneiden; die Bilder unter  $F$  müssen also auch wieder parallel sein. In Satz 1 haben wir gezeigt, dass eine solche Abbildung  $\tilde{F}$  semiaffin ist:  $\tilde{F}(x) = \tilde{L}(x) + a$  für alle  $x \in \mathbb{K}^n \cong A^n$ . Diese semi-affine Abbildung lässt sich, wie oben gezeigt, zu einer semiprojektiven Abbildung fortsetzen, die auf  $A^n$  mit  $F$  übereinstimmt und damit überall gleich  $F$  sein muss, denn die Fernhyperebene  $P^n \setminus A^n$  besteht aus den Schnittpunkten "paralleler" Geraden in  $A^n$ . Also ist  $F$  semiprojektiv.

Den allgemeinen Fall führen wir auf den eben diskutierten Spezialfall zurück. Jede Kollineation  $F$  von  $P^n$  hat die Eigenschaft, nicht nur Geraden auf Geraden, sondern allgemein  $k$ -dimensionale projektive Unterräume wieder auf  $k$ -dimensionale projektive Unterräume abzubilden, wie man leicht durch Induktion über  $k$  zeigt (Übung). Insbesondere wird die Fernhyperebene  $P^{n-1} = \pi(\mathbb{K}^n)$  wieder auf eine projektive Hyperebene  $\pi(W) \subset P^n$  abgebildet (wobei  $W \subset K^{n+1}$  eine lineare Hyperebene, einen Untervektorraum der Kodimension Eins bezeichnet). Wir wählen dann eine umkehrbare lineare Abbildung  $L_1$  auf  $\mathbb{K}^{n+1}$  mit  $L_1(\mathbb{K}^n) = W$ ; die zugehörige projektive Abbildung  $F_1 = [L_1]$  überführt dann  $P^{n-1}$  in  $\pi(W)$ . Die Abbildung  $F_o = F_1^{-1}F$  ist wieder eine Kollineation auf  $P^n$  (die Komposition von Kollineationen ist eine Kollineation; die Kollineationen bilden eine Gruppe), und zusätzlich lässt  $F_o$  die Fernhyperebene  $P^{n-1}$  invariant: Die Abbildung  $F$  überführt  $P^{n-1}$  nach  $\pi(W)$ , und  $F_1^{-1}$  bildet  $\pi(W)$  wieder auf  $P^{n-1}$  ab. Damit fällt  $F_o$  unter den eingangs diskutierten Spezialfall und ist daher semiprojektiv. Damit ist auch  $F = F_1 F_o$  als Komposition semiprojektiver Abbildungen semiprojektiv.  $\square$

**Bemerkungen: 1.** Mit einem ähnlichen Argument können wir auch die folgende lokale Version beweisen: Sind  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}P^n$  offene Mengen und  $F : U_1 \rightarrow U_2$  eine geradentreue und umkehrbar stetige Abbildung, dann ist  $F$  Einschränkung einer projektiven Abbildung. Wir betrachten dazu eine Hyperebene  $H \subset \mathbb{R}^n$ , die  $U$  schneidet. Das Bild  $F(H \cap U)$  liegt wegen der Geradentreue in einer anderen Hyperebene  $H'$ , die  $U'$  schneidet. Wir wählen dann zwei projektive Abbildungen  $F_i$  (für  $i = 1, 2$ ) auf  $P^n$ , die  $H_i$  auf die Fernhyperebene  $P^{n-1}$  abbilden. Die Komposition  $\tilde{F} = F_2^{-1} F F_1$ , definiert auf der offenen Teilmenge<sup>15</sup>  $\tilde{U}_1 = F_1(U_1) \subset P^n$ , ist dann auf  $\tilde{U}_1 \cap A^n$  parallelentreu und damit Einschränkung einer affinen Abbildung, denn der Satz 1

<sup>15</sup>Der reell projektive Raum  $\mathbb{R}P^n$  besitzt eine *Metrik*, einen Abstandsbegriff: Elemente von  $\mathbb{R}P^n$  sind Geraden durch den Ursprung 0, und als Abstand der beiden Geraden werden

gilt mit demselben Beweis auch lokal, d.h. wenn  $F$  parallelentreu und bijektiv, aber nur auf einer offenen Teilmenge definiert ist. Also ist  $F = F_2 \tilde{F} F_1^{-1}$  Einschränkung einer projektiven Abbildung (nämlich einer Komposition projektiver Abbildungen).

**2.** Ein entsprechender Satz mit ähnlichem Beweis gilt auch für geradentreue, aber nicht mehr bijektive Abbildungen  $F$  zwischen projektiven Räumen unterschiedlicher Dimension. Allerdings sind nicht-injektive semiprojektive Abbildungen  $F = [L]$  nicht mehr auf ganz  $P^n$  definiert: Der Kern der zugehörigen semilinearen Abbildung  $L$  wird ja auf den Ursprung abgebildet, und ist  $[L][v] = [Lv]$  ist nicht definiert, falls  $Lv = 0$ . Ein anschauliches Beispiel ist die *Zentralprojektion* auf eine Hyperebene  $\pi(W) \subset P^n$  durch ein Zentrum  $z = [v_o] \in P^n \setminus H$ , wobei das Bild eines Punktes  $p \in P^n \setminus \{[v_o]\}$  der Schnitt der Geraden  $pz$  mit der Hyperebenen  $H$  ist. Die zugehörige lineare Abbildung  $L$  ist die Projektion auf die  $W$ -Komponente in der direkten Zerlegung  $\mathbb{K}^{n+1} = W \oplus \mathbb{K}v_o$ , also  $L(w + \lambda v_o) = w$ ; in der Tat ist das Bild von  $[L]$  in  $\pi(W)$  enthalten, und die drei Punkte  $[w + \lambda v_o]$ ,  $[w]$  und  $[v_o]$  liegen auf einer gemeinsamen Geraden. Der Kern von  $L$  ist der eindimensionale Untervektorraum  $\mathbb{K}v_o$ , und tatsächlich ist ja die Zentralprojektion im Zentrum  $[v_o]$  nicht definiert.

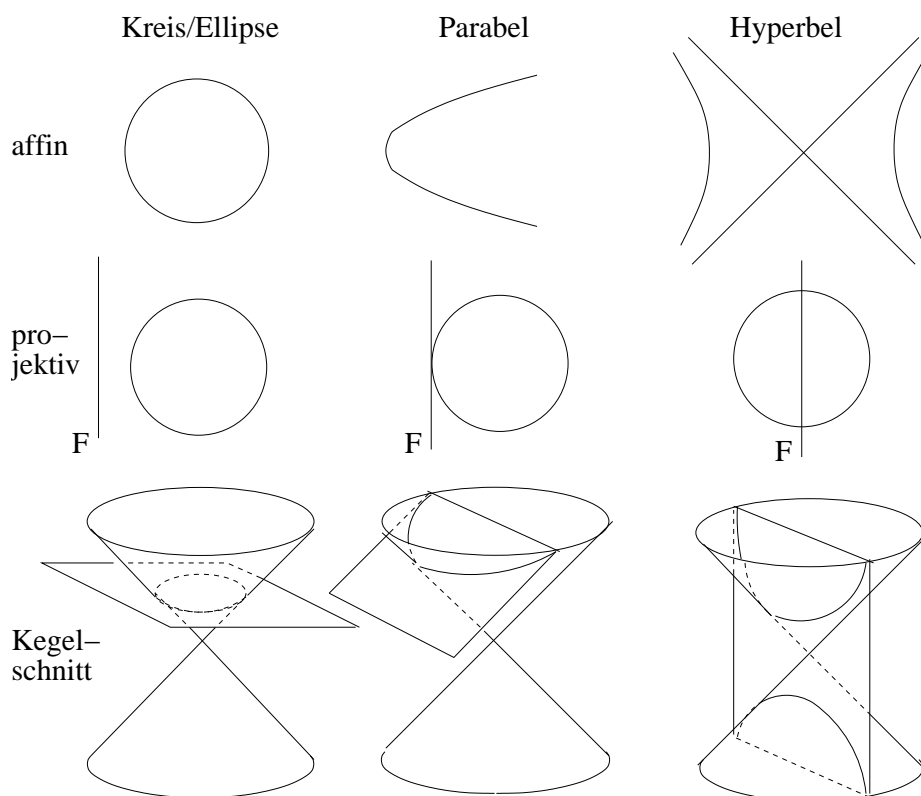
## 2.5 Kegelschnitte und Quadriken; Homogenisierung

Wenn man einen Kreiskegel im dreidimensionalen Raum mit einer Ebene schneidet, so erhält man je nach Lage der Ebene drei Sorten von Schnittlinien (“*Kegelschnitte*”): Ellipsen (als Sonderfall Kreise), Parabeln und Hyperbeln. Diese drei Kegelschnitt-Arten sind affin unterschiedlich: Wir können durch keine *affine* Abbildung der Ebene eine Ellipse in eine Parabel oder Hyperbel verwandeln. Aber es gibt *projektive* Abbildungen, die dies tun, wobei wir die affine zur projektiven Ebene erweitern müssen. In der projektiven Ebene sind die drei Kegelschnitte gleichartige Figuren, nämlich einfach geschlossene Linien, nur die Ferngerade verläuft in den drei Fällen unterschiedlich: Die Ellipse schneidet sie nicht, die Parabel berührt sie und die Hyperbel schneidet sie in zwei Punkten. Die Parabel lässt sich also durch *einen* Fernpunkt (die Richtung der Achse) und die Hyperbel durch *zwei* Fernpunkte (die Richtungen der beiden Asymptoten) zu einer geschlossenen Linie ergänzen.

---

wir den Winkel dazwischen wählen. Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}P^n$  ist *offen*, wenn mit jedem  $[v] \in U$  ein Ball  $B_\epsilon([v]) = \{[w]; \angle(v, w) < \epsilon\}$  ganz in  $U$  liegt.

Genau genommen sagt das bereits der Begriff “Kegelschnitt”. Wenn wir die Kegelspitze in den Ursprung  $0 \in \mathbb{R}^3$  legen, dann ist der Kegel die Vereinigung einer Schar von Geraden durch 0 (den *Mantellinien* oder *Erzeugenden* des Kegels). Aber Geraden durch 0 sind Punkte der Projektiven Ebene; der Kegel kann demnach als eine Schar von Punkten in  $P^2$ , also als eine *Kurve*  $C \subset P^2$  angesehen werden, und diese Kurve  $C$  ist das gemeinsame Objekt, “der” Kegelschnitt. Ellipse, Parabel und Hyperbel sind lediglich der affine Anteil von  $C$  bei verschiedenen Wahlen der Ferngeraden  $F$  in  $P^2$ .



Wie können wir diese geometrischen Beobachtungen *analytisch* (mit Hilfe von Formeln) beschreiben und damit auf beliebige Dimensionen und für beliebige Körper  $\mathbb{K}$  verallgemeinern? Analytisch gesehen ist ein (affiner) Kegelschnitt  $C_a$  die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in zwei Variablen  $x$  und  $y$ , also  $C_a = \{(x, y); ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$ . Gehen wir von zwei Variablen  $x$  und  $y$  zu  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  über (die wir zu einer vektorwertigen Variablen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  zusammenfassen), so lautet die allgemeine quadratische Gleichung:  $q(x) = 0$ , wobei  $q$  für einen beliebigen quadratischen

Ausdruck in den Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$  steht:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c. \quad (19)$$

Die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung in  $n$  Variablen,

$$Q_a = \{x \in \mathbb{K}^n; q(x) = 0\} \quad (20)$$

heißt eine affine Quadrik. In der Linearen Algebra lernt man, dass man die quadratische Gleichung  $q(x) = 0$  durch affine Substitutionen  $x = L\tilde{x} + a$  wesentlich vereinfachen und auf wenige Standardgleichungen (*Normalformen*) reduzieren kann; für  $n = 2$  und  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sind die drei wichtigsten Fälle die Gleichungen von Kreis und Hyperbel und Parabel:  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  und  $x^2 - y^2 - 1 = 0$  und  $x^2 - y = 0$ .

Wie können wir eine Quadrik vom affinen in den projektiven Raum fortsetzen? Dazu müssen wir uns das Polynom  $q$  etwas näher ansehen. Wir zerlegen  $q$  in drei Anteile,  $q = q_2 + q_1 + q_0$ , einen quadratischen Anteil  $q_2(x) = \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j$ , einen linearen  $q_1(x) = \sum_i b_i x_i$  und einem konstanten  $q_0 = c$ . Die drei Anteile verhalten sich offensichtlich unterschiedlich, wenn wir  $x$  durch ein Vielfaches  $\lambda x$  ersetzen:  $q_2(\lambda x) = \lambda^2 q_2(x)$  und  $q_1(\lambda x) = \lambda q_1(x)$  und  $q_0(\lambda x) = q_0(x)$ . Allgemein heißt eine Funktion  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$  *homogen vom Grad  $k$* ; die Anteile  $q_0, q_1, q_2$  unseres quadratischen Polynoms  $q$  sind demnach homogen vom Grad 0, 1, 2. Jedes Polynom ist Summe von homogenen Polynomen.

Wir betrachten  $\mathbb{K}^n$  nun als affinen Anteil  $A^n = \{[x, 1]; x \in \mathbb{K}^n\}$  des projektiven Raums  $P^n$  und setzen  $Q_a = \{[x, 1]; q(x) = 0\}$ . Für einen Punkt  $[x, \xi]$  mit  $\xi \neq 0$ , also  $[x, \xi] = [\frac{x}{\xi}, 1] \in A^n \subset P^n$  gilt also:  $[x, \xi] \in Q_a \iff 0 = q(\frac{x}{\xi}) = q_2(\frac{x}{\xi}) + q_1(\frac{x}{\xi}) + q_0(\frac{x}{\xi}) = \frac{1}{\xi^2} q_2(x) + \frac{1}{\xi} q_1(x) + q_0(x) \iff q_2(x) + \xi q_1(x) + \xi^2 q_0(x) = 0$ . Die linke Seite der letzten Gleichung,  $\hat{q}(x, \xi) := q_2(x) + \xi q_1(x) + \xi^2 q_0(x)$  ist ein homogenes Polynom vom Grad 2 in den  $n + 1$  Variablen  $x_1, \dots, x_n, \xi$ , und die Gleichung  $\hat{q}(x, \xi) = 0$  ergibt auch noch für  $\xi = 0$  und damit für alle  $[x, \xi] \in P^n$  einen Sinn. Damit haben wir die projektive Fortsetzung, den *projektiven Abschluss*  $Q$  von  $Q_a$  gefunden:

$$Q = \{[\hat{x}] \in P^n; \hat{q}(\hat{x}) = 0\}. \quad (21)$$

Diesen Übergang von  $q$  zu  $\hat{q}$  nennt man *Homogenisierung*. Aus einem Polynom  $f$  vom Grad  $d$  in  $n$  Variablen wird ein homogenes Polynom  $\hat{f}$  vom

selben Grad  $d$  in  $n + 1$  Variablen. Dazu zerlegt man  $f$  zuerst in seine homogenen Bestandteile,  $f = \sum_{k=0}^d f_k$ , wobei  $f_k$  homogen vom Grad  $k$  ist. Dann multipliziert man  $f_k$  mit der  $(d - k)$ -ten Potenz einer neuen Variablen  $\xi$  oder  $x_{n+1}$  und erhält ein Polynom  $\hat{f}$  in  $n + 1$  Veränderlichen, die wir zu einer  $\mathbb{K}^{n+1}$ -wertigen Variablen  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n+1})$  zusammenfassen:  $\hat{f}(\hat{x}) = \sum_{k=0}^d (x_{n+1})^{d-k} f_k(x_1, \dots, x_n)$ . In der Tat ist  $\hat{f}$  homogen vom Grad  $d$ , denn  $\hat{f}(\lambda \hat{x}) = \sum_k (\lambda x_{n+1})^{d-k} f_k(\lambda x) = \lambda^d f(\hat{x})$ . Beispiel  $n = d = 2$ : Für  $f(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 1$  ist  $\hat{f}(x, y, z) = x^2 + 2xy - y^2 + 2xz - z^2$ .

Nun können wir die Nullstellenmenge  $N_a = \{x \in \mathbb{K}^n; f(x) = 0\}$  von  $f$  projektiv abschließen zu  $N = \{[\hat{x}] \in P^n; \hat{f}(\hat{x}) = 0\}$ . Diese Menge ist wohldefiniert, weil  $\hat{f}$  homogen ist und damit  $\hat{f}(\lambda \hat{x}) = \lambda^d \hat{f}(\hat{x}) = 0 \iff \hat{f}(\hat{x}) = 0$ . Außerdem ist  $N \cap A^n = N_a$ , da  $\hat{f}(x, 1) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{K}^n$ .

In Übung 18 sehen wir direkt, dass die projektiven Abschlüsse von Ellipse, Parabel und Hyperbel projektiv äquivalent sind. Hier zeigen wir das allgemeine Resultat:

**Satz 5.** *Jede Quadrik  $Q \subset P^n$  ist projektiv äquivalent zu der Lösungsmenge von einer der Gleichungen*

$$\sum_{i=1}^m \epsilon_i x_i^2 = 0 \tag{22}$$

für Zahlen  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m \in \mathbb{K}_*$  und  $0 \leq m \leq n + 1$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  kann man alle  $\epsilon_i = \pm 1$  wählen, für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sogar  $\epsilon_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, m$ .

**Beweis:** Es sei  $V = \mathbb{K}^{n+1}$  und  $Q = \{[x] \in P^n; q(x) = 0\}$  für ein homogenes quadratisches Polynom (*quadratische Form*)  $q$  (wir verzichten jetzt auf die Bezeichnung  $\hat{q}$  und  $\hat{x}$ ). Wir müssen zeigen, dass es eine invertierbare lineare Abbildung  $L$  auf  $V$  gibt mit  $q(L(x)) = \sum_i \epsilon_i x_i^2$ . Das ist aus der Linearen Algebra bekannt: Zu  $q$  gehört eine symmetrische Bilinearform  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $q(x) = \beta(x, x)$ ; wir erhalten sie aus der Formel  $\beta(x + y, x + y) = \beta(x, x) + \beta(y, y) + 2\beta(x, y)$ , also  $q(x + y) = q(x) + q(y) + \beta(x, y)$  (*Polarisierung*). Wir zeigen durch Induktion über  $n$ , dass es eine Basis  $b_1, \dots, b_{n+1}$  gibt mit  $\beta(b_i, b_j) = 0$  für  $i \neq j$ . Man sucht dazu nur einen Vektor  $b$  mit  $q(b) \neq 0$  (wenn man keinen solchen Vektor findet, ist  $q \equiv 0$ ) und setzt  $V' = \{x \in V; \beta(x, b) = 0\}$ . Dieser Untervektorraum hat eine Dimension weniger ( $n$  statt  $n + 1$ ), also gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $V'$  mit  $\beta(b_i, b_j) = 0$  für  $i \neq j$ . Die gesuchte Basis von  $V$  erhalten wir

durch Hinzufügen von  $b_{n+1} := b$ . (Der Induktionsanfang für die Dimension Eins ist klar.) Wählt man nun  $L$  als die lineare Abbildung mit  $L(e_i) = b_i$ , also  $L = (b_1, \dots, b_{n+1})$  als Matrix, dann ist  $q(Lx) = q(L(\sum_i x_i e_i)) = q(\sum_i x_i b_i) = \beta(\sum_i x_i b_i, \sum_j x_j b_j) = \sum_{i,j} x_i x_j \beta(b_i, b_j) = \sum_i \epsilon_i x_i^2$  mit  $\epsilon_i = \beta(b_i, b_i) = q(b_i)$ . Wenn man jetzt noch die Summanden weglässt, für die  $\epsilon_i = 0$  ist, und die Koordinaten entsprechend unnummeriert, erhält man die Normalform (22). Wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist, kann man aus  $\epsilon_i$  eine Quadratwurzel ziehen und für  $i = 1, \dots, m$  die Basiselemente umnormieren zu  $\tilde{b}_i = b_i/\sqrt{\epsilon_i}$ , also  $q(\tilde{b}_i) = 1$ . Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  kann man wenigstens noch die Quadratwurzel aus  $|\epsilon_i|$  ziehen, und für  $\tilde{b}_i = b_i/\sqrt{|\epsilon_i|}$  gilt  $q(\tilde{b}_i) = \pm 1$ .  $\square$

**Korollar** In  $\mathbb{R}P^n$  gibt es (bis auf projektive Äquivalenz)  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  nicht-ausgeartete Quadriken (d.h. solche mit  $m = n + 1$ ), für  $n = 2$  also eine (mit der Gleichung  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ), für  $n = 3$  zwei (mit den Gleichungen  $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$  und  $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$ ).

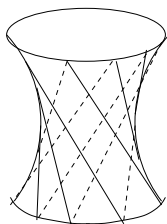
**Beweis:** Die Normalform der quadratischen Gleichung ist  $\pm(x_1)^2 \pm \dots \pm (x_{n+1})^2 = 0$ . Wenn wir die Koordinaten so umordnen, dass die negativen Terme zuletzt kommen, gibt es  $n + 2$  Möglichkeiten (0 negative Terme bis  $n + 1$  negative Terme). Da wir die ganze Gleichung aber mit  $-1$  durchmultiplizieren können, haben wir nur grob die Hälfte der Möglichkeiten zu betrachten. Außerdem hat die Gleichung mit nur positiven (oder nur negativen) Termen nur die Null-Lösung, der kein Punkt in  $P^n$  entspricht; die Lösungsmenge dieser Gleichung in  $P^n$  ist also leer. Es bleiben die angegebenen Fälle.  $\square$

Wir wollen uns noch die beiden Quadriken  $Q_1$  und  $Q_2$  in  $\mathbb{R}P^3$  etwas genauer ansehen. Die Quadrik  $Q_1$  mit der Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$  ist eine Kugel­fläche: Man kann  $w = 1$  setzen, denn aus  $w = 0$  würde  $x = y = z = 0$  folgen; die Quadrik liegt also ganz im affinen Teil  $A^3$ . Die andere Quadrik  $Q_2$  mit der Gleichung  $x^2 + y^2 - z^2 = w^2$  hat als affinen Anteil das einschalige Hyperboloid  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  und schneidet die Fernebene  $P^2 = \{w = 0\}$  in dem Kreis  $x^2 + y^2 = z^2$  (in  $P^2$  muss man die letzte Koordinate  $z$  gleich Eins setzen, um die Kreisgleichung zu sehen). Alle übrigen nicht ausgearteten affinen Quadriken sind zu einer dieser beiden projektiv äquivalent. Zum Beispiel ist das zweischalige Hyperboloid  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  zu  $Q_1$  äquivalent: Homogenisieren der Gleichung ergibt  $x^2 - y^2 - z^2 - w^2 = 0$ , also  $y^2 + z^2 + w^2 = x^2$ ; das ist die Gleichung von  $Q_1$  bei vertauschten Rollen von  $w$  und  $x$ . Die Fernebene



$\{w = 0\}$  schneidet diese Quadrik in dem Kreis  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$  und zerlegt sie in zwei Teile, die beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloids.

Wir wollen uns die Quadrik  $Q_2$  noch näher ansehen, wobei der Körper  $\mathbb{K}$  jetzt wieder beliebig sein darf. Wir sahen, dass der affine Teil von  $Q_2$  das einschalige Hyperboloid ist, auf dem bekanntlich zwei Scharen von Geraden verlaufen.



Das können wir projektiv besonders einfach erkennen: Die Gleichung von  $Q_2$  ist  $x^2 - z^2 = w^2 - y^2$ , also  $(x + z)(x - z) = (w + y)(w - y)$ . Die vier Ausdrücke  $x \pm z$ ,  $w \pm y$  können wir als neue Koordinaten  $s, t, u, v$  wählen; das ist eine invertierbare lineare Abbildung, gibt also eine projektive Abbildung. Die Gleichung wird dann  $st = uv$ . Spezielle Lösungen sind  $s/u = v/t = \alpha$  und ebenso  $s/v = u/t = \beta$  für Konstanten  $\alpha, \beta \in \mathbb{K} = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ . Das sind jeweils zwei lineare Gleichungen, die einen 2-dimensionalen Untervektorraum von  $\mathbb{K}^4$  und damit eine Gerade in  $P^3$  beschreiben. Die Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$  parametrisieren also zwei Scharen von Geraden, die ganz auch  $Q_2$  liegen, weil ja alle ihre Punkte die Gleichung von  $Q_2$  erfüllen.

**Bemerkung:** Eine andere Art, diese Geradenscharen zu sehen, ist die *Segre-Einbettung*  $s : P^1 \times P^1 \rightarrow P^3$ ,

$$([\alpha_1, \alpha_2], [\beta_1, \beta_2]) \mapsto [s, t, u, v] = [\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \alpha_2\beta_1, \alpha_1\beta_2]. \quad (23)$$

Das Bild von  $s$  liegt in  $Q_2$ , denn die Gleichung  $st = uv$  ist erfüllt, weil  $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = \alpha_2\beta_1\alpha_1\beta_2$ . Offensichtlich erhalten wir eine Gerade, wenn wir das erste Argument  $[\alpha_1, \alpha_2]$  konstant setzen, und es ist die erste der beiden oben beschriebenen Geradenscharen, denn  $s/u = \alpha_1/\alpha_2 = v/t$ . Ebenso ergibt Konstantsetzen des zweiten Arguments  $[\beta_1, \beta_2]$  die zweite Geradenschar.

Wie können wir einer quadratischen Gleichung, z.B. der Gleichung

$$q(x, y, z, w) := x^2 - 2xy + 2z^2 + 4xz - 2yw = 0. \quad (24)$$

ansehen, zu welchem Typ von projektiven Quadriken sie gehört? Es gibt zwei äquivalente Verfahren, die gleichzeitig einen konstruktiven Beweis von Satz 5 geben:

1. *Quadratische Ergänzung:* Wir wollen durch Variablensubstitutionen die gemischten Terme beseitigen, indem wir geeignete quadratische Terme hinzufügen und wieder abziehen. Zum Beispiel ist

$$x^2 - 2xy = x^2 - 2xy + y^2 - y^2 = (x - y)^2 - y^2.$$

Setzen wir  $x - y =: x_1$ , so folgt  $x = x_1 + y$  und wir können in unserer Ausgangsgleichung

$$x^2 - 2xy + 2z^2 + 4xz - 2yw = 0. \quad (25)$$

an jeder Stelle die Variable  $x$  durch  $x_1 + y$  *substituieren* (ersetzen):

$$x_1^2 - y^2 + 2z^2 + 4x_1z + 4yz - 2yw = 0. \quad (26)$$

Anstelle der Variablen  $x$  tritt nun die neue Variable  $x_1$ , und es ist uns gelungen, die Terme vom Typ  $xy$  bzw.  $x_1y$  zu beseitigen. Zwar haben wir uns einen neuen gemischten Term eingehandelt,  $yz$ , aber dieser stört uns nicht, denn wir arbeiten die Variablen in der Reihenfolge  $x, y, z, w$  ab und werden nun in gleicher Weise nacheinander die Terme von Typ  $xz, xw, yz, yw, zw$  beseitigen. Als nächstes müssen wir also den Term  $4x_1z$  in (26) beseitigen. Dazu gehören die quadratischen Terme  $x_1^2$  und  $2z^2$ , und  $x_1^2 + 4x_1z + 2z^2 = (x_1 + 2z)^2 - 2z^2 = x_2^2 - 2z^2$  mit  $x_2 := x_1 + 2z$ . Es folgt  $x_1 = x_2 - 2z$ , und wieder ersetzen wir  $x_1$  überall in (26) durch  $x_2 - 2z$ :

$$x_2^2 - y^2 - 2z^2 + 4yz - 2yw = 0. \quad (27)$$

Jetzt gibt es keine gemischten Terme mit  $x_2$  mehr. Als nächstes beseitigen wir den Term  $4yz$ : Es ist  $-y^2 - 2z^2 + 4yz = -(y - 2z)^2 + 2z^2 = -y_1^2 + 2z^2$  mit  $y_1 := y - 2z$ . Durch Substitution von  $y = y_1 + 2z$  in (27) folgt

$$x_2^2 - y_1^2 + 2z^2 - 2y_1w - 4zw = 0. \quad (28)$$

Als nächstes ist der Term  $2y_1w$  zu beseitigen: Es ist  $-y_1^2 - 2y_1w = -(y_1 + w)^2 + w^2 = y_2^2 + w^2$  mit  $y_2 := y_1 + w$ , und mit der Substitution  $y_1 = y_2 - w$  folgt

$$x_2^2 - y_2^2 + w^2 + 2z^2 - 4zw = 0. \quad (29)$$

Schließlich ist  $2z^2 - 4zw + w^2 = 2(z - w)^2 - w^2 = 2z_1^2 - w^2$  mit  $z_1 := z - w$ , und wir erhalten

$$x_2^2 - y_2^2 + 2z_1^2 - w^2 = 0. \quad (30)$$

Wir könnten noch  $z_2 = \sqrt{2}z_1$  setzen und würden  $x_2^2 + z_2^2 - y_2^2 - w^2 = 0$  erhalten; das ist (bis auf Änderung der Koordinatennamen) die Gleichung von  $Q_2$ . Doch dieser letzte Schritt ist eigentlich überflüssig, da wir bereits aus (30) die Vorzeichen ablesen können. Die projektive Abbildung, die die gegebene Quadrik in die Standardform überführt, ergibt sich aus den linearen Substitutionen, die wir vorgenommen haben (die Umkehrabbildung kann leicht daraus berechnet werden):

$$\begin{aligned} x_2 = x_1 + 2z &= x - y + 2z, \\ y_2 = y_1 + w &= y - 2z + w, \\ z_1 &= z - w \\ w &= w \end{aligned} \tag{31}$$

Eine Besonderheit ist der Fall, wo z.B. ein Term  $xy$  auftritt, aber weder  $x^2$  noch  $y^2$ ; dann muss man  $x = u + v$ ,  $y = u - v$  substituieren.

**2. Elementare Zeilen- und Spaltentransformation:** Dazu müssen wir die quadratische Form zunächst in der Form  $q(v) = v^T A v$  (mit  $v = (x, y, z, w)^T$ ) für eine symmetrische Matrix  $A = (a_{ij})$  schreiben. Die Koeffizienten vor den Quadraten in  $q(x)$  werden die Diagonalelemente, die Nicht-Diagonalelemente sind die halben Koeffizienten der gemischten Terme (z.B.  $2xy = xy + yx$  ergibt  $a_{12} = a_{21} = 1$ ). Wir erhalten also die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

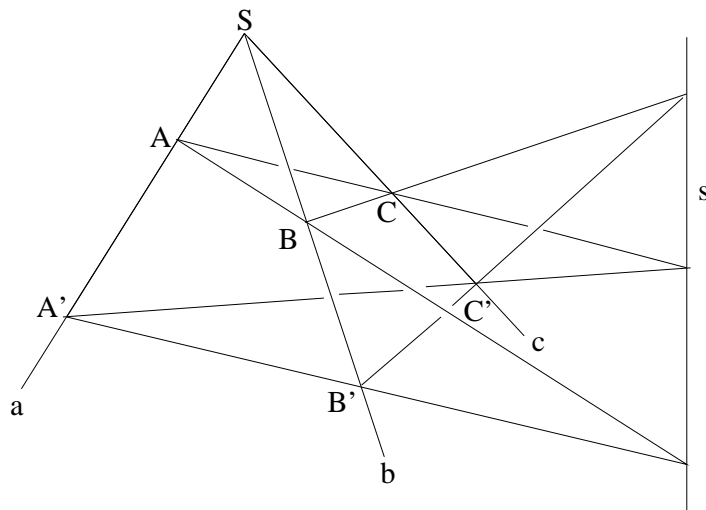
Diese wird durch elementare Transformationen auf Diagonalgestalt gebracht, wobei aber nach jeder elementaren Zeilentransformation die entsprechende Spaltentransformation ausgeführt werden muss (was der Transformation  $A \rightarrow SAS^T$  für eine elementare Matrix  $S$  entspricht). Das Ergebnis dieser Spaltentransformation ist nur, dass die Matrix wieder symmetrisch wird; alle Koeffizienten auf und unterhalb der Diagonale bleiben unverändert. Deshalb können wir Zeilen- und Spaltentransformationen immer gleichzeitig ausführen: Wir nehmen die Zeilentransformation vor (z.B. Addition der ersten Zeile zur zweiten), schreiben von der neuen Matrix aber nur die Koeffizienten auf und unterhalb der Diagonale hin und ergänzen sie zu einer symmetrischen Matrix. Dieses Verfahren ist nur eine Umformulierung des

vorigen durch quadratische Ergänzung. Wir erhalten das folgende Schema:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{array}$$

Im Allgemeinen ist noch der hier nicht auftretender Sonderfall zu beachten, dass auf irgendeiner Stufe des Verfahrens alle Diagonalelemente verschwinden. Dann muss man erst durch Addition einer anderen Zeile ein nicht verschwindendes Diagonalelement erzeugen und danach die entsprechende Spaltenttransformation durchführen, die in diesem Fall auch die Koeffizienten unterhalb der Diagonale verändern kann.

## 2.6 Die Sätze von Desargues und Brianchon



**Satz von Desargues:** In der projektiven Ebene  $P^2$  (über einem beliebigen, auch nichtkommutativen Körper) seien drei Geraden  $a, b, c$  gegeben, die einen Punkt  $S$  gemeinsam haben. Gegeben seien weiterhin zwei Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit Eckpunkten auf den jeweiligen Geraden:  $A, A' \in a$  und  $B, B' \in b$  und  $C, C' \in c$ . Dann liegen die Schnittpunkte entsprechender Seiten, die Punkte  $AB \wedge A'B'$  und  $AC \wedge A'C'$  und  $BC \wedge B'C'$ , auf einer gemeinsamen Geraden  $s$ .

**Beweis 1 (mit Abbildungsgeometrie):** Mit Hilfe einer Projektiven Abbildung können wir die Gerade  $s$  durch die Punkte  $AB \wedge A'B'$  und  $AC \wedge A'C'$  zur

Ferngeraden machen. Dann sind wir in der affinen Ebene, und die Geradenpaare  $AB$  und  $A'B'$  sowie  $AC$  und  $A'C'$  sind parallel, da sie sich auf der Ferngeraden treffen. Somit entsteht das Dreieck  $A'B'C'$  aus dem Dreieck  $ABC$  durch zentrische Streckung (mit Zentrum  $S$ ) und daher ist auch das dritte Geradenpaar  $BC$  und  $B'C'$  parallel, d.h. die Geraden  $BC$  und  $B'C'$  schneiden sich auf der Ferngeraden. Durch Rücktransformation, die die Ferngerade wieder auf  $s$  abbildet, folgt die Behauptung.  $\square$

**Beweis 2 (mit räumlicher Geometrie):** Wir können die Desargues-Figur als Projektion einer räumlichen Figur ansehen, wobei wir uns z.B. vorstellen, dass die mittlere Gerade  $b$  weiter vorn liegt als  $a$  und  $c$ . Die beiden Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  definieren nun zwei unterschiedliche Ebenen  $E$  und  $E'$  im Raum  $P^3$ , die sich stets in einer Geraden  $s$  schneiden.<sup>16</sup> Die Seiten der beiden Dreiecke liegen in den jeweiligen Ebenen, ihre Schnittpunkte (wenn sie existieren) also auf  $s = E \cap E'$ . Zwei Geraden im Raum schneiden sich aber nur, wenn sie in einer Ebene liegen; das ist jedoch für einander entsprechende Seiten der beiden Dreiecke der Fall; z.B. liegen  $AB$  und  $A'B'$  in der von den Strahlen  $a$  und  $b$  aufgespannten Ebene.  $\square$

**Bemerkung:** Interessant an dem Beweis 2 ist, dass er nur Inzidenz verwendet, allerdings in Dimension 3. Wenn man die ebene projektive Geometrie axiomatisch beschreibt,<sup>17</sup> so lässt sich der Satz von Desargues nicht aus diesen Axiomen herleiten, aber in der räumlichen<sup>18</sup> Geometrie folgt er aus den Axiomen; dies ist ein erneutes Beispiel für unsere schon früher gemachte Beobachtung, dass die Geometrie in höheren Dimensionen einfacher wird. Wenn sich also eine (axiomatisch definierte) projektive Ebene zu einem projektiven Raum erweitern lässt, ist sie eine *Desargues-Ebene*. d.h. außer den üblichen Axiomen gilt auch der Satz von Desargues. Damit stehen uns die zentrischen

<sup>16</sup>Das ist der Dimensionssatz für Untervektorräume  $U, U' \subset V$ : Ist  $V = U + U'$ , so ist  $\dim(U \cap U') = \dim U + \dim U' - \dim V$ . In unserem Fall  $E = \pi(U)$  und  $E' = \pi(U')$  ist  $\dim U = \dim U' = 3$  und daher  $\dim U \cap U' = 3 + 3 - 4 = 2$ , also ist  $\pi(U \cap U')$  eine projektive Gerade.

<sup>17</sup> (1) Durch je zwei Punkte geht genau eine Gerade.

(2) Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

(3) Jede Gerade enthält mindestens 3 Punkte, und durch jeden Punkt gehen mindestens 3 Geraden.

<sup>18</sup>Im Raum muss Axiom (2) durch den Zusatz "zwei Geraden in einer gemeinsamen Ebene" ergänzt werden, um "windschiefe" Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, auszuschließen.

Streckungen, d.h. die Multiplikation mit Skalaren (vgl. Abschnitt 1.1) zur Verfügung, und somit haben wir den Skalarkörper der linearen Algebra geometrisch rekonstruiert. Daher gilt der Satz: *Jede Desargues-Ebene ist von der Form  $\mathbb{K}P^2$  für einen (nicht notwendig kommutativen) Körper  $\mathbb{K}$ . Jeder (axiomatisch definierte) projektive Raum ist von der Form  $\mathbb{K}P^n$ ,  $n \geq 3$ .*

Es gibt viele projektive Ebenen *ohne* die Desargues-Eigenschaft.<sup>19</sup> Das interessanteste Beispiel ist die projektive Ebene  $\mathbb{O}P^2$  über der *Oktavenalgebra*  $\mathbb{O}$ : Ähnlich wie die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  als Paare reeller Zahlen  $(a, b) = a + bi$  mit der Multiplikation  $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$  darstellbar sind, kann man die *Quaternionen*  $\mathbb{H}$  als Paare komplexer Zahlen mit der Multiplikation  $(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d}, ad + b\bar{c})$  und die *Oktaven*  $\mathbb{O}$  als Paare von Quaternionen mit der Multiplikation  $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$  definieren. Bei jedem dieser drei Prozesse muss man vertraute Rechenregeln aufgeben: In  $\mathbb{C}$  gibt es keine Anordnung mehr, in  $\mathbb{H}$  geht die Kommutativität verloren und in  $\mathbb{O}$  die Assoziativität. Noch einmal lässt sich der Prozess nicht durchführen, ohne die Division zu zerstören; die Oktaven bilden daher die unwiderruflich letzte Zahlbereichserweiterung.<sup>20</sup> Wegen der mangelnden Assoziativität lässt sich kein projektiver (oder affiner) Raum über den Oktaven mehr definieren; die übliche Lineare Algebra gilt nicht mehr über den Oktaven. Was aber davon noch übrig bleibt, reicht gerade zu einer projektiven Ebene über  $\mathbb{O}$  aus. In dieser gilt der Satz von Desargues nicht, und sie lässt sich nicht zu einem projektiven Raum erweitern. Die rudimentäre Lineare Algebra über  $\mathbb{O}$  ist auch für die Existenz der sog. *Ausnahmegruppen*  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  verantwortlich, die sich anders als die *klassischen* Gruppen  $GL(n), O(n), U(n), Sp(n)$  nicht in eine Serie einfügen wollen; die Gruppe  $E_6$  zum Beispiel ist die Kollineationengruppe von  $\mathbb{O}P^2$ . Viele Physiker sind davon überzeugt, dass die größte und geheimnisvollste dieser Gruppen, die  $E_8$ , wesentlich für die Struktur unserer materiellen Welt verantwortlich ist.

**Satz von Brianchon:**<sup>21</sup> *Die Diagonalen eines Sechsecks in der projektiven Ebene  $P^2$  (über einem beliebigen kommutativen Körper), dessen Seiten Tangenten eines Kegelschnitts sind, schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.*

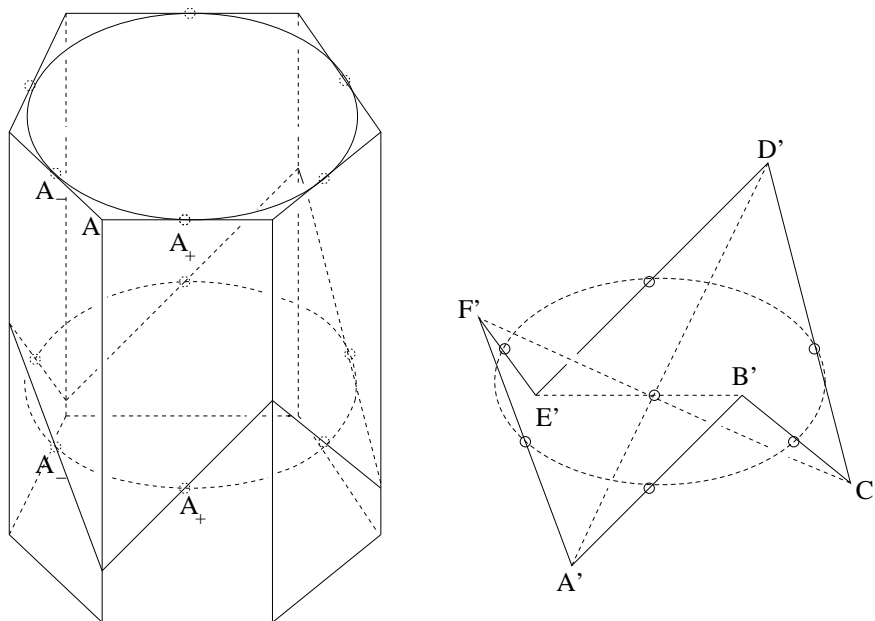
**Beweis:** Der Beweis ähnelt dem zweiten Beweis des Satzes von Desargues: Er stellt das Tantentensechseck des Kegelschnitts als Projektion einer räumlichen Figur dar. Diese Figur besteht aus Geraden auf einem einschaligen

<sup>19</sup>Vgl. Salzmann et al: *Compact Projective Planes*, de Gruyter 1995

<sup>20</sup>Vgl. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer-Grundlehren, 1983

<sup>21</sup>Charles Julien Brianchon, 1783 - 1864

Hyperboloid. Am einfachsten ist es, wenn man den Kegelschnitt durch eine projektive Abbildung zunächst auf den Kreis  $K = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$  in der affinen Ebene transformiert und darüber das einschalige Hyperboloid  $Q_a = \{(x, y, z); x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  im affinen Raum betrachtet. Die Tangentialebene in jedem Punkt  $(x, y, 0) \in K \subset Q$  ist vertikal (parallel zur  $z$ -Achse), und sie enthält sowohl die Tangente an  $K$  in  $(x, y, 0)$  als auch die beiden Geraden durch  $(x, y, 0)$ , die ganz auf  $Q$  verlaufen (vgl. 2.5 sowie Übung 23), die wir *aufsteigende* und *absteigende* Gerade nennen wollen, da sie über der Tangente mit Steigung  $+1$  in  $z$ -Richtung ansteigen bzw. mit Steigung  $-1$  absteigen. Durch die Projektion  $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$  werden beide Geraden auf die Tangente abgebildet. Wir ersetzen das ebene Sechseck durch ein räumliches, das abwechselnd aus aufsteigenden und absteigenden Geraden auf  $Q$  besteht und auf das gegebene Sechseck projiziert wird; da jeder Eckpunkt  $A$  des Tangentensechsecks von den Berührungspunkten  $A_+, A_- \in K$  der beiden Tangenten gleich weit entfernt ist, treffen sich die aufsteigende Gerade durch  $A_+$  und die absteigende Gerade durch  $A_-$  auf gleicher Höhe  $z$  über dem Eckpunkt  $A$ , also in einem gemeinsamen Punkt.



Wir nennen die Eckpunkte des Tangentensechsecks  $A, \dots, F$ , und die darüber oder darunter liegenden Eckpunkte des räumlichen Sechsecks seien  $A', \dots, F'$ . Wir müssen zeigen, dass die Diagonalen des räumlichen Sechsecks,  $A'D'$  und  $B'E'$  und  $C'F'$ , sich in einem gemeinsamen Punkt treffen, dann

gilt das gleiche auch für die Diagonalen des ebenen Sechsecks. Doch mit dem räumlichen Sechseck haben wir uns ein neues Problem eingehandelt, das es beim ebenen Sechseck noch gar nicht gab: Im Raum ist ja nicht einmal klar, dass sich wenigstens zwei der drei Diagonalen treffen! Aber die Lösung dieses neuen Problems wird die eigentliche Aufgabe, einen gemeinsamen Schnittpunkt aller drei Diagonalen zu finden, gleich mitlösen. Warum also schneiden sich die Diagonalen  $A'D'$  und  $B'E'$ ? Weil sie in einer Ebene liegen! Da sich auf- und absteigende Geraden stets schneiden (möglicherweise auf der Fernebene!), haben auch  $A'B'$  und  $D'E'$  einen Schnittpunkt, denn eine dieser Geraden ist aufsteigend, die andere absteigend. Also sind die vier Punkte  $A', B', D', E'$  komplanar (in einer gemeinsamen Ebene enthalten), und die fraglichen Geraden  $A'D'$  und  $B'E'$  liegen auch in dieser Ebene und müssen sich daher schneiden. Ebenso schneiden sich die Diagonalenpaare  $B'E'$  und  $C'F'$  sowie  $C'F'$  und  $D'A'$ . Wenn die drei Schnittpunkte verschieden sind, bilden sie ein ebenes Dreieck, und alle Punkte und Geraden sind komplanar. Das kann aber nicht sein, denn die Eckpunkte des räumlichen Sechsecks liegen nicht in der Ebene von  $K$ . Also müssen alle drei Diagonalen durch denselben Punkt gehen.  $\square$

Wir müssen einige Argumente des Beweises noch etwas aufputzen. Warum z.B. schneiden sich beliebige auf- und absteigende Geraden? Das sehen wir am besten wieder an der projektiven Quadrik  $Q = \{[s, t, u, v]; st = uv\}$  mit ihren Geraden  $s/u = v/t = \lambda$  und  $s/v = u/t = \mu$ . Geben wir  $\lambda, \mu \in \hat{\mathbb{K}}$  vor, so finden wir eine Lösung  $(s, t, u, v)$  für alle vier Gleichungen und damit einen Schnittpunkt: Wenn z.B.  $\mu \neq 0$  und  $\lambda \neq \infty$ , so können wir  $u = 1, s = \lambda, t = 1/\mu, v = \lambda/\mu$  setzen.

Eine weitere Frage ist begrifflicher Art: Was ist eigentlich die Tangente eines Kegelschnitts und die Tangentialebene einer Quadrik? Die Definition ist einfach: Jede projektive Quadrik in  $P^n$  wird ja durch eine quadratische Form  $q$  auf  $\mathbb{K}^{n+1}$  und damit durch eine symmetrische Bilinearform  $\beta$  beschrieben:  $q(x) = \beta(x, x)$  (vgl. Abschnitt 2.5). Ist also

$$Q = \{[x] \in P^n; \beta(x, x) = 0\}, \quad (33)$$

so ist der *Tangentialraum* von  $Q$  in einem Punkt  $[x] \in Q$  die Hyperebene

$$T_{[x]}Q := \{[v] \in P^n; \beta(x, v) = 0\}. \quad (34)$$

In der Ebene ( $n = 2$ ) spricht man stattdessen von der *Tangente*, im Raum ( $n = 3$ ) von der *Tangentialebene*. Im Beispiel des einschaligen Hyperboloiden



$Q = \{[x, y, z, w]; x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0\}$  ist  $\beta((x, y, z, w), (x', y', z', w')) = xx' + yy' - zz' - ww'$ , und die Tangentialebene in einem Punkt  $p = [x, y, 0, 1] \in K \subset Q$  ist  $T_p Q = \{[x', y', z', w']; xx' + yy' - w' = 0\}$  mit dem affinen Anteil  $\{[x', y', z', 1]; xx' + yy' = 1\}$ ; da  $z'$  in der Gleichung nicht auftritt (also beliebig gewählt werden kann), ist diese Ebene parallel zur  $z$ -Achse, wie behauptet.

Definitionen kann man nicht beweisen, wohl aber begründen. Warum nennt man Hyperebene (34) Tangente, Tangentialebene, Tangentialraum? Anschaulich sollte die Tangentialebene (berührende Ebene) eine Approximation der Quadrik in der Nähe des Punktes  $[x] \in Q$  darstellen. Wählen wir daher einen zweiten Punkt  $[x + v] \in Q$ , so gilt sowohl  $\beta(x, x) = 0$  als auch

$$0 = \beta(x + v, x + v) = \beta(x, x) + 2\beta(x, v) + \beta(v, v) = 2\beta(x, v) + \beta(v, v).$$

Wenn  $[x + v]$  zusätzlich sehr nahe bei  $[x]$  liegt, können wir die Komponenten von  $v$  betragsmäßig sehr klein wählen (falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) und daher ist der quadratische Term  $\beta(v, v)$  betragsmäßig viel kleiner als der in der Variablen  $v$  lineare Term  $2\beta(x, v)$ . Wenn wir den quadratischen Term einfach vernachlässigen, erhalten wir die Gleichung der Tangentialhyperebene.

## 2.7 Dualität und Polarität; Satz von Pascal

Eine Beobachtung, die bereits Poncelet gemacht hat, ist das *Dualitätsprinzip*: Mit jedem Satz der ebenen projektiven Geometrie gilt auch der dazu *duale* Satz, bei dem die Worte “Punkt” und “Gerade” sowie “schneiden” und “verbinden” ausgetauscht sind. Bereits die drei Axiome (Fußnote 15) haben ja diese Eigenschaft (zwei Punkte werden durch genau eine Gerade verbunden - zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt), also auch die daraus abgeleiteten Sätze. Ähnliches gilt für höhere Dimensionen, wobei wir Geraden durch Hyperebenen ersetzen müssen.

Wir haben projektive Räume nicht axiomatisch definiert, sondern von Vektorräumen abgeleitet: Ist  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$ , so ist der zugehörige projektive Raum  $P_V$  die Menge der *homogenen Vektoren*  $[v] = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$  für alle  $v \in V \setminus \{0\}$ , und die kanonische Projektion  $\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow P_V, v \mapsto [v]$  verbindet die Lineare Algebra mit der Projektiven Geometrie. Deshalb können wir das Dualitätsprinzip aus der Linearen Algebra entnehmen: Eine Hyperebene  $H \subset P_V$  entspricht einer *linearen Hyperebene*  $U \subset V$  (einem linearen Unterraum der Kodimension Eins):  $H = \pi(U)$ .

Diese wiederum kann als Kern einer Linearform  $\alpha \in \text{Hom}(V, \mathbb{K}) = V^*$  beschrieben werden,  $U = \text{Kern } \alpha$ . Wir fassen  $\alpha$  nun als Element eines anderen Vektorraums auf, nämlich des *Dualraums*  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ . Jedes Vielfache von  $\lambda\alpha$  mit  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  hat allerdings denselben Kern  $U$ , also entspricht  $U$  und damit  $H$  einem homogenen Vektor  $[\alpha] \in P_{V^*}$ . Die Hyperebenen in  $P_V$  können daher als Punkte eines anderen Projektiven Raums, des *projektiven Dualraums*  $P_{V^*}$  aufgefasst werden.

Allgemeiner können wir jedem  $(k + 1)$ -dimensionalen linearen Unterraum  $U \subset V$  den Unterraum

$$U^\perp := \{\alpha \in V^*; \alpha|_U = 0\} \subset V^* \quad (35)$$

mit Dimension  $n - k$  zuordnen, und für zwei Unterräume  $U_1, U_2 \subset V$  gilt:

$$\begin{aligned} (U_1 \cap U_2)^\perp &= (U_1)^\perp + (U_2)^\perp \\ (U_1 + U_2)^\perp &= (U_1)^\perp \cap (U_2)^\perp \end{aligned} \quad (36)$$

Ein  $k$ -dimensionaler projektiver Unterraum  $\pi(U) \subset P_V$  geht also durch die Dualität in den  $(n - k - 1)$ -dimensionale Unterraum  $\pi(U^\perp) \subset P_{V^*}$  über, und die Operationen “Schneiden”  $\wedge$  (entsprechend  $U_1 \cap U_2$ ) und “Verbinden”  $\vee$  (entsprechend  $U_1 + U_2$ ) werden gemäß (36) miteinander vertauscht. Da  $(V^*)^* = V$  für einen endlich dimensionalen Vektorraum  $V$ , ist der Prozess umkehrbar. Für  $k = 0$  ergibt sich insbesondere die Dualität zwischen Punkten und Hyperebenen des projektiven Raumes.

Jede nicht entartete Bilinearform  $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$  definiert einen Vektorraum-Isomorphismus  $\beta : V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto \beta_v = (x \mapsto \beta(v, x))$ . Dieser definiert einen Isomorphismus projektiver Räume  $[\beta] : P_V \rightarrow P_{V^*}$ . Damit wird der Dualraum entbehrlich: Wir können jeder Hyperebene  $H = \pi(\text{Kern } \alpha) \subset P_V$  einen Punkt  $[\beta^{-1}(\alpha)] \in P_V$  zuordnen und umgekehrt. Eine solche Zuordnung von Punkten zu Hyperebenen in einem projektiven Raum nennt man eine *Polarität*.

**Beispiel 1, Satz von Desargues:**

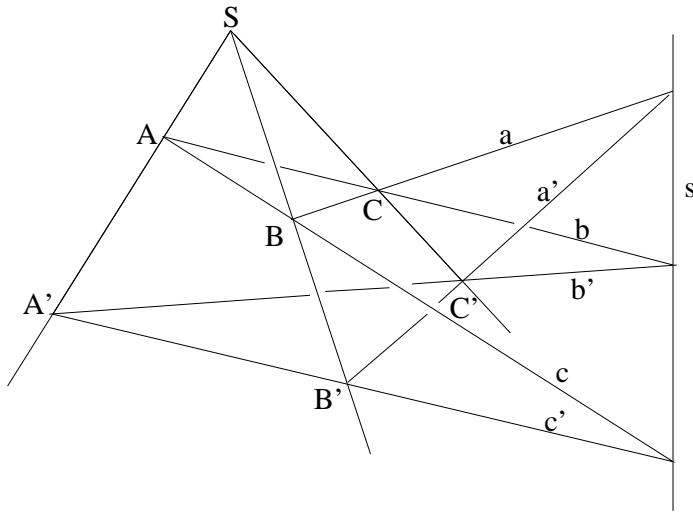
$S = AA' \wedge BB' \wedge CC' \Rightarrow AB \wedge A'B', AC \wedge A'C', BC \wedge B'C'$  sind kollinear.

**Dualer Satz:**

$s = aa' \vee bb' \vee cc' \Rightarrow ab \vee a'b', ac \vee a'c', bc \vee b'c'$  haben Schnittpunkt.<sup>22</sup>

---

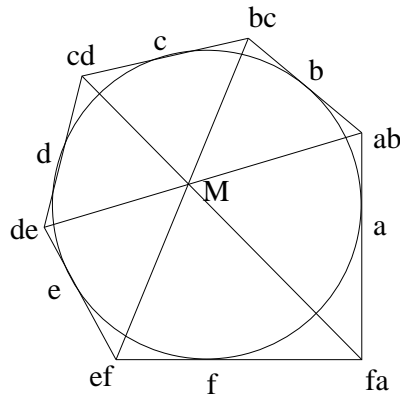
<sup>22</sup>Groß- und Kleinbuchstaben bezeichnen Punkte und Geraden,  $AB = A \vee B$  ist die Gerade durch die Punkte  $A, B$ , und  $ab = a \wedge b$  der Schnittpunkt der Geraden  $a, b$ .



Der duale Satz ist in diesem Fall gerade die Umkehrung des Satzes von Desargues; um das zu sehen, muss man  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$  und entsprechend  $a' = B'C'$ ,  $b' = C'A'$ ,  $c' = A'B'$  setzen. Dann sagt der Satz von Desargues: Wenn die Eckpunkte von zwei Dreiecken auf Geraden durch einen gemeinsamen Punkt  $S$  liegen, so schneiden sich entsprechende Seiten auf einer gemeinsamen Geraden  $s$ . Der duale Satz sagt: Wenn sich entsprechende Seiten von zwei Dreiecken auf einer Geraden  $s$  schneiden, dann liegen die Eckpunkte auf Geraden durch einen gemeinsamen Punkt  $S$ .

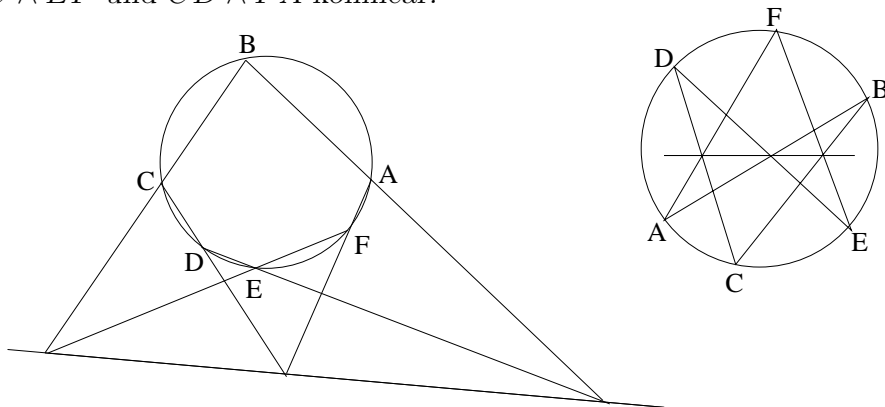
**Beispiel 2, Satz von Brianchon:**

Sind  $a, \dots, f$  Tangenten eines Kegelschnitts, so haben die Geraden  $ab \vee de$  und  $bc \vee ef$  und  $cd \vee fa$  einen Schnittpunkt.



**Dualer Satz: Satz von Pascal:** <sup>23</sup>

Sind  $A, \dots, F$  Punkte eines Kegelschnitts, so sind die Punkte  $AB \cap EF$  und  $BC \cap EF$  und  $CD \cap FA$  kollinear.



**Lemma.** Die Tangenten eines Kegelschnitts in  $P^2$  sind dual zu den Punkten eines anderen Kegelschnitts.

**Beweis:** Der gegebene Kegelschnitt sei  $Q = \{[x] \in P^2; \beta(x, x) = 0\}$  für eine nicht entartete symmetrische Bilinearform  $\beta$  auf  $V = \mathbb{K}^3$ . Für jedes  $[x] \in Q$  ist  $T_{[x]}Q = \{[v]; \beta(x, v) = 0\} = \text{Kern } \beta_x$ . Die Linearformen  $\beta_x \in V^*$  mit  $[x] \in Q$  erfüllen selber eine quadratische Gleichung:  $0 = \beta(x, x) = \beta_x x = \beta_x \beta^{-1}(\beta_x)$ . Mit anderen Worten,  $\beta^{-1}$  kann als eine Bilinearform auf  $V^*$  aufgefasst werden. Also liegen die zugehörigen homogenen Vektoren  $[\beta_x]$  in der dualen Quadrik  $Q^* := \{[\alpha]; \alpha \in V^* \setminus \{0\}; \beta^{-1}(\alpha, \alpha) = 0\} \subset P_{V^*}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Statt mit der Dualität kann man die Behauptung des Lemmas auch mit einer Polarität einsehen, z.B. mit der Polarität durch die  $Q$  definierende Bilinearform  $\beta$ : Polar zu der Geraden  $T_{[x]}Q = \pi(\text{Kern } \beta_x)$  ist dann der Punkt  $[\beta^{-1}(\beta_x)] = [x]$ ; bei dieser Polarität gehen die Tangenten von  $Q$  in die Punkte von  $Q$  über.

## 2.8 Das Doppelverhältnis

In der affinen Geometrie hatten wir gesehen, dass das Verhältnis parallel gerichteter Strecken oder Vektoren unter affinen Abbildungen ungeändert

<sup>23</sup>Blaise Pascal, 1623 - 1662

bleibt: Sind  $x, y, z$  kollineare Punkte eines affinen Raumes, so sind die Vektoren  $x - z$  und  $y - z$  linear abhängig,  $x - z = \lambda(y - z)$ , und das *Verhältnis* der drei Punkte,

$$V(x, y, z) := \frac{x - z}{y - z} = \lambda \in \mathbb{K} \quad (37)$$

ist invariant unter jeder affinen Abbildung  $F$ , also  $V(Fx, Fy, Fz) = V(x, y, z)$  für alle kollinearen Punktetripel  $x, y, z$ .

Gilt etwas ähnliches auch in der projektiven Geometrie? Gegeben seien drei kollineare Punkte  $[x], [y], [z] \in P^n$ ; die Vektoren  $x, y, z \in \mathbb{K}^{n+1}$  liegen dann in einem 2-dimensionalen Unterraum, und wir können sie so wählen, dass sie auf einer gemeinsamen affinen Geraden  $g \subset \mathbb{K}^{n+1}$  liegen, also

$$x - z = \lambda(y - z) \quad (38)$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann ist das Verhältnis  $V(x, y, z) = \lambda$  wie vorher definiert. Allerdings ist die affine Gerade  $g$ , auf der die Vektoren  $x, y, z$  liegen, nicht eindeutig bestimmt; wir könnten äquivalente Vektoren

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \gamma z \quad (39)$$

wählen, die auf einer anderen affinen Geraden  $g'$  liegen:

$$x' - z' = \lambda'(y' - z'). \quad (40)$$

Wie ist die Beziehung zwischen den beiden Verhältnissen  $\lambda$  und  $\lambda'$ ? Setzen wir (39) in (40) ein, so erhalten wir

$$\alpha x = x' = \lambda' y' + (1 - \lambda') z' = \lambda' \beta y + (1 - \lambda') \gamma z. \quad (41)$$

Andererseits multiplizieren wir (38) mit  $\alpha$  und erhalten

$$\alpha x = \alpha \lambda y + \alpha(1 - \lambda)z. \quad (42)$$

Da die Vektoren  $y$  und  $z$  linear unabhängig sind, können wir auf der rechten Seite von (41) und (42) die Koeffizienten vergleichen und erhalten insbesondere  $\lambda' \beta = \alpha \lambda$ , also

$$\lambda' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \lambda. \quad (43)$$

Das Verhältnis auf der Geraden  $g'$  ist also nicht dasselbe wie das auf der Geraden  $g$ , sondern unterscheidet sich um den Faktor  $\frac{\alpha}{\beta}$ . Da wir keine Möglichkeit haben, zwischen  $g$  und  $g'$  eine Wahl zu treffen, kann das Verhältnis  $\lambda = V(x, y, z)$  in der projektiven Geometrie nicht definiert werden.

Aber ganz hoffnungslos ist der Fall dennoch nicht, denn der Quotient der beiden Verhältnisse,  $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta}$  hängt nicht von  $z$  und  $z'$  ab! Wenn wir daher einen vierten kollinearen Punkt  $[w]$  mit Vertretern  $w \in g$  und  $w' \in g'$  wählen, dann gilt für die Verhältnisse  $\mu = \frac{x-w}{y-w}$  und  $\mu' = \frac{x'-w'}{y'-w'}$  ganz genauso

$$\mu' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \mu. \quad (44)$$

Also ist  $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\mu'}{\mu}$  und damit

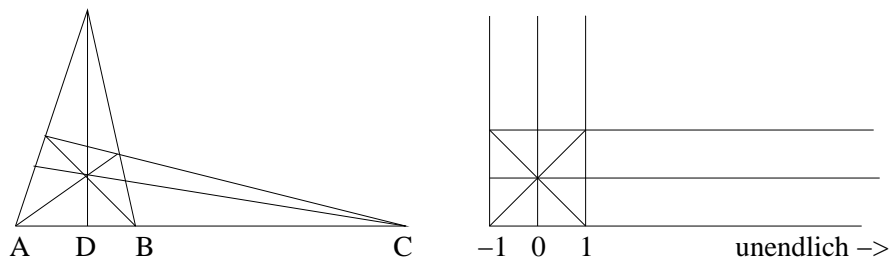
$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (45)$$

Der Quotient  $\frac{\lambda}{\mu}$  ist daher für jede Wahl der Geraden  $g$  derselbe und somit eine projektive Invariante, die wir das *Doppelverhältnis* der vier kollinearen Punkte  $[x], [y], [z], [w]$  nennen:

$$DV([x], [y], [z], [w]) := \frac{V(x, y, z)}{V(x, y, w)} = \frac{x-z}{y-z} \cdot \frac{y-w}{x-w} \quad (46)$$

wobei die vier Vektoren  $x, y, z, w \in \mathbb{K}^{n+1}$  auf einer gemeinsamen affinen Geraden zu wählen sind.

**Beispiel Vollständiges Vierseit:** Da alle ebenen Vierseite (Vierecke) projektiv äquivalent sind, können wir ein beliebiges Vierseit mit den zugehörigen Diagonalen und "Mittellinien" ("*vollständiges Vierseit*") durch eine projektive Abbildung auf das in der Figur dargestellte Quadrat in der affinen Ebene transformieren.



Die Punkte  $A, B, C, D$  werden dabei auf die Punkte  $-1, 1, \infty, 0 \in \hat{\mathbb{K}}$  abgebildet, und wir erhalten

$$DV(A, B, C, D) = DV(-1, 1, \infty, 0). \quad (47)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir ausrechnen: Für beliebiges  $\lambda \in \mathbb{K}$  ist

$$DV(\lambda, 1, \infty, 0) = \frac{\lambda - \infty}{1 - \infty} \cdot \frac{1 - 0}{\lambda - 0} = \frac{1}{\lambda} \quad (48)$$

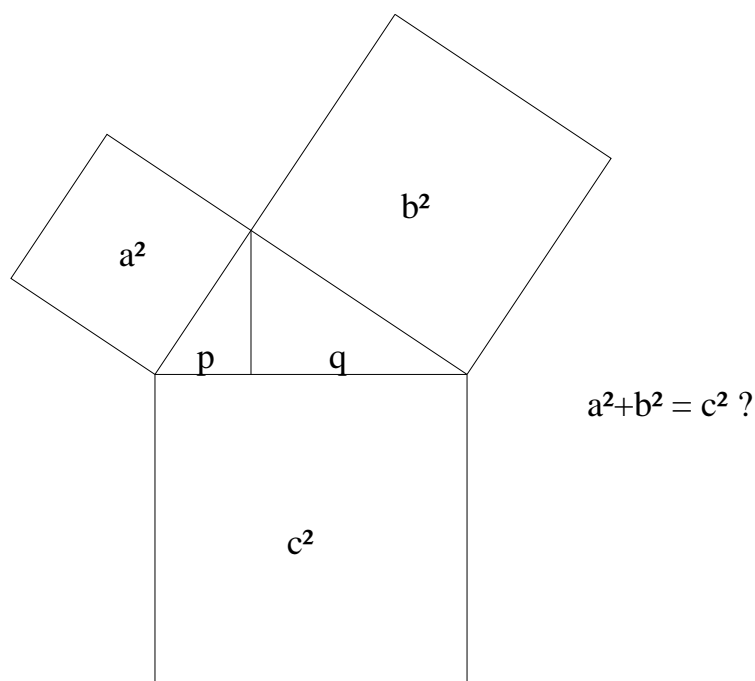
da  $\frac{\lambda - \infty}{1 - \infty} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} (\frac{\lambda}{\mu} - 1) / (\frac{1}{\mu} - 1) = 1$ . Es ergibt sich also  $\frac{A-C}{B-C} \cdot \frac{B-D}{A-D} = DV(A, B, C, D) = -1$  und damit

$$\frac{A-C}{B-C} = -\frac{A-D}{B-D} \quad (49)$$

Die Punkte  $C$  und  $D$  "teilen" also die Strecke  $\overline{AB}$  außen und innen im gleichen Verhältnis:  $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$ ; dies nennt man *harmonische Teilung*. Harmonische Teilung ist für vier kollineare Punkte  $A, B, C, D$  dasselbe wie  $DV(A, B, C, D) = -1$ .

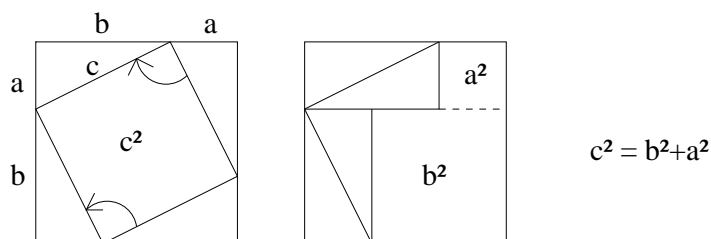
### 3 Abstand: Euklidische Geometrie

#### 3.1 Der Satz des Pythagoras



Wie früher stellen wir uns zunächst auf den Standpunkt, dass uns die Anschauungsebene und der Anschauungsraum vollständig bekannt sind. Insbesondere wissen wir nicht nur, was Punkte, Geraden und Inzidenz bedeutet, sondern wir kennen auch die Begriffe Abstand und Winkel. Der wichtigste Satz zum Abstandsbegriff ist der Satz des *Pythagoras*,<sup>24</sup> da mit seiner Hilfe der Abstand von zwei Punkten mit gegebenen (rechtwinkligen) Koordinaten berechnet werden kann. Der Satz stammt allerdings gar nicht von Pythagoras, sondern war lange vorher bereits den Chinesen, Indern und Babyloniern bekannt.

Aus der Figur geht in keiner Weise hervor, warum die Flächen der beiden kleinen Quadrate zusammen gleich der großen Quadratfläche sein sollten. Wie immer in der Geometrie ist eine Konstruktion nötig, um das Verborgene auf das Offensichtliche zurückzuführen. Die Herkunft des frühesten dieser Konstruktionen ist wahrscheinlich Indien oder China:

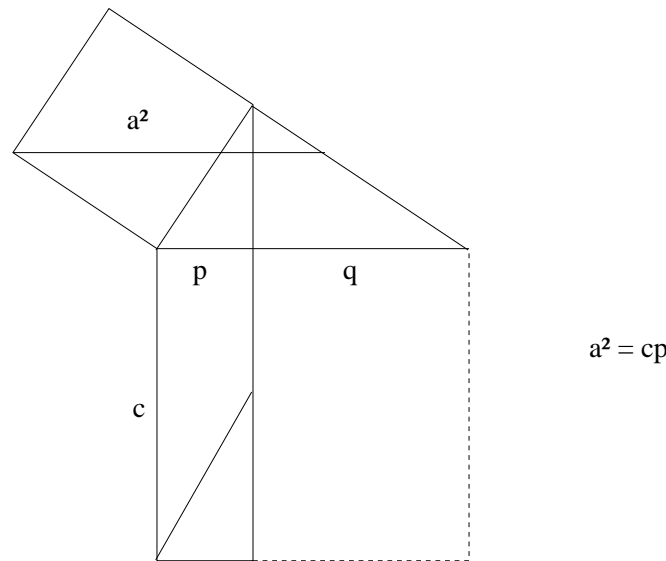


Euklid<sup>25</sup> hat in seinen “Elementen”, dem antiken Mathematik-Kompendium, nach dem noch bis ins 19. Jahrhundert Geometrie unterrichtet wurde, einen anderen Beweis gegeben, der stärkeren Niederschlag in Schulbüchern gefunden hat, obwohl er komplizierter ist: Man zerlegt das Quadrat über  $c$  durch die Höhenlinie in zwei Rechtecke mit Flächeninhalt  $cp$  und  $cq$  (mit  $c = p + q$ ) und zeigt  $a^2 = cp$  und entsprechend  $b^2 = cq$ . Das Rechteck  $cp$  wird durch eine Scherung in ein Parallelogramm verwandelt, wobei sich der Flächeninhalt nicht verändert (das unten abgeschnittene Dreieck wird oben wieder angesetzt), dieses Parallelogramm um  $90^\circ$  gedreht und dann durch eine zweite Scherung in das Quadrat über  $a$  verwandelt.

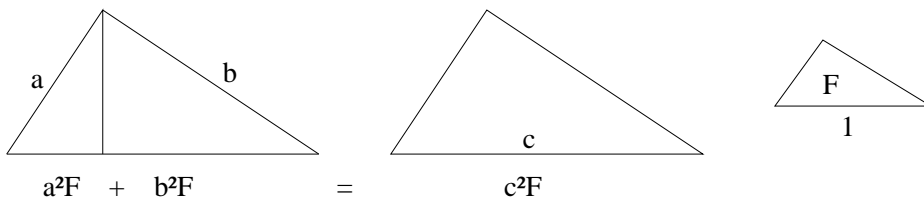
<sup>24</sup>Pythagoras von Samos. 569 - 475 vor Chr.

<sup>25</sup>Euklid von Alexandria, ca. 325 - 265 vor Chr.





Der dritte Beweis benutzt die Ähnlichkeit (Formgleichheit) der drei rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypothenusen  $a$ ,  $b$  und  $c$ ; sie entstehen also aus einem dazu ähnlichen Dreieck mit Hypothenuse Eins (und Flächeninhalt  $F$ ) durch zentrische Streckungen mit den Faktoren  $a$ ,  $b$  oder  $c$ , wobei der Flächeninhalt mit dem Quadrat des Streckungsfaktors multipliziert wird:

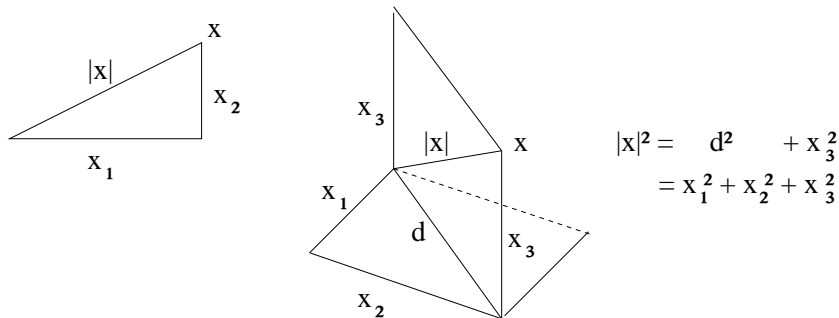


Obwohl es sich um einen Satz über Seitenlängen handelt, benutzen alle drei Beweise Flächeninhalte und deren bereits aus dem Alltag bekannte Transformationseigenschaften: Invarianz bei Drehungen und Zerlegungen. Wenn wir nun den Abstand in der Ebene in unser axiomatisches Gerüst des  $\mathbb{R}^2$  einbetten, gehen wir umgekehrt vor und *definieren* die *Norm* oder *Länge*  $|x|$  eines Vektors  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , den Abstand des Punktes  $x$  vom Ursprung  $o$ , mit Hilfe der Formel von Pythagoras:

$$|x|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2, \quad (50)$$

und entsprechend für  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$|x|^2 = (x_1)^2 + \dots + (x_n)^2 \quad (51)$$



Als *Abstand* von zwei beliebigen Punkten  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definieren wir die Länge des Differenzvektors,  $|x - y|$ . Der Satz des Pythagoras hat uns als Motivation für diese Definition gedient; natürlich muss er sich in diesem mathematischen Modell nun auch beweisen lassen. Dazu benötigen wir allerdings noch den Begriff des rechten Winkels, den wir mit Hilfe des *Skalarprodukts* gewinnen: Für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  setzen wir

$$\langle x, y \rangle := x^T y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad (52)$$

und nennen die Vektoren  $x, y$  *senkrecht* oder *orthogonal* ( $x \perp y$ ), wenn  $\langle x, y \rangle = 0$ . Dann folgt für die Seitenlängen  $|x|$ ,  $|y|$  und  $|x - y|$  des rechtwinkligen Dreiecks  $(0, x, y)$  der Satz des Pythagoras:

$$|x - y|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle = |x|^2 + |y|^2.$$

Allgemeiner kann man mit Hilfe des Skalarprodukts auch den *Winkel* zwischen zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definieren. Dazu benötigt man zunächst die Ungleichung von Cauchy-Schwarz,

$$|x| \cdot |y| \geq |\langle x, y \rangle| \quad (53)$$

(mit Gleichheit genau dann, wenn  $x, y$  linear abhängig sind); diese ergibt sich, weil das quadratische Polynom  $q(\lambda) = |\lambda x + y|^2 = |x|^2 \lambda^2 + 2\langle x, y \rangle \lambda + |y|^2$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  nichtnegativ ist und daher nichtpositive Diskriminante hat:  $a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\lambda + \frac{b}{a})^2 + c - \frac{b^2}{a}$  mit  $a > 0$  hat keine oder höchstens eine Nullstelle, wenn  $c - \frac{b^2}{a} \geq 0$ , also  $ac \geq b^2$ , in unserem Fall also  $|x|^2 |y|^2 \geq \langle x, y \rangle^2$ . Die Zahl  $\frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}$  liegt also zwischen  $-1$  und  $1$ , und wir definieren den Winkel  $\phi = \angle(x, y)$  über die Umkehrfunktion von  $\cos : [0, \pi] \rightarrow [1, -1]$ :

$$\phi = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{|x||y|}, \quad \langle x, y \rangle = |x||y| \cos \phi. \quad (54)$$

Insbesondere lassen sich die Koordinaten jedes Vektors  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  in der bekannten Weise ausdrücken:

$$x_1 = |x| \cos \phi, \quad x_2 = |x| \sin \phi, \quad (55)$$

wobei  $\phi$  den Winkel zwischen  $x$  und  $e_1 = (1, 0)$  bezeichnet. Dies entspricht der anschaulichen Definition der Winkelfunktionen

$$\begin{aligned} \text{Cosinus} &= \text{Ankathete} / \text{Hypotenuse}, \\ \text{Sinus} &= \text{Gegenkathete} / \text{Hypotenuse}. \end{aligned}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (53) folgt auch die *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (56)$$

denn  $(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = 2|x||y| - 2\langle x, y \rangle \geq 0$ , und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\langle x, y \rangle = |x||y|$ , also  $x = \mu y$  mit  $\mu > 0$ . Die geometrische Interpretation ist: Die Summe zweier Dreiecksseiten ist immer größer als die dritte, d.h. für drei Punkte  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$  gilt stets

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|, \quad (57)$$

wir setzen einfach  $x = a - c$  und  $y = c - b$  in (56). Besonders wichtig ist hier die Gleichheitsdiskussion:

**Satz 6.** Für je zwei Punkte  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt: Die Strecke

$$[a, b] = \{a + \lambda(b - a); \lambda \in [0, 1]\}$$

besteht genau aus den Punkten  $c \in \mathbb{R}^n$ , für die in (57) Gleichheit gilt:

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{R}^n; |a - b| = |a - c| + |c - b|\} \quad (58)$$

**Beweis:** Ist  $c = a + \lambda(b - a) = \lambda b + (1 - \lambda)a$  mit  $\lambda \in [0, 1]$ , so ist  $a - c = \lambda(a - b)$  und  $c - b = (1 - \lambda)(a - b)$ , also ist  $|a - c| + |c - b| = (\lambda + 1 - \lambda)|a - b| = |a - b|$ . Umgekehrt: Wenn die Gleichheit in (57) gilt, d.h.  $|x + y| = |x| + |y|$  für  $x = a - c$  und  $y = c - b$ , dann gilt  $x = \mu y$  für ein  $\mu > 0$  (Gleichheitsdiskussion von (56)), also  $a - b = \mu(b - c)$  und damit  $a + \mu c = b(1 + \mu)$ , also  $b = \frac{1}{1 + \mu} a + \frac{\mu}{1 + \mu} c \in [a, b]$  (die Zahlen  $\frac{1}{1 + \mu}$  und  $\frac{\mu}{1 + \mu}$  sind positiv und addieren sich zu Eins auf).  $\square$

Der  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standard-Skalarprodukt bildet das genaue mathematische Modell für die euklidische Geometrie. Allerdings hat der Ursprung  $0 \in \mathbb{R}^n$  keine besondere geometrische Bedeutung; wir müssen daher eigentlich zu dem zugehörigen affinen Raum übergehen. Auch ist die Auszeichnung der kanonischen Basis  $e_1, \dots, e_n$  geometrisch nicht gerechtfertigt; jede andere *Orthonormalbasis*  $b_1, \dots, b_n$  (d.h.  $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ ) ist geometrisch vollkommen äquivalent. Wir können daher ebensogut einen beliebigen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  über  $\mathbb{R}$  mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  betrachten; durch Wahl einer beliebigen Orthonormalbasis kann er mit  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standard-Skalarprodukt identifiziert werden. Deshalb heißt ein solcher Vektorraum mit Skalarprodukt auch *euklidischer Vektorraum*. Zum Beispiel ist jeder Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  mit dem darauf eingeschränkten Skalarprodukt selbst ein euklidischer Vektorraum; insbesondere ist jede Ebene in  $\mathbb{R}^n$  ein genaues Modell “der” euklidischen Ebene, weshalb die Geometrie eines hochdimensionalen  $\mathbb{R}^n$  in weiten Teilen noch der Anschauung zugänglich ist. Für viele Anwendungen kann man sogar auf die Endlichkeit der Dimension verzichten, was in der Funktionalanalysis (Raum der  $L^2$ -Funktionen mit dem Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int (fg)$ ) und in der Physik (Raum der Zustände) von großer Bedeutung ist.

Es ist nicht so verwunderlich, warum der Satz des Pythagoras zunächst mit Hilfe von Flächentransformationen bewiesen wurde: Es geht ja um Quadrate, und diese lassen sich als Flächen veranschaulichen. Die euklidische Geometrie ist eben eng mit einer quadratischen Form  $q$  verbunden, der Quadratsumme  $q(x) = \sum_i (x_i)^2$ , denn die euklidische Norm ist  $|x| = q(x)^{1/2}$ . Die Mathematiker haben seit dem 19. Jahrhundert auch andere Normen und Abstandsbegriffe diskutiert, z.B. die  $p$ -Norm  $|x|_p = (\sum_i (x_i)^p)^{1/p}$  für beliebige  $p > 0$ . Interessanterweise erhält man nur für  $p = 2$ , also im euklidischen Fall, eine große Gruppe von abstandstreuen Abbildungen (*Isometrien*), was zuerst H. v. Helmholtz bewiesen hat.<sup>26</sup> Das ist Teil einer allgemeineren Feststellung: Nur 2-Linearformen (Bilinearformen) haben immer eine große Transformationsgruppe,  $p$ -Linearformen für  $p \geq 3$  dagegen nur in Ausnahmefällen: Zum Beispiel gibt es im  $\mathbb{R}^7$  eine alternierende 3-Linearform mit einer großen Gruppe von Automorphismen; sie hängt mit der früher erwähnten *Oktavenalgebra* zusammen. Daher gibt es auch nur drei Typen von “Geometrien”

---

<sup>26</sup>Hermann von Helmholtz: *Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen*, Nachr. der Ges. d. Wiss. Göttingen 1868; vgl. auch Hermann Weyl: *Raum, Zeit, Materie*, Springer-Verlag 1919

mit beliebiger Dimensionszahl: die zu einem Vektorraum ohne weitere Struktur oder mit einer nicht-entarteten symmetrischen oder antisymmetrischen Bilinearform gehörigen; es sind dies die *projektive*, die *polare* und die *symplektische* Geometrie. Die metrische Geometrie gehört in diesem Sinne zur polaren Geometrie, und wir werden später mit der *konformen Geometrie* noch einen weiteren Vertreter kennenlernen. Die symplektische Geometrie liegt der Hamiltonschen Mechanik zugrunde und ist zur Zeit ein sehr aktives Forschungsgebiet; in dieser Vorlesung wird sie aber weiter keine Rolle spielen. Neben diesen *klassischen Geometrien* gibt es in bestimmten Dimensionen, z.B. in Dimension 7, *Ausnahmegeometrien*, die alle irgendwie mit der Oktavenalgebra zusammenhängen.

## 3.2 Isometrien des euklidischen Raums

Wir erinnern daran, dass eine lineare Abbildung oder Matrix  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  *orthogonal*<sup>27</sup> heißt, wenn ihre Spalten  $Ae_1, \dots, Ae_n$  eine *Orthonormalbasis* bilden:  $\delta_{ij} = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = (e_i)^T (A^T A) e_j$  oder  $A^T A = E$  (wobei  $E = (\delta_{ij})$  die Einheitsmatrix auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet). Das sind genau diejenigen linearen Abbildungen, die das Skalarprodukt erhalten:  $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , denn  $\langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T Ay = x^T A^T Ay$ . Natürlich bleibt insbesondere die Norm erhalten:  $|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2$ , aber es gilt auch die Umkehrung: Wenn  $A$  die Norm erhält,  $|Ax| = |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ , dann ist  $A$  bereits orthogonal. Das ergibt sich mit dem Polarisierungstrick (vgl. Beweis zu Satz 5, S.27): Es ist  $2\langle Ax, Ay \rangle = |A(x+y)|^2 - |Ax|^2 - |Ay|^2 = |x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2 = 2\langle x, y \rangle$ . Da diese Eigenschaften bei Komposition und Invertierung erhalten bleibt, bilden die orthogonalen Matrizen eine Untergruppe  $O(n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$ , die *orthogonale Gruppe*.

**Satz 7.** *Abstandserhaltende Abbildungen (Isometrien) des euklidischen  $\mathbb{R}^n$  sind affine Abbildungen, und eine affine Abbildung  $x \mapsto Ax + b$  ist eine Isometrie genau dann, wenn  $A \in O(n)$ .*

**Beweis:** Nach Satz 6 sind Strecken durch eine rein metrische Eigenschaft gekennzeichnet, die unter Isometrie erhalten bleibt. Eine Isometrie  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bildet also Strecken auf Strecken und damit auch Geraden auf Geraden ab. Außerdem ist  $F$  auch parallelentreu, denn Parallelen sind Geraden von konstantem Abstand voneinander. Daher ist  $F$  affin, also  $F(x) = Ax + b$

<sup>27</sup>Es sollte besser *orthonormal* heißen, aber "orthogonal" hat sich eingebürgert.

für eine lineare Abbildung  $A$  und einen Vektor  $b$ . Dann ist  $|Fx - Fy| = |Ax + b - Ay - b| = |Ax - Ay| = |A(x - y)|$ , und  $|A(x - y)| = |x - y|$  für alle  $x, y$  genau dann, wenn  $A \in O(n)$ .  $\square$

Die Isometrien des  $\mathbb{R}^n$  bilden also eine Untergruppe der affinen Gruppe, die *euklidische Gruppe*  $E(n)$ ; sie ist ähnlich wie die affine Gruppe ein *semidirektes Produkt* (vgl. die Übungsaufgaben 6 und 16) der orthogonalen Gruppe  $O(n)$  und der Translationsgruppe  $\mathbb{R}^n$ . Insbesondere schreibt sich jede Isometrie  $F$  als Komposition einer orthogonalen Abbildung mit einer Translation:  $F = T_b A$ . Wenn die orthogonale Abbildung  $A$  positive Determinante hat ( $A \in SO(n)$ ) und damit orientierte Basen wieder in orientierte Basen überführt, so heißt  $F$  eine *orientierte Isometrie* oder *eigentliche Bewegung*.<sup>28</sup>

### 3.3 Klassifikation von Isometrien

Eine besondere Rolle unter den Isometrie spielen die *Hyperebenenspiegelungen*. Die Spiegelung an einer affinen Hyperebene  $H \subset \mathbb{R}^n$  ist die Isometrie  $S$ , die die Punkte von  $H$  fest lässt und jeden Punkt auf einer Seite von  $H$  auf sein Gegenüber im gleichen Abstand auf der anderen Seite von  $H$  abbildet. Wenn  $H$  durch den Ursprung geht, also ein linearer Unterraum ist, sprechen wir von einer *linearen Hyperebenenspiegelung*; in diesem Fall ist  $S(x) = x - 2 \frac{\langle x, h \rangle}{\langle h, h \rangle} h$  für alle  $x$ , wobei  $h \neq 0$  ein Vektor senkrecht zu  $H$  ist; die Komponente von  $x$  senkrecht zu  $H$  muss zweimal abgezogen werden, um “auf die andere Seite” zu kommen.

**Satz 8.** *Jede nichttriviale orthogonale Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  ist Komposition von höchstens  $n$  linearen Hyperebenenspiegelungen. Jede Isometrie des  $\mathbb{R}^n$  ist Komposition von höchstens  $n + 1$  Hyperebenenspiegelungen.*

**Beweis:** Wir zeigen die erste Aussage durch Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  gibt es nur eine einzige nichttriviale orthogonale Abbildung, nämlich  $x \mapsto -x$ , und diese ist Spiegelung an der “Hyperebene”  $0$ . Ist nun  $A \in O(n)$  und zufällig  $Ae_n = e_n$ , so bildet  $A$  den Unterraum  $\mathbb{R}^{n-1} = (e_n)^\perp$  auf sich

---

<sup>28</sup>Zwei Basen eines  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraums heißen *gleichorientiert*, wenn die Übergangsmatrix zwischen ihnen positive Determinante hat. Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Basen, und es gibt genau zwei Äquivalenzklassen. Die Auswahl einer der beiden Klassen nennen wir eine *Orientierung* des Vektorraums, Eine Basis, die zu dieser Klasse gehört, heißt dann eine *orientierte Basis*. Im  $\mathbb{R}^n$  ist die Orientierung durch die Klasse der Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  gegeben.

selbst ab und  $A' := A|_{\mathbb{R}^{n-1}} \in O(n-1)$ . Nach Induktionsvoraussetzung ist  $A'$  Komposition von Spiegelungen an  $k \leq n-1$  Hyperebenen  $H'_1, \dots, H'_k \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Dann ist auch  $A$  Komposition von  $k$  Spiegelungen an den Hyperebenen  $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$  mit  $H_i = H'_i + \mathbb{R}e_n$ .

Wenn aber  $Ae_n \neq e_n$ , so betrachten wir  $B = SA$ , wobei  $S$  die Spiegelung an der Hyperebene  $H = (Ae_n - e_n)^\perp$ , der Mittelsenkrechten auf der Strecke  $[e_n, Ae_n]$  ist. Dann bildet  $S$  die Vektoren  $e_n$  und  $Ae_n$  aufeinander ab und damit gilt  $Be_n = SAe_n = e_n$ . Nach dem vorigen Argument ist  $B$  Komposition von höchstens  $n-1$  linearen Hyperebenen Spiegelungen und  $A = SB$  Komposition von höchstens  $n$  solchen Spiegelungen. Damit ist die erste Aussage bewiesen.

Ist  $F$  nun eine beliebige Isometrie mit  $F(0) \neq 0$ , so betrachten wir die Spiegelung  $S$  an Hyperebene  $H$ , die die Mittelsenkrechte auf der Strecke  $[0, F(0)]$  ist (nämlich  $H = F(0)^\perp + \frac{1}{2}F(0)$ ); diese bildet die Punkte  $0$  und  $F(0)$  aufeinander ab. Dann ist die Abbildung  $A = SF$  linear und damit (als Isometrie) orthogonal, denn  $A(0) = S(F(0)) = 0$ . Also ist  $A$  Komposition von höchstens  $n$  Hyperebenen Spiegelung und  $F = SA$  ist Komposition von höchstens  $n+1$  Hyperebenen Spiegelungen.  $\square$

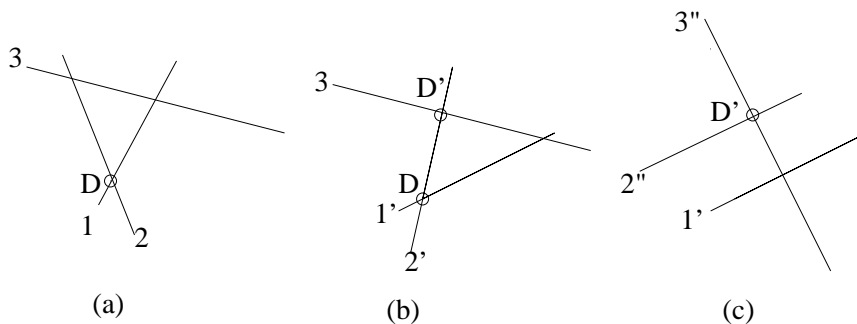
**Korollar 1.** *Jede nichttriviale Isometrie des  $\mathbb{R}^2$  gehört zu einer der folgenden vier Klassen:*

- (a) Translationen
- (b) Drehungen
- (c) Spiegelungen
- (d) Gleitspiegelungen

**Beweis:** Eine Isometrie des  $\mathbb{R}^2$  kann Komposition von 1, 2 oder 3 Spiegelungen sein. Bei 1 Spiegelung sind wir im Fall (c). Bei 2 Spiegelungen können die Achsen sich schneiden - dann erhalten wir eine Drehung um den Schnittpunkt der Achsen (Fall (b)), wobei der Drehwinkel das Doppelte des Winkels zwischen den beiden Achsen ist, oder sie können parallel sein und wir erhalten eine Translation senkrecht zu den beiden Achsen um das Doppelte ihres Abstandes. Im Fall von 3 Spiegelungen können alle drei Achsen parallel sein, dann ergibt sich eine Spiegelung an einer weiteren dazu parallelen Achse. Andernfalls sind höchstens zwei Achsen parallel, und die dritte schneidet die beiden anderen. Dann können wir die Achsen in eine spezielle Lage bringen und zeigen, dass es sich um eine Schubspiegelung handelt (Klasse (d)).

Grundlage dafür ist die folgende Beobachtung: Die Komposition von zwei Spiegelungen an nicht parallelen Achsen ist eine Drehung um deren Schnittpunkt, aber die gleiche Drehung erhalten wir auch, wenn wir das Achsenpaar um einen beliebigen Winkel um den Schnittpunkt drehen.

Die gegebene Isometrie sei  $F = S_3 S_2 S_1$ , und die Achsen der drei Spiegelungen  $S_1, S_2, S_3$  werden entsprechend mit 1, 2, 3 bezeichnet. Wir können annehmen, dass die Achsen 1 und 2 einen Schnittpunkt  $D$  besitzen: Sollten sie parallel sein, so schneiden sich nach Annahme jedenfalls die Achsen 2 und 3, und nach einer Drehung dieses Achsenpaares um den Schnittpunkt schneiden sich 1 und 2; dabei wurden zwar  $S_2$  und  $S_3$  einzeln, aber nicht ihre Komposition  $S_3 S_2$  verändert. Nun drehen wir die Achsen 1 und 2 um ihren Schnittpunkt  $D$  (Figur (a)) und erhalten ein neues Achsenpaar  $(1', 2')$  durch  $D$ , wobei  $2'$  die Achse 3 in einem Punkt  $D'$  im rechten Winkel schneidet (Figur (b)). Danach drehen wir das Achsenpaar  $(2', 3)$  um  $D'$ ; das neue Achsenpaar  $(2'', 3'')$  hat die Eigenschaft, dass  $3''$  senkrecht und  $2''$  parallel zu  $1'$  ist (Figur (c)). Jetzt ist  $F = S_3 S_2 S_1 = S_3 S_2' S_1' = S_3'' S_2'' S_1'$ , und somit ist  $F$  die Komposition der Translation  $T = S_2'' S_1'$  (die Spiegelachsen  $2''$  und  $1'$  sind ja zueinander parallel) mit der Spiegelung  $S_3''$ , deren Spiegelachse parallel zur Translationsrichtung von  $T$  ist. So eine Abbildung ist eine *Gleitspiegelung*.  $\square$



**Korollar 2.** Jede orientierte orthogonale Abbildung des  $\mathbb{R}^3$  besitzt eine Achse: Ist  $A \in O(3)$  orientiert, d.h.  $\det A > 0$ , dann gibt es einen Vektor  $a \neq 0$  mit  $Aa = a$ .

**Beweis:**  $A$  kann Komposition von 1,2 oder 3 linearen Ebenenpiegelungen sein, aber weil  $\det A > 0$ , sind 1 oder 3 Ebenenspiegelungen nicht möglich. Also ist  $A = S_1 S_2$ , wobei  $S_1, S_2$  Spiegelungen an zwei Ebenen  $H_1, H_2$  durch 0 sind. Diese schneiden sich in einer Gerade  $\mathbb{R}a$ , die unter  $S_1$  und  $S_2$ , also unter  $A$  punktweise fest bleibt.



**Korollar 3.** *Jede orientierte Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  ist eine Schraubung, d.h. eine Drehung gefolgt von einer Translation in Richtung der Drehachse.*

**Beweis:** Die gegebene Isometrie sei  $F = T_b A$  mit  $A \in SO(3)$ . Dann gibt es einen Fixvektor  $a$  von  $A$ . Wir betrachten die orthogonale Zerlegung  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}a \oplus a^\perp$ ; jeder Vektor  $x \in \mathbb{R}^3$  zerfällt eindeutig in  $x = x_a + x_\perp$  mit  $x_a \in \mathbb{R}a$  und  $x_\perp \in a^\perp$ ; insbesondere  $b = b_a + b_\perp$ . Dann ist  $Ax = x_a + Ax_\perp$  und  $Fx = x_a + b_a + Ax_\perp + b_\perp$ . Die letzten beiden Summanden  $Ax_\perp$  und  $b_\perp$  liegen in  $a^\perp$ , und wir definieren die Isometrie  $F^\perp$  der Ebene  $a^\perp$  durch  $F^\perp(x_\perp) = Ax_\perp + b_\perp$ . Diese ist orientiert, aber keine Translation, also nach Korollar 1 eine Drehung um ein Drehzentrum sei  $c \in a^\perp$ . Die Isometrie  $F$  ist also die Komposition der Drehung  $x = x_a + x_\perp \mapsto x_a + F^\perp x_\perp$  mit Drehachse  $c + \mathbb{R}a$  mit der Translation  $T_{b_a}$  in Richtung der Drehachse.  $\square$

**Korollar 4.** *Jede Isometrie des  $\mathbb{R}^3$  gehört zu einer der folgenden drei Typen:*

- (a) *die triviale Fortsetzung einer Isometrie von  $\mathbb{R}^2$  auf  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ,*
- (b) *eine Schraubung,*
- (c) *eine Drehspiegelung: Spiegelung und Drehung in der Spiegelebene.*

**Beweis:** (Skizze) Nach Korollar 3 müssen wir nur noch den nicht-orientierten Fall untersuchen, also eine Isometrie  $F$ , die aus (einer oder) drei Spiegelungen besteht. Wenn die drei Spiegel drei parallele Geraden enthalten, dann liegt der Fall (a) vor. Andernfalls schneiden sich zwei der drei Spiegel in einer Geraden, die auch den dritten Spiegel trifft. Dieser Schnittpunkt wird von allen drei Spiegelungen festgelassen; er ist also ein Fixpunkt unserer Abbildung  $F$ , und wir können ihn in den Ursprung 0 legen. Die drei Spiegel schneiden eine Sphäre mit Zentrum 0 in drei Großkreisen. Durch einen ähnlichen Prozess wie im Beweis von Korollar 1 (drehen von je zwei Spiegeln um ihre Schnittlinie) können wir erreichen, dass der dritte Spiegel die beiden anderen senkrecht schneidet; das Ergebnis ist eine Drehspiegelung.  $\square$

### 3.4 Platonische Körper

Ein *platonischer Körper*<sup>29</sup> im  $\mathbb{R}^3$  ist eine konvexe Menge, die von regelmäßigen ebenen Vielecken begrenzt wird; diese sind alle kongruent, und jede Ecke

---

<sup>29</sup>Plato, 427 - 347 v. Chr.

sieht genau gleich aus. Es gibt 5 solcher Körper: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Warum gibt es nicht mehr? Dazu betrachten wir eine Ecke eines solchen Körpers mit den dort angrenzenden Vielecken, den *Stern* der Ecke; dieser bestimmt den Körper bereits eindeutig (siehe unten). Die Innenwinkel aller Vielecke, die dort zusammenkommen, müssen sich zu einem Wert  $< 360^\circ$  aufsummieren, damit eine räumliche Ecke entstehen kann. Bei regelmäßigen Dreiecken ist der Innenwinkel  $60^\circ$ ; es dürfen in jeder Ecke also 3, 4 oder 5 Dreiecke aneinanderstoßen (Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder); 6 Dreiecke bilden bereits ein ebenes Muster ( $6 \cdot 60 = 360$ ) und keine räumliche Ecke mehr. Bei regelmäßige Vierecken (Quadraten) ist dieser Winkel  $90^\circ$ ; daher können nur 3 von ihnen an einer Ecke zusammenkommen (Würfel), denn 4 bilden bereits ein Ebenes Muster ( $4 \cdot 90 = 360$ ). Auch bei Fünfecken können nur 3 zusammenkommen (Dodekaeder), denn der Winkel ist  $108^\circ$  und  $4 \cdot 108 > 360$ . Sechsecke kommen gar nicht mehr vor, denn bereits drei von ihnen bilden ja ein ebenes Muster (Bienenwabenmuster), und höhere Vielecke mit Winkel  $> 120^\circ$  kommen erst recht nicht mehr in Betracht; die Liste der Platonischen Körper ist also vollständig.

Gibt es “platonische Körper” auch in anderen Dimensionen? Dazu müssen wir erst den Begriff genau klären. Ein  $n$ -dimensionales *Polytop*  $P \subset \mathbb{R}^n$  ist der Durchschnitt von endlich vielen *Halbräumen*  $H_{v,\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, v \rangle \geq \lambda\}$  (mit  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Ein  $n$ -dimensionales Polytop wird von endlich vielen  $(n - 1)$ -dimensionalen Polytope begrenzt, den *Seiten*, deren Seiten wiederum  $(n - 2)$ -dimensionale Polytope sind usw. Eine absteigende Kette von Seiten  $P \supset S_1 \supset S_2 \dots \supset S_n$  bis hinunter zu einem Punkt  $S_n$  nennen wir eine *Fahne*. Die *Symmetriegruppe*  $G_P$  eines Polytops  $P$  ist die Menge aller Isometrien des  $\mathbb{R}^n$ , die die Teilmenge  $P \subset \mathbb{R}^n$  invariant lassen:  $G_P = \{F \in E(n); F(P) = P\}$ . Ein Polytop heißt *regulär*, wenn seine Symmetriegruppe transitiv auf der Menge der Fahnen wirkt. Insbesondere ist die Menge der Ecken  $v_1, \dots, v_N$  und damit auch deren Summe  $s = \sum_i v_i$  invariant unter  $G_P$ . Somit lassen alle Elemente von  $G$  den Punkt  $s$  fest, und weil wir  $s$  als Ursprung 0 wählen können, ist  $G_P \subset O(n)$ . Jede  $(n - 2)$ -dimensionale Seite  $S_2$  liegt in genau einer linearen Hyperebene  $H$ , und die Spiegelung an  $H$  gehört zu  $G_P$  und vertauscht die beiden an  $S_2$  angrenzenden Seiten.

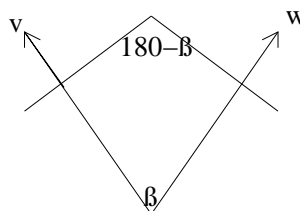
Ist  $v$  eine Ecke von  $P$ , so bezeichnen wir die Vereinigung aller an  $v$  angrenzenden Seiten von  $P$  als *Stern* von  $v$ . Dieser bestimmt das ganze Polytop bereits eindeutig, denn die übrigen Seiten erzeugen wir durch sukzessive Spiegelungen an den (bereits bekannten)  $(n - 2)$ -dimensionalen Seiten.

Die  $n$ -dimensionalen Polytope für  $n = 2$  sind die regelmäßigen Vielecke, für  $n = 3$  die Platonischen Körper. In jeder beliebiger Dimension  $n$  gibt es wenigstens drei reguläre Polytope:

1. Das *Simplex*, die Verallgemeinerung des Tetraeders, mit den  $n+1$  Ecken  $e_1, \dots, e_{n+1}$  in der Hyperebene  $D := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_i x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , die wir mit  $\mathbb{R}^n$  identifizieren können,
2. den *Würfel* mit den  $2^n$  Ecken  $(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$ ,
3. den *Ko-Würfel*, die  $n$ -dimensionale Verallgemeinerung des Oktaeders, mit den  $2n$  Ecken  $\pm e_1, \dots, \pm e_n$ .

Das zugehörige Polytop ist jeweils die konvexe Hülle der Eckenmenge. Dodekaeder und Ikosaeder passen aber nicht in dieses Schema; gibt es noch weitere Ausnahmen? Die Antwort ist erstaunlich: nur noch in Dimension  $n = 4$ .

Wir können die regulären Polytope in  $\mathbb{R}^4$  ganz ähnlich klassifizieren wie die in  $\mathbb{R}^3$ . Sie werden von gleichartigen 3-dimensionalen regulären Polytopen, also platonischen Körpern begrenzt. An jeder (eindimensionalen) Kante müssen mindestens drei solche Körper zusammenkommen, und wie vorher die Eckenwinkel müssen sich nun die Kantenwinkel zu weniger als  $360^\circ$  aufaddieren (denn der Schnitt von  $P$  mit einer Hyperebene senkrecht zur Kante ist ein dreidimensionales konvexes Polytop, deren Eckenwinkelsumme somit kleiner als  $360^\circ$  ist). Beim Tetraeder sind die Kantenwinkel knapp  $70^\circ$  (Übung 32); wir können also 3,4 oder 5 Tetraeder um eine Kante herumlegen. Bei Würfeln sind die Kantenwinkel  $90^\circ$ , und wir können nur drei von ihnen um eine Kante herum anordnen (mit vier würden wir den dreidimensionalen Raum füllen). Für den Oktaeder lässt sich der Kantenwinkel ebenfalls leicht berechnen: Eine der Begrenzungsflächen hat die Eckpunkte  $e_1, e_2, e_3$  und damit den Normalenvektore  $v = e_1 + e_2 + e_3$ , und eine Nachbarfläche wird durch die Punkte  $e_1, e_2, -e_3$  aufgespannt und hat somit dem Normalenvektor  $w = e_1 + e_2 - e_3$ . Der Winkel  $\beta$  zwischen  $v$  und  $w$  erfüllt  $\cos \beta = \frac{\langle v, w \rangle}{|v||w|} = \frac{1}{3}$ , also ist  $\beta$  gut  $70^\circ$ .

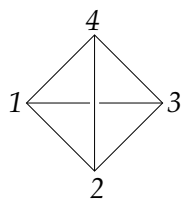


Der gesuchte Kantenwinkel  $\alpha = 180^\circ - \beta$  ist also knapp  $110^\circ$ , und damit passen noch 3 Oktaeder um eine Kante. Auch der Kantenwinkel des Dodekaeders ist kleiner als  $120^\circ$  und wir können deshalb auch noch drei Dodekaeder um eine Kante anordnen. Beim Ikosaeder dagegen ist der Kantenwinkel zu groß. Wir haben also 6 mögliche Anordnungen gefunden: jeweils 3,4,5 Tetraeder, 3 Würfel, 3 Oktaeder oder 3 Dodekaeder um eine Kante.

Die zugehörigen 4-dimensionalen platonischen Körper mit Tetraedern als Seiten<sup>30</sup> sind das Simplex, der Ko-Würfel und ein neues Polytop mit 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 regelmäßigen Dreiecken und 600 Tetraedern, das *600-Zell*. Die drei anderen Fälle mit Würfeln, Oktaedern und Dodekaedern als Seiten ergeben den 4-dimensionalen Würfel und zwei neue Körper, dem *24-Zell* mit 24 Oktaedern und Ecken sowie 96 Kanten und Dreiecken und dem *120-Zell*, das *dual* zum 600-Zell ist (die Ecken des *dualen Polytops* sind die Seitenmittelpunkte des gegebenen), mit 120 Dodekaedern, 720 regelmäßigen Fünfecken, 1200 Kanten und 600 Ecken. Das 24-Zell ist wie das Simplex *selbstdual*, und seine 24 Ecken sind die Würfecken  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  zusammen mit den Kowürfecken  $\pm 2e_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  (vgl. Übung 33). Das 600-Zell hat auch diese Ecken und noch 96 weitere, die aus dem Vektor  $(\pm\phi, \pm 1, \pm\phi^{-1}, 0)$  durch alle geraden Permutationen der Koordinaten entstehen; dabei ist  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  der goldene Schnitt (vgl. M. Berger, Geometry II, S. 32 - 36).

Dass es in den folgenden Dimensionen nur noch Simplex, Würfel und Kowürfel gibt, lässt sich wieder mit den Winkeln der Seitennormalen dieser sechs Körper begründen (Übung 32).

### 3.5 Symmetriegruppen von platonischen Körpern



Welche Symmetrien haben die platonischen Körper? Eine *Symmetrie eines Körpers* ist eine Isometrie des umgebenden Raums, die den Körper (als Teilmenge dieses Raums) invariant lässt. Die bekanntesten Symmetrien sind die

---

<sup>30</sup>Die Vereinigung aller Seiten, die an eine Kante angrenzen, der *Stern* der Kante, bestimmt das reguläre Polytop ebenso wie der Stern einer Ecke.

Ebenen-Spiegelungen; die zugehörigen Spiegel (Fixebenen) heißen *Symmetrieebenen*. Beim Tetraeder (siehe Figur) sehen wir sofort die Symmetrieebenen; z.B. ist die Spiegelung an der Ebene, die die Gerade 24 und den Mittelpunkt der Strecke  $\overline{13}$  enthält, eine Symmetrie des Tetraeders, die die Punkte 2 und 4 fix lässt sowie 1 und 3 miteinander vertauscht. Das gleiche können wir mit jedem anderen Punktepaar  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  machen. Die Symmetriegruppe des Tetraeders enthält also alle Vertauschungen von zwei Eckpunkten, während die beiden anderen Eckpunkte fix bleiben. Da alle Permutationen Verkettungen von Transpositionen (Vertauschungen) sind, enthält die Symmetriegruppe des Tetraeders alle Permutationen der Menge  $\{1, 2, 3, 4\}$ , also die ganze Gruppe  $S_4$  (*Symmetrische Gruppe*). Andererseits definiert jede Symmetrie eine Permutation der vier Eckpunkte, und diese Permutation bestimmt die Symmetrie eindeutig, somit ist  $S_4$  die Symmetriegruppe des Tetraeders. Ebenso sieht man, dass  $S_n$  die Symmetriegruppe des  $n$ -dimensionalen Simplex ist. Wollen wir statt aller Symmetrien nur die Drehungen bestimmen, die Isometrien, die die Orientierung erhalten (Determinante 1), dann müssen wir uns auf diejenigen Permutationen der Eckenmenge  $\{1, 2, 3, 4\}$  beschränken, die Verkettungen einer geraden Anzahl von Transpositionen sind, denn die Transpositionen sind Ebenenspiegelungen, haben also Determinante  $-1$ . Diese Permutationen bilden die Untergruppe  $A_4$ , die *Alternierende Gruppe*; die Drehgruppe des Tetraeders ist also die  $A_4$ .

Die nächsten beiden platonischen Körper, Würfel und Oktaeder, sind eng miteinander verbunden: Man erhält den Oktaeder als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Würfels und umgekehrt den Würfel als konvexe Hülle der Flächenmittelpunkte des Oktaeders; die beiden Körper sind *dual* zueinander, wie man sagt. Die Zahlentripel

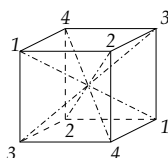
(Flächenzahl, Kantenzahl, Eckenzahl)

werden bei Dualität umgedreht:  $(6, 12, 8)$  beim Würfel,  $((8, 12, 6)$  beim Oktaeder. Ebenso sind Dodekaeder und Ikosaeder mit den Tripeln  $(12, 30, 20)$  und  $(20, 30, 12)$  zueinander dual, während das Tetraeder  $(4, 6, 4)$  zu sich selbst dual ist.<sup>31</sup> Die Symmetriegruppe von dualen Körpern ist die gleiche, denn eine Symmetrie des Körpers erhält auch die Menge der Flächenmittelpunkte. Wir

---

<sup>31</sup>Das Konzept der Dualität funktioniert genauso bei höheren Dimensionen. In Dimension 4 sind die platonischen Körper mit drei Tetraedern und mit drei Oktaedern pro Eckpunkt zu sich selbst dual, der vierdimensionale Würfel (3 Würfel pro Ecke) ist zum vierdimensionalen Oktaeder (4 Tetraeder pro Ecke) dual, und die beiden übrigen Körper (5 Tetraeder bzw. 3 Dodekaeder pro Ecke) sind ebenfalls dual zueinander.

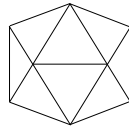
wollen zunächst nur die Drehgruppe des Würfels bestimmen. Es gibt genauso viele Drehungen wie (achsenparallele) Lagen oder Positionen des Würfels; die Drehgruppe wirkt *einfach transitiv* auf der Menge der Positionen. Wieviele Positionen gibt es? Wir können jede der 6 Würfelseiten nach oben legen, und danach noch jede der 4 Kanten einer Seite nach vorn bringen; damit ist die Lage bestimmt. Es gibt also  $6 \cdot 4 = 24$  Lagen und ebenso viele Drehungen des Würfels. Bei jeder Drehung werden die vier Raumdiagonalen des Würfels permutiert. Es gibt  $4! = 24$  solcher Permutationen und ebenso viele Drehungen, deshalb ist die Drehgruppe des Würfels genau die Permutationsgruppe der vier Raumdiagonalen. Zum Beispiel entspricht der Transposition (23), der Vertauschung der Diagonalen 2 und 3 ohne Veränderung der Diagonalen 1 und 4, die 180-Grad-Drehung in der Ebene 14, die durch die Diagonalen 1 und 4 aufgespannt wird.



Die volle Symmetriegruppe ist jetzt leicht zu ermitteln, denn anders als das Tetraeder ist der Würfel invariant unter der Punktspiegelung am Mittelpunkt (Antipodenabbildung), gegeben durch die Matrix  $-I = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ . Dies ist eine Spiegelung, denn  $\det(-I) = (-1)^3 = -1$ . Da die Drehgruppe eine Untergruppe vom Index 2 in der Symmetriegruppe ist (die Komposition von je zwei Spiegelungen ist eine Drehung), ist die volle Symmetriegruppe des Würfels einfach Drehgruppe  $\times \{\pm I\} = S_4 \times \{\pm I\}$ ; sie hat 48 Elemente.

Das gleiche Argument gilt für das Ikosaeder, das ja ebenfalls invariant unter der Antipodenabbildung ist; wir haben also ebenfalls Symmetriegruppe = Drehgruppe  $\times \{\pm I\}$ . Also ist nur die Drehgruppe zu bestimmen. Die Idee mit den Diagonalen funktioniert allerdings diesmal nicht so gut: Der Ikosaeder hat 12 Eckpunkte und damit 6 Diagonalen, die  $6! = 720$  Permutationen zulassen würden, es gibt aber nur  $20 \cdot 3 = 60$  Positionen und ebenso viele Drehungen des Ikosaeders: Jede der 20 Seiten kann oben liegen, und jede der drei Kanten vorn, damit ist die Position bestimmt. Die Drehgruppe des Ikosaeders ist also lediglich eine (interessante!) Untergruppe der Permutationsgruppe  $S_6$ .

Aber es gibt andere Gegenstände im Ikosaeder, die bei Drehungen permutiert werden. Wir können den Ikosaeder so positionieren, dass drei Kantenpaare parallel zu den Koordinatenachsen (“in Achsenlage”) sind.



Die Figur zeigt die orthogonale Projektion einer solchen Lage auf eine Koordinatenebene: Die beiden senkrechten Kanten liegen in der Zeichenebene, ebenso die vordere horizontale Kante, die mit der hinteren horizontalen bei der Projektion zur Deckung kommt, und die Punkte oben und unten sind Projektion von Kanten senkrecht zur Bildebene.<sup>32</sup> Man kann sich in das Ikosaeder ein Oktaeder einbeschrieben denken, dessen 6 Eckpunkte genau auf den Mittelpunkten dieser 6 Kanten liegen.

Nach einer 72-Grad-Drehung des Ikosaeders um eine der Diagonalen kommen 6 neue Kanten in Achsenlage; keine von der vorherigen Kanten bleibt in Achsenlage. Wir können daher die 30 Kanten in 5 Pakete zu je 6 Kanten einteilen, die zueinander parallel oder senkrecht sind. Anders gesagt: Es gibt 5 verschiedene Einbettungen des Oktaeders in das Ikosaeder, die sich jeweils durch eine Drehung unterscheiden. Diese 5 Oktaeder oder 5 Kantenpakete sind unsere Gegenstände, die permutiert werden. Fünf Gegenstände lassen 120 Permutationen zu; die Drehgruppe des Ikosaeders ist also eine Untergruppe der  $S_5$  von der halben Ordnung 60. Es gibt nur eine solche Untergruppe: die  $A_5$ . Die Drehgruppe des Ikosaeders ist also  $A_5$  und die volle Symmetriegruppe ist  $A_5 \times \{\pm I\}$ . Sie hat 120 Elemente wie die  $S_5$ , aber sie ist nicht die  $S_5$ , denn es gibt keine ungerade Permutation, die mit allen geraden Permutationen kommutiert.

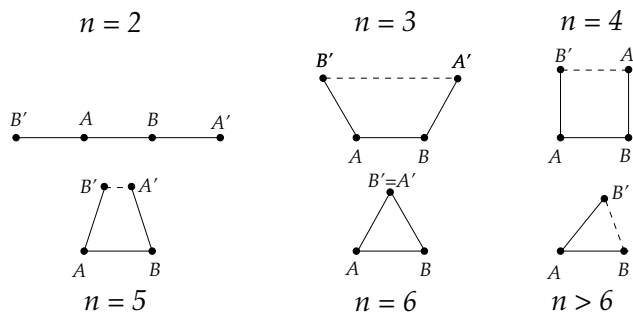
### 3.6 Endliche Drehgruppen und Kristallgruppen

Die Drehgruppen der platonischen Körper (“platonische Gruppen”) sind endliche Untergruppen der allgemeinen Drehgruppe  $SO_3$ . Gibt es noch weitere solche Gruppen, oder ist jede endliche Untergruppe der  $SO_3$  in einer der drei platonischen Gruppen enthalten? Eine weitere Serie von solchen Gruppen gibt es gewiss noch: die Drehungen und Umklappungen eines regulären  $n$ -Ecks. Aber dieses kann in gewissem Sinn auch als platonischer Körper ver-

<sup>32</sup>Breite und Höhe der Figur sind gleich. Sie stehen zur Kantenlänge im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Das ist leicht zu sehen: Die Ikosaederkante ist ja die Kante des Fünfecks, das von den fünf Nachbarecken eines Eckpunktes gebildet wird, und die Breite und Höhe der Figur (der Abstand der parallelen Seiten) ist die Diagonale in diesem Fünfeck.

standen werden, als *Di-eder*, ein (allerdings recht platter) Körper mit zwei Flächen. Wir werden sehen, dass damit die Liste der wirklich vollständig ist.

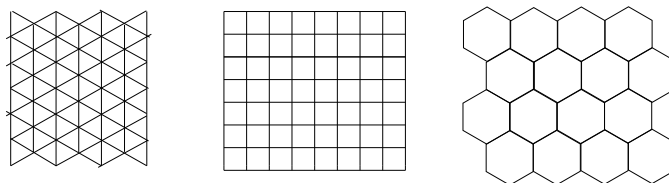
Endliche Untergruppen der  $SO_3$  bestehen aus endlich vielen isometrischen Transformationen der Kugelfläche. Wir wollen zunächst ein analoges Problem auf der Ebene statt auf der Kugelfläche betrachten. Vielleicht stellen wir uns ein Tapetenmuster und dessen Symmetriegruppe vor. Wegen der unendlichen Ausdehnung der Ebene sollen die Bahnen dieser Gruppe zwar nicht unbedingt endlich sein (das Tapetenmuster setzt sich periodisch fort und wiederholt sich unendlich oft), aber *diskret*.<sup>33</sup> Wir interessieren uns für die Drehungen in so einer Gruppe  $G$ . Jede Drehung  $g \in G$  besitzt einen Fixpunkt  $A$ , genannt *Drehzentrum* von  $g$ . Da  $g$  endliche Ordnung  $n$  haben muss (sonst wäre die Bahn der Untergruppe  $\{g^k; k \in \mathbb{Z}\}$  nicht diskret), ist der Drehwinkel  $360/n$  Grad, und wenn dieser Winkel so klein wie möglich ist, nennt man  $n$  die *Ordnung* des Drehzentrums  $A$ . Für jedes  $h \in G$  ist  $hgh^{-1}$  eine Drehung derselben Ordnung mit Drehzentrum  $hA$ . Wir betrachten daher die Bahn von  $A$  unter der ganzen Gruppe  $G$ . Wenn  $A$  nicht von ganz  $G$  fixiert wird, besteht diese aus mehreren Punkten. Wir betrachten zwei Punkte  $A$  und  $B$  in dieser Bahn mit minimalen Abstand; die zugehörigen Drehungen der Ordnung  $n$  seien  $g$  und  $h$ , und wir können annehmen, dass  $g$  gegen und  $h$  mit dem Uhrzeigersinn dreht. Durch Anwenden von  $g$  und  $h$  erhalten wir zwei neue Drehzentren  $A' = hA$  und  $B' = gB$ .



Im Fall  $n = 5$  ist der Abstand der Drehzentren  $B'$  und  $A'$  kleiner als der von  $A$  und  $B$ , und im Fall  $n > 6$  liegt  $B$  näher bei  $B'$  als bei  $A$ ; beides steht im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass  $A$  und  $B$  Drehzentren von minimalem Abstand sind. Diese Fälle sind also unmöglich. Die Fälle  $n \in \{2, 3, 4, 6\}$  kommen dagegen wirklich vor:

<sup>33</sup>Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *diskret*, wenn für jedes  $x \in D$  ein  $\epsilon > 0$  existiert mit  $D \cap B_\epsilon(x) = \{x\}$ .





Dieses Resultat  $n \in \{2, 3, 4, 6\}$  nennt man die *kristallographische Beschränkung*. Es ist gültig für alle Drehzentren, deren Bahn aus mehr als einem Punkt besteht. Insbesondere gilt es, wenn  $G$  eine Translation  $t_v$  enthält, denn dann ist jede Bahn periodisch in  $v$ -Richtung und hat damit sogar unendlich viele Elemente.<sup>34</sup>

Die gleiche Idee können wir auf eine endliche<sup>35</sup> Untergruppe  $G$  der orthogonalen Gruppe  $O_3$  anwenden; diese operiert auf der Kugelfläche  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = 1\}$  statt auf der Ebene  $\mathbb{R}^2$ . Wie vorher können wir die Bahnen der Drehzentren untersuchen; diese treten jetzt immer in Antipodenpaaren  $\{A, -A\}$  auf, denn es sind die Schnitte der Drehachsen mit der Einheitssphäre  $S^2$ . Wenn der  $G$ -Orbit eines Drehzentrums  $A$  nur ein oder zwei Elemente hat,  $A$  und ggf.  $-A$ , dann kann der Drehwinkel  $360/n$  Grad für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  sein. Dann müssen aber alle anderen Elemente der Gruppe  $G$  diese Achse  $\mathbb{R}A$  und damit auch die Ebene  $A^\perp$  invariant lassen; wir kommen daher auf den Fall der Ebene bei festem Ursprung zurück. Jede solche Gruppe  $G$  besteht entweder nur aus Drehungen, dann ist sie die zyklische Gruppe  $C_n$ , die von der Drehung mit Drehwinkel  $360/n$  Grad erzeugt wird, oder sie besitzt auch Spiegelungen oder besser Umklappungen, die  $A$  auf  $-A$  abbilden, dann ist es die zweifache Erweiterung der  $C_n$ , die *Diedergruppe*  $D_n$ .<sup>36</sup>

<sup>34</sup>Das Argument gilt (mit einer Einschränkung) auch für diskrete Untergruppen  $G$  der dreidimensionalen euklidischen Gruppe  $E(3)$ , sofern  $G$  eine Translation  $t_v$  enthält. Dabei sind die Drehzentren durch Drehachsen zu ersetzen, und die Einschränkung ist, dass die betrachtete Drehachse nicht parallel zu  $v$  ist. *Kristalle* sind dreifach periodisch, d.h. ihre Symmetriegruppe enthält drei linear unabhängige Translationen, und wir finden daher für jede Drehachse eine Translation, die nicht dazu parallel ist. Damit gilt die kristallographische Beschränkung, wobei wir zum Beweis anstelle von zwei Drehzentren mit minimalem Abstand nun zwei parallele Drehachsen mit minimalem Abstand betrachten; das Argument bleibt im Übrigen ungeändert. Es gibt also keine Kristalle, die eine Drehung der Ordnung 5 oder  $\geq 7$  zulassen. Daher der Name "kristallographische Beschränkung".

<sup>35</sup>Da  $O_n$  kompakt ist (beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ), ist jede diskrete abgeschlossene Teilmenge von  $O_n$  endlich, denn unendlich viele Elemente würden eine konvergente Teilfolge definieren.

<sup>36</sup>Ein *Dieder* = Zweiflächner ist eine polygonale Scheibe, die als entarteter Körper mit nur zwei berandenden Polygonen (Vorder- und Rückseite). Ein Dieder kann auch als ein

Wenn der Orbit des Drehzentrums  $A$  aber aus mindestens drei Punkten besteht und damit ein weiteres Drehzentrum  $B \neq \pm A$  enthält, dann können wir wie bei der kristallographischen Beschränkung vorgehen und annehmen, dass  $A$  und  $B$  in dem Orbit kleinsten Abstand haben. Wieder betrachten wir Drehungen  $g$  und  $h$  der Ordnung  $n$  mit Drehzentren  $A$  und  $B$ , die gegenläufig drehen, und wie vorher sehen wir, dass  $n > 6$  unmöglich ist: Sonst wäre  $B' = gB$  zu nahe an  $B$  (näher als  $A$ ). Aber auch  $n = 6$  ist diesmal nicht möglich, weil der Abstand auf der Sphäre kleiner ist als der entsprechende Abstand in der Ebene; die Großkreisbögen der Sphäre neigen sich (bei gleichem Winkel) stärker einander zu als die Geraden in der Ebene. Deshalb ist auch hier  $B'$  näher an  $B$  als  $A$ , was nicht sein darf. Es bleiben  $n \in \{5, 4, 3, 2\}$ .

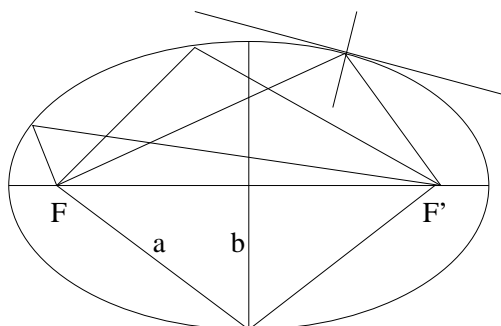
Der Fall  $n = 2$  ist etwas speziell; wir unterscheiden deshalb Gruppen, deren sämtliche Elemente Ordnung 2 haben von solchen, die Elemente von höherer Ordnung  $n \in \{3, 4, 5\}$  besitzen. Wir behandeln zunächst diesen letzteren Fall. Ist  $n = 5$  so sind  $B' = gB$  und  $A' = hA$  näher beieinander als  $A$  und  $B$ , was nur möglich ist, wenn  $A' = B'$ . Die Punkte  $A, B, A'$  bilden also ein gleichseitiges sphärisches Dreieck, und an jeder Ecke kommen (wegen  $n = 5$  fünf solcher Dreiecke zusammen. Die ganze Bahn von  $A$  besteht aus solchen Dreiecken, und diese müssen sauber aneinandergrenzen, denn wenn zwei von ihnen sich überschneiden, wäre die minimale Abstandsbedingung verletzt. Also ist die Sphäre mit solchen Dreiecken gepflastert; das ist der Ikosaeder. Die Gruppe  $G$  erhält diesen Ikosaeder, deren Eckpunkte ja eine Bahn von  $G$  bilden, also ist  $G$  eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Ikosaeders. Im Fall  $n = 4$  ist es ebenso: Weil die Punkte  $B'$  und  $A'$  auf der Sphäre näher zusammenrücken als in der Ebene, haben sie kleineren Abstand als  $A$  und  $B$  und müssen daher gleich sein. Wieder bilden die Punkte  $A, B, A'$  ein sphärisches Dreieck, aber diesmal kommen nur 4 Dreiecke in jedem Eckpunkt zusammen, und wir erhalten den Oktaeder. Ist schließlich  $n = 3$ , so gibt es verschiedene Möglichkeiten. Wenn  $B'$  und  $A'$  verschieden sind, dann sind sie Teil einer Kette aus 5 oder 4 Drehzentren; 6 oder mehr sind nicht möglich, weil die Innenwinkel 120 Grad sind; in der Ebene würde also ein regelmäßiges 6-Eck entstehen. Auf der Sphäre rücken die Punkte näher aneinander; 6 ist also schon nicht mehr möglich. Die Drehzentren schließen sich also zusammen zu einem sphärischen Fünfeck, Viereck oder Dreieck, und an jeder Ecke kommen 3 dieser Polygone zusammen; wir erhalten daher Dodekaeder, Würfel und Tetraeder.

---

(entarteter) Platonischer Körper angesehen werden.

Haben schließlich alle Elemente von  $G$  die Ordnung 2, so muss  $G$  kommutativ sein und kann nur aus den 180-Grad-Drehungen um drei orthogonale Achsen bestehen; diese Gruppe heißt *Kleinsche Vierergruppe* und ist Untergruppe der Drehgruppe des Würfels. Alle endlichen Untergruppen  $G \subset O_3$  sind also Untergruppen von Symmetriegruppen Platonischer Körper oder Dieder.

### 3.7 Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte

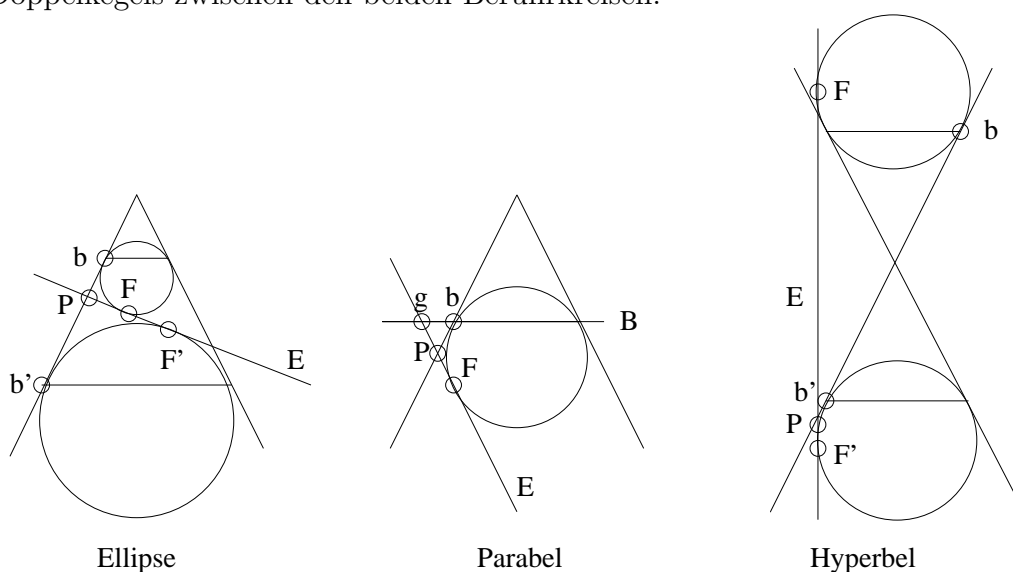


Eine *Ellipse* mit Hauptachsen  $a > b$  besitzt zwei *Brennpunkte*  $F, F'$  im Abstand  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  vom Mittelpunkt auf der langen Hauptachse. Die Summe der Abstände von jedem Punkt  $P$  auf der Ellipse zu den Brennpunkten ist konstant, und daher sind Winkel zwischen der Tangente in  $P$  und den beiden Strecken  $PF$  und  $PF'$  gleich (wäre einer der beiden Winkel kleiner, könnte man in dieser Richtung die Summe der Abstände verkürzen). Licht- oder Schallwellen, die von einem Brennpunkt  $F$  ausgehen und an der Ellipse reflektiert werden, kommen daher im Punkte  $F'$  wieder zusammen.

Diese Eigenschaft kann man (ebenso wie die entsprechenden Eigenschaften von Parabel und Hyperbel) mit Hilfe der definierenden Gleichung  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  berechnen, aber in der Geometrie macht es mehr Freude, eine solche Eigenschaft aus einer Figur abzulesen. Dies gelingt, wenn wir die Ellipse (oder Parabel oder Hyperbel) wirklich als *Kegelschnitt*, als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene  $E$  im Raum auffassen. Wir betrachten dazu zwei Kugeln, die gerade in den Kegel hineinpassen und die Ebene von oben und von unten berühren (*Dandelin'sche Kugeln*).<sup>37</sup> Die Fokalfpunkte  $F, F'$  der Ellipse sind gerade die Berührungspunkte der Ebene  $E$  mit den beiden Kugeln. Die Abstände

<sup>37</sup>Germinal Pierre Dandelin, 1794 - 1847

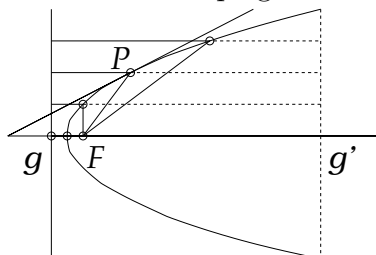
von  $P$  zu  $F$  und zum Berührkreis  $b$  der oberen Kugel sind gleich, weil alle Tangentenabschnitte von  $P$  auf die Kugel gleich lang sind (sie bilden die Mantellinien eines Kreiskegels), und ebenso ist der Abstand von  $P$  zu  $F'$  gleich dem Abstand zum Berührkreis  $b'$  der unteren Kugel. Die Summe der Abstände von  $P$  zu  $F$  und  $F'$  ist also gleich dem Abstand der beiden Berührkreise, und dieser ist unabhängig von der Wahl des Ellipsenpunktes  $P$ , also konstant. Bei der *Hyperbel* ist statt der Summe die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten konstant, nämlich gleich dem "Abstand" der beiden Berührkreise, genauer: gleich der Länge der Abschnitte der Mantellinien des Doppelkegels zwischen den beiden Berührkreisen.



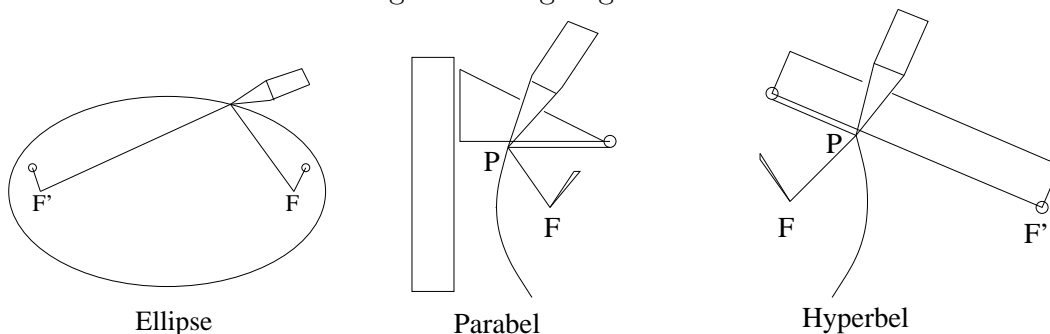
Auch bei der *Parabel* ist der Abstand von  $P$  zu  $F$  gleich dem zum Berührkreis  $b$ . Dieser liegt in einer Ebene  $B$ , die die Parabelebene  $E$  in einer Geraden  $g$  schneidet, und weil  $E$  parallel zu einer Erzeugenden des Kegels ist, sind die Abstände von  $P$  zum Berührkreis und zu  $g$  gleich (Gleichschenkligkeit des Dreiecks  $Pgb$  in der Figur). Die Abstände von  $P$  zum Punkt  $F$  und zur *Leitgeraden*  $g$  sind also gleich.<sup>38</sup> Betrachtet man eine Parallele  $g'$  zur Leitgeraden (siehe nachstehende Figur), so ist daher die Summe der Abstände von  $P$  zu  $F$  und zu  $g'$  gleich dem konstanten Abstand von  $g$  und  $g'$ . Wieder müssen daher

<sup>38</sup>Leitgeraden gibt es ebenso bei Ellipse und Hyperbel; so wie bei der Parabel ist die Leitgerade die Schnittlinie der Ebene  $E$  mit der Ebene des Berührkreises einer der Kugeln. Die Abstände von  $P$  zum Fokuspunkt und zur Leitgeraden sind aber nicht mehr gleich, sondern nur noch proportional; siehe Übung 34.

die beiden Winkel der beiden von  $P$  ausgehenden Strecken mit der Parabeltangente in  $P$  dieselben sein. Alle von  $F$  ausgehenden Lichtstrahlen werden also an der Parabel parallel zur Achse reflektiert, und ein aus dieser Richtung einfallendes paralleles Strahlenbündel wird in den Brennpunkt fokussiert; daher kommt die technische Anwendung des Paraboloids<sup>39</sup> in Lampen (z.B. Fahrradlampe) und bei Parabolspiegeln und Satellitenschüsseln.



Auf Grund dieser Eigenschaften ist es möglich, Ellipse, Parabel und Hyperbel mechanisch zu erzeugen. Am bekanntesten ist die Gärtner-Konstruktion der Ellipse, bei der ein Faden oder Strick an zwei Stellen, den Fokalfpunkten, fixiert und mit dem Zeichengerät straffgezogen wird.



Bei der Parabel fixiert man den Faden mit einem Ende im Fokalfunkt  $F$  und mit dem anderen an einer Ecke eines rechtwinkligen Dreiecks (z.B. Geodreiecks) und zieht den Faden mit dem Zeichengerät an der Kante des Dreiecks straff; nun lässt man das Dreieck mit der anderen Kante an einem Lineal (der Leitgeraden  $g$ ) entlanggleiten. Bei der Hyperbel schließlich fixiert man ein Ende eines Lineals an einem Punkt  $F'$  des Zeichenpapiers; den Faden befestigt man am anderen Ende des Lineals sowie an einem zweiten Punkt  $F$  auf dem Papier, zieht ihn am Lineal straff und dreht nun das Lineal um den fixierten Punkt  $F'$ .

<sup>39</sup>Das Paraboloid ist bekanntlich die Fläche  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ , die bei der Rotation einer Parabel um ihre Achse entsteht

## 4 Krümmung: Differentialgeometrie

### 4.1 Glattheit

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit Geraden, Ebenen, Unterräumen oder geradlinig begrenzten Objekten wie Dreiecken und Polytopen beschäftigt. Aber bereits die Kegelschnitte und Quadriken zeigen, dass nicht alle geometrisch interessanten Objekte geradlinig sind. Die *Differentialgeometrie* handelt von solchen nicht mehr geradlinigen, *krummen* Objekten, die im Kleinen aber noch immer annähernd wie affine Unterräume aussehen: Wenn man von einem Kreis oder einer Parabel nur ein kurzes Stück betrachtet, könnte man es für ein Geradenstück halten, und bis um 250 v.Chr. hielten die Menschen die Erde für eine ebene Scheibe.<sup>40</sup> Das umgangssprachliche Wort für diese Eigenschaft, im Kleinen keine Unebenheiten zu haben, ist “glatt”, im Gegensatz zu “rauh”. Der mathematische Ausdruck für diese Eigenschaft ist die Approximierbarkeit durch gerade, also lineare Objekte, und lineare Approximierbarkeit ist genau die *Differenzierbarkeit*.

Wie können wir solche glatten Objekte, z.B. krumme Linien oder Oberflächen, mathematisch beschreiben? Wie beschreiben wir denn lineare Objekte, z.B. einen  $m$ -dimensionalen linearen Unterraum  $W = \mathbb{R}^n$ ? Es gibt grundsätzlich nur zwei Arten: Entweder als *Urbild (Kern)* einer surjektiven linearen Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $k = n - m$ , d.h. als Lösungsmenge einer *Gleichung*  $W = F^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; F(x) = 0\}$ , oder als *Bild* einer injektiven linearen Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , also  $U = \varphi(\mathbb{R}^m)$ . Im letzteren Fall nennt man  $\varphi$  auch eine *Parametrisierung* von  $W$ ; mit Hilfe von  $\varphi$  werden die Punkte von  $W$  durch die Elemente von  $\mathbb{R}^m$  “durchnummeriert” oder, wie man sagt, *parametrisiert*. Auf beide Arten können wir auch unsere glatten Objekte beschreiben, nur müssen wir das Wort “linear” durch “differenzierbar” ersetzen. Die zweite Art durch Parametrisierung ist expliziter, deshalb werden wir uns in dieser Vorlesung darauf beschränken.

Wir erinnern daran, dass eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  *differenzierbar* heißt, wenn sie an jeder Stelle  $u \in \mathbb{R}^m$  in folgendem Sinn durch eine lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  approximiert werden kann: Für alle  $h \in \mathbb{R}^m$  gilt

$$\varphi(u + h) - \varphi(u) = Lh + o(h), \quad o(h)/|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (59)$$

---

<sup>40</sup>Eratosthenes von Kyrene, 276 - 194 v.Chr., bestimmte mit Hilfe von Schattenlängen an zwei verschiedenen Orten die Erdkrümmung und vermutete die Kugelgestalt der Erde

Die lineare Abbildung  $L$  ist von  $u$  abhängig und heißt *Ableitung* oder *Differential* oder *Jacobimatrix*<sup>41</sup> von  $\varphi$  im Punkt  $u$ ; statt  $L$  schreiben meist wir  $d\varphi_u$  (und im Fall  $m = 1$  auch  $\varphi'(u)$ ):

$$L = d\varphi_u. \quad (60)$$

Die Spalten dieser Matrix sind die *partiellen Ableitungen*, die wir  $\frac{\partial\varphi(u)}{\partial u_i}$  oder kürzer  $\partial_i\varphi(u)$  oder noch kürzer  $\varphi_i(u)$  nennen wollen ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$\varphi_i(u) = \partial_i\varphi(u) = d\varphi_u e_i \in \mathbb{R}^n. \quad (61)$$

Es ist selten, dass eine differenzierbare Abbildung  $\varphi$  auf dem ganzen Raum  $\mathbb{R}^m$  definiert ist; oft ist der Definitionsbereich nur ein *Gebiet* in  $\mathbb{R}^m$ , d.h. eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$ , die mit jedem Punkt auch noch eine kleine Kugel um diesen Punkt enthält und in der je zwei Punkte durch eine darin enthaltene Kurve miteinander verbunden werden können (*Zusammenhang*); wir werden eine solche Menge meist mit  $\mathbb{R}_o^m$  bezeichnen. Wir werden außerdem voraussetzen, dass die partiellen Ableitungen  $\varphi_i$  selbst wieder stetig oder sogar differenzierbar mit stetiger Ableitung (*stetig differenzierbar*) sind. Dann können wir auch partielle Ableitungen von  $\varphi_i$  betrachten, die wir  $\varphi_{ij}$  nennen; bekanntlich gilt

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji}. \quad (62)$$

Eine differenzierbare Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}_o^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Immersion*, wenn für jedes  $u \in \mathbb{R}_o^m$  die lineare Abbildung  $d\varphi_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv ist, wenn also die partiellen Ableitungen  $\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)$  (die Spalten von  $d\varphi_u$ ) an jeder Stelle  $u$  linear unabhängige Vektoren in  $\mathbb{R}^n$  sind. Wegen (59) sieht eine Immersion nahe  $u$  bis auf Konstanten<sup>42</sup> beinahe wie eine injektive lineare Abbildung aus, daher ist ihr Bild nahe  $\varphi(u)$  beinahe ein affiner Unterraum. Das sind die *glatten Objekte* der Differentialgeometrie: Bilder von Immersionen. Allerdings geht es uns in der Geometrie nicht um die Abbildung  $\varphi$  selber; sie ist ja nur die *Parametrisierung*, die Benennung der Punkte des eigentlichen Objekts, nämlich des Bildes von  $\varphi$ . Wie auch im linearen Fall gibt es viele andere Parametrisierungen, die dasselbe Objekt beschreiben, nämlich  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha$  für einen *Diffeomorphismus* (eine umkehrbar differenzierbare Abbildung)  $\alpha : \mathbb{R}_1^m \rightarrow \mathbb{R}_o^m$ , definiert auf einem anderen Gebiet  $\mathbb{R}_1^m \subset \mathbb{R}^m$ . Eine

<sup>41</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 - 1851

<sup>42</sup>Die Variable in (59) ist  $h$ , während  $u$  und  $\varphi(u)$  als Konstanten zu betrachten sind.

solche Abbildung  $\alpha$  benennt nur die Punkte von Bild  $\varphi$  um; wir nennen sie *Parameterwechsel*. Alle geometrischen Aussagen werden invariant gegenüber Parameterwechseln sein. Eine Immersion mit Dimension  $m = 1$  nennen wir *Kurve*, mit  $m = 2$  *Fläche* und mit  $m = n - 1$  *Hyperfläche*.

Der *Tangentialraum* einer Immersion  $\varphi : \mathbb{R}_o^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  in einem Parameterpunkt  $u \in \mathbb{R}^m$  ist der lineare Unterraum  $T_u := \text{Bild } d\varphi(u) \subset \mathbb{R}^n$  mit der Basis  $\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u)$ . Das orthogonale Komplement  $N_u := (T_u)^\perp$  heißt der *Normalraum* von  $\varphi$  in  $u$ . Tangential- und folglich auch Normalraum sind unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, denn für  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha$  und  $u = \alpha(\tilde{u})$  gilt nach Kettenregel

$$d\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = d\varphi_u d\alpha_{\tilde{u}}, \quad (63)$$

und damit Bild  $d\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} = \text{Bild } d\varphi_u$ , denn  $d\alpha_{\tilde{u}}$  ist invertierbar. Wenn Bild  $\varphi$  nicht “gerade” oder “eben”, also Teil eines  $m$ -dimensionalen Unterraums von  $\mathbb{R}^n$  ist, werden  $T_u$  und  $N_u$  von  $u$  abhängig sein; ihre Änderungen in Abhängigkeit von  $u$  werden wir im nächsten Abschnitt als *Krümmungen* definieren.

## 4.2 Fundamentalformen und Krümmungen

Der Einfachheit halber wollen wir uns auf die Betrachtung von Hyperflächen ( $n = m + 1$ ) beschränken. Dann ist der Normalraum eindimensional, also von nur einem Vektor erzeugt, und es gibt eine differenzierbare Abbildung  $\nu : \mathbb{R}_o^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $N_u = \mathbb{R} \cdot \nu(u)$  für alle  $u \in \mathbb{R}_o^m$ .<sup>43</sup> Wir können ohne Einschränkung zusätzlich  $|\nu(u)| = 1$  für alle  $u$  annehmen (nötigenfalls müssen wir zu  $\nu/|\nu|$  übergehen); eine solche Abbildung  $\nu$  heißt *Einheitsnormalenfeld* oder *Einheitsnormale*.

Für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  betrachten wir die auf  $\mathbb{R}_o^m$  definierten Funktionen

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle d\varphi \cdot e_i, d\varphi \cdot e_j \rangle, \\ h_{ij} &= \langle \varphi_{ij}, \nu \rangle = -\langle \varphi_i, \nu_j \rangle \stackrel{*}{=} -\langle d\varphi \cdot e_i, d\nu \cdot e_j \rangle; \end{aligned} \quad (64)$$

<sup>43</sup>Man erhält  $\nu$  folgendermaßen: Für jedes  $u \in \mathbb{R}_o^{n-1}$  ist die Abbildung  $x \mapsto \det(\varphi_1(u), \dots, \varphi_{n-1}(u), x)$  eine Linearform auf dem  $\mathbb{R}^n$  (ein Zeilenvektor), differenzierbar von  $u$  abhängig. Der zugehörige Spaltenvektor ist  $\nu(u)$ , also  $\det(\varphi_1(u), \dots, \varphi_{n-1}(u), x) = \langle \nu(u), x \rangle$ . Im Fall  $n = 3$  ist dies das Kreuzprodukt:  $\nu = \varphi_1 \times \varphi_2$ . Offensichtlich ist  $\langle \nu, \varphi_i \rangle = \det(\varphi_1, \dots, \varphi_i, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_i) = 0$ , also ist  $\nu(u) \in N_u$ .



man beachte bei  $\stackrel{*}{=}$ , dass  $\langle \varphi_i, \nu \rangle = 0$  und daher  $\langle \varphi_{ij}, \nu \rangle + \langle \varphi_i, \nu_j \rangle = \partial_j \langle \varphi_i, \nu \rangle = 0$ . Für jedes  $u \in \mathbb{R}_o^m$  sind  $(g_{ij}(u))$  und  $(h_{ij}(u))$  die Matrizen von symmetrischen Bilinearformen  $g_u, h_u$  auf  $\mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} g_u(v, w) &= \sum g_{ij}(u) v_i w_j = \langle d\varphi_u v, d\varphi_u w \rangle, \\ h_u(v, w) &= \sum h_{ij}(u) v_i w_j = -\langle d\varphi_u v, d\nu_u w \rangle. \end{aligned} \quad (65)$$

Wir nennen  $g$  die *erste Fundamentalform* und  $h$  die *zweite Fundamentalform* der Immersion  $\varphi$ . Die erste Fundamentalform ist nichts als das Skalarprodukt auf dem Tangentialraum  $T_u \subset \mathbb{R}^{m+1}$ , den wir durch die Basis  $f_1(u), \dots, f_m(u)$  mit  $\mathbb{R}^m$  identifiziert haben. Sie beschreibt daher die Verzerrung der Längenmessung beim Übergang vom Parameterbereich  $\mathbb{R}_o^m$  auf die im  $\mathbb{R}^{m+1}$  liegende Hyperfläche Bild  $\varphi$  durch die Abbildung  $\varphi$ . Die zweite Fundamentalform beschreibt die Änderung der Einheitsnormale  $\nu(u)$  und damit des Normalraums  $N_u$  in Abhängigkeit von  $u$ .

Im einfachsten Fall  $m = 1$  (ebene Kurven) ist  $g = g_{11} = |\varphi'|^2$  und  $h = h_{11} = \langle \varphi'', \nu \rangle = -\langle \varphi', \nu' \rangle$ . Natürlich hängt  $h$  von der Parametrisierung ab: Je größer die Geschwindigkeit  $\varphi'$  ist, mit der die Kurve durchlaufen wird, desto größer ist  $h$ . Eine Parameter-unabhängige Größe ist der Quotient  $\kappa = h/g$ : Ist  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha$  eine andere Parametrisierung, so ist  $\tilde{\nu} = \nu \circ \alpha$ . Daher ist  $\tilde{\varphi}' = \varphi' \alpha'$  und  $\tilde{\nu}' = \nu' \alpha'$  und damit  $\tilde{h} = (\alpha')^2 h$  und  $\tilde{g} = (\alpha')^2 g$ , und  $\tilde{h}/\tilde{g} = h/g$ .<sup>44</sup> Diese Größe

$$\kappa = \frac{h}{g} = \frac{\langle \varphi'', \nu \rangle}{|\varphi'|^2} = \frac{-\langle \varphi', \nu' \rangle}{|\varphi'|^2} \quad (66)$$

heißt die *Krümmung* der ebenen Kurve  $\varphi : \mathbb{R}_o^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ein Kreis mit Radius  $r$  hat bei gewöhnlicher Durchlaufungsrichtung und innerer Einheitsnormale die Krümmung  $\kappa = 1/r$ : Ist  $\varphi(u) = (r \cos u, r \sin u)$ , so ist  $\nu(u) = -(\cos u, \sin u)$  und daher  $h(u) = -\langle \varphi'(u), \nu'(u) \rangle = r$  und  $g(u) = |\varphi'(u)|^2 = r^2$ . Allgemein bedeutet *positive Krümmung* eine Linkskurve und *negative Krümmung* eine Rechtskurve, und  $1/|\kappa|$  gibt den Radius des bestapproximierenden Kreises an.

In beliebiger Dimension  $m$  können wir dasselbe tun, denn  $g = (g_{ij})$  ist eine positiv definite symmetrische Matrix und somit invertierbar. Wir definieren deshalb analog zu (66) die folgende Matrix  $A$ , die wir *Weingartenabbildung*<sup>45</sup>

<sup>44</sup>Wir haben aus Bequemlichkeit die Argumente weggelassen: Die Funktionen  $\varphi', \nu', g, h$  sind an der Stelle  $u$  zu nehmen und  $\tilde{\varphi}', \tilde{\nu}', \alpha', \tilde{g}, \tilde{h}$  an der Stelle  $\tilde{u}$  mit  $\alpha(\tilde{u}) = u$ .

<sup>45</sup>Julius Weingarten, 1836 - 1910

nennen und die die Kurvenkrümmung verallgemeinert:

$$A := g^{-1}h \tag{67}$$

Also ist  $gA = h$  und damit

$$g(Av, w) = h(v, w) \tag{68}$$

für alle  $v, w \in \mathbb{R}^m$  (die Abhängigkeit von  $u \in \mathbb{R}_o^m$  unterdrücken wir in der Notation). Wegen  $h(v, w) = h(w, v)$  ist  $A$  selbstadjungiert bezüglich des durch  $g$  gegebenen Skalarproduktes. Damit ist diese Matrix reell diagonalisierbar mit einer  $g$ -orthonormalen Eigenbasis; die Eigenwerte  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  werden *Hauptkrümmungen* genannt. Bei Parameterwechseln  $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \alpha$  wird  $A_u$  mit  $d\alpha_{\tilde{u}}$  konjugiert, was die Eigenwerte (Hauptkrümmungen) nicht verändert.

Wichtiger noch als die Hauptkrümmungen selbst sind ihre Summe und ihr Produkt:

$$H = \frac{1}{m} \sum \kappa_i = \frac{1}{m} \text{Spur } A, \quad K = \prod \kappa_i = \det A, \tag{69}$$

die *mittlere Krümmung* und die *Gauß-Kronnecker-Krümmung*.<sup>46</sup> Ihre geometrische Bedeutung können wir hier nur andeuten. Im Fall  $m = 2$  beschreibt  $H$  die Änderung des Flächeninhaltes bei Deformationen der Fläche; insbesondere können Flächen mit  $H = 0$  bei lokalen Deformationen nur größer werden und heißen deshalb *Minimalflächen*.  $K$  dagegen beschreibt den Flächeninhalt des Bildes von  $\nu$  im Vergleich zum Flächeninhalt des Bildes von  $\varphi$ . Entsprechendes gilt auch für beliebige Dimension  $m$ . Der bedeutendste Beitrag von C.F.Gauß zur Differentialgeometrie war der Nachweis, dass  $K$  bei Flächen nur von  $g$  abhängig ist und damit invariant bleibt unter *Verbiegungen*, Deformationen, bei denen  $g$  sich nicht ändert. Wenn man zum Beispiel ein ebenes Blatt Papier zu einem Zylinder oder Kegel rollt, bleibt die Gaußkrümmung konstant Null, denn eine Hauptkrümmung bleibt Null. Diese Beobachtung war eigentlich die Geburtsstunde eines neuen Zweiges der Geometrie, bei der nur noch ein differenzierbar von  $u$  abhängiges Skalarprodukt  $g_u$  auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  (später auf einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit) vorgegeben und seine Eigenschaften studiert wird. Dieses Gebiet wird *Riemannsche Geometrie* genannt, und  $g$  heißt *Riemannsche Metrik*, denn es war

---

<sup>46</sup>Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855, Leopold Kronecker, 1823 - 1891

Bernhard Riemann,<sup>47</sup> ein Schüler von Gauß, der diesen Schritt im Jahre 1854 vollzog. Ohne diese Entwicklung wäre z.B. die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins nicht denkbar gewesen.<sup>48</sup>

### 4.3 Charakterisierung von Sphären und Hyperebenen

**Satz 9.** *Es sei  $\varphi : \mathbb{R}_o^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  eine  $C^3$ -Hyperfläche (d.h. alle  $\varphi_{ij}$  sind stetig differenzierbar) mit  $m \geq 2$  und für alle  $u \in \mathbb{R}_o^m$  sei  $A_u$  ein Vielfaches der Identität, also  $A_u v = \kappa(u)v$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  (Nabelpunkts-Hyperfläche). Dann ist Bild  $\varphi$  in einer Sphäre oder einer Hyperebene enthalten.*

**Beweis:** Nach Voraussetzung ist  $h_{ij} = \kappa g_{ij}$ . Da  $h_{ij} = -\langle \nu_i, \varphi_j \rangle$  und  $g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ , folgt  $\langle \nu_i, \varphi_j \rangle = -\kappa \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  und damit

$$\nu_i = -\kappa \varphi_i, \quad (70)$$

denn die  $\nu_i$  sind eine Linearkombination der  $\varphi_j$ : Wegen  $\langle \nu, \nu \rangle = 1$  ist  $\langle \nu_i, \nu \rangle = \frac{1}{2} \partial_i \langle \nu, \nu \rangle = 0$ ; also ist  $\nu_i(u) \in \nu(u)^\perp = T_u$ . Differentiation von (70) ergibt

$$\begin{aligned} \nu_{ij} &= -(\kappa_j \varphi_i + \kappa \varphi_{ij}), \\ \nu_{ji} &= -(\kappa_i \varphi_j + \kappa \varphi_{ji}). \end{aligned}$$

Da  $\nu_{ij} = \nu_{ji}$  und  $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$  (denn  $\varphi$  ist dreimal und  $\nu$  immer noch zweimal stetig differenzierbar), folgt

$$\kappa_i f_j = \kappa_j f_i. \quad (71)$$

Da die partiellen Ableitungen  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  für  $i \neq j$  (hier benötigen wir die Dimensionsvoraussetzung  $m \geq 2$ ) linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten in (71) verschwinden. Also verschwinden alle partiellen Ableitungen  $\kappa_i$  von  $\kappa$  und daher ist  $\kappa$  eine Konstante.

(Von jetzt an kann  $m$  beliebig ( $\geq 1$ ) sein.) Wir unterscheiden die Fälle  $\kappa = 0$  und  $\kappa \neq 0$ . Im Fall  $\kappa = 0$  erhalten wir  $\nu_i = 0$  aus (70), also ist  $\nu$  ein konstanter Einheitsvektor. Für einen festen Parameterpunkt  $u_o$  setzen wir  $s = \langle \varphi(u_o), \nu \rangle$ . Dann liegt Bild  $\varphi$  in der Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; \langle x, \nu \rangle = s\}$ . Jeder Parameterpunkt  $u \in \mathbb{R}_o^m$  kann ja mit  $u_o$  durch eine differenzierbare Kurve  $t \mapsto u(t)$  verbunden werden, und  $\frac{d}{dt} \langle \varphi(u(t)), \nu \rangle = \langle d\varphi_{u(t)} u'(t), \nu \rangle = 0$ ,

<sup>47</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann. 1826 - 1866

<sup>48</sup>Albert Einstein, 1879 - 1955

denn  $d\varphi_{u(t)}u'(t) \in \text{Bild } d\varphi_{u(t)} = T_{u(t)} \perp \nu$ . Also ist  $\langle \varphi(u(t)), \nu \rangle = \text{const} = s$  und damit  $\varphi(u) \in H$ .

Im Fall  $\kappa \neq 0$  können wir ohne Einschränkung  $\kappa > 0$  annehmen (andernfalls gehen wir zur Normale  $-\nu$  über) und setzen  $R = 1/\kappa$ . Nach (70) ist  $\nu_j = -\frac{1}{R}\varphi_j$  und damit  $\varphi_j + R\nu_j = 0$ , also  $(\varphi + R\nu)_j = 0$ . Somit ist  $\varphi + R\nu = M = \text{const}$  und damit  $|\varphi - M| = |R\nu| = R$ , und Bild  $\varphi$  ist in der Sphäre vom Radius  $R$  mit Mittelpunkt  $M$  enthalten.  $\square$

## 4.4 Orthogonale Hyperflächensysteme

Eine  $C^2$ -Abbildung  $\Phi : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (gleiche Dimension!) heißt *orthogonales Koordinatensystem*, wenn die partiellen Ableitungen  $\Phi_i$  überall  $\neq 0$  sind und senkrecht aufeinander stehen:  $\Phi_i \perp \Phi_j \neq 0$  für  $i \neq j$ .

Ein Beispiel sind die *Kugelkoordinaten*  $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi(r, \phi, \theta) = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (72)$$

Geometrisch interpretiert ist  $r$  der Abstand des Punktes  $x = \Phi(r, \phi, \theta)$  vom Ursprung,  $\phi$  der Winkel zwischen der  $x_1$ -Achse und der Projektion von  $x$  in die  $x_1x_2$ -Ebene, und  $\theta$  ist der Winkel zwischen  $x$  und der  $x_3$ -Achse. Dies lässt sich auf beliebige Dimensionen  $n$  verallgemeinern: Zunächst konstruiert man eine Parametrisierung der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  mit orthogonalen partiellen Ableitungen, also  $\varphi : \mathbb{R}_o^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit Bild  $\varphi \subset S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$  und  $\varphi_i \perp \varphi_j$  für  $i \neq j$ . Dies geschieht induktiv: Für  $n = 2$  setzt man  $\varphi(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$ , und wenn man bereits eine solche Parametrisierung  $\bar{\varphi} : \mathbb{R}_o^{n-2} \rightarrow S^{n-2}$  gefunden hat, so definiert man  $\varphi : \mathbb{R}_o^{n-2} \times (0, \pi) \rightarrow S^{n-1}$ ,  $\varphi(u, \theta) = \bar{\varphi}(u) \sin \theta + e_n \cos \theta$ . Nun setzt man  $\Phi : (0, \infty) \times \mathbb{R}_o^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Phi(r, u) = r\varphi(u)$ .

Wie das Beispiel zeigt, ist ein orthogonales Koordinatensystem  $\Phi$  nicht immer umkehrbar (die benutzte Abbildung  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $\varphi(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$  ist es nicht; sie umwickelt die Kreislinie  $S^1$  unendlich oft.) Da aber die Ableitung  $d\Phi_w$  an jeder Stelle  $w \in \mathbb{R}_o^n$  umkehrbar ist (die  $n$  partiellen Ableitungen, die Spalten von  $d\Phi_w$ , sind ja orthogonal und ungleich 0, also linear unabhängig), ist  $\Phi$  nach dem Umkehrsatz in einem vielleicht kleineren Gebiet  $\mathbb{R}_1^n$  um  $w$  herum umkehrbar. Wir werden daher ohne Einschränkung der Allgemeinheit zusätzlich annehmen, dass  $\Phi$  umkehrbar ist.

Man interpretiert orthogonale Koordinatensysteme  $\Phi : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  auch *orthogonale Hyperflächensysteme*: Schränkt man  $\Phi$  ein auf eine Hyperebene  $\mathbb{R}_{i,s}^{n-1}$ :

=  $\{w \in \mathbb{R}_o^n; w_i = s\}$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $s \in \mathbb{R}$ , so erhält man eine Hyperfläche  $\varphi^{i,s}$  mit Normalenvektor  $\Phi_i$ , insgesamt also  $n$  Scharen von Hyperflächen  $(\varphi^{1,s})_s$  bis  $(\varphi^{n,s})_s$ . Durch jeden Punkt geht genau eine Hyperfläche von jeder Schar, und ihre Normalenvektoren stehen senkrecht aufeinander. Im Beispiel der Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$  sind die drei Hyperflächenscharen die konzentrischen Kugelflächen  $r = const$ , die vertikalen Halbebenen  $\phi = const$  sowie die Kreiskegel  $\theta = const$ . Ein anderes Beispiel, *konfokale Quadriken*, wird in Übung 36 beschrieben. Orthogonale Hyperflächensysteme haben große geometrische Bedeutung, u.a. weil man ihre Hauptkrümmungsrichtungen kennt:

**Satz 10.** Ist  $\Phi : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein orthogonales Koordinatensystem mit zugehörigen orthogonalen Hyperflächenscharen  $\varphi^{i,s}$ , so sind die Hauptkrümmungsrichtungen der Hyperflächen  $\varphi^{i,s}$  die kanonischen Basisvektoren  $e_j$ ,  $j \neq i$ .

**Beweis:** Wir halten  $i$  und  $s$  fest und betrachten die Hyperebene  $\varphi = \varphi^{i,s}$ . Ihre Einheitsnormale ist  $\nu = \Phi_i/|\Phi_i|$ ; die Fundamentalformen sind  $g_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  und  $h_{ij} = -\langle \nu_i, \varphi_j \rangle$ . Wir müssen zeigen, dass  $e_j$  für  $j \neq i$  Eigenvektor von  $g^{-1}h$  ist, also  $g^{-1}he_j$  ein Vielfaches von  $e_j$  ist, oder  $he_j$  ein Vielfaches von  $ge_j$ . Das wiederum heißt  $h_{jk} = \lambda g_{jk}$  für alle  $k$ , und damit muss  $\nu_j$  ein Vielfaches von  $\varphi_j$  sein und also wegen der Orthogonalität der partiellen Ableitungen  $\varphi_k = \Phi_k$  auf allen  $\varphi_k$  mit  $k \neq i, j$  senkrecht stehen. Nun ist  $\nu = \frac{1}{|\Phi_i|}\Phi_i$  und damit  $\langle \nu_j, \Phi_k \rangle = \langle (\frac{1}{|\Phi_i|})_j \Phi_i + \frac{1}{|\Phi_i|} \Phi_{ij}, \Phi_k \rangle$ . Weil  $\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle = 0$ , müssen wir also  $\langle \Phi_{ij}, \Phi_k \rangle = 0$  für je drei verschiedene Indizes  $i, j, k$  zeigen.

Dies gilt, weil der von drei Indizes abhängige Ausdruck  $S_{ijk} = \langle \Phi_{ij}, \Phi_k \rangle$  "zu viele" Symmetrien hat: Einerseits können wir  $i$  und  $j$  vertauschen, ohne den Wert zu ändern, denn  $\Phi_{ij} = \Phi_{ji}$ . Andererseits können wir auch  $i$  und  $k$  vertauschen und ändern dabei nur das Vorzeichen: Da  $\langle \Phi_i, \Phi_k \rangle = 0 = const$ , ist  $S_{ijk} = \langle \Phi_{ij}, \Phi_k \rangle = -\langle \Phi_i, \Phi_{kj} \rangle = -S_{kji}$ . Die Symmetrie und die Antisymmetrie vertragen sich aber nicht miteinander. Was passiert nämlich mit  $S_{ijk}$ , wenn wir das noch fehlende Indexpaar  $j, k$  vertauschen? Dies können wir auf zwei Weisen berechnen: Für die Permutation (23) gilt einerseits (23) = (12)(13)(12) und andererseits (23) = (13)(12)(13) ("*Zopfrelation*") und damit folgt aus den beiden Symmetrien:

$$\begin{aligned} S_{ijk} &= S_{jik} = -S_{kij} = -S_{ikj}, \\ S_{ijk} &= -S_{kij} = -S_{jki} = S_{ikj}. \end{aligned}$$

Also ist  $S_{ikj} = -S_{ikj}$ , und damit ist der Ausdruck Null, was zu zeigen war.  $\square$

## 5 Winkel: Konforme Geometrie

### 5.1 Konforme Abbildungen

Es gibt Abbildungen, die alle Winkel erhalten, nicht aber die Abstände; wir haben z.B. bereits die zentrischen Streckungen kennengelernt, die diese Eigenschaft haben. Da die Winkel die Form einer Figur unabhängig von ihrer Größe bestimmen, heißt die Geometrie des Winkels auch *konforme Geometrie*. Wie auch in anderen Teilgebieten werden wir vorwiegend ihre Automorphismen studieren, also die *winkeltreuen* bijektiven Abbildungen. Wir werden sehen, dass diese keineswegs linear sein müssen, nicht einmal geradentreu, dennoch wir wollen zunächst alle winkeltreuen linearen Abbildungen auf den  $\mathbb{R}^n$  studieren.

**Lemma.** *Ein lineare Abbildung  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (mit  $n \geq 2$ ) ist winkeltreu genau dann, wenn  $\mu L \in O(n)$  für ein  $\mu > 0$ .*

**Beweis:** Da die kanonischen Basisvektoren  $e_1, \dots, e_n$  den Winkel  $90^\circ$  einschließen, gilt dasselbe für ihre Bilder  $Le_1, \dots, Le_n$ . Außerdem ist auch  $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ , also gilt auch  $0 = \langle Le_i + Le_j, Le_i - Le_j \rangle = |Le_i|^2 - |Le_j|^2$ , also haben alle  $n$  Vektoren  $Le_i$  dieselbe Länge  $|Le_i| = \lambda$ , und für  $\mu = \frac{1}{\lambda}$  ist  $(\mu Le_1, \dots, \mu Le_n)$  eine Orthonormalbasis, also (als Matrix gelesen) ein Element von  $O(n)$ .  $\square$

Was bedeutet Winkeltreue bei nicht-linearen Abbildungen? Sie sollen glatte Kurven in glatte Kurven überführen, und der Schittwinkel von zwei Kurven soll derselbe sein wie der Schnittwinkel ihrer Bilder. Die erste Forderung legt es nahe, differenzierbare Abbildungen, genauer:  $C^1$ -Diffeomorphismen (umkehrbar differenzierbare Abbildungen mit stetigen partiellen Ableitungen) zu betrachten. Ein  $C^1$ -Diffeomorphismus  $F : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  (zwei Gebiete im  $\mathbb{R}^n$ ) heißt *winkeltreu* oder *konform*, wenn sich zwei Kurven in  $\mathbb{R}_o^n$  unter demselben Winkel schneiden wie ihre Bilder unter  $F$ : Sind  $a, b : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}_o^n$  reguläre Kurven (eindimensionale Immersionen) mit  $a(0) = b(0) = x$ , dann soll

$$\angle((Fa)'(0), (Fb)'(0)) = \angle(a'(0), b'(0)) \quad (73)$$

gelten. Setzt man  $a'(0) = v$  und  $b'(0) = w$ , so ist nach Kettenregel  $(Fa)'(0) = dF_x v$  und  $(Fb)'(0) = dF_x w$ ; die lineare Abbildung  $dF_x$  muss also winkeltreu sein und nach dem Lemma muss  $dF_x \in \mathbb{R}_+^* \cdot O(n)$  gelten für alle  $x \in \mathbb{R}_o^n$ ; das können wir auch als Definition der Konformität nehmen.

Im Fall  $n = 2$  besteht  $\mathbb{R}_+^*O(2)$  aus zwei Sorten von Matrizen: die orientierten mit positiver Determinante,  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  und die nicht orientierten mit negativer Determinante,  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ . Die erste Matrix  $A$  ist bei Identifizierung von  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$  gleich der Multiplikation mit der komplexen Zahl  $a + ib$ , denn  $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(ay + bx) = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Eine differenzierbare Abbildung auf  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , deren Jacobimatrix an jeder Stelle die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist, heißt *komplex differenzierbar* oder *holomorph*.<sup>49</sup> Durch Nachschalten eine Spiegelung, z.B. der komplexen Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$ , gehen nicht-orientierte konforme Abbildungen in orientierte über; die nicht orientierten sind also holomorphe Abbildungen gefolgt von der komplexen Konjugation (*antiholomorphe Abbildungen*). Konforme Geometrie in Dimension 2 ist also nichts anderes als die Theorie holomorpher Funktionen in einer komplexen Variablen. Von solchen Funktionen gibt es eine ungeheure Vielfalt; jede konvergente Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzkreis eine holomorphe Funktion dar. Wir werden sehen, dass dies für Dimensionen  $n \geq 3$  vollkommen anders ist.

## 5.2 Inversionen

Gibt es auch nichtlineare konforme Abbildungen in höheren Dimensionen? Ein wichtiges Beispiel ist die *Inversion*

$$F : \mathbb{R}_*^n \rightarrow \mathbb{R}_*^n, \quad F(x) = \frac{x}{|x|^2}. \quad (74)$$

Sie lässt die Einheitssphäre punktweise fest,  $Fx = x$  falls  $|x| = 1$ , und sie ist ihre eigene Umkehrabbildung:  $F^{-1} = F$  (solche Abbildungen nennt man *Involutionen*):  $F(Fx) = Fx/|Fx|^2 = \frac{x}{|x|^2}/\frac{1}{|x|^2} = x$ . Sie ist also eine Art Spiegelung an der Einheitssphäre.

Um die Konformität zu sehen, müssen wir die Ableitung von  $F$  berechnen:  $dF_x v = \frac{d}{dt} F(x + tv)|_{t=0}$ . Nun ist  $F(x + tv) = \frac{p(t)}{q(t)}$  mit  $p(t) = x + tv$  und  $q(t) = \langle x + tv, x + tv \rangle$ , also  $p'(0) = v$  und  $q'(0) = 2\langle v, x \rangle$ . Damit ist  $dF_x v = \frac{1}{q(0)^2} (p'q - pq')(0) = \frac{1}{|x|^4} v|x|^2 - 2x\langle v, x \rangle = \frac{1}{|x|^2} (v - 2\langle v, \frac{x}{|x|} \rangle \frac{x}{|x|}) = \frac{1}{|x|^2} S_x v$ , wobei

<sup>49</sup>Die übliche Definition ist etwas anders:  $F$  heißt *komplex differenzierbar* auf einem Gebiet  $\mathbb{C}_o \subset \mathbb{C}$ , wenn für jedes  $z \in \mathbb{C}_o$  der Grenzwert  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} =: c$  existiert, d.h.  $O(h) := \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - c \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Mit anderen Worten,  $F(z+h) - F(z) = ch + o(h)$  mit  $o(h) = hO(h)$  und  $o(h)/|h| \rightarrow 0$ , d.h.  $F$  ist differenzierbar, und die Ableitung  $df_z$  ist die Multiplikation mit der komplexen Zahl  $c$ .

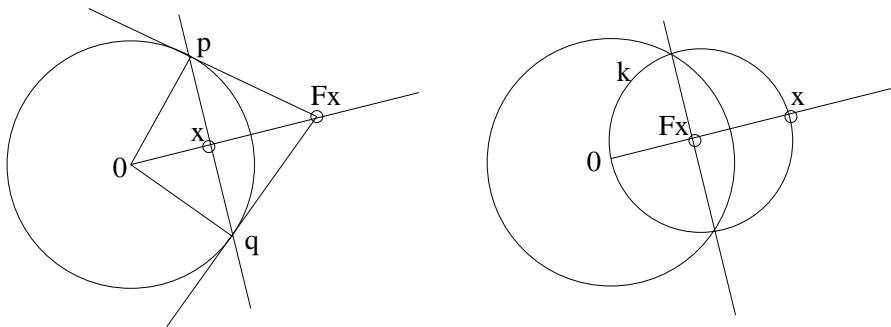
$S_x$  die Spiegelung an der Hyperebene  $x^\perp$  bezeichnet. Also ist  $dF_x \in \mathbb{R}_+^*O(n)$  und  $F$  konform.

Die Inversion  $F$  hat noch eine andere Eigenschaft: Sie ist *kugeltreu*, d.h. sie erhält die Menge der Sphären und Hyperebenen; eine Hyperebene wird als Sphäre (Kugelfläche) vom Radius  $\infty$  angesehen. Sphären und Hyperebenen sind nämlich Lösungsmengen von Gleichungen des folgenden Typs:

$$\alpha|x|^2 + \langle x, b \rangle + \gamma = 0. \quad (75)$$

Substituieren wir  $x = Fy$ , so folgt  $0 = \alpha|\frac{y}{|y|^2}|^2 + \langle \frac{y}{|y|^2}, b \rangle + \gamma = \frac{1}{|y|^2}(\alpha + \langle y, b \rangle + \gamma|y|^2)$  und daraus  $\alpha + \langle y, b \rangle + \gamma|y|^2 = 0$ , also erfüllt  $y$  wieder eine solche Gleichung.<sup>50</sup>

Weil die Inversion kugeltreu ist und die Einheitssphäre punktweise festhält, kann man sie in Dimension 2 geometrisch konstruieren. Da  $|Fx| = 1/|x|$ , geht  $Fx \rightarrow 0$  falls  $|x| \rightarrow \infty$ . Jede Gerade wird daher in einen Kreis oder eine Gerade durch 0 abgebildet, und die Schnittpunkte mit dem Einheitskreis bleiben dabei fest. Das Bild der Geraden  $pq$  in der nachstehenden Figur ist daher der Kreis  $k$  durch  $p, q$  und 0, und da auch der Strahl  $0x$  in sich überführt wird, bildet  $F$  den Schnittpunkt von  $0x$  mit  $pq$  auf den Schnittpunkt von  $0x$  mit  $k$  ab und umgekehrt. Das Dreieck  $(0, p, Fx)$  in der linken Figur ist rechtwinklig, und  $k$  ist der Thaleskreis über der Strecke  $[0, x]$  in der rechten Figur.



Analog definiert man die *Inversion an einer beliebigen Kugel K* mit Mittelpunkt 0 und Radius  $r$ , indem man  $F$  mit der zentrischen Streckung  $S_r$

<sup>50</sup>Aus der Kugeltreue folgt übrigens noch einmal die Konformität, denn auch das Differential  $dF_x$  muss (als Approximation von  $F$ ) kugeltreu sein und wegen der Linearität dann die Einheitssphäre in eine konzentrische Sphäre überführen; eine solche lineare Abbildung erhält die Norm bis auf einen Faktor und ist daher ein Vielfaches einer orthogonalen Abbildung.



konjugiert:

$$F_K(x) = rF(x/r) = \frac{r^2}{|x|^2} x \quad (76)$$

Die Inversion an einer Kugel  $K$  mit beliebigem Mittelpunkt  $M$  erhält man durch Konjugation mit der Translation  $T_M$ :

$$F_K(x) = \frac{r^2}{|x - M|^2}(x - M) + M. \quad (77)$$

In jedem Fall bleibt die Sphäre  $K$  punktweise fest, und  $M, x, Fx$  liegen auf einem Strahl mit  $|x - M||Fx - M| = r^2$ .

### 5.3 Konforme und kugeltreue Abbildungen

**Satz 11.** (Satz von Liouville)<sup>51</sup> Jede konforme Abbildung  $F : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  für  $n \geq 3$  ist auch kugeltreu. Genauer ist  $F$  eine Verkettung von Inversionen und Hyperebenen Spiegelungen.

**Beweis:** Die Idee ist: Die Nabelpunktseigenschaft von Sphären und Hyperebenen bleibt bei konformen Abbildungen erhalten, weil wir in jeder Richtung orthogonale Hyperflächensysteme darauf aufbauen können; jede Richtung ist also Hauptkrümmungsrichtung. Genauer sei  $S \subset \mathbb{R}_o^n$  eine Sphäre, die  $\mathbb{R}_o^n$  trifft. Wir wollen zeigen, dass  $\tilde{S} = F(S)$  wieder eine Nabelpunktshyperfläche ist. Wir verschieben den Mittelpunkt von  $S$  in den Ursprung und wählen Kugelkoordinaten  $\Phi : \mathbb{R}_2^n \rightarrow \mathbb{R}_o^n$ ; durch Einschränkung auf eine Koordinatenhyperebene erhalten wir eine Parametrisierung  $\varphi$  von  $S$ . Ist  $x \in S \cap \mathbb{R}_o^n$  und  $v \in T_x S := x^\perp$  ein beliebig vorgegebener Vektor mit  $|v| = 1$ , so können wir durch eine Drehung erreichen, dass  $\varphi(u_o) = x$  für ein  $u_o$  im Definitionsbereich von  $\varphi$  und  $v = \varphi_\theta(u_o)$  (partielle Ableitung in die Richtung der Koordinate  $\theta$ ) ist. Da  $\Phi$  ein orthogonales Hyperflächensystem und  $F$  winklerhaltend ist, ist auch  $\tilde{\Phi} = F \circ \Phi$  ein orthogonales Hyperflächensystem, und eine dieser Hyperflächen ist  $\tilde{S}$ , parametrisiert durch  $\tilde{\varphi} = F \circ \varphi$ . Die partiellen Ableitungen  $\tilde{\varphi}_i = d\tilde{\Phi} \cdot \varphi_i$  sind also Hauptkrümmungsrichtungen von  $\tilde{\varphi}$ . Insbesondere sind  $v = \varphi_\theta(u_o)$  und  $dF_x v = \tilde{\varphi}_\theta(u_o)$  Hauptkrümmungsrichtungen von  $\varphi$  und  $\tilde{\varphi}$ . Da  $v$  beliebig war, ist damit *jeder* Tangentenvektor von  $\tilde{S}$  eine

---

<sup>51</sup>Joseph Liouville, 1809 - 1882

Hauptkrümmungsrichtung.<sup>52</sup> Somit ist  $\tilde{S}$  eine Nabelpunktshyperfläche und damit Teil einer Sphäre oder Hyperebene. Ähnlich können wir auch für eine Hyperebene  $H$  zeigen, dass auch  $F(H)$  eine Nabelpunktshyperfläche ist. Die Abbildung  $F$  ist daher kugeltreu.

Um die zweite Behauptung einzusehen, wählen wir wieder einen Punkt  $p \in \mathbb{R}_o^n$  sowie genügend kleine Kugeln  $K$  und  $L$  mit Zentrum  $p$  und  $Fp$ . Durch Inversionen  $F_K$  und  $F_L$  an  $K$  und  $L$  gehen alle Kugeln  $S$  durch  $p$  und  $\tilde{S}$  durch  $Fp$  in beliebige Hyperebenen über und umgekehrt. Da  $F$  Kugeln durch  $p$  auf Kugeln durch  $Fp$  abbildet (Hyperebenen zählen wir zu den Kugeln), bildet  $F' := F_L \circ F \circ F_K$  Hyperebenen in Hyperebenen ab und daher auch Geraden (Schnitt von  $n - 1$  Hyperebenen) in Geraden;  $F'$  ist also projektiv und gleichzeitig winkeltreu. Dann werden aber auch Parallelen in Parallelen abgebildet, denn sie haben einen gemeinsamen Winkel mit einer schneidenden Geraden. Bis auf eine Translation ist  $F'$  also linear und konform, und damit Komposition einer orthogonalen Abbildung mit einer zentrischen Streckung. Translationen und orthogonale Abbildungen sind Kompositionen von Hyperebenenspiegelungen, und zentrische Streckungen sind Verkettungen von zwei Inversionen an konzentrischen Kugeln, also ist auch  $F = F_L \circ F' \circ F_K$  Verkettung von Hyperebenenspiegelungen und Inversionen.  $\square$

## 5.4 Die stereographische Projektion

Die meisten der eben beschriebenen konformen Abbildungen können nicht auf dem ganzen  $\mathbb{R}^n$  definiert werden; die Inversion an einer Kugel  $K$  ist im Zentrum von  $K$  nicht definiert, bzw. das Zentrum wird “ins Unendliche” abgebildet. Das war auch schon so bei den projektiven Abbildungen; eine Hyperebene des affinen Raums wurde ebenfalls “ins Unendliche” geworfen (auf die Fernhyperebene). Die Lösung dieses Problems in der projektiven Geometrie war eine Erweiterung des affinen Raums zum projektiven Raum durch Hinzunahme einer weiteren Hyperebene, der Fernhyperebene, und genauso werden wir das Problem auch in der konformen Geometrie lösen: durch

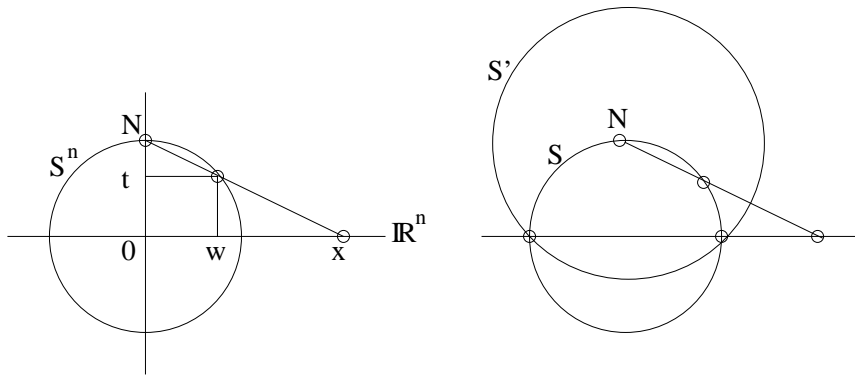
---

<sup>52</sup>Wir haben hier benutzt, dass die Hauptkrümmungsrichtungen auf einer Hyperfläche unabhängig von der Parametrisierung sind. In der Tat können wir den Isomorphismus  $d\varphi_u : \mathbb{R}^m \rightarrow T_u$  benutzen, um die Weingartenabbildung  $A_u$  als lineare Abbildung von  $T_u$  statt von  $\mathbb{R}^m$  anzusehen; dann ist sie unabhängig von der Parametrisierung, wie man sich leicht überlegt.

erweiterung des  $\mathbb{R}^n$  zum “konformen Raum” durch Hinzunahme eines weiteren Punktes, den wir  $\infty$  nennen. Aber diesmal ist die Situation einfacher, weil wir diese Erweiterung bereits kennen: Es ist die  $n$ -dimensionale Sphäre

$$S^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}; |x|^2 + t^2 = 1\}, \quad (78)$$

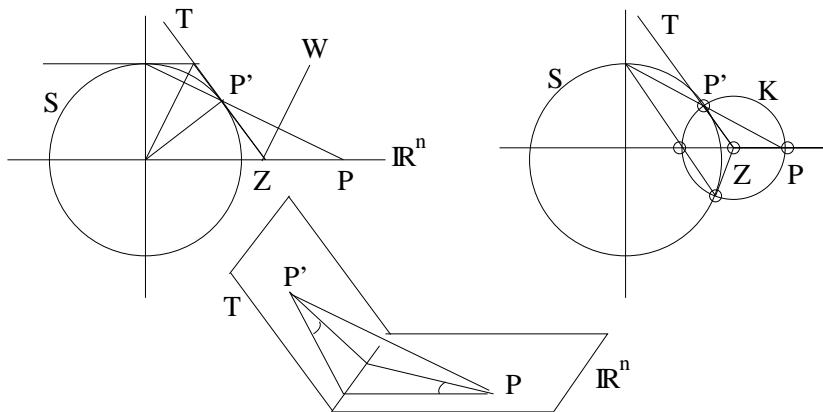
und die Einbettung von  $\mathbb{R}^n$  in  $S^n$  geschieht durch die *stereographische Projektion*  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ : Jeder Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  wird dabei in gerader Linie mit dem höchsten Punkt der Sphäre, dem *Nordpol*  $N = e_{n+1} = (0, 1)$  verbunden; das Bild  $\Phi(x) = (w, t)$  ist der zweite Schnittpunkt der Geraden  $Nx$  mit der Sphäre  $S^n$ .



Aus der linken Figur entnimmt man  $x = \frac{w}{1-t}$  (Ähnlichkeit der Dreiecke  $(x, 0, N)$  und  $((w, t), (0, t), N)$ ); die Umkehrung erhält man durch Lösen der quadratischen Gleichung für die Schnittpunkte von  $Nx$  mit  $S^n$ :

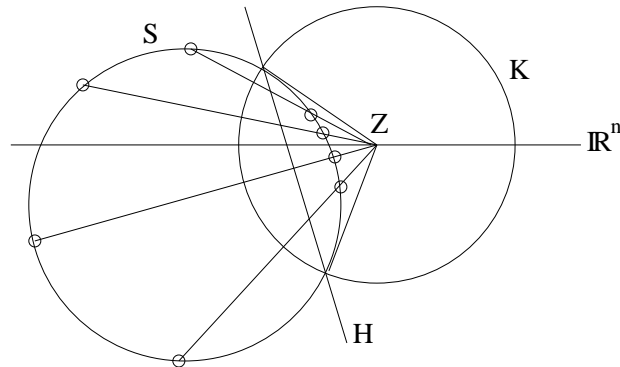
$$\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n, \quad \Phi(x) = \frac{1}{|x|^2 + 1}(2x, |x|^2 - 1), \quad \Phi^{-1}(w, t) = \frac{w}{1-t} \quad (79)$$

Die rechte Figur zeigt, dass  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  Einschränkungen der Inversion  $F_{S'}$  an der Sphäre  $S'$  um  $N$  durch  $S \cap \mathbb{R}^n$  sind, denn  $F_{S'}$  bildet die Sphäre  $S$  durch das Zentrum  $N$  von  $S'$  auf eine Hyperebene durch  $S' \cap S$ , also auf  $\mathbb{R}^n$  ab, und radiale Strahlen von  $N$  aus bleiben erhalten. Also sind  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  auch winkel- und kugeltreu. Das sieht man auch direkt aus den folgenden Figuren:



Die Projektionsgerade  $P'P$  steht senkrecht auf der Winkelhalbierenden  $W$  zwischen den Hyperebenen  $T$  und  $\mathbb{R}^n$ ; die Spiegelung an  $W$  überführt daher den Winkel zwischen zwei Tangenten von  $S$  in den Winkel zwischen ihren Bildgeraden unter der stereographischen Projektion, das zeigt die Winkeltreue von  $\Phi$  (linke und untere Figur). Die Spiegelung an  $W$  überführt aber auch die Strecke  $\overline{P'Z}$  in die Strecke  $\overline{PZ}$ ; diese sind also gleich lang. Daraus folgt die Kugeltreue (rechtes Bild): Eine Kugel  $k'$  in  $S$  kann zu einer Kugel  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$  erweitert werden, die  $S$  senkrecht in  $k'$  schneidet. Der Mittelpunkt von  $K$  ist der Punkt  $Z$ , die Spitze des Tangentenkegels an  $S$  über  $k'$ . Wir verschieben die Bildebene  $\mathbb{R}^n$  so, dass sie durch  $Z$  geht; dabei ändert sich die stereographische Projektion  $\Phi^{-1}$  nur um eine zentrische Streckung auf  $\mathbb{R}^n$ . Da  $Z$  auf der Winkelhalbierenden  $W$  liegt, ist der Abstand von  $Z$  zu  $P'$  und  $P$  gleich, also liegt  $P$  ebenso wie  $P'$  auf der Kugel  $K$  und

$$\Phi^{-1}(S \cap K) = \Phi^{-1}(k') = k := \mathbb{R}^n \cap K. \quad (80)$$



Was wird aus der Kugelinversion  $F_K$  in  $\mathbb{R}^n$ , wenn wir sie mit Hilfe von  $\Phi$  auf die Sphäre  $S = S^n$  verpflanzen, also zu  $\Phi \circ F_K \circ \Phi^{-1}$  übergehen? Die Antwort

gibt die voranstehende Figur: Wir erweitern  $K$  wieder zu einer Kugel in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , die sowohl  $\mathbb{R}^n$  als auch  $S$  senkrecht schneidet (nach Verschieben der Bildebene  $\mathbb{R}^n$ ). Nach (80) ist  $S \cap K$  die Bildkugel von  $\mathbb{R}^n \cap K$  unter  $\Phi = F_{S'}|_{\mathbb{R}^n}$ . Die Inversion  $F_{S'}$  bildet also  $\mathbb{R}^n$  nach  $S$  und  $\mathbb{R}^n \cap K$  nach  $S \cap K$  ab; da die Kugel  $K$  auf  $\mathbb{R}^n$  und  $S$  senkrecht steht, bleibt sie invariant unter  $F_{S'}$ . Allgemein gilt: Für jede konforme und kugeltreue Abbildung  $F$  ist  $F \circ F_K \circ F^{-1}$  die Inversion an der Kugel  $\tilde{K} = F(K)$ , denn sie lässt die Sphäre  $\tilde{K}$  punktweise fest und man sieht leicht, dass die Inversion die einzige nichttriviale konforme und kugeltreue Abbildung mit dieser Eigenschaft ist.<sup>53</sup> Speziell für  $F = F_{S'}$  ist  $F(K) = K$ , und da  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$  Einschränkungen von  $F_{S'}$  sind, folgt

$$\Phi \circ F_K \circ \Phi^{-1} = F_K|_S \quad (81)$$

Nun lässt  $F_K$  die zu  $K$  orthogonale Sphäre  $S$  invariant und ebenso jede Gerade  $g$  durch das Zentrum  $Z$  von  $K$ , also bleibt auch  $g \cap S$  invariant und somit vertauscht  $F_K$  die beiden Schnittpunkte von  $g$  mit  $S$ . Die Abbildung  $\Phi \circ F_K \circ \Phi^{-1} = F_K|_S$  bewirkt also genau die Vertauschung dieser beiden Punkte.<sup>54</sup>

## 5.5 Der Raum der Kugeln

Unsere konformen Abbildungen auf der Sphäre  $S$  erhalten die Menge der Kugeln in  $S$ . Jede solche Kugel kann beschrieben werden als Schnitt von  $S$  mit einer Hyperebene  $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$  oder äquivalent mit einer Kugel  $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , die  $S$  senkrecht schneidet. Der Mittelpunkt  $Z$  von  $K$ , d.h. die Spitze des Tangentenkegels über  $S \cap H$  ist der schon im Abschnitt 2.7 diskutierte *Pol* der Hyperebene  $H$ . Der Pol bestimmt die Hyperebene  $H$  und die Kugel  $S \cap H$  eindeutig; die Menge der Kugeln in  $S$  kann daher als die Menge der möglichen Pole, d.h. der Punkte von  $\mathbb{R}^{n+1}$  außerhalb von  $S$  angesehen werden. Wenn  $H$  durch den Ursprung geht,  $S \cap H$  also eine Großsphäre ist, rückt dieser Pol allerdings ins Unendliche und wir müssen  $\mathbb{R}^{n+1}$  zu  $\mathbb{R}P^{n+1}$  erweitern. Wir beschreiben daher  $S$  als Quadrik in  $\mathbb{R}P^{n+1}$ , nämlich

$$S = \{[x] \in \mathbb{R}P^{n+1}; \langle x, x \rangle_- = 0\}, \quad (82)$$

<sup>53</sup>Falls  $F(K)$  eine Hyperebene ist, muss  $F \circ F_K \circ F^{-1}$  aus demselben Grund die Spiegelung an dieser Hyperebene sein.

<sup>54</sup>Das ist zugleich ein anderer Beweis des Sehnensatzes am Kreis; vgl. Übung 34, denn für die Inversion  $F_K$  gilt  $|P - Z| |F_K P - Z| = r^2$ , wenn  $r$  der Radius von  $K$  ist.

wobei  $\langle x, y \rangle_- = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i - x_{n+2} y_{n+2}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^{n+2}$ , das *Lorentz-Skalarprodukt* auf  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Der Raum  $\mathcal{K}$  aller Kugeln in  $S$  (genauer: ihrer Pole) ist der Außenraum von  $S$  in  $\mathbb{R}P^{n+1}$ , die Menge der *raumartigen* homogenen Vektoren:

$$\mathcal{K} = \{[x] \in \mathbb{R}P^{n+1}; \langle x, x \rangle_- > 0\}. \quad (83)$$

Es sei  $O(n+1, 1)$  die Gruppe der linearen Abbildungen von  $\mathbb{R}^{n+2}$ , die dieses Skalarprodukt invariant lassen (*Lorentzgruppe*):  $A \in O(n+1, 1) \iff \langle Ax, Ay \rangle_- = \langle x, y \rangle_-$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^{n+2}$ . Die zugehörigen projektiven Abbildungen auf  $\mathbb{R}P^n$  lassen  $S$  und  $\mathcal{K}$  invariant und sind kugeltreu auf  $S$ . Die Lorentz-Spiegelung an einer Hyperebene  $H$ , die  $S$  trifft, ist die Inversion an der Kugel  $S \cap H$ . Da die Lorentzspiegelungen die Gruppe  $O(n+1, 1)$  bis auf  $\pm I$  erzeugen ( $I =$  Einheitsmatrix), ähnlich wie die euklidischen Spiegelungen die  $O(n)$  erzeugen (vgl. Satz 8, Abschnitt 3.3), und da andererseits die Inversionen die Gruppe  $\text{Konf}(S^n)$  der konformen Abbildungen auf  $S^n$  (die *Möbiusgruppe*)<sup>55</sup> erzeugen, sind die beiden Gruppen identisch:

$$\text{Konf}(S^n) = PO(n+1, 1) = O(n+1, 1)/\pm. \quad (84)$$

So gesehen ist die konforme Geometrie ein Teilgebiet der projektiven Geometrie, genauer der polaren Geometrie, denn es ist zusätzlich eine *Polarität* gegeben, das Lorentz-Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_-$ .

## 6 Winkel als Abstandsmaß: Sphärische und Hyperbolische Geometrie

Im letzten Abschnitt haben wir die Wirkung der *Lorentzgruppe*  $PO(n, 1)$  auf dem Projektiven Raum  $\mathbb{R}P^n$  untersucht. Sie besitzt drei Bahnen:

1. die Sphäre  $S^{n-1} = L/\mathbb{R}_*$ , wobei  $L = \{x \in \mathbb{R}_*^{n+1}; \langle x, x \rangle_- = 0\}$  der sog. *Lichtkegel* ist, der in der speziellen Relativitätstheorie die Tangentenvektoren von Lichtstrahlen beschreibt,
2. den Außenraum  $\mathbb{R}P^n \setminus \bar{B}^n$ , wobei  $\bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}P^n$  der abgeschlossene Einheitsball ist, genauer

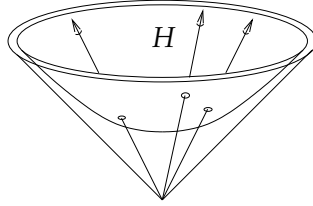
---

<sup>55</sup>August Ferdinand Möbius, 1790 - 1868

$$\begin{aligned}
\bar{B}^n &= \{[v, 1] \in \mathbb{R}P^n; v \in \mathbb{R}^n, |v| \leq 1\} \\
&= \{[x] \in \mathbb{R}P^n; \langle x, x \rangle_- \leq 0\}, \\
\mathbb{R}P^n \setminus \bar{B}^n &= \{[x] \in \mathbb{R}P^n; \langle x, x \rangle_- > 0\}
\end{aligned}$$

3. den Innenraum  $B^n = \{[x] \in \mathbb{R}P^n; \langle x, x \rangle_- < 0\}$ .

Auf der Sphäre  $S^{n-1}$  wirkt die Lorentzgruppe durch konforme kugeltreue Transformationen, wie wir gesehen haben.<sup>56</sup> Den Außenraum hatten wir als Raum der Kugeln in  $S = S^{n-1}$  identifiziert, indem wir jeder Kugel in  $S$  (Schnitt mit einer Hyperebene) ihren *Pol* zuordneten; die kugeltreuen Transformationen auf der Sphäre transformieren den Raum der Kugel entsprechend. Es bleibt noch der Innenraum zu untersuchen. Dieser stellt etwas Neues dar: ein Modell der *hyperbolischen Geometrie*, und die Lorentzgruppe  $PO(n, 1)$  ist die zugehörige Isometriegruppe.



Um diese Geometrie vorzustellen, betrachten wir eine Schale des zweischaligen Hyperboloids:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_- = -1, x_{n+1} > 0\}. \quad (86)$$

<sup>56</sup>Speziell auf  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P^1$  können wir die Gruppe der konformen kreistreuen Abbildungen auch als Gruppe der Möbiustransformationen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc \neq 0$  betrachten, wenn wir uns auf die Untergruppe der orientierungstreuen Abbildungen beschränken (die Zusammenhangskomponente dieser Gruppe). Diese wiederum ist die projektive Gruppe in der komplexen Dimension 1,  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Die 2-dimensionale konforme Geometrie und die 1-dimensionale komplexe projektive Geometrie sind also identisch,

$$PO^+(3, 1) = PGL(2, \mathbb{C}) \quad (85)$$

(wobei  $+$  für orientierungstreu steht). Deshalb können wir auch die Lorentz-Transformationen der speziellen Relativitätstheorie durch komplexe  $2 \times 2$ -Matrizen beschreiben. Die Gleichung (85) ist eine der Koinzidenzen zwischen niedrig-dimensionalen Liegruppen, von denen es eine ganze Reihe gibt (z.B.  $Sp(1) = SU(2)$ ).

Wir können  $H$  benutzen, um die Elemente in  $B^n$ , die homogenen Vektoren  $[x]$  mit  $\langle x, x \rangle_- < 0$  abzuschneiden (zu repräsentieren): In jeder Klasse  $[x]$  mit  $\langle x, x \rangle_- < 0$  finden wir genau ein  $x$  mit  $\langle x, x \rangle_- = -1$  und  $x_{n+1} > 0$ ; der eindimensionale Unterraum  $[x]$  schneidet die Schale  $H$  des Hyperboloiden genau einmal. Das Lorentz-Skalarprodukt des umgebenden Raums  $\mathbb{R}^{n+1}$  definiert Winkel und Abstände auf der Hyperfläche  $H$ , genau wie das euklidische Skalarprodukt. Zwar ist das Lorentz-Skalarprodukt indefinit, aber seine Einschränkung auf einen beliebigen Tangentialraum  $T_x H$  von  $H$  ist doch wieder positiv definit. Das ist klar für  $x = e_{n+1}$ , denn die Tangentialhyperebene ist "horizontal" und hat keine  $x_{n+1}$ -Komponente, wo das Skalarprodukt negativ ist,  $T_{e_{n+1}} H = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Und es gilt ebenso auf  $T_x H$  für beliebige  $x \in H$ , denn die Steigung von  $T_x H$  ist stets flacher als die des Lichtkegels, d.h. der "raumartige" Anteil überwiegt für jeden Vektor  $y \in T_x H$ . Oder noch besser: Jedes  $x$  kann durch eine Lorentz-Transformation  $A \in O(n, 1)$  auf  $e_{n+1}$  abgebildet werden, und  $H$  bleibt dabei erhalten (weil  $H$  durch das Skalarprodukt definiert ist, das von  $A$  erhalten wird), also geht auch die Tangentialhyperebene von  $H$  in  $x$  auf die in  $e_{n+1}$  über, und das Lorentz-Skalarprodukt muss auf  $T_x H$  ebenso wie auf  $T_{e_{n+1}} H = \mathbb{R}^n$  positiv definit sein. Die Hyperboloid-Schale mit der vom Lorentz-Skalarprodukt eingepprägten Geometrie nennen wir den *Hyperbolischen Raum* bzw. für  $n = 2$  die *Hyperbolische Ebene*.

Um formal und auch anschaulich zu verstehen, wie das Skalarprodukt des umgebenden Raums eine Geometrie auf der Hyperfläche definiert, betrachten wir zunächst ein einfacheres Beispiel: die Sphäre  $S = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit dem gewöhnlichen euklidischen Skalarprodukt. Über Winkel haben wir ja schon gesprochen: Der Winkel zwischen zwei sich in  $x \in S$  schneidenden Kurven auf  $S$  wird durch den Winkel ihrer Tangentialvektoren in  $T_x S$  definiert, der wiederum durch das auf  $T_x S$  eingeschränkte Skalarprodukt des umgebenden Raums  $\mathbb{R}^{n+1}$  definiert wird. Wie aber steht es mit Abständen, Entfernungen? Wir leben ja alle auf einer Sphäre, auf der Oberfläche unseres Planeten Erde, und kennen das Problem daher auch aus dem Alltag. Die Entfernung von zwei Punkten  $x, y \in S$  könnten wir nach wie vor als  $|x - y|$  definieren, aber dieser Abstandsbegriff wäre nicht sehr praxistauglich: Er misst die Länge einer Kurve von  $x$  nach  $y$ , die mitten durch das Erdinnere geht, der Strecke. Ein Flugzeug von  $x = \text{München}$  nach  $y = \text{Tokio}$  wird diesen Weg nicht nehmen können, und der Benzinverbrauch hat wenig mit der Weglänge  $|x - y|$  durch das Erdinnere zu tun! Die Entfernung von  $x$  nach  $y$ , die für einen Reisenden Bedeutung hat, ist die Länge einer möglichst



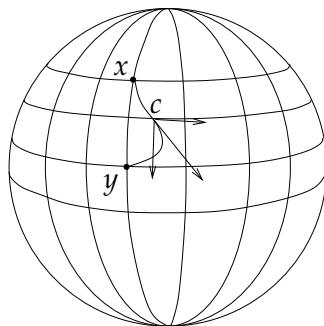
kurzen Verbindungskurve auf der Erdoberfläche:

$$|x, y| := \inf\{L(c); c : x \overset{S}{\rightsquigarrow} y\}. \quad (87)$$

Hierbei bezeichnet  $c : x \overset{S}{\rightsquigarrow} y$  eine  $C^1$ -Kurve  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $c(a) = x$ ,  $c(b) = y$  und  $c(t) \in S$  für alle  $t \in [a, b]$ , und  $L(c)$  die Bogenlänge von  $c$ ,

$$L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt. \quad (88)$$

Wir wissen alle, dass dieses Infimum ein Minimum ist: Es gibt eine kürzeste Kurve von  $x$  nach  $y$  auf  $S$ : der Großkreisbogen. Jede Ebene schneidet  $S$  in einem Kreis; wenn die Ebene den Mittelpunkt  $0$  von  $S$  trifft, also ein 2-dimensionaler Untervektorraum ist, dann trifft sie die Sphäre da, wo sie "am dicksten" ist, in einem Kreis von maximalem Radius (dem Radius von  $S$ ), einem *Großkreis*. München liegt auf 48 Grad, Tokio auf 36 Grad nördlicher Breite, aber ein Flugzeug von Tokio nach München fliegt zunächst in den hohen Norden über die Nordküste von Sibirien! Blicke es in den Breiten zwischen 48 und 36 Grad, würde es also einem Breitenkreis folgen, wäre der Weg wesentlich länger. Dass der Großkreis der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten  $x, y \in S$  ist, kann man am leichtesten sehen, wenn man Kugelkoordinaten benutzt, und zwar solche, für die  $x$  und  $y$  auf einem gemeinsamen Meridian liegen (was durch eine Drehung der Kugel erreicht werden kann):



In diesen Koordinaten liegt  $y$  genau südlich von  $x$ ; Jede Kurve  $c : x \rightsquigarrow y$ , die vom Meridian abweicht, ist länger, weil der Geschwindigkeitsvektor (Ableitung)  $c'$  auch eine Ost-West-Komponente hat, während die Nord-Süd-Komponente alleine aufintegriert die Breitendifferenz und damit die Länge des Meridians liefert; weil die Ost-West-Komponente hinzukommt, ist die Länge von  $c$  größer als die Breitendifferenz zwischen  $x$  und  $y$ .<sup>57</sup> Wir können

<sup>57</sup>Das entsprechende Argument gilt nicht, wenn  $x, y$  auf einem gemeinsamen Breitenkreis liegen, weil die Breitenkreise auf der Nordhalbkugel nach Norden zu kürzer werden;

dies analytisch sehen mit der in (72) gegebenen Formel für die Kugelkoordinaten  $\phi, \theta$  auf  $S^2$ ; dann wird  $c(t)$  durch zwei Funktionen  $\theta(t), \phi(t)$  ausgedrückt:

$$c(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \cos \phi(t) \\ \sin \theta(t) \sin \phi(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix},$$

und die Ableitung davon ist

$$c'(t) = \theta'(t) \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \phi(t) \\ \cos \theta(t) \sin \phi(t) \\ -\sin \theta(t) \end{pmatrix} + \phi'(t) \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \sin \phi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektoren<sup>58</sup> stehen senkrecht aufeinander und haben Länge 1 und  $\sin \theta$ , daher ist

$$|c'| = \sqrt{(\theta')^2 + (\phi')^2 \sin^2 \theta} \geq \theta'$$

und für die Länge gilt deshalb  $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt \geq \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a)$ .

Die Situation bei der Hyperboloid-Schale  $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach (86) ist ganz analog. Wir können genau wie bei der Sphäre schließen, dass die Schnitte von  $H$  mit Ebenen  $E$  durch den Ursprung 0 die kürzesten Kurven in  $H$  sind, die *Hyperbolischen Geraden* wobei die Bogenlänge  $L(c)$  von Kurven  $c : [a, b] \rightarrow H$  jetzt mit Hilfe des Lorentz-Skalarprodukts gebildet wird: Es gilt weiterhin (88) mit  $|c'| = \sqrt{\langle c', c' \rangle_-}$ . Das Argument ist das gleiche wie für die Sphäre; das Analog der Kugelkoordinaten für  $n = 2$  ist die Abbildung

$$(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sinh \theta \cos \phi \\ \sinh \theta \sin \phi \\ \cosh \theta \end{pmatrix},$$

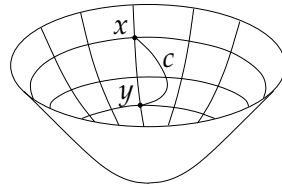
bei der die Winkelfunktionen für  $\theta$  durch die Hyperbelfunktionen  $\sinh, \cosh$  ersetzt worden sind; wegen  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$  ist diese Abbildung eine Parametrisierung von  $H$ . Die Bogenlänge einer hyperbolischen Geraden wird analog zum sphärischen Fall auch als *hyperbolischer Winkel* bezeichnet. Wie bei der Sphäre können wir durch Anwenden einer Lorentz-Transformation (eines

---

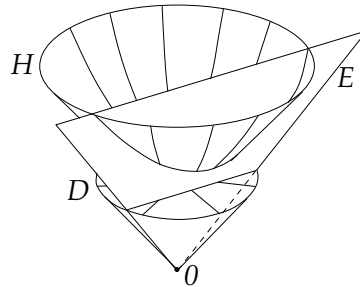
Ausweichen nach Norden kostet zwar eine zusätzliche Nord-Süd-Komponente, aber die Ost-West-Komponente wird aufintegriert kürzer.

<sup>58</sup>Es sind die partiellen Ableitungen der Abbildung  $(\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  nach  $\theta$  und  $\phi$ .

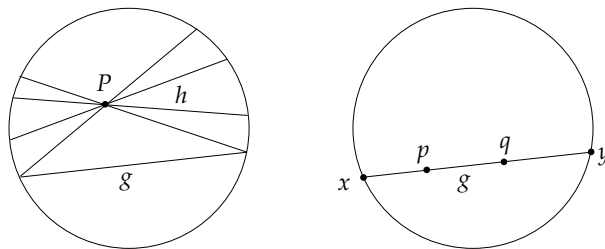
Elements der Gruppe  $O_{n,1}$  erreichen, dass  $x$  und  $y$  auf einem gemeinsamen Meridian liegen.



Wenn man  $H$  vom Ursprung  $0$  aus geradlinig auf die horizontale Tangentialebene im Punkt  $e_{n+1}$  projiziert, dann erhält man eine offene Scheibe  $D$ , und die hyperbolischen Geraden  $H \cap E$  werden auf Geradenstücke  $D \cap E$  innerhalb von  $D$  abgebildet.



So entsteht das nach Felix Klein benannte Modell der Hyperbolischen Geometrie: Es ist der Einheitsball  $D$ , und die hyperbolischen Geraden sind die Geradenstücke innerhalb von  $D$ . Dies ist eine Realisierung der von Lobatschewsky, Bolyai und Gauß gefundenen *nichteuklidischen Geometrie*, die alle von Euklid aufgestellten Axiome der Geometrie erfüllt mit Ausnahme des Parallelenaxioms: Zu einer Geraden  $g$  und einem gegebenen Punkt  $P$  außerhalb von  $g$  gibt es nicht mehr nur eine, sondern sehr viele Geraden  $h$ , die  $g$  nicht treffen und in dem Sinne “parallel” zu  $h$  sind.



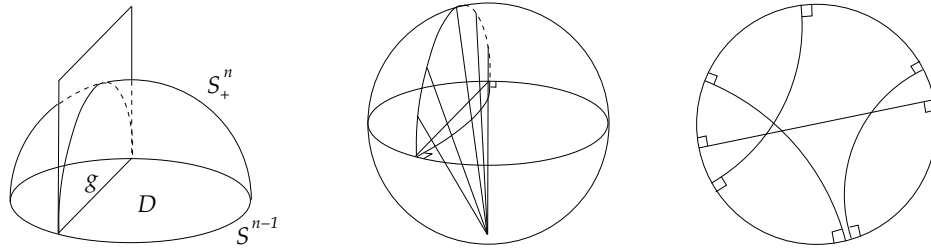
Auch der hyperbolische Abstand (der hyperbolische Winkel)  $d_h(p, q)$  von zwei Punkten  $p, q \in H$  kann aus dem Kleinschen Modell abgelesen werden (rechte

Figur):

$$d_h(p, q) = \frac{1}{2} |\log |DV(p, q, x, y)||, \quad (89)$$

Dabei sind  $x, y \in S = \partial D$  die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden  $g = pq$  mit dem Rand von  $D$ , und  $DV$  bezeichnet das in Abschnitt 2.8 eingeführte Doppelverhältnis. Vergleiche hierzu Übungsaufgabe 36.

Der Rand der Scheibe  $D^n$  ist die Sphäre  $S^{n-1}$ , auf der die Lorentzgruppe  $PO_{n,1}$  durch konforme Transformationen operiert. Sie ist eine Untergruppe der  $PO_{n+1,1}$ , der konformen Gruppe auf  $S^n$ ; die Untergruppe  $PO_{n,1}$  besteht aus den Transformationen in  $PO_{n+1,1}$ , die die obere Halbsphäre  $S_+^n$  von  $S^n$  und damit auch den Äquator  $S^{n-1}$  erhalten. Diese Überlegung führt uns zu einem zweiten Modell der hyperbolischen Geometrie, das nach *Poincaré* benannt ist: Statt der Geradenstücke  $g$  in  $D$  betrachten wir die senkrecht darüberliegenden Kreisbögen auf  $S_+^n$ , die orthogonal auf  $g$  projiziert werden (linke Figur):



Alle diese Kreisbögen schneiden den Äquator  $S^{n-1}$  senkrecht. Da die Gruppe  $PO_{n,1} \subset PO_{n+1,1}$  den Äquator und die obere Halbsphäre  $S_+^n$  invariant lässt und Kreise auf Kreise abbildet, werden die Kreise senkrecht zum Äquator auf ebensolche Kreis abgebildet. Die Transformationen in  $PO_{n,1} \subset PO_{n+1,1}$  operieren aber auch winkeltreu auf der oberen Halbsphäre; deshalb sind euklidischen Winkel, die wir sehen, auch die Winkel in der hyperbolischen Geometrie.<sup>59</sup> Wendet man die Stereographische Projektion vom Südpol von  $S^n$  an, gehen die Kreisbögen senkrecht zum Äquator in  $S_+^n$  in die Orthokreise in  $D$  über (mittleres und rechtes Bild). Das rechte Bild gibt das übliche

<sup>59</sup>Für dieses Argument benötigen wir einen Punkt, wo die Winkel der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie bereits übereinstimmen; das ist der Punkt  $e_{n+1}$ , denn auf der Tangentialebene  $T_{e_{n+1}}H = \mathbb{R}^n$  stimmt das Lorentz-Skalarprodukt mit dem euklidischen überein. Die Gruppe  $PO_{n,1}$  operiert transitiv auf  $S_+^n$  und auf  $H$ . Sie erhält die (euklidischen) Winkel auf  $S_+^n$ , weil sie konform operiert, und sie erhält die Winkel der hyperbolischen Geometrie auf  $H$ , da sie isometrisch auf  $H$  operiert, weil sie ja das Lorentz-Skalarprodukt und damit den hyperbolischen Abstand erhält.

Poincaré-Modell wieder: Die Kreisscheibe  $D$  mit den Orthokreisen als hyperbolische Geraden. Das Modell ist konform, d.h. die sichtbaren euklidischen Winkel sind an jeder Stelle denen der hyperbolischen Geometrie gleich.

Die konforme Geometrie in Dimension 2 weist noch eine Besonderheit auf: In Aufgabe 14 haben wir gesehen, dass die konforme Gruppe auf  $S^2$  die Gruppe der Möbiustransformationen ist, nämlich der projektiven Abbildungen der komplexen Geraden  $\mathbb{C}P^1 = \hat{\mathbb{C}}$ . Wir haben also  $PO_{3,1}^o = PGL_2(\mathbb{C})^o$ , wobei  $^o$  für die jeweilige Zusammenhangskomponenten der Gruppen-Eins steht. Die komplexe projektive Geometrie in der komplexen Dimension Eins stimmt mit der zweidimensionalen konformen Geometrie überein. Das hat Auswirkungen auf die hyperbolische Geometrie in Dimension 3, denn diese ist die konforme Geometrie der  $S^2$ . Die Isometriegruppe des Hyperbolischen Raums  $H^3$  und die Gruppe  $PGL_2(\mathbb{C})$  der Möbiustransformationen und die Lorentzgruppe  $PO_{3,1}$  der Speziellen Relativitätstheorie haben also alle die gleich Zusammenhangskomponente.

## 7 Übungen

### Aufgabe 1. "Der Mond ist aufgegangen"

Betrachten Sie die drei folgenden Skizzen.

- In welcher Richtung genau steht die Sonne?
- Was kann man jeweils über die Tageszeit sagen? (Tag, Nacht, morgens, abends, vor oder nach Sonnenauf- oder -untergang?) Bitte begründen!



---

### Aufgabe 2. Gruppenwirkungen

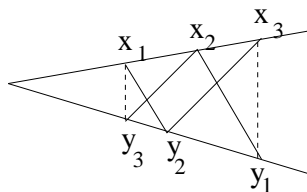
Es sei  $X$  eine Menge und  $(G, \cdot)$  eine Gruppe. Eine *Wirkung* von  $G$  auf  $X$  ist eine Abbildung  $W : G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto W_g x$  mit den Eigenschaften  $W_e = id_X$  für das Neutralelement  $e \in G$  und  $W_{gh} = W_g W_h$  für alle  $g, h \in G$  (vgl. Vorlesung). Zeigen Sie:

- Die Relation  $\sim$  auf  $X$ , definiert durch  $x \sim y \iff_{\text{Def}} \exists_{g \in G} : y = W_g x$  ist eine Äquivalenzrelation (d.h.  $x \sim x$ ;  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ;  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow y \sim z$ ). Die Äquivalenzklassen  $[x] = \{W_g x; g \in G\} =: Gx$  heißen *Bahnen* oder *Transitivitätsbereiche* der Wirkung  $W$ .
- Für jedes  $x \in X$  ist die Teilmenge  $G_x = \{g \in G; W_g x = x\}$  eine Untergruppe von  $G$  (genannt *Stabilisator* oder *Standgruppe* oder *Isotropiegruppe* von  $x$ ).
- Mit  $G/G_x$  bezeichnen wir die *Menge der Nebenklassen*:  $G/G_x = \{gG_x; g \in G\}$ , wobei die *Nebenklasse*  $gG_x$  die folgende Teilmenge von  $G$  ist:  $gG_x = \{gh; h \in G_x\}$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $w^x : G/G_x \rightarrow [x] = Gx$ ,  $gG_x \mapsto W_g x$  wohldefiniert und bijektiv ist.

**Aufgabe 3. Würfelgruppe**

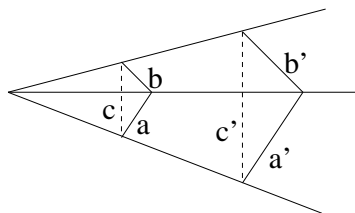
Es sei  $X$  die Menge der Ecken eines Würfels in Achsenlage (d.h. Kanten parallel zu den drei Koordinatenachsen) und  $G$  die Gruppe aller Drehungen des Würfels, die den Würfel wieder in Achsenlage überführen. Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von  $G$  mit folgenden Überlegungen: Jede Ecke des Würfels lässt sich in jede andere drehen, und es gibt jeweils drei Drehungen, die eine Ecke fest lassen (wieso drei?). Was hat das mit Aufgabe 2 zu tun?

**Aufgabe 4. Satz von Pappos und Nicht-Kommutativität**



Es sei  $X$  ein Vektorraum über einem nicht notwendig kommutativen Körper (Schiefkörper)  $\mathbb{K}$ . Gegeben seien zwei Geraden durch  $o$  und darauf je drei Punkte  $x_1, x_2, x_3$  und  $y_1, y_2, y_3$ . Die Geradenpaare  $x_1y_2$  und  $x_2y_1$  sowie  $x_2y_3$  und  $x_3y_2$  seien parallel. Zeigen Sie, dass dann stets auch das dritte (in der Figur gestrichelte) Geradenpaar  $x_1y_3$  und  $x_3y_1$  parallel ist (*Satz von Pappos*) sofern  $\mathbb{K}$  kommutativ ist, und umgekehrt: Wenn diese Eigenschaft stets erfüllt ist, so ist  $\mathbb{K}$  kommutativ. *Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Kennzeichnung der zentrischen Streckungen  $S_\lambda$ , vgl. Aufgabe 5.*

**Aufgabe 5. Zentrische Streckung und Satz von Desargues**



Die zentrische Streckung  $S_\lambda : x \mapsto \lambda x$  lässt sich folgendermaßen geometrisch kennzeichnen: Sind  $x$  und  $\lambda x$  gegeben für einen festen Punkt  $x$  und  $y \in X$  beliebig, so ist  $\lambda y$  der Schnitt der Geraden  $oy$  mit der Parallelen zu  $xy$  durch den Punkt  $\lambda x$ . Zeigen Sie: Die Richtungstreue dieser Abbildung,  $\forall x, y \in X S_\lambda(yz) \parallel yz$ , ist geometrisch übersetzt der *Satz von Desargues*: Gegeben seien zwei Dreiecke mit Eckpunkten auf drei Geraden durch  $o$ , so dass

zwei der drei Kantenpaare parallel sind:  $a \parallel a'$  und  $b \parallel b'$ . Dann ist auch das dritte (in der Figur gestrichelte) Kantenpaar parallel:  $c \parallel c'$ .

**Aufgabe 6.** *Affine Gruppe  $\text{Aff}(X)$*

Zeigen Sie, dass die invertierbaren affinen Abbildungen eines Vektorraums  $X$  eine Gruppe bilden, die *affine Gruppe*  $\text{Aff}(X)$ . Berechnen Sie die Komposition von zwei invertierbaren affinen Abbildungen  $F, G : X \rightarrow X$  mit  $F(x) = Ax + a$  und  $G(x) = Bx + b$  (wobei  $A, B$  lineare Abbildungen sind) sowie die Umkehrabbildung von  $F$ . Sie können jeder affinen Abbildung  $F$  genau ein solches Paar  $(A, a)$  mit  $A \in GL(X)$  (= Gruppe der invertierbaren linearen Abbildungen auf  $X$ ) und  $a \in X$  zuordnen. Welches Paar wird dabei der Komposition  $FG$  zugeordnet?

**Aufgabe 7.** *Schwerlinien eines Simplex*

Es sei  $X$  ein  $n$ -dimensionaler reeller (d.h.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) affiner Raum und  $a_0, \dots, a_n$  seien affin unabhängige Punkte. Das von  $a_0, \dots, a_n$  aufgespannte  $n$ -dimensionale Simplex  $\Sigma$  ist die konvexe Hülle dieser Punkte:

$$\Sigma = \langle a_0, \dots, a_n \rangle = \{ \sum_j \lambda_j a_j; \sum_j \lambda_j = 1, 0 \leq \lambda_j \leq 1 \}.$$

(Ein  $n$ -Simplex für  $n = 1$  ist eine *Strecke*, für  $n = 2$  ein *Dreieck*, für  $n = 3$  ein *Tetraeder*.) Die *Seiten* von  $\Sigma$  sind die  $(n - 1)$ -Simplexe  $\Sigma_i = \langle a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n \rangle$  für  $i = 0, \dots, n$ , wobei  $\hat{a}_i$  das *Fehlen*, das *Auslassen* von  $a_i$  bezeichnet. Mit  $s$  und  $s_i$  seien die *Schwerpunkte* von  $\Sigma$  und  $\Sigma_i$  bezeichnet, also

$$s = \frac{1}{n+1} \sum_j a_j \quad \text{und} \quad s_i = \frac{1}{n} \sum_{j \neq i} a_j.$$

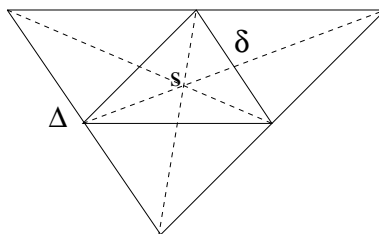
Zeigen Sie, dass die drei Punkte  $a_i, s$  und  $s_i$  kollinear sind (die gemeinsame Gerade nennen wir *Schwerlinie*) und bestimmen Sie das Verhältnis  $(a_i - s)/(s_i - s)$ . Bitte eine Skizze (Figur) für  $n = 2$ .

**Aufgabe 8.** *Schwerlinien eines Dreiecks*

- a) Zeigen Sie, dass ein Dreieck durch jede seiner Schwerlinien in zwei flächengleiche Teile zerlegt wird. (Fläche eines Dreiecks =  $\frac{1}{2} \cdot$  Grundseite  $\cdot$  Höhe).
- b) Gilt auch für jede andere Gerade, die durch den Schwerpunkt geht, dass sie das Dreieck in zwei flächengleiche Teile zerlegt? Beweis oder Gegenbeispiel!



**Aufgabe 9. Eulersche Gerade**



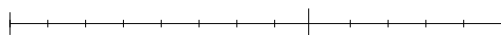
Betrachten Sie ein Dreieck  $\delta$  und das umbeschriebene Dreieck  $\Delta$  mit parallelen Seiten wie in der Figur.

- Zeigen Sie, dass die beiden Dreiecke einen gemeinsamen Schwerpunkt  $s$  haben.
- Zeigen Sie, dass  $\Delta$  aus  $\delta$  durch Anwenden einer zentrischen Streckung mit Fixpunkt  $o = s$  und Streckungsfaktor  $\lambda = -2$  entsteht.
- Folgern Sie daraus, dass der Schwerpunkt  $s$ , der Umkreismittelpunkt (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten)  $m$  und der Höhenschnittpunkt  $h$  des Dreiecks  $\delta$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Wie groß ist das Verhältnis  $(m - s)/(h - s)$ ? (Beachten Sie, dass der Höhenschnittpunkt  $h$  von  $\delta$  gleichzeitig der Umkreismittelpunkt von  $\Delta$  ist; wieso?)

**Aufgabe 10. Parallelprojektion von Oktaeder und Ikosaeder**

- Zeichnen Sie das *Oktaeder* mit den Eckpunkten  $\pm e_1, \pm e_2, \pm e_3$  im Raum  $\mathbb{R}^3$  (wobei  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  usw.). Benutzen Sie zur Projektion die paralleltreue Abbildung  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F(0) = 0$ ,  $F(e_1) = (-5, -4)$ ,  $F(e_2) = (6, -3)$ ,  $F(e_3) = (0, 6)$ . In diesen Oktaeder hinein zeichnen Sie ein *Ikosaeder*, dessen 12 Eckpunkte auf den 12 Kanten des Oktaeders liegen und diese im Verhältnis des *goldenen Schnittes*<sup>60</sup> unterteilen, wobei abwechselnd der größere und der kleinere Abschnitt abgeteilt wird; der Unterteilungspunkt der Kante  $e_1e_3$  liege näher bei  $e_3$ . Stellen Sie sich den Oktaeder aus Stangen

<sup>60</sup>Der *goldene Schnitt* unterteilt eine Strecke in zwei ungleiche Abschnitte so, dass sich der größere Abschnitt zur Gesamtstrecke wie der kleinere zum größeren Abschnitt verhält. Dieses Unterteilungsverhältnis wird von den Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen  $5/8, 8/13, 13/21$  usw. approximiert. Die *Fibonacci-Zahlen* bilden die mit 0 und 1 beginnende Zahlenfolge, bei der jede Zahl die Summe ihrer beiden Vorgänger ist: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...



zusammengesetzt vor und den Ikosaeder als massiven Körper. Zeichnen Sie nur sichtbare Kanten und klären Sie die Überkreuzungen mit Oktaederkanten.

b) Dieses Ikosaeder besitzt zwei Sorten von Kanten: Die einen liegen jeweils in einer Oktaederfläche, die anderen nicht. Zeigen Sie, dass dennoch alle Kanten die gleiche Länge haben.

### **Aufgabe 11.** *Perspektive*

Zeichnen Sie ein Haus mit Giebeldach perspektivisch schräg von oben (Vogelperspektive). Vertikale Linien sollen auch in der Zeichnung vertikal sein, und die rechte Kante der Giebelfront soll vorne liegen. Die Giebelfront soll in der Realität bis zum Dachansatz quadratisch sein, und die Dachschräge soll  $45^\circ$  betragen. Ihre Zeichnung soll auch die Horizonte aller beteiligten Ebenen enthalten (Fußboden, Wände, Dachschrägen). Geben Sie kurze Erklärungen und Begründungen für alle Konstruktionsschritte.

### **Aufgabe 12.** *Photographische Abbildung*

Bestimmen Sie im dreidimensionalen Raum (Koordinaten  $x, y, z$ ) die Zentralprojektion mit Projektionszentrum  $(0, 1, 1)$ , die die  $xy$ -Ebene (Urbildeebene) auf die  $xz$ -Ebene (Bildebene) abbildet (Zeichnung!), d.h. berechnen Sie die Zuordnungsvorschrift  $(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{z})$ . Bestimmen Sie den Horizont in der  $xz$ -Ebene und zeigen Sie, dass die Bilder paralleler Geraden der  $xy$ -Ebene auf dem Horizont einen Schnittpunkt besitzen (mit Ausnahme der zum Horizont parallelen Geraden).

### **Aufgabe 13.** *Projektive Abbildungen*

a) Eine Diskussion:

**A:** Eine projektive Abbildung der reellen Ebene sollte durch die Bilder von drei Punkten festgelegt sein. Sie kommt ja von einer linearen Abbildung des  $\mathbb{R}^3$  her, und diese ist bekanntlich durch die Bilder von drei Basisvektoren festgelegt. Ein Tisch braucht ja auch nur drei Beine, um auf der Ebene festzustehen, ohne zu kippen; drei Punkte definieren nämlich eine Ebene.

**B:** Aber wir haben doch bei den perspektivischen Darstellungen gesehen, dass wir ein Quadrat oder ein Rechteck durch eine projektive Abbildung auf ein beliebiges Viereck abbilden können, also müssten wir doch vier Punkte vorgeben können, nicht nur drei!

**C:** Stimmt das denn mit dem *beliebigen* Viereck? Muss nicht das Bild des (konvexen) Quadrates unter einer projektiven Abbildung wieder konvex sein? Konvexität ist doch mit Hilfe von Geraden definiert, und Geraden werden wieder auf Geraden abgebildet. Aber nicht alle Vierecke sind konvex!

**Sie:** Wem geben Sie Recht, wem nicht? Mit welchen Argumenten? (Vgl. b).)

b) Betrachten Sie das Beispiel der projektiven Abbildung  $F = [L]$ , wobei  $L$  die Basisvektoren  $b_1 = (1, 0, 1)$ ,  $b_2 = (0, 1, 1)$  und  $b_3 = (0, 0, 1)$  auf  $b_1$ ,  $b_2$  und  $-b_3$  abbildet. Was ist das Bild des Quadrates in der affinen Ebene  $A^2 = \{[x, y, 1]; x, y \in \mathbb{R}\} \subset P^2$  mit den Eckpunkten  $[0, 0, 1]$ ,  $[1, 0, 1]$ ,  $[0, 1, 1]$ ,  $[1, 1, 1]$ ? Bewerten Sie die voranstehende Diskussion mit Hilfe dieses Ergebnisses. Wer hat Recht? Wo liegen Denkfehler vor?

c) Versuchen Sie, ein allgemeines Ergebnis des folgenden Typs zu formulieren und zu beweisen: “Eine projektive Abbildung des  $n$ -dimensionalen projektiven Raums  $P = P^n$  über einem beliebigen Körper  $\mathbb{K}$  wird durch die Bilder von  $k$  beliebigen Punkten in  $P$  (geben Sie  $k$  in Abhängigkeit von  $n$  an) mit den folgenden Eigenschaften ... festgelegt.” Fangen Sie mit dem Fall  $n = 2$  an!

#### Aufgabe 14. Projektive Gerade

Die projektive Gerade  $P^1 = P_{\mathbb{K}^2}$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  lässt sich mit  $\hat{\mathbb{K}} := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  identifizieren, nämlich durch die Abbildung  $\phi : \hat{\mathbb{K}} \rightarrow P^1$ ,  $\phi(x) = [x, 1]$  für alle  $x \in \mathbb{K}$  und  $\phi(\infty) = [1, 0]$ . Zeigen Sie, dass bei dieser Identifizierung die projektiven Abbildungen von  $P^1$  genau in die *gebrochen-linearen* Funktionen  $f : \hat{\mathbb{K}} \rightarrow \hat{\mathbb{K}}$ ,  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  für  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$  mit  $ad - bc \neq 0$  übergehen.

#### Aufgabe 15. Welche semilinearen Abbildungen sind trivial auf $P$ ?

Es sei  $V$  ein Vektorraum über einem beliebigen Körper  $\mathbb{K}$ . Bestimmen Sie alle invertierbaren semilinearen Abbildungen  $L : V \rightarrow V$ , die auf  $P_V$  als die Identität wirken, also  $[Lv] = [v]$  für alle  $v \in V_* = V \setminus \{0\}$ .

#### Aufgabe 16. Semilineare Gruppe

Es sei  $\overline{GL}(\mathbb{K}^n)$  die Gruppe der umkehrbaren semilinearen Abbildungen auf  $\mathbb{K}^n$  und  $GL(\mathbb{K}^n)$  die Untergruppe der linearen Abbildungen. Zeigen Sie:

a) Jeder Körperautomorphismus  $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\lambda \mapsto \lambda^\sigma$  definiert eine semilineare Abbildung auf  $\mathbb{K}^n$ , nämlich  $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x^\sigma := (x_1^\sigma, \dots, x_n^\sigma)$ . Damit wird die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{K})$  aller Körperautomorphismen zu einer Untergruppe von  $\overline{GL}(\mathbb{K}^n)$ .

b) Zeigen Sie, dass jede semilineare Abbildung in  $\overline{GL}(\mathbb{K}^n)$  eindeutig als Komposition einer Linearen Abbildung mit einem Körperautomorphismus geschrieben werden kann.

c) Berechnen Sie diese Komposition für ein Produkt  $\sigma L \tau M$  mit  $\sigma, \tau \in \text{Aut}(\mathbb{K})$  und  $L, M \in GL(\mathbb{K}^n)$  und zeigen Sie damit, dass  $\overline{GL}(\mathbb{K}^n)$  ein semidirektes Produkt von  $\text{Aut}(\mathbb{K})$  und  $GL(\mathbb{K}^n)$  ist. *Zur Erinnerung: Ein semidirektes Produkt von zwei Gruppen  $G$  und  $H$  ist das kartesische Produkt  $G \times H$  mit der Verknüpfung*

$$(g, h)(g', h') = (gg', hW_g(h'))$$

wobei  $W$  eine Wirkung von  $G$  auf  $H$  durch Automorphismen ist, also ein Gruppensomorphismus  $W : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ . Als Beispiel oder Modell kennen Sie bereits die Affine Gruppe als semidirektes Produkt der Translationsgruppe und der Linearen Gruppe.

**Aufgabe 17.** *Kollineationen erhalten Unterräume!*

Es sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $\mathbb{K}$  und  $P_V = \{[v] = \pi(v); v \in V^*\}$  der zugehörige projektive Raum. Zeigen Sie, dass eine Kollineation  $F : P_V \rightarrow P_V$  jeden  $k$ -dimensionalen projektiven Unterraum von  $P_V$  wieder auf einen  $k$ -dimensionalen Unterraum abbildet. *Hinweise: Induktion über  $k$ . Ein  $k$ -dimensionaler projektiver Unterraum ist das  $\pi$ -Bild eines  $k + 1$ -dimensionalen linearen Unterraums von  $V$ .*

**Aufgabe 18.** *Kreis, Parabel, Hyperbel sind projektiv äquivalent!*

Homogenisieren Sie die Gleichungen von Kreis ( $x^2 + y^2 = 1$ ), Parabel ( $y = x^2$ ) und Hyperbel ( $x^2 - y^2 = 1$ ) und geben Sie explizit invertierbare lineare Abbildungen des  $\mathbb{R}^3$  und damit projektive Abbildungen des  $\mathbb{R}P^2$  an, die die projektiven Abschlüsse von Kreis, Parabel und Hyperbel ineinander überführen.

**Aufgabe 19.** *Projektive Abbildungen*

(Vgl. Aufgabe 13) Zeigen Sie: Jede projektive Abbildung  $F = [L] : P^n \rightarrow P^n$  ist durch  $n + 2$  Punkte in  $P^n$  bestimmt, z.B. die Bilder der Punkte  $[e_1], \dots, [e_{n+1}]$  und  $[e]$  mit  $e := e_1 + \dots + e_{n+1} = \sum_i e_i$  (wobei  $e_i$  für  $i = 1, \dots, n+1$  die kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{K}^{n+1}$  sind:  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$ ). Dabei können die Bildpunkte  $[a_i] = F[e_i] = [Le_i]$  und  $[a] = F[e] = [Le]$  in  $P^n$  beliebig vorgegeben werden unter der Bedingung, dass je  $n + 1$  der  $n + 2$  Vektoren  $a_1, \dots, a_{n+1}, a$  linear unabhängig sind. *Hinweise: Geben Sie  $n + 2$  solche Vektoren  $a_1, \dots, a_{n+1}, a$  vor; dann ist  $a = \sum_i \alpha_i a_i$  mit uns bekannten  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ , und zwar ist  $\alpha_i \neq 0$  - warum? Nun können wir  $Le_i = \lambda_i a_i$  und  $Le = \lambda a$  setzen und die noch unbekanntenen Skalare  $\lambda_i$  und  $\lambda$  (bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\neq 0$ ) aus den Beziehungen zwischen  $e$  und  $e_i$  sowie zwischen  $a$  und  $a_i$  bestimmen.*

**Aufgabe 20.** *Fernpunkte der Hyperbel*

Erklären Sie, warum bei der Hyperbel  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - y^2 = 1\}$  die Fernpunkte der Asymptoten  $x = y$  und  $x = -y$  (Figur!) als Fernpunkte der Hyperbel (d.h. als Punkte des projektiven Abschlusses der Hyperbel) zu betrachten sind. Erklären Sie den Sachverhalt nicht nur auf eine, sondern auf möglichst viele Weisen: geometrisch und algebraisch, in der Ebene und mit Hilfe des Kegels im Raum. *Hinweis: Schreiben Sie bitte so, wie Sie es gerne selbst erklärt haben würden! Scheuen Sie sich nicht, an "Bekanntes" zu erinnern: Was sind Fernpunkte? Wie ist die projektive Ebene erklärt? Welche Rolle spielt der Kegel mit der Gleichung  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ ? Wie sieht er aus? Figuren!*

**Aufgabe 21.** *Projektiver Typ einer Quadrik*

Bestimmen Sie die Normalform (den Typ) der projektiven Quadrik  $Q \subset \mathbb{R}P^3$ , die die Lösungsmenge der folgenden Gleichung ist:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 4w^2 + 4xy + 6xw + 8yw - 2zw = 0.$$

**Aufgabe 22.** *Satz von Pappos, projektive Version*

Formulieren (Figur!) und beweisen Sie die projektive Version des Satzes von Pappos (vgl. Aufgabe 4) in einer projektiven Ebene über einem kommutativen Körper. Was wird dabei aus den Parallelen, die in der (als bekannt vorauszusetzenden) affinen Version vorkamen?

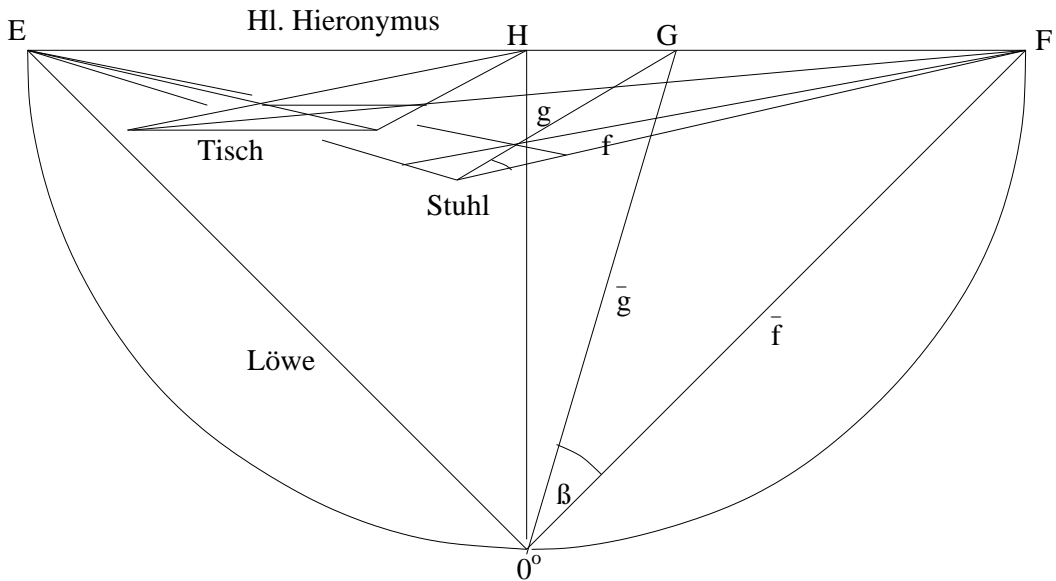
**Aufgabe 23.** Geraden auf dem einschaligen Hyperboloiden

Betrachten Sie das einschalige Hyperboloid  $Q = \{[s, t, u, v] \in P^3; st = uv\}$ . Zeigen Sie, dass die Geraden

$$\begin{aligned} g_\lambda &= \{[s, t, u, v]; s/u = v/t = \lambda\}, \\ h_\mu &= \{[s, t, u, v]; s/v = u/t = \mu\} \end{aligned}$$

für festes  $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$  nicht nur ganz in  $Q$  liegen, sondern auch in allen Tangentialebenen von  $Q$  in jedem der Punkte, durch die sie verlaufen. Erinnerung an die Begriffe Tangente, Tangentialebene, Tangentialraum: Der Tangentialraum der Quadrik  $Q = \{[x] \in P^n; \beta(x, x) = 0\}$  im Punkte  $[x] \in Q$  ist die Hyperebene  $T_{[x]}Q = \{[v] \in P^n; \beta(x, v) = 0\}$ . Hierbei bezeichnet  $\beta$  eine symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

**Aufgabe 24.** Dürers Heiliger Hieronymus



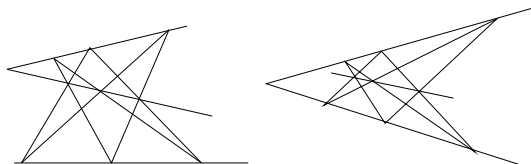
Bitte vertiefen Sie sich einmal in den Holzschnitt “Der Heilige Hieronymus<sup>61</sup> im Gehäus” von Albrecht Dürer (1514):

<sup>61</sup>Hieronymus, 347 - 414, übersetzte das Neue Testament vom Griechischen ins Lateinische (Vulgata): “Gloria in excelsis Deo, et in terra pax hominibus bonae voluntatis”. Er galt als sehr tierlieb; nach einer Legende soll er einem Löwen einen Dorn aus der Pfote gezogen haben, daher wird er immer mit dem Löwen abgebildet.

<http://www.glyphs.com/art/durer/jerome.jpg>  
<http://www.geocities.com/eleonoreweil/durerus/dde/w2.html>  
<http://gallery.euroweb.hu/html/d/durer/2/13/4/077.html>

Wie vielfach bei Dürer ist darin eine Fülle von geometrischen Ideen enthalten. Mit dem Zusatzwissen, dass einige Winkel in der Realität rechte Winkel sind (Tisch, Fenster, ...) kann man aus der perspektivischen Darstellung einen exakten Grundriss des Zimmers konstruieren! Versuchen Sie, die umseitige Konstruktionszeichnung zu verstehen und zu erklären, wie man den wahren Winkel zwischen Kante und Diagonale des Stuhls und damit seine genaue Form ermittelt. "Erklären" heißt den Grund finden: *Warum* ist  $\beta$  der wahre Winkel?

**Aufgabe 25.** *Dualer Satz zu Pappos*

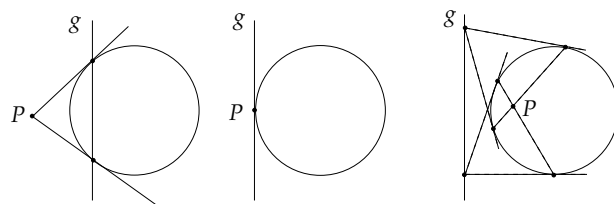


Bestimmen Sie zum projektiven Satz von Pappos (siehe Figur) den dualen Satz und demonstrieren Sie seine Aussage anhand einer Figur.

**Zusatzfrage:** Der Satz von Pappos ist der Satz von Pascal für einen *ausgearteten* Kegelschnitt, ein Geradenpaar (vgl. die zweite Figur zum Satz von Pascal); er ist also ein Grenzfall des Satzes von Pascal. Kann man den dualen Satz analog als Grenzfall des Satzes von Brianchon deuten?

**Aufgabe 26.** *Polarität*

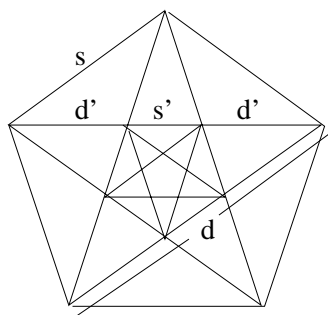
Betrachten Sie die Polarität auf  $\mathbb{R}P^2$ , die mit Hilfe der auf  $\mathbb{R}^3$  definierten Bilinearform  $\beta(v, w) = v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3 = \langle v, w \rangle_-$  gegeben ist: Jedem Punkt  $P = [x] \in \mathbb{R}P^2$  ("Pol") wird die Gerade  $g = \{[v]; \beta(x, v) = 0\} \subset \mathbb{R}P^2$  ("Polare") zugeordnet und umgekehrt. Zeigen Sie, dass diese Polarität in der affinen Ebene durch die nachstehende Konstruktion (siehe Figur) gegeben wird. Verwenden Sie, dass die Polarität die Operationen "Schneiden" und "Verbinden" vertauscht.



**Aufgabe 27. Doppelverhältnis**

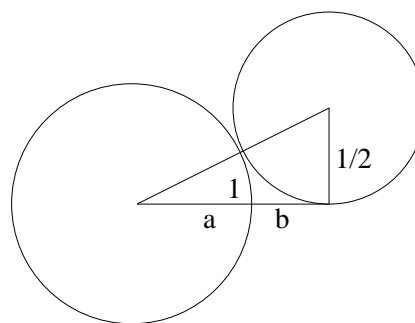
Zeigen Sie: Die Projektiven Abbildungen auf  $P^1$  sind genau die bijektiven Abbildungen  $F : P^1 \rightarrow P^1$ , die das Doppelverhältnis invariant lassen:  $DV(Fx, Fy, Fz, Fw) = DV(x, y, z, w)$  für alle  $x, y, z, w \in P^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ .

**Aufgabe 28. Fünfeck und goldener Schnitt**



regelmäßiges Fünfeck

Konstruktion des goldenen Schnitts



(a) Zeigen Sie, dass Diagonale  $d$  und Seitenlänge  $s$  beim regelmäßigen Fünfeck (siehe Figur) im goldenen Schnittverhältnis stehen:  $\frac{d'}{s'} = \frac{s'+d'}{d'}$ . Benutzen Sie dazu die Ähnlichkeit gewisser Dreiecke der Figur.

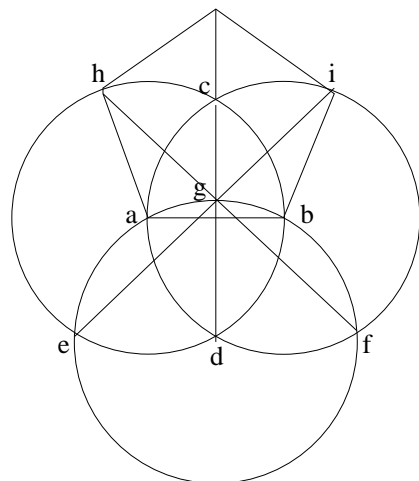
(b) Zeigen Sie, dass der goldene Schnitt eine irrationale Zahl ist! *Anleitung:* Andernfalls müssten Diagonale und Seite kommensurabel sein, d.h. ganze Vielfache einer gemeinsamen Einheit. Zeigen Sie, dass dann auch Seite und Diagonale des inneren kleinen Fünfecks ganze Vielfache derselben Einheit sind und dasselbe für das noch kleinere Fünfeck gilt, usw.

**Aufgabe 29. Fünfeckkonstruktion**

Finden Sie mit Hilfe der Konstruktion des Goldenen Schnitts eine Konstruktion des Fünfecks!



**Aufgabe 30** *Dürers Konstruktion*

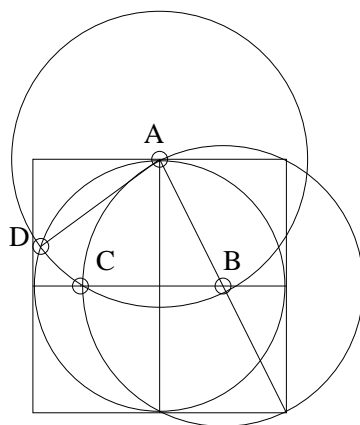


Dürers Fünfeckkonstruktion

Ist die in der Figur gegebene Konstruktion aus Albrecht Dürers “Unterweysung der Messung” exakt? (Die Punkte werden in alphabetischer Reihenfolge konstruiert.)

**Aufgabe 31.** *Fünfeck-Konstruktion*

Zeigen Sie, dass die nachstehende Figur eine korrekte Konstruktion der Fünfeckseite  $AD$  ist; dabei ist  $|A - B| = |C - B|$  und  $|A - C| = |A - D|$ .

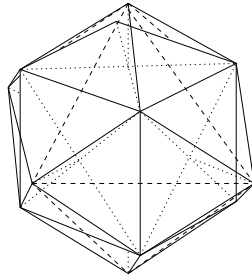


**Aufgabe 32.** *Tetraederwinkel*

Berechnen Sie den Kantenwinkel des regulären Tetraeders mit den Ecken  $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{R}^4$ . Hinweis: Ein Normalvektor der Seite mit den Ecken  $e_1, e_2, e_3$

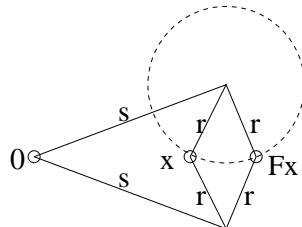
ist  $v = e_1 + e_2 + e_3$ , aber dieser liegt nicht in der Hyperebene  $D$  durch die Punkte  $e_1, \dots, e_4$ ; dazu müssen wir von  $v$  noch die Komponente in Richtung des Normalvektors  $d = (1, 1, 1, 1)$  von  $D$  abziehen. Der richtige Normalvektor ist also  $v' = v - \frac{\langle v, d \rangle}{\langle d, d \rangle} d$ . Berechnen Sie den entsprechenden Winkel auch für das  $n$ -dimensionale reguläre Simplex.

**Aufgabe 33.** Ecken des 24-Zells



Betrachten Sie im  $\mathbb{R}^n$  den Würfel mit den Ecken  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$  und den Kowürfel mit den Ecken  $\pm 2e_1, \dots, \pm 2e_n$ . Zeigen Sie, dass nur für  $n = 4$  die Länge der Würfelkante gleich dem Abstand von benachbarten Würfel- und Kowürfecken ist. Zeigen Sie für  $n = 4$ , dass z.B. die Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke von  $(2, 0, 0, 0)$  nach  $(1, -1, -1, -1)$  die Vereinigung der Ecken von Würfel und Kowürfel invariant lässt.

**Aufgabe 34.** Sehensatz und Inverter:



a) Es sei  $K$  eine Kreislinie in der Ebene und  $P$  ein Punkt außerhalb. Betrachten Sie alle Geraden  $g$  durch  $P$ , die  $K$  in zwei Punkten schneiden; die Schnittpunkte seien  $A$  und  $B$ . Zeigen Sie, dass das Produkt der Abstände  $|P - A||P - B|$  unabhängig von  $g$  ist. *Hinweis:* Der Mittelpunkt von  $K$  sei  $O$ . Parametrisieren Sie  $g$  durch  $g(t) = P + tv$  mit  $|v| = 1$  und bestimmen Sie die Koeffizienten der quadratischen Gleichung  $|g(t)|^2 = r^2$ . Das Produkt der beiden Lösungen  $t_1, t_2$  einer quadratischen Gleichung  $t^2 + at + b = 0$  ist  $b$  (warum?).

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die in der Figur abgebildete Stangenkonstruktion ein *Inverter* ist, d.h.  $0, x, Fx$  sind kollinear und  $|x||Fx| = R^2 = \text{const}$ .

**Aufgabe 35. Drehflächen:**

Gegeben sei eine  $C^2$ -Funktion  $f : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ . Zeigen Sie, dass die Abbildung  $\varphi : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\varphi(s, t) = (s \cos t, s \sin t, f(s))$  eine Immersion ist, bestimmen Sie die Koeffizienten der Fundamentalformen  $g$  und  $h$  (also  $g_{ss}, g_{st}, g_{tt}, h_{ss}, h_{st}, h_{tt}$ ), die Hauptkrümmungen sowie die Gauß'sche und die mittlere Krümmung. Wann ist  $\varphi$  eine Minimalfläche ( $H = 0$ )?

**Aufgabe 36. Orthogonale Quadrikenfamilien:**

<http://www.math.uni-bonn.de/people/weber/gallery/index.html>

Gegeben seien reelle Zahlen  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ; für  $j = 1, \dots, n$  setzen wir  $I_j = (a_{j-1}, a_j)$  mit  $a_0 := -\infty$ . Für jedes  $u \in \bigcup_j I_j$  betrachten wir auf  $\mathbb{R}^n$  das quadratische Polynom  $q^u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - u}$  und die zugehörige Quadrik  $Q_u = \{x; q^u(x) = 1\}$ . Zeigen Sie für die Gradienten  $\langle \nabla q^u, \nabla q^v \rangle = 4 \frac{q^u - q^v}{u - v}$ . Schließen Sie daraus, dass die  $n$  Scharen von Quadriken  $(Q_u)_{u \in I_j}$  für  $j = 1, \dots, n$  ein orthogonales Hyperflächensystem bilden (rechte Figur); beachten Sie, dass der Gradient von  $q^u$  senkrecht auf  $Q_u$  steht. Skizzieren Sie die Situation für  $n = 2$ .

**Aufgabe 37. Hyperbolischer Abstand und Doppelverhältnis**

Für  $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$  bezeichne

$$\langle x, y \rangle_- = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

das indefinite Skalarprodukt von Lorentz und Minkowski. Gegeben seien zwei linear unabhängige Vektoren

$$v, w \in H := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_- = -1, x_{n+1} > 0\}.$$

Diese spannen eine Ebene  $E = \mathbb{R}v + \mathbb{R}w$  auf. Der Schnitt von  $E$  mit dem Lichtkegel  $L = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle_- = 0\}$  besteht aus zwei Geraden  $l_1 = \mathbb{R}n_1$  und  $l_2 = \mathbb{R}n_2$  für zwei linear unabhängige Vektoren  $n_1, n_2 \in L \cap E$ . Für jedes

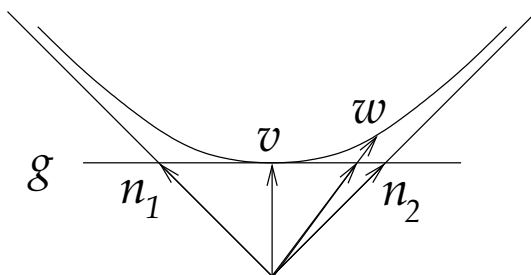
$x \in \mathbb{R}_*^{n+1}$  sei wieder  $[x] = \mathbb{R}_* x \in \mathbb{R}P^n$  der zugehörige homogene Vektor, und  $DV$  bezeichne das Doppelverhältnis:

$$DV([x], [y], [z], [w]) = \frac{z-x}{z-y} : \frac{w-x}{w-y},$$

wobei die Vertreter  $x, y, z, w$  auf einer (affinen) Geraden in  $\mathbb{R}^{n+1}$  liegen. Zeigen Sie für den hyperbolischen Abstand  $a$  zwischen  $v$  und  $w$ :

$$a = \frac{1}{2} |\log |DV([v], [w], [n_1], [n_2])||$$

*Hinweis:* Beide Seiten der Gleichung sind invariant unter allen projektiven Abbildungen, die die Sphäre  $S^{n-1} = \pi(L)$  invariant lassen (?!). Deshalb können wir ohne Einschränkung  $v = e_{n+1}$  und  $w = (\cosh a)e_{n+1} + (\sinh a)e_1$  annehmen (?!). Wählen Sie die Vertreter auf der Geraden  $g = e_{n+1} + \mathbb{R}e_1$  (siehe Figur). Insbesondere ist der Vertreter von  $[w]$  auf dieser Geraden der Vektor  $\tilde{w} = e_{n+1} + t \cdot e_1$  mit  $t = \tanh a = \frac{\sinh a}{\cosh a}$ . Nun können Sie das Doppelverhältnis berechnen; beachten Sie  $\cosh a = \frac{1}{2}(e^a + e^{-a})$  und  $\sinh a = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a})$ .



### Aufgabe 38. $SU_2$ und Quaternionen

Die *Unitäre Gruppe* ist das komplexe Analogon zur orthogonalen Gruppe:  $U_n = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n}; A^* A = I\}$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix und  $A^* = \bar{A}^t$  die adjungierte (= konjugiert transponierte) Matrix ist: Ist  $A = (a_{ij})$ , so sind die Koeffizienten  $b_{ij}$  von  $A^*$  durch  $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$  gegeben (mit der komplexen Konjugation  $\overline{x + iy} = x - iy$ ). Die Gleichung  $A^* A = I$  sagt, dass die Spalten von  $A$  eine Orthonormalbasis bezüglich des *hermiteschen* Skalarprodukts  $\langle v, w \rangle = v^* w = \sum \bar{v}_i w_i$  auf  $\mathbb{C}^n$  bilden. Eine wichtige Untergruppe der  $U_n$  ist die *Spezielle Unitäre Gruppe*  $SU_n = \{A \in U_n; \det A = 1\}$ .

a) Zeigen Sie  $SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ .

b) Folgern Sie:  $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C} \right\}$  ist eine  $\mathbb{R}$ -Unteralgebra von  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  und alle Elemente  $\neq 0$  von  $\mathbb{H}$  sind invertierbar;  $\mathbb{H}$  ist also Schiefkörper.

## 8 Lösungen

1. a) Linke Figur: Sonnenrichtung etwas rechts von Mondrichtung, mittlere Figur: Sonnemrichtung im rechten Winkel zur Mondrichtung, rechte Figur: Gerade Linie Sonne - Betrachter - Mond. b) Mitte: Nachmittag oder Abend vor Sonnenuntergang; da die Sonne rechts vom Mond steht und beide von links nach rechts dieselbe Bahn laufen, ist die Sonne dem Mond voraus, steht also weiter im Westen. Deshalb kann es nicht Morgen sein. Links Tag, rechts Nacht. Die Uhrzeit hängt von der Jahreszeit ab und ist durch die Sonnenhöhe bestimmt, die wir aus der Mondhöhe ablesen.

2. a)  $x = W_e x \Rightarrow x \sim x$ ;  $x \sim y \Rightarrow \exists_{g \in G} y = W_g x \Rightarrow x = W_{g^{-1}} y \Rightarrow y \sim x$ ;  
 $x \sim y \sim z \Rightarrow \exists_{g, h \in G} y = W_g x, z = W_h y \Rightarrow z = W_h y = W_h W_g x = W_{hg} x \Rightarrow x \sim z$ .

b)  $e \in G_x$  weil  $W_e x = x$ ,  $g \in G_x \Rightarrow W_g x = x \Rightarrow x = W_{g^{-1}} x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$ ,  
 $g, h \in G_x \Rightarrow W_g x = x = W_h x \Rightarrow W_{gh} x = W_g W_h x = W_g x = x \Rightarrow gh \in G_x$ .

c) Wohldefiniertheit:  $gG_x = hG_x \Rightarrow k := h^{-1}g \in G_x \Rightarrow h = gk$  mit  $k \in G_x \Rightarrow W_h x = W_{gk} x = W_g W_k x = W_g x$ . Injektivität:  $W_g x = W_h x \Rightarrow x = W_{h^{-1}} W_g x = W_{h^{-1}g} x \Rightarrow k := h^{-1}g \in G_x \Rightarrow g = hk, k \in G_x \Rightarrow gG_x = hkG_x = hG_x$ . Surjektivität:  $y \in Gx \Rightarrow \exists_{g \in G} y = W_g x = w^x(gG_x) \Rightarrow y \in \text{Bild } w^x$ .

3. Eine Ecke  $x$  lässt sich in jede Ecke  $y$  drehen. Haben wir zwei solche Drehungen  $g, h$  mit  $gx = hx = y$ , so ist  $h^{-1}gx = x$ ; die Drehung  $k := h^{-1}g$  ist also eine Drehung des Würfels, die die Ecke  $x$  fest lässt. Eine solche Drehung muss die drei Kanten, die sich in  $x$  treffen, ineinander überführen, und dafür gibt es drei Möglichkeiten: Die Identität sowie die Drehungen um  $120^\circ$  und um  $240^\circ$  in der Ebene senkrecht zu  $x$ . Es gibt daher genau drei Würfeldrehungen, die  $x$  in  $y$  überführen. Da es 8 Ecken  $y$  gibt und  $x$  in eine von ihnen überführt werden muss, gibt es  $3 \cdot 8 = 24$  Würfeldrehungen.

Die Würfelgruppe  $G$  wirkt transitiv auf der Eckenmenge  $E$ , also  $Gx = E$  für jedes  $x \in E$ . Nach 2c) ist  $|G/G_x| = |Gx| = |E| = 8$  (mit  $|M|$  bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer Menge  $M$ ). Außerdem sahen wir, dass drei Drehungen die Ecke  $x$  fest lassen, also  $|G_x| = 3$ . Da alle Nebenklassen  $gG_x$  dieselbe Anzahl von Elementen hat, nämlich  $|gG_x| = |G_x| = 3$ , ist  $|G| = |G/G_x| |G_x| = |E| |G_x| = 8 \cdot 3 = 24$ .

4. Es gibt eine zentrische Streckung  $S_\lambda$  mit  $S_\lambda x_1 = x_2$  und  $S_\lambda y_2 = y_1$ , und eine andere  $S_\mu$  mit  $S_\mu x_2 = x_3$  und  $S_\mu y_3 = y_2$ . Dann ist  $x_3 = S_\mu x_2 = S_\mu S_\lambda x_1 = S_{\mu\lambda} x_1$  und  $y_1 = S_\lambda y_2 = S_\lambda S_\mu y_3 = S_{\lambda\mu} y_3$ . Die Geraden  $x_1 y_3$  und  $x_3 y_1$  sind

parallel genau dann, wenn es eine zentrische Streckung  $S_\alpha$  gibt mit  $S_\alpha x_1 = x_3$  und  $S_\alpha y_3 = y_1$ , d.h.  $S_\alpha$  hat auf  $x_1$  denselben Wert wie  $S_{\mu\lambda}$  und auf  $y_3$  wie  $S_{\lambda\mu}$ . Da eine zentrische Streckung durch ihren Wert auf einem Punkt außerhalb des Zentrums  $o$  bereits bestimmt ist, ist dies äquivalent zu  $S_{\lambda\mu} = S_\alpha = S_{\mu\lambda}$ , also zu  $\lambda\mu = \mu\lambda$ .

**5.** Die zwei Dreiecke sind  $x, y, z$  und  $\lambda x, \lambda y, \lambda z$ . Nach der geometrischen Definition von  $S_\lambda$  sind zwei Seitenpaare bereits parallel:  $x \vee y \parallel \lambda x \vee \lambda y$  und  $x \vee z \parallel \lambda x \vee \lambda z$  (wobei  $A \vee B = AB$  die durch zwei Punkte  $A, B$  bestimmte Gerade bezeichnet). Die Richtungstreue von  $S_\lambda$  ist die Parallelität des dritten Paares:  $y \vee z \parallel \lambda y \vee \lambda z$ .

**6.** Wir müssen zeigen, dass  $Aff(X)$  eine Untergruppe der Gruppe  $B(X)$  aller bijektiven Abbildungen auf  $X$  ist.  $F, G \in Aff(X)$  mit  $Fx = Ax + a$ ,  $Gx = Bx + b \Rightarrow FGx = A(Bx + b) + a = ABx + Ab + a$ , also ist  $FG \in Aff(X)$ . Das Einselement von  $B(X)$  ist  $id_X$ ; dieses ist in  $Aff_X$ , denn  $id_X x = Ex + 0$  wobei  $E$  die Einheitsmatrix auf  $X$  ist. Schließlich ist  $FG = id_X$ , falls  $ABx = x$  und  $Ab + a = 0$ , also  $B = A^{-1}$  und  $b = -A^{-1}a$ ; die Umkehrabbildung von  $F$  ist also die affine Abbildung  $Gx = A^{-1}x - A^{-1}a$ .

Jedes Paar  $(A, a) \in GL(X) \times X$  bestimmt eine affine Abbildung  $Fx = Ax + a$ , und umgekehrt bestimmt eine affine Abbildung das Paar  $(A, a)$ , denn  $a = F0$  und  $Ax = Fx - F0$ . Daher haben wir eine bijektive Abbildung  $GL(X) \times X \rightarrow Aff(X)$ . Der Komposition  $FG$  entspricht das Paar  $(AB, a + Ab)$ ; wir können dies als Definition einer Gruppenstruktur auf  $GL(X) \times X$  nehmen, die der von  $Aff(X)$  genau entspricht (*semidirektes Produkt*).

**7.**  $ns_i + a_i = \sum_j a_j = (n+1)s$ , also  $s = \frac{n}{n+1}s_i + \frac{1}{n+1}a_i = \lambda a_i + (1-\lambda)s_i$  mit  $\lambda = \frac{1}{n+1}$ , also sind  $a_i, s, s_i$  kollinear. Damit ist  $a_i - s = (1-\lambda)(a_i - s_i)$  und  $s_i - s = \lambda(s_i - a_i)$  und  $(a_i - s)/(s_i - s) = -\frac{1-\lambda}{\lambda} = -(\frac{1}{\lambda} - 1) = -(n+1-1) = -n$ .

**8.** a) Die Schwerelinie unterteilt die Seite in zwei gleiche Teile. Nehmen wir diese als Grundseite der beiden Teildreiecke, so sehen wir die Flächengleichheit, denn auch die Höhe (Abstand der Grundseite von dem gegenüberliegenden Punkt) ist dieselbe.

b) Die Aussage ist falsch: Die Entfernung vom Schwerpunkt zur Grundseite ist ein Drittel der Höhe. Eine Parallele zur Grundseite teilt das Dreieck in ein ähnliches (formgleiches) Dreieck, dessen Höhe um den Faktor  $2/3$  kleiner ist, und ein Trapez. Das kleinere Dreieck entsteht aus dem großen durch eine zentrische "Streckung" (besser: Stauchung) um den Faktor  $2/3$ ;

sein Flächeninhalt ist daher das  $(2/3)^2$ -fache des Gesamtflächeninhalts. Aber  $(2/3)^2 = 4/9 < 1/2$ .

**9.** a) Eine Schwerelinie unterteilt die Seite in zwei gleiche Teile; damit wird nach Strahlensatz auch jeder dazu parallele Geradenabschnitt innerhalb  $\Delta$  in zwei gleiche Teile unterteilt, insbesondere die Seite von  $\delta$ . Die Schwerelinien von  $\Delta$  sind damit auch Schwerelinien von  $\delta$ , und ihr gemeinsamer Schnittpunkt ist Schwerpunkt von  $\delta$ .

b) Die Schwerelinien in  $\Delta$  verbinden die Eckpunkte von  $\delta$  und  $\Delta$  und werden durch den Schwerpunkt  $s$  im Verhältnis  $\frac{1}{3} : \frac{2}{3}$  (vgl. Aufg. 7), also  $1 : 2$  unterteilt. Deshalb entstehen die Eckpunkte von  $\Delta$  aus denen von  $\delta$  durch zentrische Streckung mit Zentrum  $s$  und Streckungsfaktor  $-2$ .

c) Eine Höhe auf einer Seite von  $\delta$  schneidet die gegenüberliegende Seite von  $\Delta$  senkrecht und der Mitte, ist also eine Mittelsenkrechte. Daher ist der Höhenschnittpunkt  $h$  von  $\delta$  der Schnittpunkt  $M$  der Mittelsenkrechten (Umkreismittelpunkt) von  $\Delta$ . Die zentrische Streckung  $S_{-2}$  bildet den Umkreismittelpunkt  $m$  von  $\delta$  auf den Umkreismittelpunkt  $M = h$  von  $\Delta$  ab und lässt den gemeinsamen Schwerpunkt  $s$  fest; wir wählen  $s$  als Ursprung:  $s = 0$ . Dann gilt  $h = S_{-2}(m)$ , also  $h = -2m$ , und  $h, s, m$  liegen auf einer gemeinsamen Geraden mit  $(m - s)/(h - s) = -2$ .

**10.** b) Die drei Ikosaederpunkte auf der Oktaederseite  $e_1e_2e_3$  sind  $p_1 = ae_1 + be_2 = (a, b, 0)$ ,  $p_2 = ae_2 + be_3 = (0, a, b)$ ,  $p_3 = ae_3 + be_1 = (b, 0, a)$  mit  $a + b = 1$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi$  mit  $\Phi^2 = \Phi + 1$  (goldener Schnitt). Dann ist  $p_1 - p_2 = (a, b - a, -b)$  und  $|p_1 - p_2|^2 = a^2 + (b - a)^2 + b^2 = 2(a^2 - ab + b^2) = 2b^2(\Phi^2 - \Phi + 1) = 2b^2(\Phi + 1 - \Phi + 1) = 4b^2$  und somit  $|p_1 - p_2| = 2b$ .

Ein zu  $p_1$  benachbarter Punkt auf einer anderen Oktaederseite ist  $p_4 = ae_1 - be_2 = (a, -b, 0)$ , und  $p_1 - p_4 = (0, -2b, 0)$  hat offensichtlich ebenfalls die Länge  $2b$ .

**11.** Die vertikalen Kanten werden als vertikale Geraden abgebildet. Die untere und obere Kante der Giebelfront (bis zum Dachansatz) müssen beide schräg nach oben verlaufen und sich oberhalb des Daches in einem Punkt  $P$  treffen, damit das Haus von oben gesehen wird (Vogelperspektive). Der Horizont der waagerechten Ebenen (z.B. Fußbodenebene) ist die waagerechte Gerade  $h$  durch  $P$ , der Horizont der Giebelfrontebene ist die Vertikale  $v$  durch  $P$ . Die Fluchtlinien der rechten Seitenwand (Verlängerungen der Ober- und Unterkanten) müssen sich ebenfalls auf dem waagerechten Horizont  $h$  treffen, in einem Punkt  $Q \in h$ . Der Horizont der Seitenwandebene ist

die vertikale Gerade  $w$  durch  $Q$ . Nun kann man leicht die Zeichnung zu dem Quader, der den unteren Teil des Hauses (ohne Dach) darstellt, ergänzen. Da die Giebelfront quadratisch ist, haben ihre Diagonalen in der Realität  $45^\circ$  Steigung und sind damit parallel zu den Dachschrägen. Man zeichne daher die beiden Diagonalen der Giebelseite (bestimmt durch deren Eckpunkte) sowie ihre Schnittpunkte  $R, S$  mit dem vertikalen Horizont  $v$ . Diese Punkte verbindet man mit den oberen beiden Punkten des Giebelfront-Viereck und erhält die vorderen Dachschrägen. Die hinteren sind zu den vorderen parallel; im Bild verbinden sie die Fernpunkte  $R$  und  $S$  mit den oberen Ecken des hinteren Giebelfront-Vierecks. Der Dachfirst verbindet die Schnittpunkte der vorderen und hinteren Dachkanten; er muss von selbst auf den Punkt  $Q$  der waagerechten Horizontes zulaufen. Zuletzt sind noch die Horizonte der beiden Dachebenen einzuzeichnen; es sind dies die Geraden  $RQ$  und  $SQ$ .

**12.** Das Projektionszentrum ist  $Z = (0, 1, 1)$ . Der Urbildpunkt sei  $P = (x, y, 0)$ . Die Projektionsgerade  $p = PZ$  wird also parametrisiert durch  $p(t) = P + t(Z - P) = (x, y, 0) + t(-x, 1 - y, 1) = (x - tx, y + t(1 - y), t)$ . Der Bildpunkt ist der Schnittpunkt von  $p$  mit der  $xz$ -Ebene, wo die  $y$ -Koordinate verschwindet; also ist  $t$  so zu wählen, dass  $y + t(1 - y) = 0$ , also  $t = \frac{y}{y-1}$  und  $t - 1 = \frac{1}{y-1}$ . Der Bildpunkt  $P' = (x', 0, z') = p(\frac{y}{y-1})$  hat also die Koordinaten  $x' = x(1 - t) = -\frac{x}{y-1}$  und  $z' = t = \frac{y}{y-1}$ . Umkehrung:  $(y - 1)z' = y \Rightarrow y(z' - 1) = z' \Rightarrow y = \frac{z'}{z'-1}$  und  $x = -x'(y - 1) = -\frac{x'}{z'-1}$ . Ist jetzt eine Schar paralleler Geraden  $ax + by = s$  gegeben ( $a, b \in \mathbb{R}$  fest,  $s \in \mathbb{R}$  der variable Parameter), so erhalten wir die Gleichung der Bildgeraden durch Substitution von  $x = -\frac{x'}{z'-1}$  und  $y = \frac{z'}{z'-1}$ , also  $-ax' + bz' = s(z' - 1)$  und damit  $-ax' + (b - t)z' = -s$ . Der Schnittpunkt  $(x', 0, z')$  aller Bildgeraden erfüllt diese Gleichung für alle  $s$  gleichzeitig; das ist nur möglich, wenn die  $s$ -Terme wegfallen, was für  $z' = 1$  der Fall ist; wir erhalten dann  $-ax' + b = 0$  und damit  $x' = \frac{b}{a}$ . Die Bildgeraden schneiden sich also im Punkt  $(\frac{b}{a}, 0, 1)$  (Fluchtpunkt). Der Horizont, der alle Fluchtpunkte enthält, ist die Gerade  $\{(x', 0, 1); x' \in \mathbb{R}\}$ .

**13.** a) A hat Unrecht. Zwar kommt eine projektive Abbildung  $F$  von  $\mathbb{R}P^2$  von einer linearen Abbildung  $L$  auf  $\mathbb{R}^3$  her,  $F[x] = [Lx]$ , und  $L$  ist in der Tat durch die Bilder von drei Basisvektoren, die Vektoren  $Lb_1, Lb_2, Lb_3$ , festgelegt, aber die drei Punkte  $[a_i] = F[b_i] = [Lb_i] \in \mathbb{R}P^2$  legen  $Lb_i$  nur bis auf skalare Vielfache fest. Wir wissen also nur  $Lb_i = \lambda_i a_i$  mit unbekanntem Skalaren  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . Dadurch ist  $F = [L]$  noch nicht bestimmt. Zwar ist es auch wahr, dass eine Ebene im Raum durch drei Punkte festgelegt wird, aber hier geht



es nicht um die Lage einer Ebene im Raum, sondern um eine projektive Abbildung der Ebene auf sich; das ist etwas anderes.

C hat nur teilweise Recht; in der Tat ist das Bild eines Quadrats unter einer perspektivischen Abbildung (Foto) immer ein konvexes Viereck. Aber wir machen ja immer nur ein Foto in eine bestimmte Richtung, bilden also nur eine Halbebene oder einen Halbraum ab. Wenn wir mit der Zentralprojektion die ganze Ebene abbilden (also auch den Bereich "hinter dem Photographen"), finden wir leicht Quadrate, deren Bild nicht mehr konvex ist. Konvexe Figuren liegen auf einer Seite ihrer Stützgeraden, aber der Begriff "auf einer Seite" macht in der projektiven Ebene keinen Sinn, da sie nicht orientierbar ist (sie enthält ein Möbiusband).

b) Die gegebenen Eckpunkte des Quadrats sind  $[b_3]$ ,  $[b_1]$ ,  $[b_2]$  und  $[b_1 + b_2 - b_3]$ , die Bildpunkte  $[-b_3] = [b_3] = [0, 0, 1]$ ,  $[b_1] = [1, 0, 1]$ ,  $[b_2] = [0, 1, 1]$  und  $[b_1 + b_2 + b_3] = [1, 1, 3] = [\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1]$ . Alle vier Bildpunkte liegen in der affinen Ebene  $A^2 = \{[x, y, 1]; x, y \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^2$  und bilden dort das Viereck mit den Ecken  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ; dieses ist nicht konvex. Zu c) vergleiche man Aufgabe 19.

**14.**  $F = [L]$  mit  $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $ad - bc = \det L \neq 0$ . Also ist  $F[x, 1] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = [ax + b, cx + d, 1] = [\frac{ax+b}{cx+d}, 1]$ . Dabei sollte man die Konvention  $[\infty, 1] = [1, 0]$  vereinbaren.

**15.**  $F = [L] = id \iff \forall v \in V \exists \lambda_v \in \mathbb{K}^* Lv = \lambda_v v$ . Für zwei linear unabhängige Vektoren  $v, w \in V$  gilt  $L(v + w) = Lv + Lw$  und damit  $\lambda_v v + \lambda_w w = \lambda_{v+w}(v+w)$ , also  $(\lambda_v - \lambda_{v+w})v + (\lambda_w - \lambda_{v+w})w = 0$  und somit  $\lambda_v = \lambda_{v+w} = \lambda_w$ , also  $\lambda_v = \lambda_w$ . Sind  $v, w$  linear abhängig, suchen wir einen von  $v, w$  linear unabhängigen Vektor  $u \in V$ ; dann gilt  $\lambda_v = \lambda_u = \lambda_w$ . Also erhalten wir  $Lv = \lambda v$  für ein von  $v$  unabhängiges  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ . Umgekehrt ist klar, dass  $F = [\lambda E]$  für beliebige  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  (wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist) die identische Abbildung auf  $P_V$  ist.

**16.** a) Es gilt  $x^\sigma + y^\sigma = (x + y)^\sigma$  und  $(\lambda x)^\sigma = \lambda^\sigma x^\sigma$ , da  $(x_i)^\sigma + (y_i)^\sigma = (x_i + y_i)^\sigma$  und  $(\lambda x_i)^\sigma = \lambda^\sigma (x_i)^\sigma$  für alle Komponenten  $x_i, i = 1, \dots, n$ . Daher ist  $\hat{\sigma} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto x^\sigma$  für jedes  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$  eine semilineare Abbildung. Da  $\hat{\sigma}\hat{\tau} = \hat{\sigma\tau}$  und da der triviale Automorphismus auch auf  $\mathbb{K}^n$  die identische Abbildung ist, ist  $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$  eine Gruppenwirkung von  $\text{Aut}(\mathbb{K})$  auf  $\mathbb{K}^n$  durch semilineare Abbildungen; insbesondere ist  $\{\hat{\sigma}; \sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})\}$  eine Untergruppe von  $\overline{GL}(\mathbb{K}^n)$ .

b) Für eine gegebene semilineare Abbildung  $S$  ist  $S(\lambda x) = \lambda^\sigma Sx$  für ein

$\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$ . Es sei  $\tau = \sigma^{-1}$ . Dann ist  $L = \hat{\tau} \circ S$  linear, denn  $L(\lambda x) = \hat{\tau}(S(\lambda x)) = (\lambda^\sigma Sx)^\tau = (\lambda^\sigma)^\tau (Sx)^\tau = \lambda(Sx)^\tau = \lambda Lx$ . Also ist  $S = \hat{\sigma} \circ L$  mit  $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{K})$  und  $L \in GL(\mathbb{K}^n)$ . Eindeutigkeit: Ist  $S = \hat{\sigma} \circ L = \hat{\rho} \circ M$  mit  $\sigma, \rho \in \text{Aut}(\mathbb{K})$  und  $L, M \in GL(\mathbb{K}^n)$ , so ist  $\hat{\rho}^{-1}\hat{\sigma} = ML^{-1}$  linear, aber eine Abbildung  $\hat{\tau}$  (hier:  $\tau = \rho^{-1}\sigma$ ) ist nur dann linear, wenn  $\tau = id$ . Also ist  $\rho = \sigma$  und damit auch  $ML^{-1} = E$ , also  $L = M$ .

c) Wenn  $L$  linear ist, dann ist auch  $L^\tau := \hat{\tau}^{-1}L\hat{\tau}$  linear, denn  $L^\tau(\lambda x) = \hat{\tau}^{-1}(L(\lambda^\tau x^\tau)) = \hat{\tau}^{-1}(\lambda^\tau L(x^\tau)) = \lambda L^\tau(x)$ . Die Matrix von  $L^\tau$  entsteht, indem auf alle Matrixkoeffizienten von  $L$  der Automorphismus  $\tau^{-1}$  angewandt wird, denn die  $i$ -te Spalte von  $L^\tau$  ist  $L^\tau e_i = \hat{\tau}^{-1}L e_i = (L e_i)^\tau$ . Nun gilt  $\hat{\sigma}L\hat{\tau}M = \hat{\sigma}\hat{\tau}\hat{\tau}^{-1}L\hat{\tau}M = \hat{\sigma}\hat{\tau}L^\tau M = \hat{\alpha}A$  mit  $\alpha = \sigma\tau \in \text{Aut}(\mathbb{K})$  und  $A = L^\tau M \in GL(\mathbb{K}^n)$ . Wenn wir eine semilineare Abbildung  $S$  mit dem zugehörigen Paar  $(\sigma, L) \in \text{Aut}(\mathbb{K}) \times GL(\mathbb{K}^n)$  identifizieren, so erhalten wir die Multiplikation wie in einem semidirekten Produkt:  $(\sigma, L)(\tau, M) = (\sigma\tau, L^\tau M)$ .

**17.** Induktionsanfang  $k = 1$  ist klar nach Definition einer Kollineation. Wir wollen die Behauptung für einen  $k$ -dimensionalen Unterraum  $P' \subset P$  mit  $k \geq 2$  beweisen. Wir können  $P'$  durch einen  $(k - 1)$ -dimensionalen Unterraum  $P'' \subset P$  sowie eine dazu transversale Gerade  $g \subset P'$  aufspannen:  $P' = P'' \vee g$ . Der Schnittpunkt von  $P'$  und  $g$  sei der Punkt  $s \in P'$ . Nach Induktionsvoraussetzung und wegen der Kollineationseigenschaft ist auch  $F(P')$  ein  $k - 1$ -dimensionaler Unterraum und  $F(g)$  eine Gerade, die den Unterraum  $F(P')$  im Punkt  $F(s)$  schneidet, aber wegen der Bijektivität von  $F$  nicht darin enthalten ist. Wir zeigen nun  $F(P') \subset F(P'') \vee F(g)$ . Es sei also  $p \in P'$ ; wir müssen  $F(p) \in F(P'') \vee F(g)$  zeigen. Wenn  $p \in P''$  oder  $p \in g$ , ist das klar. Andernfalls verbinden wir  $p$  mit einem Punkt  $q \in g$  durch eine Gerade  $h$ . Da diese in  $P'$  liegt, schneidet sie die Hyperebene  $P'' \subset P'$  in einem Punkt  $r$ . Das Bild  $F(h)$  ist wieder eine Gerade durch die Punkte  $F(q) \in F(g)$  und  $F(r) \in F(P'')$ , liegt also in  $F(g) \vee F(P'')$ , und also ist  $F(p) \in F(h) \subset F(P'') \vee F(g)$ . Für die Kollineation  $F^{-1}$  zeigen wir ebenso  $F^{-1}(F(P'') \vee F(g)) \subset P'' \vee g = P'$ , und damit folgt die andere Inklusion  $F(P'') \vee F(g) \subset F(P')$ , also die Gleichheit. Das Bild von  $P'$  ist somit ein  $k$ -dimensionaler Unterraum, nämlich  $F(P'') \vee F(g)$ .

**18.**  $x^2 \pm y^2 - 1 = 0$  wird homogenisiert zu  $x^2 \pm y^2 - z^2 = 0$ , und  $y - x^2 = 0$  wird  $yz - x^2 = 0$ . Die erste Gleichung  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  geht durch Vertauschen der  $x$ - und der  $z$ -Koordinate, d.h. durch die lineare Substitution (Ersetzung der Variablen)  $x = \tilde{z}$ ,  $y = \tilde{y}$ ,  $z = \tilde{x}$  über in die Gleichung  $\tilde{z}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 = 0$ , was dasselbe ist wie  $\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0$ ; das entspricht der zweiten Gleichung. Auf die

dritte Gleichung  $yz - x^2 = 0$  wenden wir die lineare Substitution  $y = \tilde{z} + \tilde{y}$ ,  $z = \tilde{z} - \tilde{y}$ ,  $x = \tilde{x}$  an und erhalten  $\tilde{z}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{x}^2 = 0$  oder  $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 0$ , was der erste Gleichung entspricht.

**19.** Aus  $F[e_i] = [a_i]$  und  $F[e] = [a]$  ergibt sich  $Le_i = \lambda_i a_i$  und  $Le = \lambda a$  mit  $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}^*$ . Da wir  $L$  durch einen skalaren Faktor abändern können, ohne  $F = [L]$  zu verändern, können wir  $\lambda = 1$  wählen. Aus  $Le = a$  lassen sich die  $\lambda_i$  berechnen: Einerseits ist  $a_1, \dots, a_n$  eine Basis und daher  $a = \sum_i \alpha_i a_i$ , wobei die  $\alpha_i \in \mathbb{K}^*$  als bekannt gelten, da  $a$  und  $a_i$  bekannt sind. (Kein  $\alpha_i$  kann Null sein, sonst wäre  $a$  bereits von  $(n-1)$  der  $a_i$  linear abhängig, im Widerspruch zur Annahme.) Andererseits ist  $Le = \sum Le_i = \sum_i \lambda_i a_i$ . Aus  $Le = a$  folgt also  $\sum_i \lambda_i a_i = \sum_i \alpha_i a_i$  und damit  $\lambda_i = \alpha_i$  (die Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  sind ja linear unabhängig). Damit ist  $L$  bestimmt.

**20.** Die Homogenisierung der Hyperbelgleichung  $x^2 - y^2 = 1$  ist  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$ . Der affine Teil  $z = 1$  ist die affine Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$ . Die projektive Kurve  $\{[x, y, z]; x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$  schneidet aber auch die Ferngerade  $z = 0$ , nämlich in den zwei Punkten  $x = y, z = 0$  und  $x = -y, z = 0$ . Diese Punkte entsprechen den beiden Asymptoten  $x = y$  und  $x = -y$ . Geometrisch gesehen beschreibt  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$  einen Kegel im Raum, deren Achse die  $x$ -Achse ist. Er besteht aus einem Bündel von Geraden durch  $O$ , den Erzeugenden oder Mantellinien, die bis auf zwei Ausnahmen alle die affine Ebene  $z = 1$  schneiden, und zwar in den Punkten der der affinen Hyperbel  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $z = 1$ . Die zwei Ausnahmen sind die beiden Erzeugenden, die ganz in der  $xy$ -Ebene  $z = 0$  verlaufen: die Geraden  $x = y, z = 0$  und  $x = -y, z = 0$ .

Man kann dies auch in der Ebene sehen, ohne in den Raum zu gehen: Die Verbindungsgeraden von einem beliebigen festen Punkt  $o$  zu den Punkten der Hyperbel streben gegen eine Parallele zu einer Asymptoten, wenn wir den Punkt auf einem Hyperbel-Ast ins Unendliche laufen lassen. Dies zeigt ebenfalls, dass der zugehörige Fernpunkt, die Parallelenklasse zu der Asymptoten, im projektiven Abschluss der Kurve liegen muss, denn diese Aussage stimmt auch noch für jeden Punkt im Raum außerhalb der Ebene (da der Kurvenpunkt ins Unendliche läuft, spielt es keine Rolle, von welchem Punkt  $o$  man ausgeht; die Entfernung von je zwei festen Punkten ist schließlich klein im Vergleich zur Entfernung vom Kurvenpunkt); sie stimmt also auch für den Ursprung des  $\mathbb{R}^3$ , wenn die Ebene auf der Höhe  $z = 1$  in den Raum eingebettet wird.

**21.** Die Quadrik ist projektiv äquivalent zum einschaligen Hyperboloiden, denn die Normalform der definierenden quadratischen Form enthält zwei Mi-

nuszeichen und zwei Pluszeichen. Das sehen wir z.B. durch simultane Zeilen- und Spaltentransformation:

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc}
 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 2 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 4 & -1 & 4 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & -2
 \end{array}$$

**22.** Die vormalig parallelen Geraden müssen sich jetzt auf einer gemeinsamen Geraden treffen.

**23.** Die Quadrik ist  $Q = \{[x]; x \in \mathbb{R}^4, q(x) = 0\}$  mit  $q(x) = q(s, t, u, v) = st - uv$ . Die Tangentialebene ist  $T_{[x]}Q = \{[y]; \beta(x, y) = 0\}$ , wobei  $\beta$  die zur quadratischen Form  $q$  gehörige Bilinearform ist, die durch Polarisierung entsteht:  $2\beta(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ . Eine Gerade  $g \subset Q$  durch einen Punkt  $[x] \in Q$  liegt damit auch in  $T_{[x]}Q$ : Für alle  $[y] \in g$  ist auch  $[x + y] \in g$  (da  $g = \pi(E)$  für einen zweidimensionalen Untervektorraum  $E$ , der  $x, y$  und somit auch  $x + y$  enthält). Also sind  $[x], [y], [x + y] \in g \subset Q$  und damit ist  $q(x) = q(y) = q(x + y) = 0$ , also  $\beta(x, y) = 0$ , also  $[y] \in T_{[x]}Q$ .

**24.** Man muss sich die Bildentstehung durch Zentralprojektion im Raum vergegenwärtigen. Der Betrachter steht am Eingang des Zimmers und blickt gerade hinein; die Blickrichtung ist parallel zu den Seitenwänden. Das Auge des Betrachters ist das Projektionszentrum  $Z$ . Die Bildebene  $B$  liegt senkrecht zur Blickrichtung zwischen dem Betrachter und dem Gegenstand  $P$ . Der Bildpunkt von  $P$  ist der Schnitt der Geraden  $ZP$  (Sichtlinie) mit  $B$ ; die Schnittpunkte sind die Punkte in Dürers Holzschnitt und auch in der unteren Zeichnung. Jede von  $Z$  ausgehende Gerade erzeugt einen Punkt in  $B$ . Der Punkt  $H$  entspricht dabei der Blickrichtung, also der von  $Z$  gerade nach vorn verlaufenden Geraden (der Tisch steht ja parallel zur Wand; seine Kanten sind also parallel zur Blickrichtung). Die Punkte  $E$  und  $F$  entsprechen horizontalen Geraden durch  $Z$  mit Winkel  $45^\circ$  zur Blickrichtung. (Das erkennt man in mehreren Schritten: Der Stuhl wird als rechteckig angenommen. Da seine Kanten auf  $E$  und  $F$  weisen, schließen alle auf die beiden Punkte zulaufenden Geradenpaare miteinander einen Winkel von  $90^\circ$  ein. Die Diagonalen des Tisches sind solche Geraden; sie weisen auf  $E$  und  $F$  und schließen somit ebenfalls einen Winkel von  $90^\circ$  ein. Damit ist der rechtwinklig angenommene Tisch quadratisch, und der Winkel zwischen  $H$  und  $E$  bzw.  $F$  ist derselbe wie zwischen Seite und Diagonale des Tisches, also  $45^\circ$ .) Die Geraden durch

$Z$  mit Winkel  $45^\circ$  zur Blickrichtung bilden einen Kegel, der  $B$  in einem Kreis mit Mittelpunkt  $H$  durch die Punkte  $E$  und  $F$  schneidet; der untere Teil davon ist gezeichnet. Eine besondere Rolle spielt der mit  $0^\circ$  gekennzeichnete untere Punkt des Halbkreises, der einer Sichtlinie entspricht, die nach vorne und mit  $45^\circ$  nach unten weist: Die Spiegelung  $S$  an der Mittelsenkrechten dieser Strecke von  $Z$  zu dem  $0^\circ$ -Punkt von  $B$  wirft die horizontale Ebene durch  $Z$  auf die Bildebene  $B$ . Daraus folgt die behauptete Gleichheit der Winkel: Wir können uns den Stuhl parallelverschoben denken, so dass sein Eckpunkt in den Punkt  $Z$  fällt. Dann bildet  $S$  Diagonale und Kante des Stuhls (die Urbilder der Geraden  $g$  und  $f$ ) auf die Geraden  $\bar{g}$  und  $\bar{f}$  ab; der Winkel bleibt dabei erhalten. Da die letzteren Geraden aber in der Bildebene liegen, können wir ihren Winkel treu ablesen; der gesehene Winkel  $\beta = \angle(\bar{g}, \bar{f})$  ist also der wahre Winkel zwischen Diagonale und Kante des Stuhls.

**25. Pappos:** Gegeben 6 Punkte  $1, \dots, 6$ , die abwechselnd auf zwei Geraden  $a$  und  $b$  liegen. Mit  $ij$  werde die Verbindungsgerade der Punkte  $i, j$  bezeichnet. Dann liegen die Punkte  $12 \wedge 45$ ,  $23 \wedge 56$ ,  $34 \wedge 61$  auf einer gemeinsamen Geraden  $c$ .

*Dualer Satz:* Gegeben 6 Geraden  $1, \dots, 6$ , die abwechselnd durch zwei Punkte  $A$  und  $B$  gehen. Mit  $ij$  werde der Schnittpunkt der Geraden  $i, j$  bezeichnet. Dann gehen die Geraden  $12 \vee 45$ ,  $23 \vee 56$ ,  $34 \vee 61$  durch einen gemeinsamen Punkt  $C$ .

Der Satz von Pappos ist ein Spezialfall des Satzes von Pascal, wenn dort auch ein ausgearteter Kegelschnitt (ein Geradenpaar) zugelassen wird. Der zu Pascal duale Satz ist Brianchon, aber beim Dualisieren verwenden wir, dass der Kegelschnitt nicht ausgeartet ist: Die Tangenten des Kegelschnitts mit symmetrischer Bilinearform  $\beta$  sind dual zu den Punkte des Kegelschnitts mit Bilinearform  $\beta^{-1}$ . Deshalb ist der zu Pappos duale Satz kein Spezialfall von Brianchon, wohl aber ein Grenzfall: Wenn wir bei Brianchon als Kegelschnitt eine sehr schmale Ellipse wählen und die Tangenten  $1, \dots, 6$  so wählen, dass ihre Berührungspunkte abwechselnd ganz nahe an den beiden Endpunkten  $A$  und  $B$  der langen Achse der Ellipse liegen, dann erhalten wir den dualen Pappos als Grenzfall, wenn nämlich die Ellipse zur Strecke  $[A, B]$  entartet und die Berührungspunkte der Tangenten immer dichter an  $A$  und  $B$  heranrücken. Allerdings ist die Strecke selbst keine Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung, im Gegensatz zu dem Geradenpaar bei Pappos.

**26.** Die Polare zu einem Punkt  $[x]$  besteht aus den homogenen Vektoren  $[y]$ , die zu  $x$  senkrecht sind bezüglich der gegebenen symmetrischen Bilinearform

$\beta$ , also  $\beta(x, y) = 0$ . Ist  $Q = \{[x]; \beta(x, x) = 0\}$  der zugehörige Kegelschnitt, so ist die Tangente im Punkt  $[x] \in Q$  die Gerade  $T_{[x]}Q = \{[y]; \beta(x, y) = 0\}$  und damit die Polare zu  $x$ . Das erklärt das mittlere Bild. Liegt  $p = [y]$  außerhalb des Kegelschnitts im Schnittpunkt zweier Tangenten  $T_{[x]}Q$  und  $T_{[x']}Q$ , dann gilt  $\beta(x, y) = \beta(x', y) = 0$  und somit auch  $\beta(x'', y) = 0$  für alle  $x''$  in dem von  $x$  und  $x'$  aufgespannten linearen Unterraum. Die Gerade  $g = [x] \vee [x']$  ist deshalb die Polare zu  $p = [y]$ , womit das linke Bild erklärt ist. Liegt  $p$  im Inneren des Kegelschnitts, so suchen wir zwei Punkte  $p_1, p_2$  außerhalb, deren Polaren  $g_1, g_2$  sich in  $p$  schneiden. Damit ist  $p$   $\beta$ -senkrecht zu  $p_1$  und  $p_2$  und damit zu allen Punkten von  $g = p_1 \vee p_2$ , also ist  $g$  die Polare zu  $p$ . Das erklärt das rechte Bild.

**27.** Dass projektive Abbildung das Doppelverhältnis invariant lassen, wissen wir aus der Vorlesung: Wir wählen für die vier homogenen Vektoren ja stets solche Repräsentanten, die auf einer gemeinsamen Geraden im Vektorraum liegen, und lineare Abbildungen des Vektorraums erhalten Geraden sowie die Verhältnisse von je drei Punkten auf der Geraden, also auch deren Quotienten. Zu zeigen ist die Umkehrung. Gegeben sei also eine bijektive Abbildung  $F : P^1 \rightarrow P^1$ , die das Doppelverhältnis invariant lässt. Die drei Punkte  $0, 1, \infty \in \hat{\mathbb{K}} = P^1$  werden durch  $F^{-1}$  auf irgendwelche Punkte  $a, b, c \in \hat{\mathbb{K}}$  abgebildet:  $F(a) = 0, F(b) = 1, F(c) = \infty$ . Für jedes  $y \in \mathbb{K}$  ist  $DV(y, 1, 0, \infty) = \frac{y-0}{1-0} \cdot \frac{1-\infty}{y-\infty} = y$ . Damit ist  $F(x) = DV(F(x), 1, 0, \infty) = DV(F(x), F(b), F(a), F(c)) = DV(x, b, a, c) = \frac{x-a}{b-a} \cdot \frac{b-c}{x-c} = \frac{x(b-c)-a(b-c)}{(b-a)x-(b-a)c}$ . Also ist  $F$  eine gebrochene lineare Funktion und damit projektiv (vgl. Aufgabe 14). Eine Alternative ist, zu  $H = FG$  überzugehen, wobei  $G$  die projektive Abbildung ist, die  $0, 1, \infty$  auf  $a, b, c$  abbildet. Dann lässt  $H$  die Punkte  $0, 1, \infty$  fest und erhält das Doppelverhältnis, und da  $DV(x, 1, 0, \infty) = x$ , ist  $H(x) = x$  für alle  $x$ , also  $F = G^{-1}$ .

**28.** a) Das obere, von zwei Seiten  $s$  und einer Diagonale  $d$  gebildete Dreieck ist ähnlich zu dem von zwei Diagonalenabschnitten  $d'$  und einer Seite  $s$  gebildeten Dreieck rechts oben: Beide sind gleichschenkelig, und sie haben einen Winkel gemeinsam. Die Verhältnisse entsprechender Stücke sind also gleich:  $\frac{d}{s} = \frac{s}{d'}$ . Andererseits ist  $d' + s' = s$  und damit  $d = s + d'$ , denn  $d' + s'$  und  $s$  sind die Längen von parallelen Seiten eines Parallelogramms: Seiten und Diagonalen sind aus Symmetriegründen parallel, und daher bilden die Seiten und die längeren Diagonalenabschnitte jeweils ein Parallelogramm. Wir erhalten also  $\frac{s+d'}{s} = \frac{d}{s} = \frac{s}{d'}$  und damit ist  $\frac{d}{s} = \Phi$ , der Goldene Schnitt (die

ganze Strecke  $d = d' + s$  verhält sich zum längeren Abschnitt  $s$  wie dieser zum kürzeren Abschnitt  $d'$ ).

b) Wären  $d$  und  $s$  kommensurabel, gäbe es eine Einheitslänge  $e$ , so dass sowohl  $s$  wie  $d$  ganzzahlige Vielfache von  $e$  wären:  $d = ne$ ,  $s = me$ . Dann wären aber auch  $d'$  und  $s'$  ganzzahlige Vielfache derselben Einheit, denn aus  $d = d' + s'$  und  $s = d' + s'$  folgt  $d' = d - s$  und  $s' = s - d' = 2s - d$ , also  $d' = (n - m)e$ ,  $s' = (2m - d)e$ . Dass  $d'$  wirklich die Länge der Diagonale des kleinen Fünfecks ist, folgt wieder aus einem Parallelogramm. Nun können wir das Argument mit dem ganz kleinen Fünfeck in der Mitte des kleinen Sterns wiederholen; auch deren Seite und Diagonale müssen ganzzahlige Vielfache von  $e$  sein, und so weiter für immer kleinere Fünfecke: Immer wieder sind Seitenlänge und Diagonale ganze Vielfache von  $e$ . Aber das ist ein Widerspruch, denn die Länge der Fünfeckseiten geht gegen Null (sie wird bei jedem Schritt um einen festen Faktor,  $1/\Phi^2$ , kleiner), und nach einer Reihe von Schritten ist die Seitenlänge kleiner als  $e$  und kann daher kein ganzzahliges Vielfaches von  $e$  mehr sein!

**29.** Strecke mit Länge  $s$  im goldenen Schnitt unterteilen,  $s = d' + s'$ , und das längere Stück  $d'$  rechts noch einmal anfügen. Die so verlängerte Strecke sei  $[A, C]$ , ihre Länge  $d = |A - C|$ . Von den beiden Unterteilungspunkten aus die Kreise mit Radius  $d'$  (= längeres Teilstück) zum Schnitt bringen; das ergibt den oberen Fünfeckpunkt  $B$ . Die Strecken  $[BA]$  und  $[BC]$  sind zwei der Fünfeckseiten mit Länge  $s$ . Jetzt schneide man den Kreis um  $B$  mit Radius  $d$  mit den Kreisen um  $A$  und  $C$  mit Radius  $s$  und erhält die noch fehlenden Fünfeckpunkte  $D, E$ .

**30.** Das Viereck  $abde$  ist ein Parallelogramm, sogar eine Raute (ein Rhombus): Alle vier Seiten sind gleich lang, nämlich gleich dem Radius, der für alle Kreise gleich ist. Deshalb liegen die Punkte  $e, d, f$  auf einer gemeinsamen Geraden senkrecht zur Geraden  $dc$ . Damit ist  $edg$  ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck und die Gerade  $eg = ei$  hat Steigung  $45^\circ$ . Die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten des Differenzvektors  $i - e$  müssten demnach gleich sein.

Andererseits können wir diese Komponenten berechnen unter der Annahme, dass die Konstruktion ein reguläres Fünfeck mit Seitenlänge 1 ergibt. Die Diagonale hat dann die Länge  $\Phi$ , und  $(i - e)_x = |i - c| + |d - e| = \frac{\Phi}{2} + 1 \approx 1,809$ . Für die  $y$ -Komponente müssen wir den Abstand der unteren Seite zu der dazu parallelen Diagonale im regulären Fünfeck bestimmen. Dies ist die Höhe  $h$  des spitzen gleichschenkligen Dreiecks mit Seitenlängen  $s$  und  $d'$  (siehe linke Figur, Dreieck links mit Spitze nach unten). Da  $s = 1$ , ist  $d' = \frac{1}{\Phi} =: \Psi$  und

nach Pythagoras ist  $h^2 = 1 - \frac{\Psi^2}{4} = \frac{1}{4}(3 + \Psi)$ .<sup>62</sup> Man beachte die Gleichung des Goldenen Schnitts:  $1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$ , also  $1 + \Psi = \frac{1}{\Psi}$ , also  $\Psi + \Psi^2 = 1$ , also  $\Psi^2 = 1 - \Psi$ . Dazu kommt noch die Höhe des gleichseitigen Dreiecks  $acd$  mit Seitenlänge 1; dies ist  $\sqrt{3}/2$ . Also ist  $(i - c)_y = (i - b)_y + (a - c)_y = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \Psi + \sqrt{3}) \approx 1,817$ . Aber auch ohne weitere Rechnung sieht man die Verschiedenheit der beiden Zahlen, denn  $(i - c)_y$  enthält  $\sqrt{3}$ ,  $(i - c)_x$  aber nicht.

**31.** Der zwischen  $C$  und  $B$  liegende Quadratmittelpunkt sei  $M$ . Nach Pythagoras ist  $|A - B|^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$ , und damit ist  $|C - M| = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{\Phi} = \Psi$ , und die gesuchte Seite  $s = |C - A| = \sqrt{1 + \Psi^2} = \sqrt{2 - \Psi}$  (vgl. Fußnote auf der Vorderseite).

Andererseits können wir die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks mit Umkreisradius 1 berechnen. Dazu beachte man, dass der spitze Winkel des aus zwei Diagonalen und einer Seite gebildeten Dreiecks  $\Delta$  nach dem Fasskreis-Argument gerade halb so groß wie der Mittelpunktswinkel beim Fünfeck. Legt man also zehn zu  $\Delta$  ähnliche Dreiecke  $\tilde{\Delta}$  mit langer Seitenlänge 1 zusammen, so erhält man ein reguläres Zehneck mit Radius 1. Das Fünfeck entsteht daraus durch Verbinden von Eckpunkten jeweils benachbarter Dreiecke; die Länge  $s$  der Verbindungsstrecke ist daher zweimal die Höhe  $\tilde{h}$  von  $\tilde{\Delta}$ . Diese Höhe hatten wir bereits in der vorigen Aufgabe für das zu  $\tilde{\Delta}$  ähnliche Dreieck mit kurzer Seitenlänge 1 berechnet; es war  $h = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \Psi}$ . In  $\tilde{\Delta}$  ist die lange Seitenlänge 1 und die kurze daher  $\Psi$ . Also ist  $\tilde{h} = \Psi h$  und somit  $s^2 = 4\tilde{h}^2 = \Psi^2(3 + \Psi) = (1 - \Psi)(3 + \Psi) = 3 - 2\Psi - \Psi^2 = 3 - 2\Psi - 1 + \Psi = 2 - \Psi$  wie oben.

*Für einen schönen geometrischen Beweis biete ich 10 Euro!*

**32.** Das  $n$ -dimensionale Simplex  $\Sigma$  mit den Ecken  $e_1, \dots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  liegt in der Hyperebene  $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, d \rangle = 1\} = e_1 + d^\perp$  mit  $d = (1, \dots, 1)$ . Die Normalenvektoren der Seiten, deren Winkel wir suchen, müssen daher in  $d^\perp$  liegen. Auf der Seite  $\Sigma_i$  mit den Eckpunkten  $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}$  steht der Vektor  $e_i$  senkrecht; seine Komponente in  $d^\perp$  ist  $\nu_i = e_i - \frac{\langle e_i, d \rangle}{\langle d, d \rangle} d = e_i - \frac{1}{n+1} d = \frac{1}{n+1}(-1, \dots, n, \dots, -1)$  und folglich  $|\nu_i|^2 = n^2 + n = n(n+1)$ . Für den Winkel  $\beta_n$  zwischen zwei Normalen, z.B.  $\nu_1$  und  $\nu_2$ , ergibt sich  $\cos \beta_n = \frac{\langle \nu_1, \nu_2 \rangle}{|\nu_1| |\nu_2|}$ ; für den Winkel  $\alpha_n = 180^\circ - \beta_n$  zwischen den Hyperebenen (*Diederwinkel*) gilt daher  $\cos \alpha_n = -\cos \beta_n = -\frac{1}{n(n+1)} \langle (n, -1, \dots, -1), (-1, n, -1, \dots, -1) \rangle =$

---

<sup>62</sup> \*)



$-\frac{-2n+n-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}$ , also  $\alpha_2 = 60^\circ$ ,  $\alpha_3 \approx 70,5^\circ$ ,  $\alpha_4 \approx 75,5^\circ$  und  $\alpha_n \nearrow 90^\circ$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $n = 2$  und  $3$  können bei einem platonischen Körper der Dimension  $n + 1$  noch drei, vier oder fünf  $n$ -Simplizes an einer  $(n - 2)$ -dimensionalen Seite angrenzen, denn  $5 \cdot 70,5^\circ < 360^\circ$ , ab  $n = 4$  aber nur noch drei oder vier, da  $5 \cdot 75,5^\circ > 360^\circ$ ; die zugehörigen platonischen Körper sind das Simplex und der Kowürfel. Deshalb gibt es ab Dimension  $5$  nur noch die drei Standardkörper.

**33.** Zu der Kowürfecke  $2e_1$  benachbart sind die Würfecken  $(1, \pm 1, \dots, \pm 1)$  (alle anderen haben größeren Abstand), und der Abstand ist  $|(2, 0, \dots, 0) - (1, \pm 1, \dots, \pm 1)| = |(1, \pm 1, \dots, \pm 1)| = \sqrt{n}$ . Andererseits hat die Würfelkante  $[(1, 1, \dots, 1), (-1, 1, \dots, 1)]$  stets die Länge  $2$ . Nur für  $n = 4$  ist  $\sqrt{n} = 2$ ; nur in dieser Dimension können daher die Ecken des Würfels und des Kowürfels zusammengenommen die Ecken eines platonischen Körpers bilden; die Kanten sind die Würfelkanten sowie die Verbindungen zwischen Würfecken und benachbarten Kowürfecken. Die Spiegelung an der Mittelsenkrechten einer solchen Strecke lässt in der Tat die Menge dieser  $16 + 8$  Ecken invariant: Als Beispiel betrachten wir die Strecke von  $p = (2, 0, 0, 0)$  nach  $q = (1, -1, -1, -1)$ . Da die Längen dieser beiden Vektoren gleich sind, geht die Mittelsenkrechte der Strecke  $[p, q]$  automatisch durch den Ursprung und ist daher die lineare Hyperebene  $(p - q)^\perp = d^\perp$  mit  $d = (1, 1, 1, 1)$ . Die Spiegelung an dieser Hyperebene ist  $S_d(x) = x - 2 \frac{\langle x, d \rangle}{\langle d, d \rangle} d = x - \frac{1}{2} (\sum_i x_i) d$ . Da diese Abbildung mit allen Permutationen der vier Koordinaten und natürlich auch mit  $-id$  vertauschbar ist und diese Abbildungen die Eckenmenge invariant lassen, brauchen wir uns nur noch die Ecken bis auf Vorzeichen und Permutation der Koordinaten anzusehen; es genügt daher,  $S_d$  auf die vier Eckpunkte  $p = 2e_1$ ,  $d = (1, 1, 1, 1)$ ,  $q' = (1, 1, 1, -1)$ , und  $q'' = (1, 1, -1, -1)$  anzuwenden. Wir erhalten  $S_d(p) = p - d = (1, -1, -1, -1) = q$  (klar, da wir ja an der Mittelsenkrechten von  $[p, q]$  gespiegelt haben),  $S_d(d) = d - 2d = -d$  (auch klar),  $S_d(q') = q' - d = 2e_1$  und  $S_d(q'') = q''$  (natürlich, da  $q'' \perp d$ ). Die Eckenmenge ist also invariant unter  $S_d$ . Damit wirkt die Isometriegruppe  $G$  des 24-Zells, der konvexen Hülle der 24 Würfel- und Kowürfecken, transitiv auf der Eckenmenge, denn die gemeinsame Isometriegruppe von Würfel und Kowürfel wird von den Koordinatenpermutationen und den Vorzeichenwechseln jeder einzelnen Koordinate erzeugt und wirkt auf den beiden Eckenmengen transitiv, und  $S_d$  schließlich bildet eine Würfel- in eine Kowürfecke ab und verbindet dadurch die beiden Eckenmengen zu einer einzigen Bahn von  $G$ . In der Tat können wir jeden der 24 Seiten-Tetraeder in jeden anderen ab-

bilden und dabei jeden einzelnen Tetraeder noch auf 24 Weisen drehen oder spiegeln; die Isometriegruppe des 24-Zells hat daher die Ordnung  $|G| = 24 \cdot 24$ .

**34.** a) Die Gerade  $g$  durch  $P$  wird parametrisiert durch  $g(t) = P + tv$  für einen Einheitsvektor  $v$ . Sie trifft den Kreis  $K$  im Punkt  $g(t)$  genau dann, wenn  $|g(t)|^2 = r^2$ , also  $|P|^2 + 2t\langle P, v \rangle + t^2 = r^2$  (man beachte  $|v|^2 = 1$ ), also genau dann, wenn  $t$  Lösung der quadratischen Gleichung  $t^2 + 2\langle P, v \rangle t + |P|^2 - r^2 = 0$  ist. Die Lösungen  $t_1, t_2$  einer beliebigen quadratischen Gleichung  $t^2 + at + b = 0$  erfüllen  $t_1 + t_2 = -a$  und  $t_1 t_2 = b$ , was man durch Koeffizientenvergleich sieht: Für alle  $t$  gilt  $t^2 + at + b = (t - t_1)(t - t_2) = t^2 - (t_1 + t_2)t + t_1 t_2$ .<sup>63</sup> Sind also  $A_1 = g(t_1)$  und  $A_2 = g(t_2)$  die Schnittpunkte (wir setzen voraus, dass  $g$  den Kreis in zwei Punkten schneidet und gestatten uns, diese  $A_1$  und  $A_2$  statt  $A$  und  $B$  zu nennen), so erhalten wir  $t_1 t_2 = b = |P|^2 - r^2$ . Da  $|P - A_i| = |P - g(t_i)| = |t_i v| = |t_i|$ , ist  $|P - A_1||P - A_2| = |t_1 t_2| = ||P|^2 - r^2|$ , und dieser Wert ist unabhängig von  $v$  und damit von der Geraden  $g$ .

b) Die Endpunkte der beiden langen Stangen des Inverters seien  $S$  und  $T$ . Da  $0, x$  und  $Fx$  jeweils gleich weit von  $S$  wie von  $T$  entfernt sind, liegen sie auf der Mittelsenkrechten der Strecke  $[S, T]$ , sind also kollinear. Wir können nun a) anwenden mit  $P = 0, A_1 = x, A_2 = Fx$ . Allerdings müssen wir beachten, dass in a) als Kreismittelpunkt der Ursprung  $0$  gewählt wurde; für einen beliebigen Mittelpunkt  $M$  lautet die Formel daher  $|P - A_1||P - A_2| = ||P - M|^2 - r^2|$ . In b) erhalten wir daraus  $|x||Fx| = |s^2 - r^2| = s^2 - r^2$ . Der Inverter realisiert mechanisch die Inversion  $F$  an dem Kreis mit Zentrum  $0$  und Radius  $R = \sqrt{s^2 - r^2}$ .

**35.** Die partiellen Ableitungen sind

$$\varphi_s = (\cos t, \sin t, f'(s)), \quad \varphi_t = (-s \sin t, s \cos t, 0),$$

die zweiten Ableitungen  $\varphi_{ss} = (0, 0, f''(s))$  und  $\varphi_{tt} = (-s \cos t, -s \sin t, 0)$  sowie  $\varphi_{st} = \varphi_{ts} = (-\sin t, \cos t, 0)$ . Ein Normalvektor auf der Fläche ist das Kreuzprodukt der Ableitungen:  $\tilde{\nu} = \varphi_s \times \varphi_t = (-f'(s)s \cos t, -f'(s)s \sin t, s)$ ,

<sup>63</sup>Entsprechendes gilt für jede Polynomgleichung  $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0$ : Wenn  $t_1, \dots, t_n$  die Lösungen sind, so ist  $t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n) = t^n - (t_1 + \dots + t_n)t^{n-1} + \dots + (-1)^n t_1 t_2 \dots t_n$  für alle  $t$ ; durch Koeffizientenvergleich folgt also  $a_1 = -\sum_i t_i$  und  $a_2 = \sum_{i < j} t_i t_j$  usf. bis  $a_n = (-1)^n t_1 t_2 \dots t_n$ . Diese Ausdrücke in  $t_1, \dots, t_n$  heißen die *elementarsymmetrischen Polynome*. Wenn wir die Lösungen  $t_1, \dots, t_n$  einer Gleichung gegeben haben, können wir also ganz leicht ihre Koeffizienten  $a_1, \dots, a_n$  berechnen. Die Algebra behandelt die Umkehraufgabe: aus den Koeffizienten die Lösungen zu finden.

die zugehörige Einheitsnormale ist  $\nu = \tilde{\nu}/|\tilde{\nu}| = (-f'(s) \cos t, -f'(s) \sin t, 1)/w$  mit  $w := \sqrt{f'(s)^2 + 1}$ . Die Koeffizienten der ersten Fundamentalform  $g$  sind  $g_{ss} = |f_s|^2 = 1 + f'(s)^2 = w^2$  und  $g_{tt} = |f_t|^2 = s^2$  und  $g_{st} = \langle f_s, f_t \rangle = 0$ . Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform  $h$  sind  $h_{ss} = \langle \varphi_{ss}, \nu \rangle = f''/w$  und  $h_{tt} = \langle \varphi_{tt}, \nu \rangle = sf'(s)/w$  und  $h_{st} = \langle \varphi_{st}, \nu \rangle = 0$ . Beide Matrizen  $g$  und  $h$  haben bereits Diagonalgestalt, also auch  $A = g^{-1}h$ , und wir können die Eigenwerte von  $A$  (Hauptkrümmungen) unmittelbar ablesen:  $\kappa_1 = h_{ss}/g_{ss} = f''/w^3$  (das ist gleichzeitig die Krümmung der ebenen Kurve  $s \mapsto (s, f(s))$ , des Graphen von  $f$ ) und  $\kappa_2 = h_{tt}/g_{tt} = sf'(s)/ws^2 = f'(s)/ws$ . Die Gaußkrümmung ist daher  $K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{f''f'}{sw^4}$  und die mittlere Krümmung ist  $H = \frac{1}{2}(\frac{f''}{w^3} + \frac{f'}{ws}) = \frac{1}{2w^3}(f'' + \frac{1}{s}(1 + (f')^2)f')$ .

Für  $H = 0$  (Minimalfläche) ergibt sich  $f'' = -\frac{1}{s}(1 + (f')^2)f'$ . Dies ist eine Gleichung zwischen einer unbekanntem Funktion  $f$  und ihren Ableitungen, eine *gewöhnliche Differentialgleichung*. Eine Lösung dieser Gleichung ist  $f = \text{Arcosh}$ , die Umkehrfunktion von  $\cosh : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ . Für diese gilt nämlich  $\text{Arcosh}'(s) = 1/\cosh'(\text{Arcosh } s) = 1/\sinh(\text{Arcosh } s) = 1/\sqrt{s^2 - 1}$ , denn  $\sinh = \sqrt{\cosh^2 - 1}$ , weil ja  $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ . Somit ist  $f''(s) = -s(s^2 - 1)^{-3/2}$  und  $1 + f'(s)^2 = 1 + \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{s^2}{s^2 - 1}$ , also  $\frac{1}{s}(1 + (f')^2)f' = \frac{s}{(s^2 - 1)^{3/2}} = -f''$ .

Üblicher ist die umgekehrte Parametrisierung von Drehflächen, nämlich durch  $\varphi(s, t) = (f(s) \cos t, f(s) \sin t, s)$ . Mit  $w := \sqrt{1 + (f')^2}$  ergibt sich dann  $g_{st} = h_{st} = 0$ ,  $g_{ss} = w^2$ ,  $g_{tt} = f^2$ ,  $h_{ss} = -f''/w$ ,  $h_{tt} = f/w$  (bitte nachrechnen!) und daraus  $\kappa_1 = -f''/w^3$  und  $\kappa_2 = 1/(fw)$ . Die Minimalflächengleichung  $H = 0$  oder  $-\kappa_1 = \kappa_2$  ergibt dann  $f'' = (1 + (f')^2)/f$ , und  $f = \cosh$  ist eine Lösung, denn  $(1 + (f')^2)/f = (1 + \sinh^2)/\cosh = \cosh^2/\cosh = \cosh = f''$ . Alle anderen Lösungen entstehen aus dieser durch zentrische Streckungen. Der Graph der  $\cosh$ -Funktion heißt auch *Kettenlinie*, da eine frei hängende Kette aus gleichschweren Gliedern diese Form annimmt; die Drehfläche dieser Kurve heißt deshalb *Katenoid* (von lat. catena = Kette).

**36.** Quadriken sind Hyperflächen, die wir einmal nicht durch eine Parametrisierung, sondern durch eine Gleichung beschrieben haben. Allgemein gilt für eine  $C^1$ -Funktion  $f : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Die *Niveaumenge*  $f^{-1}(c) = \{f = c\} = \{x \in \mathbb{R}_o^n; f(x) = c\}$ , die Lösungsmenge der Gleichung  $f(x) = c$  für gegebenes  $c \in \mathbb{R}$ , ist nicht immer eine Hyperfläche. Z.B. für  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = xy$ , ist die Niveaumenge  $\{f = 0\}$  das Koordinatenkreuz, die Vereinigung von  $x$ - und  $y$ -Achse, denn  $xy = 0 \iff x = 0$  oder  $y = 0$ . Das ist aber keine Hyperfläche (reguläre Kurve), denn an der Kreuzung im Ursprung kann die

Menge nicht durch eine Hyperebene (Gerade) approximiert werden. Es gibt aber ein hinreichendes Kriterium: Die Niveaumenge  $N = \{f = c\}$  ist eine Hyperfläche, wenn die Ableitung oder der *Gradient* von  $f$  an keiner Stelle  $x \in N$  verschwindet (*impliziter Funktionensatz*). Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}_o^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist ja die Ableitung  $df_x$  an jeder Stelle  $x$  eine Linearform, eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$ , also als Matrix geschrieben eine Zeile; der *Gradient*  $\nabla f_x$  ist die zugehörige Spalte:  $\nabla f_x = (df_x)^T$ ; seine Komponenten sind also die partiellen Ableitungen  $f_1(x), \dots, f_n(x)$ . Dieser Vektor steht senkrecht auf den Niveaus, denn wenn eine Kurve  $x(t)$  ganz in einem Niveau  $\{f = c\}$  verläuft, so gilt  $f(x(t)) = c$  für alle  $t$  und daher  $\frac{d}{dt}f(x(t)) = 0$ , somit  $0 = \frac{d}{dt}f(x(t)) = df_{x(t)}x'(t) = \langle \nabla f_{x(t)}, x'(t) \rangle$ , der Gradient steht also senkrecht auf dem Tangentenvektor  $x'(t)$  einer beliebigen im Niveau verlaufenden Kurve  $x(t)$ . Soweit die allgemeine Theorie aus Analysis 2 als Hintergrund.

In unserem Fall ist die definierende Funktion  $f$  die quadratische Form  $q^u(x) = \sum_i \frac{x_i^2}{a_i - u}$  und die Niveauhyperflächen sind die Quadriken  $Q_u = \{q^u = 1\}$ . Die  $i$ -te partielle Ableitung ist  $(q^u)_i(x) = \frac{2x_i}{a_i - u}$  und damit  $\nabla(q^u)_x = (\frac{2x_1}{a_1 - u}, \dots, \frac{2x_n}{a_n - u})^T \neq 0$  für alle  $x \neq 0$ , insbesondere für alle  $x \in Q_u$ . Weiterhin ist  $\langle \nabla(q^u)_x, \nabla(q^v)_x \rangle = 4 \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - u)(a_i - v)}$  und  $q^u(x) - q^v(x) = \sum_i (\frac{x_i^2}{a_i - u} - \frac{x_i^2}{a_i - v}) = \sum_i \frac{x_i^2(u - v)}{(a_i - u)(a_i - v)} = (u - v) \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - u)(a_i - v)}$ . Daraus ergibt sich die gewünschte Gleichung  $4(q^u - q^v) = (u - v) \langle \nabla q^u, \nabla q^v \rangle$  für alle  $u, v \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ . Wenn also  $x \in Q_u \cap Q_v$  für  $u \neq v$ , so ist  $q^u(x) = q^v(x) = 1$  und damit  $\nabla(q^u)_x \perp \nabla(q^v)_x$ . Also schneiden sich die Hyperflächen  $Q_u$  und  $Q_v$  in  $x$  orthogonal, denn  $\nabla q^u$  und  $\nabla q^v$  sind Normalenvektorfelder auf  $Q_u$  und  $Q_v$ .

Es bleibt nur zu überlegen, für welche Parameterpaare  $u, v$  die zugehörigen Quadriken sich schneiden. Dazu diskutieren wir die Funktion  $u \mapsto q^u(x)$  für festes  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x_i \neq 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Sie hat Polstellen an den Stellen  $a_1, \dots, a_n$ , und überall sonst ist ihre Ableitung positiv:  $\frac{d}{du}q^u(x) = \sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - u)^2} > 0$ . Für  $u \rightarrow \pm\infty$  geht  $q^u(x) \rightarrow 0$ . Im Intervall  $I_1 = (-\infty, a_1)$  steigt die Funktion also von 0 bis  $\infty$  streng monoton, und in jedem der Intervalle  $I_i = (a_{i-1}, a_i)$  für  $i = 2, \dots, n$  steigt sie streng monoton von  $-\infty$  bis  $\infty$ . Im Intervall  $(a_n, \infty)$  steigt sie von  $-\infty$  bis 0, ist also negativ. Fazit: In jedem der Intervalle  $I_1, \dots, I_n$  wird der Wert 1 genau einmal angenommen, d.h. es gibt zu jedem solchen  $x$  genau ein  $u_i \in I_i$  mit  $q^{u_i}(x) = 1$ , also  $x \in Q_{u_i}$ . Mit anderen Worten: Durch jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}_o^n = \{x; x_i \neq 0 \forall i\}$  geht genau eine Quadrik aus jeder der  $n$  Scharen  $(Q_u)_{u \in I_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und die Normalenvektoren stehen dort senkrecht aufeinander.

Im Fall  $n = 2$  haben wir  $I_1 = (-\infty, a_1)$  und  $I_2 = (a_1, a_2)$ . Für jedes  $u \in I_1$  sind  $a_1 - u$  und  $a_2 - u$  beide positiv, und der Kegelschnitt  $Q_u = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a_1 - u} + \frac{y^2}{a_2 - u} = 1\}$  ist eine Ellipse mit kurzer Halbachse  $a = \sqrt{a_1 - u}$  und langer Halbachse  $b = \sqrt{a_2 - u}$ . Alle diese Ellipsen haben die gleichen Fokalpunkte. Dazu müssen wir uns an die definierende Eigenschaft der Fokalpunkte erinnern: Es sind zwei Punkte  $F, F'$  auf der langen Achse (hier ist es die  $y$ -Achse) mit der Eigenschaft, dass  $|F - P| + |F' - P| = c = \text{const}$  für jeden Punkt  $P$  der Ellipse. Setzen wir für  $P$  einen Ellipsenpunkt  $P_y$  auf der  $y$ -Achse ein, so sehen wir  $|F - P_y| + |F' - P_y| = 2b$ , also  $c = 2b$ . Setzen wir andererseits einen Ellipsenpunkt  $P_x$  auf der  $x$ -Achse ein, so ergibt sich  $|F - P_x| = |F' - P_x| = c/2 = b$ . Das Dreieck  $(F, O, P_x)$  ist rechtwinklig, also gilt nach Pythagoras  $|F|^2 = |F - P_x|^2 - |P_x|^2 = b^2 - a^2$ . Damit haben wir den Abstand der Fokalpunkte vom Mittelpunkt  $O$  gefunden:  $|F| = \sqrt{b^2 - a^2}$ , in unserem Fall also ist  $|F| = \sqrt{a_2 - u - a_1 + u} = \sqrt{a_2 - a_1}$  unabhängig von  $u$ . Die Ellipsen haben also alle die gleichen Brennpunkte (*konfokal*). Wenn  $u \in I_2$ , dann ist  $a_1 - u < 0 < a_2 - u$ , also ist  $Q_u = \{-\frac{x^2}{u - a_1} + \frac{y^2}{a_2 - u} = 1\}$  eine nach oben und unten sich öffnende Hyperbel mit Halbachsen  $a = \sqrt{u - a_1}$  und  $b = \sqrt{a_2 - u}$ . Die Fokalpunkte  $F, F'$  liegen auf der  $y$ -Achse und haben die Eigenschaft, dass  $|F - P| - |F' - P| = c = \text{const}$  für jeden Punkt  $P$  des einen (sagen wir, des oberen) Hyperbelastes. Wählen wir für  $P$  den Schnitt  $P_+$  des Hyperbelastes mit der  $y$ -Achse, so ergibt sich  $c = 2b$ . Lassen wir andererseits den Punkt  $P$  auf dem Hyperbelast ins Unendliche wandern, so werden die Geraden  $FP$  und  $F'P$  immer stärker parallel zu den Asymptoten, und da die Längendifferenz stets  $2b$  bleibt, erhalten wir im Grenzwert ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse  $|F - F'| = 2|F|$  und einer Kathete  $2b$ , und die zweite Kathete muss die Länge  $2a$  haben, denn das Dreieck ist ähnlich zum Asymptoten-Steigungsdreieck mit den Kathetenlängen  $a$  und  $b$ . Nach Pythagoras ist daher  $|F| = \sqrt{b^2 + a^2}$ , in unserem Fall also  $|F| = \sqrt{a_2 - u + u - a_1} = \sqrt{a_2 - a_1}$  wie bei den Ellipsen. Die Hyperbeln haben also alle die gleichen Fokalpunkte wie die Ellipsen und sind ebenfalls konfokal. Ellipsen und Hyperbeln schneiden sich senkrecht (s.o.).

Im Fall  $n = 3$  hat man drei orthogonale Flächenscharen: Ellipsoide sowie ein- und zweischalige Hyperboloide, siehe angegebene Webseite.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Parallelität: Affine Geometrie</b>	<b>5</b>
1.1	Von der affinen Geometrie zur Linearen Algebra . . . . .	5
1.2	Definition des affinen Raums . . . . .	7
1.3	Parallelentreue und semiaffine Abbildungen . . . . .	10
1.4	Parallelprojektionen . . . . .	13
1.5	Affine Koordinaten und Schwerpunkt . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Inzidenz: Projektive Geometrie</b>	<b>17</b>
2.1	Zentralperspektive . . . . .	17
2.2	Fernpunkte und Projektionsgeraden . . . . .	21
2.3	Projektiver und Affiner Raum . . . . .	22
2.4	Semiprojektive Abbildungen und Kollineationen . . . . .	25
2.5	Kegelschnitte und Quadriken; Homogenisierung . . . . .	28
2.6	Die Sätze von Desargues und Brianchon . . . . .	36
2.7	Dualität und Polarität; Satz von Pascal . . . . .	41
2.8	Das Doppelverhältnis . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Abstand: Euklidische Geometrie</b>	<b>47</b>
3.1	Der Satz des Pythagoras . . . . .	47
3.2	Isometrien des euklidischen Raums . . . . .	53
3.3	Klassifikation von Isometrien . . . . .	54
3.4	Platonische Körper . . . . .	57
3.5	Symmetriegruppen von platonischen Körpern . . . . .	60
3.6	Endliche Drehgruppen und Kristallgruppen . . . . .	63
3.7	Metrische Eigenschaften der Kegelschnitte . . . . .	67
<b>4</b>	<b>Krümmung: Differentialgeometrie</b>	<b>70</b>
4.1	Glattheit . . . . .	70
4.2	Fundamentalformen und Krümmungen . . . . .	72
4.3	Charakterisierung von Sphären und Hyperebenen . . . . .	75
4.4	Orthogonale Hyperflächensysteme . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Winkel: Konforme Geometrie</b>	<b>78</b>
5.1	Konforme Abbildungen . . . . .	78
5.2	Inversionen . . . . .	79
5.3	Konforme und kugeltreue Abbildungen . . . . .	81

5.4	Die stereographische Projektion . . . . .	82
5.5	Der Raum der Kugeln . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Winkel als Abstandsmaß: Sphärische und Hyperbolische Geometrie</b>	<b>86</b>
<b>7</b>	<b>Übungen</b>	<b>94</b>
<b>8</b>	<b>Lösungen</b>	<b>109</b>

## Index

- 120-Zell, 60
- 24-Zell, 60, 106
- 600-Zell, 60
  
- Ableitung, 71
- Abstand, 4, 7, 49, 50
- additiv, 10
- Affine Abbildung, 53
- Affine Basis, 15
- Affine Geometrie, 5
- Affine Gruppe, 96
- Affine Koordinaten, 16
- Affiner Raum, 9, 23
- Affiner Unterraum, 8
- Alberti, L.B., 19
- Alternierende Gruppe, 61
- antiholomorph, 79
- antipodisch, 24
- Ausnahmegeometrie, 53
- Ausnahmegruppen, 38
- Axiom, 3
  
- Bahn, 10, 23, 94
- Berger, M., 60
- Bewegung, 54
- Beweis, 2
- Bild, 70
- Brennpunkt, 67
- Brianchon, C.J., 38, 43, 103
- Brunelleschi, Filippo, 18
  
- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 50
  
- Dandelin, G.P., 67
- Definition, 2
- Desargues, G., 21, 36, 37, 42, 95
  
- dicht, 13
- Dieder, 64, 65
- Diedergruppe, 65
- Diffeomorphismus, 71
- Differential, 71
- Differentialgeometrie, 70
- differenzierbar, 70
- diskret, 64
- Dodekaeder, 58–60
- Doppelverhältnis, 46, 92, 104, 107
- Drehfläche, 107
- Drehgruppe, 63
- Drehzentrum, 64
- Dreieck, 96
- Dreiecksungleichung, 51
- Dualität, 41, 61
- Dualraum, 42
- Dürer, A., 102, 105
- Dürer, Albrecht, 19
  
- einfach transitiv, 9, 62
- Einheitsnormale, 72
- Einstein, A., 75
- Elementare Transformationen, 35
- Ellipse, 67, 69
- Erlanger Programm, 4
- Erste Fundamentalform, 73
- Euklid, 48
- Euklidische Gruppe, 54
- Euklidischer Vektorraum, 52
- Eulersche Gerade, 97
  
- Fahne, 58
- Fernebene, 21
- Ferngerade, 21



Fernhyperebene, 23  
 Fernpunkt, 21, 101  
 Fibonaccizahlen, 97  
 Figur, 2  
 Fläche, 72  
 Formalisierung, 3  
 Foto, 98  
 Fünfeck, 104, 105  
  
 Gaußkrümmung, 74  
 Gebiet, 71  
 gebrochen-linear, 99  
 Gerade, 8, 23, 102  
 Geradentreue, 25  
 Gleichung, 70  
 Gleitspiegelung, 56  
 Goldener Schnitt, 97, 104  
 Grassmann-Mannigfaltigkeit, 22  
 Großkreis, 25, 89  
  
 Halbraum, 58  
 Harmonische Teilung, 47  
 Hauptachsen, 67  
 Hauptkrümmungen, 74  
 Helmholtz, H.v., 52  
 Hilbert, D., 3  
 Höhe, 97  
 holomorph, 79  
 homogen, 30  
 Homogener Vektor, 23, 41  
 Homogenisierung, 30, 100  
 Horizont, 17  
 Hyperbel, 68, 69, 100, 101  
 Hyperbolische Ebene, 88  
 Hyperbolische Geometrie, 87, 107  
 Hyperbolische Gerade, 90  
 Hyperbolischer Abstand, 91  
 Hyperbolischer Raum, 88  
  
 Hyperbolischer Winkel, 90  
 Hyperboloid, 40, 87, 102  
 Hyperebene, 8  
 Hyperebenen Spiegelung, 54  
 Hyperfläche, 72  
  
 Idee, 1  
 Ikosaeder, 58, 59, 62, 98  
 Immersion, 71  
 invariant, 10  
 Inversion, 79, 80, 83, 84, 106  
 Involution, 79  
 Inzidenz, 4  
 Isometrie, 53, 56  
  
 Jacobi, C.G.J., 71  
 Jacobimatrix, 71  
  
 Kantenwinkel, 59  
 Kegelschnitt, 28, 67, 103  
 Klassische Gruppen, 38  
 Klein, Felix, 4, 67  
 Klein, Felix, 91  
 kollinear, 5  
 Kollineation, 7, 25, 100  
 komplex differenzierbar, 79  
 konform, 78, 81  
 Konforme Geometrie, 53, 78  
 Konvexe Hülle, 59  
 Körperautomorphismus, 11  
 Kowürfel, 59  
 Kreis, 100  
 Kristall, 65  
 Kristallographische Beschränkung, 65  
 Krümmung, 2, 72, 73  
 Kugel, 86  
 Kugelkoordinaten, 76  
 kugeltreu, 80, 81  
 Kurve, 29, 72

Länge, 49, 88  
 Leitgerade, 68  
 Lichtkegel, 86  
 linear, 11  
 Liouville, J., 81  
 Lorentz-Skalarprodukt, 86, 88  
 Lorentzgruppe, 86  
 Lorentzspiegelung, 86  
  
 Mantellinie, 29  
 Masaccio, 18  
 Metrik, 27  
 Metrische Geometrie, 53  
 Minimalfläche, 74  
 Mittelsenkrechte, 97  
 Mittlere Krümmung, 74  
 Möbius, A.F., 86  
 Möbiusband, 25  
 Möbiusgruppe, 86  
 Mond, 94  
  
 Nabelpunkts-Hyperfläche, 75  
 Nabelpunkts-Hyperflächen, 81  
 Nebenklasse, 94  
 Nichteuklidische Geometrie, 91  
 Nordpol, 83  
 Norm, 49  
 Normalform, 30  
 Normalraum, 72  
  
 Offensichtliches, 2  
 Oktaeder, 58, 59, 61, 63, 97  
 Oktaven, 38, 52, 53  
 Operation, 9  
 Ordnung, 64  
 orientiert, 54  
 orthogonal, 50, 76  
 Orthogonale Abbildung, 53  
 Orthogonale Gruppe, 53  
  
 Orthogonales Hyperflächensystem, 76  
 Orthonormalbasis, 52, 53  
  
 Pappos, 95, 101, 103  
 Parabel, 68, 69, 100  
 Parallelenreue, 10, 13  
 Parallelität, 8  
 Parallelprojektion, 15, 19, 97  
 Parallelverschiebung, 7  
 Parameterwechsel, 72, 74  
 Parametrisierung, 70, 71  
 Pascal, B., 44  
 Platon, 57  
 Platonischer Körper, 57, 60  
 Poincaré, Henri, 92  
 Pol, 85, 87, 103  
 Polare, 103  
 Polare Geometrie, 53  
 Polarisierung, 31  
 Polarität, 42, 86, 103  
 Polytop, 58  
 Poncelet, J.V., 21  
 Projektionszentrum, 19  
 Projektive Abbildung, 26, 98, 100  
 Projektive Geometrie, 21, 53  
 Projektive Gerade, 99  
 Projektiver Abschluss, 30  
 Projektiver Raum, 22  
 Projektiver Unterraum, 22  
 proportional, 23  
 Punkt, 16  
 Pythagoras, 48  
  
 Quadratische Ergänzung, 34  
 Quadratische Form, 31  
 Quadrik, 30, 31, 33, 40, 44, 77, 85,  
 101, 107  
 Quaternionen, 8, 38, 108

raumartig, 86  
 regulär, 58  
 Richtungstreue, 7  
 Riemann, B., 75  
 Riemannsche Geometrie, 74  
 Riemannsche Metrik, 74  
  
 Schiefkörper, 8  
 Schraubung, 57  
 Schwerelinie, 96  
 Schwerpunkt, 16, 96, 97  
 Sechseck, 38  
 Segre-Einbettung, 33  
 Sehnensatz, 106  
 selbstdual, 60  
 semiaffin, 12  
 Semidirektes Produkt, 54  
 semidirektes Produkt, 100  
 semilinear, 12, 99  
 semiprojektiv, 26  
 senkrecht, 50  
 Simplex, 59–61, 96  
 Skalarprodukt, 50  
 Sphäre, 24, 83, 85–87  
 Standgruppe, 94  
 Stereographische Projektion, 83  
 Stern, 58  
 stetig differenzierbar, 71  
 Strecke, 96  
 Substitution, 34  
 Symmetrie, 3, 4, 60  
 Symmetrieebene, 61  
 Symmetriegruppe, 58, 62  
 Symmetrische Gruppe, 61  
 Symplektische Geometrie, 53  
  
 Tangente, 40, 84  
 Tangentialebene, 40  
  
 Tangentialraum, 40, 72  
 Tetraeder, 58, 59, 61, 96, 105  
 Tits, Jaques, 4  
 transitiv, 9  
 Translation, 7, 8  
 transversal, 23  
  
 Umkreis, 97  
 Unitäre Gruppe, 108  
 Urbild, 70  
  
 Vektor, 6, 16  
 Vektorgruppe, 9  
 Verbiegung, 74  
 Verborgenes, 2  
 Verhältnis, 45  
 Viereck, 99  
 Vollständiges Vierseit, 46  
  
 Weingarten, J., 73  
 Weingartenabbildung, 73  
 Weyl, H., 52  
 windschief, 37  
 Winkel, 50, 84  
 winkeltreu, 78  
 Wirkung, 9, 94  
 Würfel, 58, 59, 61, 95  
  
 Zentralperspektive, 98  
 Zentralprojektion, 19, 28  
 Zentrische Streckung, 8, 95, 97  
 zentrische Streckung, 84  
 Zopfrelation, 77  
 Zusammenhang, 71  
 Zweite Fundamentalform, 73