

# Elliptische Funktionen und Symmetrie

DIPLOMARBEIT

im Studiengang Diplom Mathematik  
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Augsburg



vorgelegt von  
MICHAELA REISACHER  
Juli 2008

Erstkorrektor: Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg  
Zweitkorrektor: Prof. Dr. Ernst Heintze

*Ein mathematisches Problem sei ferner schwierig, damit es uns reizt, und dennoch nicht völlig unzugänglich, damit es unserer Anstrengung nicht spotte; es sei uns ein Wahrzeichen auf den verschlungenen Pfaden zu verborgenen Wahrheiten - uns hernach lohnend mit der Freude über die gelungene Lösung.*

David Hilbert,  
auf dem internationalen  
Mathematiker-Kongress zu Paris,  
1900

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit elliptischen Funktionen. Dieses Teilgebiet der Mathematik ist etwa 150 Jahre alt und mit großen Namen wie Abel, Jacobi, und Weierstraß verbunden. Entstanden aus einem Integrationsproblem, werden die elliptischen Funktionen mit Mitteln der Funktionentheorie und Riemannschen Flächen behandelt und grenzen an diverse andere Gebiete der Mathematik.

Dieser Vielseitigkeit soll, soweit dies im Rahmen einer Diplomarbeit möglich ist, Rechnung getragen werden, indem verschiedene Facetten des Themas beleuchtet werden.

Der historischen Entwicklung folgend, wird zunächst auf die Beziehung zwischen den elliptischen Integralen und den elliptischen Funktionen eingegangen. Anhand einiger Beispiele soll verdeutlicht werden, dass bereits einfache Problemstellungen der Integralrechnung zu elliptischen Integralen führen.

Nach dieser Motivation des Themas werden die elliptischen Funktionen definiert und einige grundlegende Eigenschaften angeführt und diskutiert.

Das Ziel des dritten Kapitels ist es, elliptische Funktionen vom Abbildungsgrad 2 mit gewissen Symmetrien zu konstruieren. Dabei wird der Definitionsbereich einer elliptischen Funktion in kleine Teilgebiete zerlegt. Auf einem dieser Teilgebiete wird eine Funktion definiert und diese wird unter Ausnutzung von Symmetrien auf den gesamten Definitionsbereich fortgesetzt. Die Idee zu dieser Konstruktion geht auf Prof. em. Hermann Karcher zurück, dem ich an dieser Stelle ganz herzlich danken möchte.

Der Gewinn dieser Konstruktion liegt darin, dass die Kenntnis des Verhaltens einer elliptischen Funktion auf einem kleinen Gebiet schon genügt, da die Funktion dadurch vollständig bestimmt ist. Ferner ist das Ergebnis nicht nur für die spezielle Funktion gültig, die konstruiert wird: Alle elliptischen Funktionen mit Abbildungsgrad 2 zum selben Gittertyp weisen die ermittelte Spiegelsymmetrie auf, welche die maximal mögliche ist.

Im vierten Kapitel wird die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion eingeführt und diskutiert um die Ergebnisse der Symmetrie-Konstruktion in den Zusammenhang zum üblichen Zugang zu den elliptischen Funktionen zu stellen. Dabei wird auch auf die Differentialgleichung eingegangen, welche nicht nur die  $\wp$ -Funktion, sondern auch die konstruierten symmetrischen elliptischen Funktionen erfüllen.

Diese Differentialgleichung führt schließlich zu den Überlegungen des letzten Kapitels. Dort geht es um die elliptischen Kurven - komplex-projektive algebraische Kurven, welche durch die elliptischen Funktionen parametrisiert werden. Für jene Kurve, welche mit Hilfe der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion parametrisiert wird, ist ein interessantes Phänomen bekannt: Die Summe der Urbilder (unter der Parametrisierung) der Schnittpunkte dieser Kurve mit einer beliebigen Geraden ist konstant. In Verallgemeinerung wird dies auch für diejenigen Kurven gezeigt, welche mittels anderer elliptischer Funktionen vom Abbildungsgrad 2 parametrisiert werden.

Ich möchte es nicht versäumen, einigen Menschen zu danken, die mich bei der Erstellung der Diplomarbeit unterstützt haben. In allererster Linie war dies natürlich mein Betreuer, Herr Prof. Dr. Jost-Hinrich Eschenburg, der mir die Leitfragen nähergebracht hat, die dieser Arbeit zugrunde liegen und für - manchmal lange - Diskussionen jederzeit offen und immer erreichbar war. Danken möchte ich auch meinen Korrekturlesern: Walter Freyn, dem ich jederzeit Fragen stellen durfte und der immer gute Anregungen hatte; und Christian, der mir beim lauten Überlegen stundenlang zugehört hat.

## Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>1 Elliptische Integrale und elliptische Funktionen</b>	<b>5</b>
1.1 Elliptische Integrale und ihre Rückführung auf Grundformen . . . . .	5
1.1.1 Die Normalform von Weierstraß . . . . .	6
1.1.2 Normalform von Legendre und trigonometrische Form . . . . .	10
1.2 Beispiele für Probleme, die auf elliptische Integrale führen . . . . .	11
1.2.1 Bogenlänge der Ellipse . . . . .	11
1.2.2 Länge von Hyperbelbögen . . . . .	12
1.2.3 Das mathematische Pendel . . . . .	15
1.3 Vom elliptischen Integral zur elliptischen Funktion . . . . .	18
1.3.1 Umkehrfunktionen . . . . .	18
<b>2 Elliptische Funktionen: Grundlagen</b>	<b>21</b>
2.1 Definition der elliptischen Funktionen . . . . .	21
2.2 Die Liouvilleschen Sätze . . . . .	24
2.3 Null- und Polstellenverteilung . . . . .	26
<b>3 Konstruktion elliptischer Funktionen mit Symmetrien</b>	<b>30</b>
3.1 Elliptische Funktionen 2. Ordnung . . . . .	30
3.2 Gitter und Tori . . . . .	32
3.3 Die Konstruktion . . . . .	37
3.3.1 Das Ziel . . . . .	37
3.3.2 Die Grundidee . . . . .	37
3.4 Durchführung . . . . .	44
3.4.1 Rechtecksgitter . . . . .	44
3.4.2 Quadratgitter . . . . .	50
3.4.3 Zentriertes Rechtecksgitter . . . . .	56
3.4.4 60°-Gitter . . . . .	60
3.4.5 Zusammenfassung . . . . .	66
<b>4 Die Weierstraßsche <math>\wp</math>-Funktion</b>	<b>67</b>
4.1 Definition und Diskussion der $\wp$ -Funktion . . . . .	67
4.2 Der Körper der elliptischen Funktionen . . . . .	69
4.3 Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion . . . . .	71
4.4 Vergleich mit den symmetrischen Funktionen . . . . .	74
<b>5 Elliptische Funktionen und elliptische Kurven</b>	<b>79</b>
5.1 Einführung in algebraische Kurven . . . . .	79
5.2 Das Additionstheorem der $\wp$ -Funktion . . . . .	85
5.3 Additionstheorem zu allen elliptischen Funktionen der Ordnung 2 . . . . .	93
5.3.1 Ein doppelter Pol . . . . .	95
5.3.2 Zwei einfache Pole . . . . .	97
5.4 Beliebige elliptische Funktionen, Ausblick . . . . .	101
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>105</b>

# 1 Elliptische Integrale und elliptische Funktionen

Der Ausdruck „elliptische Funktion“ kommt historisch von den elliptischen Integralen. Diese Integrale sollen hier zunächst vorgestellt und untersucht werden. Außerdem soll ihre Verbindung zu den elliptischen Funktionen verdeutlicht werden.

## 1.1 Elliptische Integrale und ihre Rückführung auf Grundformen

**Definition 1.1.** Unter einem elliptischen Integral versteht man ein Integral der Form

$$\int R(x, \sqrt{P}) dx,$$

wobei  $R$  eine rationale Funktion in zwei Variablen ist und  $P$  ein Polynom dritten oder vierten Grades in  $x$  mit getrennten Nullstellen.

Elliptische Integrale sind, bis auf Ausnahmen, keine elementaren Funktionen<sup>1</sup>.

Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{P}) dx$$

mit einem Polynom  $P$  zweiten Grades in  $x$  besitzen dagegen noch elementare Stammfunktionen. Dies kann man daran erkennen, dass Kurven der Form  $y^2 = ax^2 + bx + c$  Kegelschnitte sind und damit eine Parameterdarstellung  $t \mapsto (x(t), y(t))$  mit rationalen Funktionen  $x$  und  $y$  besitzen. Diese Parameterdarstellung erhält man aus der Umkehrung einer leichten Abwandlung der stereographischen Projektion.<sup>2</sup> Die zugehörige Substitution macht das Integral

$$\int R(x, \sqrt{P}) dx = \int R(x(t), y(t)) \dot{x} dt$$

zu einem rationalen Linienintegral, das elementar lösbar ist. Dass das Auffinden einer rationalen Parameterdarstellung für elliptische Integrale nicht möglich ist, liegt daran, dass die Kurven  $y^2 = P(x)$  mit einem Polynom dritten oder vierten Grades mit getrennten Nullstellen im Gegensatz zu den Kegelschnitten topologisch keine Sphären, sondern Kurven höheren Geschlechts sind, und daher keine rationale Abbildung (das sind nämlich gerade die holomorphen Abbildungen der Sphäre) von der Sphäre auf diese Kurven existieren kann.

Die elliptischen Integrale lassen sich auf wenige Grundtypen reduzieren. Dies ist wünschenswert, da Integrale, die sich nicht analytisch durch Angabe einer Stammfunktion lösen lassen, tabelliert werden müssen. Heutzutage macht dies mit Hilfe eines Computers zwar weniger Arbeit, aber die Mathematiker im 18. und 19. Jahrhundert waren natürlich daran interessiert, mit möglichst wenig Tabellen ein breites Spektrum von Integralen lösen zu können. Wir wollen diese Reduktion auf Grundtypen nachvollziehen. Sie ist im Buch von Königsberger (Kön04) auf S.211-213 angedeutet.

Dazu betrachten wir den Integranden  $R(x, \sqrt{P})$ . Das ist ein Quotient aus zwei Polynomen  $Q_1$  und  $Q_2$  in  $x$  und  $\sqrt{P}$ :

$$R(x, \sqrt{P}) = \frac{Q_1(x, \sqrt{P})}{Q_2(x, \sqrt{P})}.$$

<sup>1</sup>d.h. endliche Kombinationen aus den vier Grundrechenarten, Potenzieren, Radizieren, Exponential- und Logarithmusfunktion, angewendet auf Konstanten und die unabhängige Variable.

<sup>2</sup>vgl. Königsberger (Kön04), S. 209-210.

Wir sortieren  $Q_1$  und  $Q_2$  nach Summanden mit geraden Potenzen von  $\sqrt{P}$  und solchen mit ungeraden Potenzen von  $\sqrt{P}$ . Da  $\sqrt{P}^{2k} = P^k$  ein Polynom in  $x$  ist, bedeutet diese Sortierung, dass sich  $Q_1$  und  $Q_2$  wie folgt darstellen lassen:

$$Q_1(x, \sqrt{P}) = A(x) + B(x)\sqrt{P}, \quad Q_2(x, \sqrt{P}) = C(x) + D(x)\sqrt{P}$$

mit Polynomen  $A, B, C, D$ . Man hat also die Darstellung

$$R(x, \sqrt{P}) = \frac{A + B\sqrt{P}}{C + D\sqrt{P}}$$

mit Polynomen  $A, B, C, D$  in  $x$ . Erweitert man diese Darstellung mit  $C - D\sqrt{P}$ , so erhält man

$$\begin{aligned} R(x, \sqrt{P}) &= \frac{A + B\sqrt{P}}{C + D\sqrt{P}} \cdot \frac{C - D\sqrt{P}}{C - D\sqrt{P}} = \frac{(AC - BDP) + (BC - AD)\sqrt{P}}{C^2 - D^2P} \\ &= \frac{AC - BDP}{C^2 - D^2P} + \frac{P(BC - AD)}{C^2 - D^2P} \cdot \frac{1}{\sqrt{P}} =: R_1 + \frac{R_2}{\sqrt{P}} \end{aligned}$$

mit den rationalen Funktionen  $R_1$  und  $R_2$  in  $x$ . Die Integration von  $R(x, \sqrt{P})$  ist damit auf die Integration rationaler Funktionen - die mittels rationaler Funktionen, Logarithmus und Arcustangens elementar möglich ist - und die Integration von Funktionen der Gestalt  $R(x)/\sqrt{P}$  zurückgeführt. Diesen Term wollen wir weiter analysieren.

Zunächst können wir feststellen, dass wir nicht unterscheiden müssen, ob  $P$  vom Grad drei oder vier ist. Wir können das Polynom vielmehr durch gebrochen lineare Transformationen (die bekannten Möbiustransformationen  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ) auf verschiedene Grundformen zurückführen. Aus diesen Grundformen des Polynoms lassen sich dann Grundformen der Integrale gewinnen.

### 1.1.1 Die Normalform von Weierstraß

Wir beginnen mit der Erzeugung einer Grundform dritten Grades, welche uns zur Normalform von Weierstraß für die elliptischen Integrale führen wird.

Es sei  $P$  zunächst ein Polynom vierten Grades. Wir führen nun eine Substitution durch, welche das Integral  $\int R(x)/\sqrt{P} dx$  in ein Integral der selben Form überführt, wobei das neue Polynom Grad drei hat, und getrennte Nullstellen.

$P$  lässt sich in der Form  $P(x) = c(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)$  schreiben, wobei o.B.d.A.  $e_4 \neq 0$  gelte (die Nullstellen sind ja alle verschieden). Wir führen nun die Substitution

$$x = \frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}}$$

durch:

$$\begin{aligned} \int \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}} dx &= \int \frac{\tilde{R}(z)}{\sqrt{P(x(z))}} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{e_4}\right)^2} dz = \\ &= \int \frac{\tilde{R}(z)}{\sqrt{P(x(z)) \left(z + \frac{1}{e_4}\right)^4}} dz \end{aligned}$$

Unter der Wurzel erhält man damit:

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}}\right) \left(z + \frac{1}{e_4}\right)^4 = \\ &= c \left(\frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}} - e_1\right) \left(\frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}} - e_2\right) \left(\frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}} - e_3\right) \left(\frac{e_4 z}{z + \frac{1}{e_4}} - e_4\right) \left(z + \frac{1}{e_4}\right)^4 = \\ &= c \left(e_4 z - e_1 z - \frac{e_1}{e_4}\right) \left(e_4 z - e_2 z - \frac{e_2}{e_4}\right) \left(e_4 z - e_3 z - \frac{e_3}{e_4}\right) \left(e_4 z - e_4 z - \frac{e_4}{e_4}\right) = \\ &= -c \left((e_4 - e_1) z - \frac{e_1}{e_4}\right) \left((e_4 - e_2) z - \frac{e_2}{e_4}\right) \left((e_4 - e_3) z - \frac{e_3}{e_4}\right) = \\ &=: \tilde{c}(z - \tilde{e}_1)(z - \tilde{e}_2)(z - \tilde{e}_3), \end{aligned}$$

wobei die  $\tilde{e}_i$  mit den  $e_i$  paarweise verschieden sind. Wir haben also die elliptischen Integrale durch diese Substitution auf solche für Polynome dritten Grades reduziert. Wir können durch eine weitere Substitution sogar eine ganz spezielle Form des Polynoms dritten Grades erreichen.

Führen wir in  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  die Substitution  $x = \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{1}{3}} t - \frac{b}{3a}$  durch, so erhalten wir ein Polynom  $Q(t) := P(x(t)) = 4t^3 - g_2 t - g_3$  mit  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ .

Um obige Behauptung zu verifizieren, berechnen wir nur  $ax^3(t) + bx^2(t)$ . Da hier bereits alle Terme zweiter und dritter Ordnung in  $t$  enthalten sind, muss man dafür nachprüfen, ob der  $t^2$ -Term verschwindet und der Koeffizient des  $t^3$ -Terms 4 ist.

In der Tat:

$$\begin{aligned} &a \left( \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{1}{3}} t - \frac{b}{3a} \right)^3 + b \left( \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{1}{3}} t - \frac{b}{3a} \right)^2 = \\ &= a \left( \frac{4}{a} t^3 - \frac{b}{a} \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{2}{3}} t^2 + \text{affinlinearer Term} \right) + b \left( \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{2}{3}} t^2 + \text{affinlinearer Term} \right) = \\ &= 4t^3 - b \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{2}{3}} t^2 + b \left(\frac{4}{a}\right)^{\frac{2}{3}} t^2 + \text{affinlinearer Term} = 4t^3 + \text{affinlinearer Term}. \end{aligned}$$

Wir können also alle elliptischen Integrale zurückführen auf die Berechnung von elliptischen Integralen der Form

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}} dx,$$

wobei  $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$  mit  $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ . Als nächstes wollen wir diese Integrale weiter reduzieren, so dass für die rationale Funktion  $R(x)$  nur noch wenige einfache Formen auftreten. Wir zerlegen dafür  $R(x)$  durch Polynomdivision und anschließende Partialbruchzerlegung des „Restes“ in eine Linearkombination von Monomen und Partialbrüchen der Form

$$\frac{1}{(x - \zeta)^m}, \quad \zeta \in \mathbb{C}.$$

**Beispiel 1.2.**  $R(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 4 + \frac{5}{x^2 - 1} = x^2 + 4 + \frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+1}$

Damit ist  $\int R(x)/\sqrt{P}$  eine Linearkombination von Integralen der beiden folgenden Typen:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{P}} dx \quad J_m = \int \frac{1}{(x - \zeta)^m \sqrt{P}} dx, \quad \text{wobei } \zeta \in \mathbb{C}.$$

Die Integrale  $I_n$  und  $J_m$  erfüllen Rekursionsformeln, welche es erlauben,  $I_k$  bzw.  $J_k$  als Linearkombination der  $I_n$  und  $J_m$  mit  $m, n < k$  auszudrücken. Diese wollen wir nun herleiten.

Beginnen wir mit  $I_n$ . Es gilt:

$$\frac{d}{dx} (x^n \sqrt{P}) = nx^{n-1} \sqrt{P} + \frac{P'}{2\sqrt{P}} x^n = \frac{1}{\sqrt{P}} \left( nx^{n-1} P + \frac{1}{2} x^n P' \right) \quad (1.1)$$

Da  $P$  von der Form  $4x^3 - g_2x - g_3$  ist, gilt

$$\begin{aligned} nx^{n-1} P + \frac{1}{2} x^n P' &= nx^{n-1} (4x^3 - g_2x - g_3) + \frac{1}{2} x^n (12x^2 - g_2) = \\ &= (4n + 6) x^{n+2} - g_2 \left( n + \frac{1}{2} \right) x^n - g_3 n x^{n-1} = \\ &=: a_n x^{n+2} + c_n x^n + d_n x^{n-1}, \end{aligned}$$

wobei  $a_n \neq 0$  und  $d_0 = 0$ . Integration von 1.1 ergibt somit

$$\begin{aligned} \sqrt{P} &= a_0 I_2 + c_0 I_0 && \text{für } n = 0 \\ x^n \sqrt{P} &= a_n I_{n+2} + c_n I_n + d_n I_{n-1} && \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} I_2 &= \alpha \sqrt{P} + \beta I_0 \\ I_3 &= \alpha' x \sqrt{P} + \beta' I_0 + \gamma' I_1 \\ I_4 &= \alpha' x^2 \sqrt{P} + \beta' I_1 + \gamma' I_2 = \\ &= \alpha'' \sqrt{P} + \beta'' x^2 \sqrt{P} + \gamma'' I_0 + \delta'' I_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es lassen sich also alle  $I_n$  als Linearkombination von  $I_0$  und  $I_1$  sowie den Funktionen  $x^\eta \sqrt{P}$  mit  $\eta = 0, \dots, n-2$  darstellen.

Nun zu den  $J_m = \int \frac{1}{(x-\zeta)^m \sqrt{P}} dx$ . Das Polynom  $P$  lässt sich wie folgt schreiben:



$$P(x) = a(x - \zeta)^3 + b(x - \zeta)^2 + c(x - \zeta) + d. \quad (1.2)$$

Wir differenzieren auch hier wieder einen geschickt gewählten Term:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sqrt{P}}{(x - \zeta)^m} \right) &= \frac{d}{dx} \left( \sqrt{P} (x - \zeta)^{-m} \right) = -m(x - \zeta)^{-m-1} \sqrt{P} + \frac{P'}{2\sqrt{P}} (x - \zeta)^{-m} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{P}} \left( -m(x - \zeta)^{-m-1} P + \frac{1}{2} (x - \zeta)^{-m} P' \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Wir setzen in den Term in Klammern 1.2 ein und erhalten:

$$\begin{aligned} &- m(x - \zeta)^{-m-1} \left( a(x - \zeta)^3 + b(x - \zeta)^2 + c(x - \zeta) + d \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (x - \zeta)^{-m} \left( 3a(x - \zeta)^2 + 2b(x - \zeta) + c \right) = \\ &= a \left( \frac{3}{2} - m \right) (x - \zeta)^{-m+2} + b(1 - m) (x - \zeta)^{-m+1} + \\ &+ c \left( \frac{1}{2} - m \right) (x - \zeta)^{-m} - md(x - \zeta)^{-m-1} =: \\ &=: a_m (x - \zeta)^{-m+2} + b_m (x - \zeta)^{-m+1} + c_m (x - \zeta)^{-m} + d_m (x - \zeta)^{-m-1}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $a_m \neq 0$  und  $b_m = 0$ , falls  $m = 1$ . Indem wir 1.3 integrieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{P}}{x - \zeta} &= a_1 I_1 - a_1 \zeta I_0 + c_1 J_1 + d_1 J_2 \quad \text{für } m = 1 \\ \frac{\sqrt{P}}{(x - \zeta)^m} &= a_m J_{m-2} + b_m J_{m-1} + c_m J_m + d_m J_{m+1} \quad \text{für } m \geq 2, \end{aligned}$$

wobei wir  $J_0 := I_0$  vereinbaren wollen. Damit sind die  $J_m$  für  $m \geq 2$  Linearkombinationen der Funktionen  $I_0$ ,  $I_1$ ,  $J_1$  und  $\frac{\sqrt{P}}{(x - \zeta)^\mu}$  mit  $\mu = 1, \dots, m - 1$ .

Wir haben nun also die Integration einer allgemeinen elliptischen Funktion auf die Bestimmung der drei Integrale  $I_0$ ,  $I_1$  und  $J_1$  zurückgeführt. Diese Darstellung der drei Grundintegrale heißt Normalform von Weierstraß. Man nennt

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx, & I_1 &= \int \frac{x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx, \\ J_1 &= \int \frac{1}{(x - \zeta) \sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx \quad \text{mit } \zeta \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

elliptische Integrale 1., 2. bzw. 3. Gattung.

Diese Darstellung hat für die Theorie der elliptischen Funktionen große Bedeutung. Insbesondere der Grundform des Polynoms  $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$  werden wir später wieder begegnen.

### 1.1.2 Normalform von Legendre und trigonometrische Form

Wir wollen noch eine weitere Normalform vorstellen. Indem wir im Fall eines Polynoms dritten Grades die umgekehrte Substitution wie in Abschnitt 1.1.1 durchführen, können wir alternativ auch davon ausgehen, dass bei einem beliebigen elliptischen Integral ein Polynom vierten Grades mit getrennten Nullstellen unter der Wurzel steht.

Wir betrachten also ein Polynom vierten Grades mit getrennten Nullstellen. Dann lässt sich  $P$  schreiben als  $P(x) = c(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)$ . Es existiert sogar eine Substitution

$$x = \frac{at + b}{ct + d}$$

und ein Polynom  $Q(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2)$  mit  $k \in \mathbb{C}$ , so dass gilt:

$$\int \frac{R(x)}{\sqrt{P(x)}} dx = \int \frac{\tilde{R}(t)}{\sqrt{P(x(t))}} \cdot \frac{ad - bc}{(ct + d)^2} dt = C \cdot \int \frac{\tilde{R}(t)}{\sqrt{Q(t)}} dt.$$

Diese Substitution erhält man durch algebraische Überlegungen, auf die hier nicht genauer eingegangen werden soll.  $k$  heißt das Modul des elliptischen Integrals.

Indem wir wie im vorherigen Abschnitt 1.1.1 wieder die rationale Funktion in Partialbrüche zerlegen und durch Integration der Terme  $x^n \sqrt{Q}$  bzw.  $\frac{1}{(x-\zeta)^m \sqrt{Q}}$  Rekursionsformeln für die  $I_n$  und  $J_m$  herleiten, erhalten wir als die Grundintegrale  $I_0, I_1, I_2$  und  $J_1$ :

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q}}, \quad \int \frac{t}{\sqrt{Q}} dt, \quad \int \frac{t^2}{\sqrt{Q}} dt, \quad \int \frac{dt}{(t - \zeta) \sqrt{Q}}.$$

Davon bleiben aber nur drei „Problemfälle“ übrig, denn das zweite Integral lässt sich durch die Substitution  $\tau = t^2$  elementar lösen:

$$\int \frac{t}{\sqrt{Q}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau)(1 - k^2 \tau)}}.$$

Man erhält also schließlich drei Grundintegrale in der Normalform von Legendre:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q}}, \quad \int \frac{t^2}{\sqrt{Q}} dt, \quad \int \frac{dt}{(t - \zeta) \sqrt{Q}}.$$

Aus dieser Normalform erhalten wir eine weitere Darstellung, die trigonometrische Form. In dieser Form treten die Integrale in Anwendungen häufig auf und so sind sie üblicherweise auch tabelliert. Man erhält sie durch die Substitution  $t = \sin \varphi$ . Wegen  $\frac{dt}{d\varphi} = \cos \varphi$  erhält man

$$\int \frac{dt}{\sqrt{Q}} = \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{(1 - \sin^2 \varphi)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} d\varphi = \int \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} d\varphi = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Dies ergibt direkt auch

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{Q}} dt = \int \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

und

$$\int \frac{dt}{(t-\zeta)\sqrt{Q}} = \int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi - \zeta)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Wegen der Identität

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \int \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = \int \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} d\varphi = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi$$

wählt man als das zweite Normintegral in trigonometrischer Form das einfachere Integral

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi.$$

Für die beiden ersten Normintegrale in trigonometrischer Form führt man bei unterer Integrationsgrenze  $\varphi_0 = 0$  folgende Bezeichnungen ein:

$$F(\varphi, k) := \int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \quad \text{Integral 1. Gattung}$$

$$E(\varphi, k) := \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 x} dx \quad \text{Integral 2. Gattung}$$

Integriert man über das Intervall  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , so nennt man die Integrale vollständige elliptische Integrale. Das besonders häufig auftretende vollständige elliptische Integral 1. Gattung bezeichnet man mit

$$K(k) := F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}.$$

Ausführlichere Informationen sowie Tabellen findet man etwa im Standard-Nachschlagwerk Abramowitz/Stegun (AS65).

## 1.2 Beispiele für Probleme, die auf elliptische Integrale führen

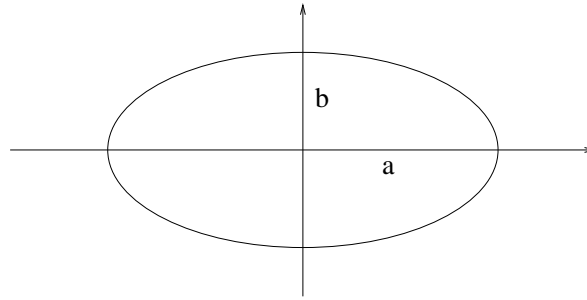
Wir werden nun einige Probleme betrachten, bei deren Lösung man auf elliptische Integrale stößt.

### 1.2.1 Bogenlänge der Ellipse

Der Name „elliptisches Integral“ kommt vom Auftreten eines der Grundintegrale bei der Berechnung des Umfangs einer Ellipse.

Gegeben sei eine Ellipse mit den beiden Halbachsenlängen  $a$  und  $b$ , siehe Abbildung 1.1. Diese wird parametrisiert durch

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (a \sin t, b \cos t). \end{aligned}$$

Abbildung 1.1: Ellipse mit großer Halbachse  $a$  und kleiner Halbachse  $b$ .

Daher gilt

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}.$$

Es sei oBdA  $a \geq b$ . Der Umfang der Ellipse ist:

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t) + b^2 \sin^2 t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} \sin^2 t} dt =: \\ &=: a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

Der Parameter  $\varepsilon$  liegt im Intervall  $(0, 1)$  und heißt die „numerische Exzentrizität“ der Ellipse. Hier ist  $\varepsilon$  gleichzeitig das Modul des elliptischen Integrals 2. Gattung. Um den Umfang einer konkreten Ellipse, z.B. mit den Halbachsen  $a = 2$  und  $b = 1$ , also  $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , zu berechnen, schlägt man das vollständige Elliptische Integral zweiter Gattung,  $E\left(\frac{\pi}{2}, \varepsilon\right)$ , in einer Tabelle nach.<sup>3</sup> Der Umfang der oben angegebenen Ellipse ergibt sich damit zu

$$U = 4 \cdot a \cdot E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 8 \cdot 1.2111 \approx 9.69 \quad .$$

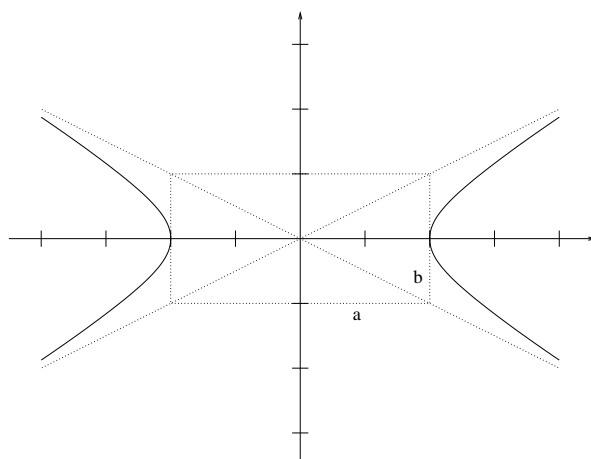
### 1.2.2 Länge von Hyperbelbögen

Während der Umfang des Kreises sowie die Bogenlänge einer Parabel elementar berechenbar sind, führt die Rektifizierung eines Hyperbelbogens wieder auf elliptische Integrale. Da diese Rechnung einige Details der vorhergegangenen Ausführungen veranschaulicht, soll sie hier ausgeführt werden.

Die beiden Hyperbeläste (vgl. Abbildung 1.2) sind durch die Spurgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

<sup>3</sup>etwa: Bronstein, (BSMM01) S. 1088

Abbildung 1.2: Hyperbel mit Asymptoten und Parametern  $a$  und  $b$ .

bestimmt. Eine Parametrisierung des rechten Astes der Hyperbel ist z.B. durch

$$\begin{aligned} \gamma : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t\right) \end{aligned}$$

gegeben, was sich durch Einsetzen in die Spurgleichung verifizieren lässt:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

Die Länge des Bogenstücks vom Scheitel des rechten Hyperbelastes bis zu einem Punkt  $\gamma(\tau)$ ,  $\tau \in (0, \frac{\pi}{2})$  ist damit gegeben durch

$$L(\tau) := \int_0^\tau \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_0^\tau \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2}}{\cos^2 t} dt.$$

Diese Länge wollen wir berechnen.

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \int_0^\tau \frac{\sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2}}{\cos^2 t} dt &= \int_0^\tau \frac{\sqrt{(a^2 + b^2) - a^2 \cos^2 t}}{\cos^2 t} dt = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^\tau \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cos^2 t}}{\cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Wir führen die Substitution  $x = \cos t$  durch. Wegen  $dt = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  folgt nach Einführung von  $k^2 := \frac{a^2}{a^2+b^2}$ :

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_{\cos \tau}^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \int_{\cos \tau}^1 \frac{1 - k^2 x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} dx = \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \int_{\cos \tau}^1 \left( -k^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} dx = \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \left( -k^2 \underbrace{\int_{\cos \tau}^1 \frac{1}{\sqrt{Q}} dx}_{=I_0} + \underbrace{\int_{\cos \tau}^1 \frac{1}{x^2 \sqrt{Q}} dx}_{=J_2} \right)
\end{aligned}$$

Während das erste Integral im Prinzip als gelöst betrachtet werden kann, da es als Integral erster Gattung tabelliert ist, muss das zweite Integral noch auf Grundintegrale zurückgeführt werden. Dazu wenden wir die früher schon allgemein beschriebene Prozedur einmal konkret an, und zwar indem wir  $\sqrt{Q}x^{-1}$  ableiten.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (\sqrt{Q}x^{-1}) &= \frac{1}{\sqrt{Q}} \left( -x^{-2}Q + \frac{1}{2}x^{-1}Q' \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Q}} \left( -x^{-2}(k^2x^4 - (k^2 + 1)x^2 + 1) + \frac{1}{2}x^{-1}(4k^2x^3 - 2(k^2 + 1)x) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{Q}} (-x^{-2} + k^2x^2)
\end{aligned}$$

Integration liefert:

$$\frac{\sqrt{Q}}{x} = -J_2 + k^2 I_2 \quad \Leftrightarrow \quad J_2 = k^2 I_2 - \frac{\sqrt{Q}}{x}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( -k^2 I_0 + k^2 I_2 - \underbrace{\frac{\sqrt{Q}(1)}{1}}_{=0} + \frac{\sqrt{Q}(\cos \tau)}{\cos \tau} \right) = \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \left( -k^2 \int_{\cos \tau}^1 \frac{1}{\sqrt{Q}} dx + k^2 \int_{\cos \tau}^1 \frac{x^2}{\sqrt{Q}} dx + \frac{\sqrt{Q}(\cos \tau)}{\cos \tau} \right)
\end{aligned}$$

Wir führen die Substitution  $x = \sin \varphi$  durch. Weiter führen wir die Bezeichnung  $\bar{\tau} := \sin^{-1} \cos \tau$  für den zu  $\tau$  komplementären Winkel ein. Nachdem wir schließlich die Integrale noch ein wenig umschreiben erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
L(\tau) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left( (1 + k^2) \int_{\bar{\tau}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \int_{\bar{\tau}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{\sqrt{Q}(\cos \tau)}{\cos \tau} \right) = \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \left( (1 + k^2) (K(k) - F(\bar{\tau}, k)) - \left( E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E(\bar{\tau}, k) \right) + \frac{\sqrt{Q}(\cos \tau)}{\cos \tau} \right).
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sieht zwar recht kompliziert aus, hat aber den Reiz, dass man es allein durch Nachschlagen in Tabellen<sup>4</sup> und einfaches Einsetzen explizit auswerten kann. Wir wählen eine Hyperbel mit  $a = 2$ ,  $b = 1$  und berechnen den Abstand zwischen dem Scheitel und dem Punkt  $P = \gamma\left(\frac{\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}a, b) = (2\sqrt{2}, 1)$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + b^2} &= \sqrt{5} & \cos \tau &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ k^2 &= \frac{4}{5} & \sqrt{Q(\cos \tau)} &= \frac{\sqrt{30}}{10} \\ 1 - k^2 &= \frac{1}{5} & \bar{\tau} &= \frac{\pi}{4} \\ k &= \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.89 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} L(\tau) &= \sqrt{5} \left( \frac{1}{5} \left( K(0.89) - F\left(\frac{\pi}{4}, 0.89\right) \right) - \left( E\left(\frac{\pi}{2}, 0.89\right) - E\left(\frac{\pi}{4}, 0.89\right) \right) + \frac{\sqrt{2 \cdot 30}}{10} \right) \approx \\ &\approx \sqrt{5} \left( \frac{1}{5} (2.2 - 0.85) - (1.2 - 0.72) + 0.77 \right) \approx 1.3 \quad . \end{aligned}$$

### 1.2.3 Das mathematische Pendel

Ein weiteres Beispiel einer relativ einfachen Problemstellung, diesmal aus der Physik stammend, bei deren Lösung elliptische Integrale auftreten, ist das mathematische Pendel<sup>5</sup>.

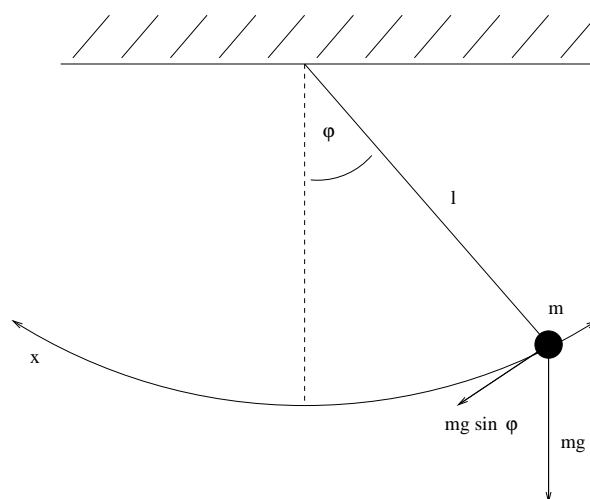


Abbildung 1.3: Das mathematische Pendel

<sup>4</sup>etwa: Bronstein, (BSMM01) S. 1087 f

<sup>5</sup>Eine Behandlung dieses Problems findet sich im Buch von (Bud67) auf S. 109 ff. oder in den meisten anderen Physikbüchern zur klassischen Mechanik.

Wir gehen aus von einem Massenpunkt der Masse  $m$  an einem idealen (also nicht dehnbaren und masselosen) Faden der Länge  $l$ , auf den als einzige einprägende Kraft die Schwerkraft wirke, vgl. Abbildung 1.3. Aus dem dritten Newtonschen Axiom

$$m\ddot{x} = F$$

erhält man mittels

$$\ddot{x} = l\ddot{\varphi} \quad \text{und} \quad F = -mg \sin \varphi$$

und den Anfangsbedingungen

$$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

das Anfangswertproblem

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0. \quad (1.4)$$

Die maximalen Amplituden des Pendels seien  $\pm\varphi_0$ . Diese Amplituden gehören zu den Umkehrpunkten  $\dot{\varphi} = 0$ .

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit  $\dot{\varphi}$  und integrieren vom Anfangszeitpunkt bis  $t$ :

$$\begin{aligned} l \int_0^t \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \, d\tau &= -g \int_0^t \sin \varphi \dot{\varphi} \, d\tau \\ \Leftrightarrow l \left[ \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(\tau) \right]_0^t &= -g [-\cos \varphi(\tau)]_0^t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} l (\dot{\varphi}^2 - \omega_0^2) &= -g (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

Auflösen nach  $\dot{\varphi}^2$  ergibt:

$$\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 - \frac{2g}{l} (1 - \cos \varphi) \quad (1.5)$$

Da wir nur eine echte Pendelbewegung betrachten wollen (keinen Rundumlauf des Pendels), betrachten wir den Fall  $\omega_0^2 < \frac{4g}{l}$ . Diese Bedingung sorgt dafür, dass es überhaupt Umkehrpunkte ( $\dot{\varphi} = 0$ ) der Bewegung gibt.

Für hinreichend kleine Pendelschwingungen verwendet man üblicherweise direkt in Gleichung 1.4 die Kleinwinkelnäherung  $\sin \varphi \approx \varphi$  und kann die Gleichung dann sofort lösen. Man erhält

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Wir wollen allerdings den Fall einer beliebigen Amplitude  $\varphi_0 \in (-\pi, \pi)$  betrachten. Dazu wird Gleichung 1.5 noch ein wenig modifiziert. Setzt man nämlich dort  $\varphi = \varphi_0$  und  $\dot{\varphi} = 0$  ein, so erhält man:

$$\omega_0^2 = \frac{2g}{l} (1 - \cos \varphi_0).$$

Indem man dies für  $\omega_0^2$  in 1.5 einsetzt, erhält man eine neue Bewegungsgleichung, in der  $\varphi_0$  statt  $\omega_0$  als Integrationskonstante vorkommt:



$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{2g}{l} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

Wir benutzen noch die goniometrische Identität

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

und erhalten:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{4g}{l} \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right).$$

Wir können nun die Variablen separieren.

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= 2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} dt &= \frac{\frac{1}{2} d\varphi}{\sqrt{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi}{2}}} \end{aligned}$$

Integration liefert:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^\varphi \frac{\frac{1}{2} d\psi}{\sqrt{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\psi}{2}}}. \quad (1.6)$$

Wir beschränken uns dabei auf eine Viertelschwingung:  $\varphi \in [0, \varphi_0]$ , da hier das Vorzeichen der Wurzel nicht geändert werden muss ( $\varphi$  und  $t$  nehmen monoton zu) und diese Viertelschwingung außerdem bereits alle Informationen über die gesamte Bewegung liefert.

Zur weiteren Umformung des Integrals 1.6 führen wir die Substitution

$$\sin \frac{\psi}{2} = k \sin \eta =: f(\eta(\psi)) \quad \text{mit} \quad k = \sin \frac{\varphi_0}{2} \quad (1.7)$$

durch. Der Nenner wird zu

$$\sqrt{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\psi}{2}} = k \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\psi}{2}}{k^2}} = k \sqrt{1 - \sin^2 \eta} = k \cos \eta.$$

Um  $\frac{1}{2} d\psi$  zu berechnen, benutzen wir die Kettenregel

$$\frac{d}{d\psi} (f(\eta(\psi))) = \frac{df}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\psi}$$

in folgender Weise:

$$\frac{d}{d\psi} (f(\eta(\psi))) = \frac{d}{d\psi} (k \sin \eta) \stackrel{1.7}{=} \frac{d}{d\psi} \left( \sin \frac{\psi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2},$$

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (k \sin \eta) = k \cos \eta$$

und damit folgt

$$\frac{d\eta}{d\psi} = \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{\psi}{2}}{k \cos \eta}.$$

Wir erhalten also:

$$\frac{1}{2} d\psi = \frac{k \cos \eta}{\cos \frac{\psi}{2}} d\eta = \frac{k \cos \eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} d\eta.$$

Mit  $\sin \frac{\psi}{2} = k \sin \theta$  transformiert sich das gesamte Integral 1.6 gemäß

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^\theta \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} = F(k, \theta). \quad (1.8)$$

Wir enden also tatsächlich bei der trigonometrischen Normalform des unvollständigen elliptischen Integrals erster Gattung,  $F(k, \theta)$ .

**Bemerkung 1.3.** Während man im Fall kleiner Schwingungen eine Lösung der Form

$$\varphi = \varphi_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

erhält, ergibt sich im Fall beliebiger Auslenkungen eine Lösung der Form

$$\theta = F^{-1} \left( k, \sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

In diesem Sinne kann man die Umkehrfunktionen der elliptischen Integrale als verallgemeinerte trigonometrische Funktionen verstehen. Auf diese Umkehrfunktionen werden wir gleich näher eingehen.

### 1.3 Vom elliptischen Integral zur elliptischen Funktion

#### 1.3.1 Umkehrfunktionen

Wir wollen nun auf den Zusammenhang zwischen den elliptischen Funktionen und den elliptischen Integralen, denen erstere ihren Namen verdanken, zu sprechen kommen. Der Brückenschlag von den elliptischen Integralen hin zu den elliptischen Funktionen und damit zur komplexen Analysis hat die Theorie der elliptischen Integrale dramatisch vorangebracht. Wir wollen hier die Idee verdeutlichen, die die Verbindung zwischen den elliptischen Integralen und den elliptischen Funktionen herstellt.

Gegeben sei eine bijektive Funktion  $f$  und ihre Umkehrfunktion  $f^{-1}$ . Die Ableitung der Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Erfüllt nun  $f$  eine Differentialgleichung erster Ordnung, d.h. gilt

$$f' = \varphi(f),$$

so ergibt sich für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} = \frac{1}{\varphi \circ f \circ f^{-1}} = \frac{1}{\varphi}. \quad (1.9)$$

**Beispiel 1.4.** Diese Methode wird etwa angewendet, um den Arcustangens zu differenzieren. Da er die Umkehrfunktion des Tangens ist, gilt:

$$\arctan' = \frac{1}{\tan' \circ \arctan}.$$

Um hiermit weiter zu kommen, betrachtet man die Ableitung des Tangens:

$$\tan' = \left( \frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \cos - \cos' \sin}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{\sin^2}{\cos^2} + 1 = \tan^2 + 1.$$

Wir haben also eine Differentialgleichung 1. Ordnung für den Tangens gefunden:

$$\tan' = \varphi \circ \tan \quad \text{mit} \quad \varphi(x) = 1 + x^2$$

und erhalten man aus der obigen Formel 1.9

$$\arctan' = \frac{1}{\varphi}, \quad \text{d.h.} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Das ist aber noch nicht, worauf wir hinauswollen. Der Nutzen unserer Erkenntnis geht noch weiter. Integriert man nämlich die Gleichung

$$(f^{-1})' = \frac{1}{\varphi},$$

so erhält man

$$\int \frac{1}{\varphi} = f^{-1}.$$

Man erkennt somit folgenden Satz:

**Satz 1.5.** Falls die invertierbare Funktion  $f$  eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$f' = \varphi \circ f$$

erfüllt, so ist  $f^{-1}$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{\varphi}$ .

□

Dies ist eine sehr interessante Perspektive: Normalerweise wird versucht, Differentialgleichungen zu lösen, indem Methoden der Integration angewandt werden (vergleiche etwa unser Pendel-Beispiel in Abschnitt 1.2.3). In diesem Fall geht man umgekehrt vor: Man versucht eine Stammfunktion zu finden, indem man nach der Lösung einer passenden Differentialgleichung sucht. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist der, dass wir ein mächtiges Werkzeug in die Hand bekommen werden: die komplexe Analysis. Schauen wir uns also eines der bereits bekannten elliptischen Integrale an, das elliptische Integral 1. Gattung in der Legendreschen Normalform:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Falls wir eine Funktion  $q$  finden können, welche die Differentialgleichung

$$q' = \sqrt{(1-q^2)(1-k^2q^2)} \quad \text{bzw.} \quad q'^2 = (1-q^2)(1-k^2q^2)$$

erfüllt, so ist

$$q^{-1} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Stammfunktion des Integranden. Die Funktion  $q$  ist dann also die Umkehrfunktion des elliptischen Integrals 1. Gattung zu einem Polynom vierten Grades.  $q$  ist ein Beispiel einer elliptischen Funktion.

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel angeben, das eine wichtige Rolle spielt. Wir betrachten das Integral 1. Gattung zu einem Polynom dritten Grades in der Weierstraßschen Normalform:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}} \quad \text{mit } g_2, g_3 \in \mathbb{R}.$$

Die zu diesem elliptischen Integral gehörige Umkehrfunktion erfüllt die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

und ist ebenfalls eine elliptische Funktion, die sogenannte Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Darauf wird, wie gesagt, später noch zurückzukommen sein, denn die  $\wp$ -Funktion ist sozusagen der Grundstein der modernen Theorie der elliptischen Funktionen.

**Bemerkung 1.6** (Historisches). Mit elliptischen Integralen beschäftigen sich Mathematiker bereits seit Beginn des 18. Jahrhunderts: Das spezielle elliptische Integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

wurde bereits seit 1718 durch G. C. Fagnano eingehend analysiert. Seine Umkehrfunktion kann nach Abel (1827) als meromorphe Funktion in die komplexe Ebene hinein fortgesetzt werden und ist als solche doppelt periodisch<sup>6</sup>, was ebenfalls Abel entdeckte. Heute heißen alle doppelt periodischen meromorphen Funktionen der komplexen Ebene elliptische Funktionen. Zu ihnen gehören auch die oben beschriebenen Funktionen  $\wp$  und  $q$ . Die Theorie der elliptischen Funktionen wurde, nach ihrer Einführung durch Abel, von Jacobi und Weierstraß weiterentwickelt.<sup>7</sup> Sie stellt mit ihren vielen Verbindungen zur Algebraischen Geometrie bzw. zur Zahlentheorie eines der wichtigen Themen der Mathematik des 19. Jahrhunderts dar.

<sup>6</sup>Definition folgt im nächsten Kapitel.

<sup>7</sup>vgl. die einleitende Bemerkung bei Freitag/Busam (FB06) auf S. 255

## 2 Elliptische Funktionen: Grundlagen

Wir wollen nun die elliptischen Funktionen einführen und einige allgemeine Eigenschaften erkennen. Diese Einführung basiert auf der heute etablierten Definition einer elliptischen Funktion, wie man sie beispielsweise bei Hurwitz (Hur64) oder Freitag/Busam (FB06) findet. Kurze Einführungen in die Theorie der elliptischen Funktionen werden in vielen Funktionentheoriebüchern wie etwa jenen von Fischer/Lieb (FL88), Freitag/Busam (FB06), Behnke/Sommer (BS72) und Hurwitz/Courant (Hur64) sowie natürlich in der Spezialliteratur wie Chandrasekharan (Cha85), Achiezer (Ach90) oder Lang (Lan73) gegeben. Hier sollen die wesentlichen Aspekte herausgearbeitet und ein Grundverständnis für das Verhalten der elliptischen Funktionen aufgebaut werden.

### 2.1 Definition der elliptischen Funktionen

Bekanntlich heißt eine Funktion  $f$ , wie etwa der Sinus, periodisch, falls es ein  $c \in \mathbb{C}$  gibt, so dass  $f(z + c) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Der Begriff der Periodizität wird im Folgenden erweitert. Wir beginnen mit der Definition eines Gitters:

**Definition 2.1.** Ein Gitter ist eine Teilmenge  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  mit  $\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ , wobei  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  reell linear unabhängig sind.

**Bemerkung 2.2.** Schon am einfachen Beispiel des Quadratgitters  $\Lambda = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  kann man sehen, dass  $\omega_1, \omega_2$  für ein Gitter nicht eindeutig sind: Dieses Gitter wird nicht nur durch 1 und  $i$ , sondern auch durch  $i$  und  $1 + i$  erzeugt. Wir werden auf Gitter etwas später noch detaillierter zu sprechen kommen.

**Definition 2.3.** Eine Funktion  $f$  heißt doppelt periodisch bezüglich eines Gitters  $\Lambda$ , falls für alle  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2) = f(z)$ .

**Bemerkung 2.4.** Aus dieser Forderung folgt unmittelbar die scheinbar stärkere Eigenschaft  $f(z + \omega) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und  $\omega \in \Lambda$ .

Mit Hilfe des aus der Funktionentheorie bekannten Begriffes der meromorphen Funktionen<sup>8</sup> definiert man nun, was man unter einer elliptischen Funktion verstehen will.

**Definition 2.5.** Eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  ist eine meromorphe, auf ganz  $\mathbb{C}$  definierte Funktion  $f$ , welche bezüglich  $\Lambda$  doppelt periodisch ist.

Wir wollen festhalten:

**Lemma 2.6.** *Die elliptischen Funktionen bezüglich eines Gitters  $\Lambda$  bilden einen Körper.*

*Beweis.* Die meromorphen Funktionen bilden einen Körper,<sup>9</sup> und da die elliptischen Funktionen zum Gitter  $\Lambda$  bezüglich Addition und Multiplikation sowie der jeweils zugehörigen Inversenbildung abgeschlossen sind, bilden sie selbst einen Körper.  $\square$

**Definition 2.7.** Der Körper der elliptischen Funktionen zu einem Gitter  $\Lambda$  wird mit  $K(\Lambda)$  bezeichnet.

<sup>8</sup> man siehe etwa das Buch von Freitag/Busam, (FB06), S. 153

<sup>9</sup> vgl. etwa Freitag/Busam, (FB06), S. 153 f

**Bemerkung 2.8.** Wenn es im Folgenden klar sein wird, von welchem Gitter die Rede ist, oder wenn das konkrete Gitter momentan nicht von Bedeutung ist, werden wir einfach von einer elliptischen Funktion sprechen. Wir wollen aber im Hinterkopf behalten, dass eine elliptische Funktion zu einem ganz bestimmten Gitter gehört.

**Bemerkung 2.9.** Elliptische Funktionen kann man als holomorphe Abbildungen zwischen kompakten Riemannschen Flächen<sup>10</sup> auffassen. Ein Gitter  $\Lambda$  induziert eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}$ , deren Äquivalenzklassen mit ihrer komplexen Struktur eine Riemannsche Fläche bilden: den Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$ .<sup>11</sup> Nachdem eine elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$  auf allen Elementen einer Äquivalenzklasse den selben Wert annimmt, ist die Funktion  $\hat{f} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{f}([z]) := f(z)$  wohldefiniert. Da  $f$  meromorph ist, ist  $\hat{f}$  eine holomorphe Abbildung zwischen den beiden Riemannschen Flächen  $\mathbb{C}/\Lambda$  und  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Wir können die elliptischen Funktionen also auch als holomorphe Funktionen vom Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  in die Sphäre  $\hat{\mathbb{C}}$  auffassen. Wir werden im Folgenden nicht immer streng zwischen der elliptischen Funktion  $f$  und der holomorphen Funktion  $\hat{f}$  vom Torus in die Sphäre unterscheiden, sondern beide mit  $f$  bezeichnen, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Wir werden in diesem Zusammenhang auch die Ausdrucksweise verwenden, dass  $f$  gewisse Eigenschaften „modulo  $\Lambda$ “ aufweist. Dies verdeutlicht den Umstand, dass es sich nur um verschiedene Betrachtungsweisen des selben Gegenstandes handelt.

Diesen Gegenstand wollen wir nun genauer untersuchen. Insbesondere wollen wir die Idee verinnerlichen, dass  $f$  aufgrund der doppelten Periodizität bereits durch das Verhalten auf einem beschränkten Teil der komplexen Ebene vollständig bestimmt ist. Dafür definieren wir zunächst den Begriff der Grundmasche eines Gitters:

**Definition 2.10.** Gegeben sei ein Gitter  $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ . Die für jedes  $c \in \mathbb{C}$  definierte Menge  $\mathcal{F}_c := \{c + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0, 1]\}$  (vgl. Abbildung 2.1) heißt eine *abgeschlossene Grundmasche* des Gitters  $\Lambda$ . Analog definiert man offene bzw. halboffene Grundmaschen durch  $\lambda, \mu \in (0, 1)$  bzw.  $\lambda, \mu \in [0, 1)$ . Die Bezeichnung  $\mathcal{F}_c$  wird dabei meist einfach beibehalten. Die Standardgrundmasche ist  $\mathcal{F} := \mathcal{F}_0$ .

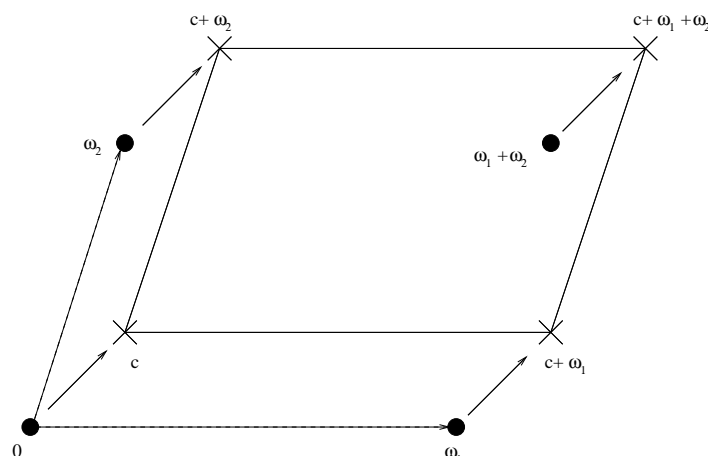
**Bemerkung 2.11.** Eine halboffene Grundmasche stellt ein Vertretersystem der Äquivalenzklassen des Torus  $\mathbb{C}/\Lambda$  dar, das heißt, jeder Punkt  $[z]$  auf dem Torus besitzt aus der halboffenen Grundmasche genau ein  $w \in [z]$ . Man spricht dabei auch von einem Fundamentalbereich. Die abgeschlossene Grundmasche enthält die halboffene und ist damit auch ein Fundamentalbereich des Torus, wobei die Eindeutigkeit am Rande verloren geht. Identifiziert man gegenüberliegende Randpunkte, so erhält man ein Modell des Torus in der komplexen Ebene. Die abgeschlossene Grundmasche ist kompakt, was häufig eine nützliche Eigenschaft darstellt. Wir werden dies im Folgenden noch sehen. Die Bedeutung der offenen Grundmasche ist nicht so groß, da sie kein Vertretersystem des Torus enthält. Sie ist aber die kanonische Wahl einer Kartenumgebung für einen Toruspunkt.

Wir notieren eine triviale Erkenntnis, die zu einem ersten interessanten Resultat über elliptische Funktionen führen wird.

**Lemma 2.12.** *Eine elliptische Funktion nimmt all ihre Werte bereits auf einem beliebigen Fundamentalbereich an.*

<sup>10</sup>für eine Definition von Riemannschen Flächen siehe etwa Forster, (For77) S. 1 f

<sup>11</sup>vgl. etwa Forster (For77), S. 4

Abbildung 2.1: Eine Grundmasche zu einem Gitter  $\Lambda$ 

*Beweis.* Da jeder Punkt der komplexen Ebene äquivalent zu einem Punkt im Fundamentalbereich ist, und die elliptische Funktion auf äquivalenten Punkten den gleichen Wert annimmt, ist die Behauptung klar.  $\square$

Hier kommt nun die angekündigte Folgerung:

**Satz 2.13.** *Eine nichtkonstante elliptische Funktion nimmt jeden ihrer Werte, insbesondere  $\infty$ , modulo  $\Lambda$  nur endlich oft an.*

*Beweis.* Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Angenommen, die elliptische Funktion  $f$  nimmt einen endlichen Wert,  $c \in \mathbb{C}$ , modulo  $\Lambda$  unendlich oft an. Dann nimmt sie den Wert  $c$  in der abgeschlossenen Grundmasche  $\mathcal{F}$  unendlich oft an. Da  $\mathcal{F}$  kompakt ist, besitzt die Menge der  $c$ -Stellen in  $\mathcal{F}$  einen Häufungspunkt, und nach dem Identitätssatz der Funktionentheorie<sup>12</sup> ist dann  $f \equiv c$ .
2. Angenommen,  $f$  besitzt in  $\mathcal{F}$  unendlich viele Pole. Dann besitzt die Menge der Polstellen in  $\mathcal{F}$  einen Häufungspunkt, was einen Widerspruch darstellt, da Pole per Definition isolierte Singularitäten sind.

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Nachdem wir nun wissen, dass jede elliptische Funktion auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  nur endlich viele Pole besitzt, können wir eine wichtige „Kennzahl“ für elliptische Funktionen einführen.

**Definition 2.14.** Die Ordnung einer elliptischen Funktion  $f$  ist die Summe der Vielfachheiten aller Pole von  $f$  modulo  $\Lambda$  und wird mit  $\text{Ord}(f)$  bezeichnet.

**Bemerkung 2.15.** Die obige Definition ist genau genommen etwas schwammig. Wir wollen sie hier daher präzisieren. In der Funktionentheorie wird einem Pol eine negative Ordnung zugeordnet, so dass etwa ein doppelter Pol einen Punkt der Ordnung  $-2$  meint: Die Ordnung eines Punktes ist der kleinste Exponent der Laurententwicklung der Funktion in diesem Punkt,

<sup>12</sup>vgl. z.B. das Buch von Fischer/Lieb (FL88) S.74/75 oder jedes andere Funktionentheoriebuch.

dessen Koeffizient nicht verschwindet. Die Ordnung einer elliptischen Funktion ist also exakt gesprochen gleich der negativen Summe aller Ordnungen der Pole von  $f$  modulo  $\Lambda$ . Wir werden aber im folgenden wieder von Vielfachheiten von Polen sprechen.

**Beispiel 2.16.** Eine elliptische Funktion, welche auf  $\mathbb{C}/\Lambda$  zwei einfache Pole und einen dreifachen Pol besitzt, hat die Ordnung  $\text{Ord}(f) = 5$ .

## 2.2 Die Liouvilleschen Sätze

Wir können die letzte Aussage 2.13 sogar noch verstärken, und zwar dahingehend, dass eine elliptische Funktion jeden Wert modulo  $\Lambda$  gleich oft annimmt. Dafür müssen wir aber zuerst noch ein paar Vorbereitungen treffen. Wir beginnen mit dem ersten der drei Liouvilleschen Sätze über elliptische Funktionen, die Joseph Liouville in seinen Vorlesungen 1847 bewiesen hat. Diese Sätze und ihre Folgerungen liefern tiefe Einsichten in die Theorie der elliptischen Funktionen. Die Beweise jedoch basieren auf rein funktionentheoretischen Methoden.

**Satz 2.17** (1. Liouvillescher Satz). *Eine elliptische Funktion ohne Polstellen ist konstant.*

*Beweis.* Gegeben sei eine elliptische Funktion  $f$  ohne Polstellen. Da  $f$  keine Polstellen besitzt, ist  $f$  auf der Grundmasche  $\mathcal{F}$  holomorph. Da  $\mathcal{F}$  kompakt ist, nimmt  $f$  auf  $\mathcal{F}$  das Maximum  $m \in \mathbb{C}$  an. Da  $f$  aber alle Werte bereits in  $\mathcal{F}$  annimmt, ist  $m$  das globale Maximum von  $f$ . Damit ist  $f$  eine beschränkte ganze Funktion und daher nach dem funktionentheoretischen Satz von Liouville<sup>13</sup> konstant.  $\square$

Folgendes einfache Korollar werden wir noch häufig benutzen:

**Korollar 2.18.** *Zwei elliptische Funktionen zum selben Gitter, deren Null- und Polstellenverteilungen inklusive der Vielfachheiten übereinstimmen, unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor.*

*Beweis.* Wir betrachten den Quotienten der beiden Funktionen. Dabei handelt es sich um eine elliptische Funktion ohne Pole, die also konstant ist.  $\square$

Wir haben erkannt, dass eine nichtkonstante elliptische Funktion mindestens einen Pol modulo  $\Lambda$  besitzt. Wir werden aber gleich feststellen, dass das noch nicht alles ist.

**Satz 2.19** (2. Liouvillescher Satz). *Die Summe der Residuen modulo  $\Lambda$  einer elliptischen Funktion ist Null.*

Um dies zu zeigen, benötigen wir zunächst ein kleines Lemma:

**Lemma 2.20.** *Für jedes Gitter  $\Lambda$  und jede elliptische Funktion  $f$  zu diesem Gitter existiert eine Grundmasche  $\mathcal{F}_c$ , auf deren Rand kein Pol von  $f$  liegt.*

*Beweis.* Wir betrachten zunächst  $\mathcal{F}_0$ . Möglicherweise trifft bereits der Rand dieser Grundmasche keinen Pol, dann sind wir natürlich fertig. Doch auch wenn das nicht der Fall ist, liegen nach Satz 2.13 in der abgeschlossenen Grundmasche nur endlich viele Pole. Dies seien  $n$  Stück, welche die Koordinaten  $\lambda_i\omega_1 + \mu_i\omega_2$ ,  $i = 1, \dots, n$  haben mögen, wobei natürlich  $0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$  gilt. Wir können stets ein  $c = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \in \mathcal{F}_0$  wählen, so dass  $\lambda \neq \lambda_i \forall i = 1, \dots, n$  und  $\mu \neq \mu_i \forall i = 1, \dots, n$  gilt. Die Behauptung ist nun, dass der Rand von  $\mathcal{F}_c$  keinen Pol trifft.

<sup>13</sup>vgl. Fischer/Lieb (FL88), S. 85



Jeder Punkt auf dem Rand von  $\mathcal{F}_c$  besitzt einen Vertreter in  $\mathcal{F}_0$ : Ein Randpunkt der Form  $z = c + \alpha\omega_1 = (\lambda + \alpha)\omega_1 + \mu\omega_2$  oder  $z = c + \alpha\omega_1 + \omega_2 = (\lambda + \alpha)\omega_1 + (\mu + 1)\omega_2$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  (unterer bzw. oberer Rand) besitzt einen Vertreter der Form  $\beta\omega_1 + \mu\omega_2$ , was nach Wahl von  $c$  kein Pol ist. Vertreter von Randpunkten aus dem linken oder rechten Rand besitzen analog in  $\mathcal{F}_0$  einen Vertreter mit  $\omega_1$ -Koordinate  $\lambda$ , was ebenfalls nach Wahl von  $c$  kein Pol ist. Damit ist gezeigt, dass es stets eine Grundmasche gibt, auf deren Rand kein Pol liegt.  $\square$

Nach dieser kurzen Vorarbeit können wir nun den zweiten der Liouvilleschen Sätze beweisen:

*Beweis von Satz 2.19.* Gegeben sei eine elliptische Funktion  $f$ . Wir wollen den Residuensatz der Funktionentheorie verwenden. Wir wissen nun, dass es eine Grundmasche  $\mathcal{F}_c$  gibt, auf deren Rand kein Pol liegt. Die Menge der Pole im Inneren von  $\mathcal{F}_c$  bildet ein Vertretersystem der Pole von  $f$  modulo  $\Lambda$ . Der Wert des Integrals über die einmal mathematisch positiv umlaufene Berandungskurve  $\gamma$  von  $\mathcal{F}_c$  liefert daher die Summe der Residuen von  $f$  modulo  $\Lambda$ . Das Kurvenintegral setzt sich wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathcal{F}_c} \operatorname{Res}_a f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = & (2.1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_c^{c+\omega_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{c+\omega_1}^{c+\omega_1+\omega_2} f(\zeta) d\zeta + \int_{c+\omega_1+\omega_2}^{c+\omega_2} f(\zeta) d\zeta + \int_{c+\omega_2}^c f(\zeta) d\zeta \right) \end{aligned}$$

Da sich der Kurvenabschnitt von  $c + \omega_1$  bis  $c + \omega_1 + \omega_2$  aus Punkten  $c + \omega_1 + \mu\omega_2$ ,  $\mu \in [0, 1]$  zusammensetzt, deren  $f$ -Werte gleich denen der Punkte  $c + \mu\omega_2$ ,  $\mu \in [0, 1]$  ist, kann man den zweiten Summanden durch

$$\int_c^{c+\omega_2} f(\zeta) d\zeta = - \int_{c+\omega_2}^c f(\zeta) d\zeta$$

ersetzen. Mit dem selben Argument ist der dritte Summand gleich

$$\int_{c+\omega_1}^c f(\zeta) d\zeta = - \int_c^{c+\omega_1} f(\zeta) d\zeta$$

und damit heben sich der erste und der dritte, sowie der zweite und der vierte Summand auf. Die Summe der Residuen von  $f$  modulo  $\Lambda$  ist also tatsächlich Null.  $\square$

Aus dem zweiten Liouvilleschen Satz folgt sofort eine bemerkenswerte Erkenntnis über elliptische Funktionen:

**Lemma 2.21.** *Es gibt keine elliptische Funktion der Ordnung 1.*

*Beweis.* Wäre  $\operatorname{Ord}(f) = 1$ , so hätte  $f$  nur einen Pol modulo  $\Lambda$  und dieser wäre einfach. Das Residuum eines einfachen Pols ist aber stets von Null verschieden.  $\square$

Der dritte Liouvillesche Satz zeigt uns die eigentliche Bedeutung der Ordnung einer elliptischen Funktion, denn er enthält die zu Beginn dieses Abschnitts versprochene Aussage.

**Satz 2.22** (3. Liouvillescher Satz). *Eine nichtkonstante elliptische Funktion nimmt modulo  $\Lambda$  jeden Wert, in Vielfachheit gezählt, gleich oft an, nämlich so oft, wie ihre Ordnung angibt.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass eine nichtkonstante elliptische Funktion  $f$  in Vielfachheit gezählt gleich viele Null- wie Polstellen besitzt. Dafür verwenden wir das aus der Funktionentheorie bekannte Null- und Polstellen zählende Integral<sup>14</sup>.

Da mit  $f$ , wie man durch Betrachtung des Differentialquotienten erkennen kann, auch  $f'$  elliptisch ist, ist auch die Funktion

$$g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$$

elliptisch. Diese Funktion ist der Integrand des Null- und Polstellen zählenden Integrals für  $f$ . Wir wählen eine Grundmasche  $\mathcal{F}_c$ , deren Rand  $\partial\mathcal{F}_c$  keinen der Pole von  $g$  trifft. Dann gilt:

$$\sum_{a \in \mathcal{F}_c} \operatorname{Res}_a g = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{F}_c} g(\zeta) \, d\zeta = N_{\mathcal{F}_c} - P_{\mathcal{F}_c},$$

wobei  $N_{\mathcal{F}_c}$  die Anzahl der Nullstellen von  $f$  in Vielfachheit und  $P_{\mathcal{F}_c}$  die Anzahl der Polstellen von  $f$  in Vielfachheit ist. Nach dem 2. Liouvilleschen Satz 2.19 ist die Summe der Residuen von  $g$  modulo  $\Lambda$  gleich Null, und  $f$  besitzt damit in Vielfachheit gezählt gleich viele Null- wie Polstellen.

Indem man für jedes  $a \in \mathbb{C}$  mit  $f - a$  genauso verfährt, findet man, dass  $f$  genausoviele  $a$ -wie Polstellen besitzt.  $\square$

Die Ordnung gibt also nicht nur die Gesamtzahl der Pole einer elliptischen Funktion  $f$  in Vielfachheit an, sondern sie gibt an, wie oft jeder Wert  $a \in \hat{\mathbb{C}}$  von  $f$  auf dem Torus angenommen wird. Aus der Perspektive der elementaren Funktionentheorie mag es auf den ersten Blick überraschend erscheinen, dass eine elliptische Funktion, falls sie nicht konstant ist, jeden Wert annehmen muss, und das auch noch gleich oft. Erinnern wir uns aber an die Bemerkung 2.9, welche die Verbindung zwischen den elliptischen Funktionen und Abbildungen zwischen kompakten Riemannschen Flächen herstellt, so erkennen wir einen tieferen Sinn dieser Aussage, welcher zugleich einen alternativen Beweis des dritten Liouvilleschen Satzes liefert. Die Abbildung  $f$  besitzt als nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen einen Abbildungsgrad: Jeder Punkt auf der Bild-Fläche besitzt in Vielfachheit gezählt gleich viele Urbilder.<sup>15</sup> Die eigentümlich anmutende Eigenschaft einer elliptischen Funktion, jeden Wert gleich oft anzunehmen, ist eine Selbstverständlichkeit, wenn man die Perspektive wechselt, und die Funktion als Abbildung zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen erkennt. Im Lichte dieser Erkenntnis werden wir machmal statt von der Ordnung einer elliptischen Funktion auch von deren Abbildungsgrad sprechen.

## 2.3 Null- und Polstellenverteilung

Wir werden nun noch eine weitere bedeutende Erkenntnis über elliptische Funktionen erhalten, welche sich mit der Frage nach dem Verhältnis zwischen Nullstellen und Polstellen einer elliptischen Funktion beschäftigt. Wir streifen auch kurz die Frage, welches Kriterium für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebenen Null- und Polstellen gilt. Diese Art von Fragestellung ist für die Funktionentheorie typisch: Holomorphie ist eine sehr starke Forderung an eine Funktion, der dadurch ein beträchtliches Maß an Starrheit auferlegt wird.

<sup>14</sup>vgl. z.B. das Funktionentheoriebuch von Jänich (Jän04) auf der Seite 86.

<sup>15</sup>vgl. etwa Lamotke (Lam05) S. 16

Somit ist es stets interessant, durch welche Forderungen an eine holomorphe Funktion diese gerade eindeutig festgelegt ist.

Wir wissen bereits aus dem dritten Liouvilleschen Satz 2.22, dass eine nichtkonstante elliptische Funktion in Vielfachheit gezählt gleich viele Null- und Polstellen besitzt.

Vergleichen wir diese Erkenntnis mit den nichtkonstanten holomorphen Funktionen der Riemannschen Zahlkugel  $\hat{\mathbb{C}}$  in sich. Das sind gerade die rationalen Funktionen

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

mit Polynomen  $P$  und  $Q$ .<sup>16</sup> In diesem Fall existiert zu jeder vorgegebenen Verteilung von Null- und Polstellen, solange deren Anzahl in Vielfachheit gleich ist, eine holomorphe Funktion der Sphäre in sich, welche diese Verteilung realisiert. Die Notwendigkeit der Bedingung der gleichen Anzahl von Null- und Polstellen folgt mit dem selben Argument wie für die elliptischen Funktionen: holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen besitzen einen wohldefinierten Abbildungsgrad. Die Bedingung ist auch hinreichend, wie wir gleich sehen werden. Man gibt sich eine passende Menge von Null- und Polstellen mit Vielfachheiten vor, genauer von paarweise verschiedenen Punkten  $c_1, \dots, c_k \in \hat{\mathbb{C}}$ , sowie zugehörigen Ordnungen  $0 \neq \nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\sum_{i=1}^k \nu_i = 0$ . Die rationale Funktion

$$f(z) := \prod_{\substack{i=1 \\ c_i \neq \infty}}^k (z - c_i)^{\nu_i}$$

erfüllt die geforderten Bedingungen an Null- und Polstellen zunächst im endlichen Bereich. Wir zeigen mit Hilfe der Bedingung  $\sum_{i=1}^k \nu_i = 0$ , dass auch im Punkt  $\infty$  die Vorgabe erfüllt ist. Ist  $\infty$  in der Liste der  $c_1, \dots, c_k$  gar nicht enthalten, so ist der Zählergrad von  $f$  gleich dem Nennergrad und damit ist  $\infty$  weder Polstelle noch Nullstelle. Ist o.B.d.A  $c_1 = \infty$ , und  $\nu_1 > 0$ , so ist der Zählergrad von  $f$  um  $\nu_1$  kleiner als der Nennergrad von  $f$  und damit liegt bei  $\infty$  eine  $\nu_1$ -fache Nullstelle von  $f$  vor, wie gewünscht. Indem man zu  $\frac{1}{f}$  übergeht, zeigt man analog, dass im Fall  $c_1 = \infty$ ,  $\nu_1 < 0$  bei  $\infty$  ein  $\nu_1$ -facher Pol von  $f$  vorliegt.

Zurück zu den elliptischen Funktionen. Hier liegen die Dinge nicht ganz so einfach. Da es keine elliptische Funktion erster Ordnung gibt, kann die Bedingung der gleichen Anzahl von Null- und Polstellen nicht hinreichend für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebener Verteilung dieser Stellen sein. Wir wollen nun eine weitere Eigenschaft vorstellen und beweisen, dass jede elliptische Funktion sie besitzt.

**Satz 2.23.** *Es sei  $f$  eine beliebige elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ . Ferner sei  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}/\Lambda$  eine Liste der Nullstellen von  $f$  modulo  $\Lambda$ , wobei jede Nullstelle so oft vorkommen möge, wie ihre Vielfachheit angibt. Die Liste  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}/\Lambda$  enthalte die Polstellen von  $f$  modulo  $\Lambda$ , ebenfalls entsprechend ihrer Vielfachheit. Dann gilt:*

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \quad \text{modulo } \Lambda$$

*Beweis.* Wir verwenden wieder den Residuensatz. Diesmal wählen wir eine Grundmasche  $\mathcal{F}_c$ , deren Rand weder den Nullpunkt, noch eine Nullstelle oder einen Pol von  $f$  enthält. Dann liegen die  $a_i$  und  $b_j$ , beziehungsweise Elemente der Äquivalenzklasse, im Inneren von  $\mathcal{F}_c$ . Wir betrachten das Integral

<sup>16</sup>siehe etwa Lamotke (Lam05), S. 21.

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{F}_c} \underbrace{\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}}_{=:g(\zeta)} d\zeta.$$

Der Integrand besitzt genau bei den  $a_i$  und  $b_j$  einfache Pole. Ist  $a_i$  Nullstelle  $k$ -ter Ordnung von  $f$ , so ist das Residuum von  $g$  in  $a_i$  gleich  $k \cdot a_i$ . Ist  $b_j$   $l$ -facher Pol von  $f$ , so ist das Residuum von  $g$  in  $b_j$  gleich  $-l \cdot b_j$ . Beides sieht man durch einfaches Nachrechnen. Der Wert des Integrals ergibt sich also nach dem Residuensatz zu

$$I = a_1 + \dots + a_n - b_1 - \dots - b_n.$$

Wir wollen das Integral nun direkt berechnen und zeigen, dass  $I \in \Lambda$  gilt.

Dazu vergleichen wir die Integrale über je zwei gegenüberliegende Seiten. Da die Argumentation für beide Paare von gegenüberliegenden Seiten analog verläuft, führen wir sie nur einmal vor. Wir wollen zeigen, dass

$$I_1 := \frac{1}{2\pi i} \left( \int_c^{c+\omega_1} g(\zeta) d\zeta + \int_{c+\omega_1+\omega_2}^{c+\omega_2} g(\zeta) d\zeta \right) \in \Lambda$$

gilt. Indem im zweiten Summanden die Integrationsgrenzen vertauscht werden und die Substitution  $\zeta \mapsto \zeta + \omega_2$  durchgeführt wird, erhält man:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi i} \left( \int_c^{c+\omega_1} g(\zeta) d\zeta - \int_c^{c+\omega_1} g(\zeta + \omega_2) d\zeta \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c^{c+\omega_1} \left( \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - (\zeta + \omega_2) \frac{f'(\zeta + \omega_2)}{f(\zeta + \omega_2)} \right) d\zeta = \\ &= -\frac{\omega_2}{2\pi i} \int_c^{c+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass der Wert des Integrals

$$\int_c^{c+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$  ist.

Die Funktion  $f$  besitzt nach Voraussetzung auf der Strecke von  $c$  nach  $c + \omega_1$  keinen Pol und keine Nullstelle. Daher gibt es ein ganzes Elementargebiet, welches diese Strecke enthält, und auf dem  $f$  holomorph und ohne Nullstellen ist. In diesem Elementargebiet gibt es einen holomorphen Zweig  $h$  des Logarithmus von  $f$ , das heißt, wir können

$$f(z) = \exp(h(z))$$

schreiben.<sup>17</sup> Die Funktion  $h$  ist eine Stammfunktion von  $\frac{f'}{f}$ . Daher gilt:

$$\int_c^{c+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = h(c + \omega_1) - h(c)$$

<sup>17</sup>Die Existenz dieser Abbildung  $h$  ist eine Folgerung aus dem Cauchyschen Integralsatz der Funktionentheorie und kann beispielsweise bei Freitag/Busam (FB06) auf S.79 f nachgelesen werden.

Da  $f$  elliptisch ist, gilt

$$\exp(h(c + \omega_2)) = f(c + \omega_2) = f(c) = \exp(h(c)),$$

was bedeutet, dass sich  $h(c + \omega_2)$  und  $h(c)$  nur um ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi i$  unterscheiden können. Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Dieser Satz zeigt uns natürlich sofort nochmals, dass es keine elliptische Funktion erster Ordnung geben kann. Wir können ihn in einfacher Weise noch verallgemeinern:

**Korollar 2.24.** *Es sei  $f$  eine beliebige nichtkonstante elliptische Funktion zum Gitter  $\Lambda$ , und  $\alpha, \beta \in \hat{\mathbb{C}}$  beliebig. Ferner sei  $a_1, \dots, a_n$  eine Liste der  $\alpha$ -Stellen von  $f$  modulo  $\Lambda$ , wobei ihre Vielfachheit berücksichtigt sei. Entsprechend sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Liste der  $\beta$ -Stellen. Dann gilt*

$$a_1 + \dots + a_n \equiv b_1 + \dots + b_n \quad \text{modulo } \Lambda$$

*Beweis.* Man ersetze im Beweis des Satzes 2.23  $f$  durch  $f - \alpha$  beziehungsweise durch  $f - \beta$ .  $\square$

Die Eigenschaft, dass die Nullstellensumme einer elliptischen Funktion modulo Gitter gleich ihrer Polstellensumme ist, stellt das zu Beginn des Abschnitts erwähnte Kriterium für die Existenz einer elliptischen Funktion mit vorgegebener Null- und Polstellenverteilung dar. Diese Aussage stammt von N. H. Abel aus dem Jahr 1826 und ist nach ihm benannt. Wir werden auf den Beweis des Abelschen Theorems verzichten, wollen es aber der Vollständigkeit halber formulieren. Dabei mögen die vorherigen Forderungen bezüglich der Vielfachheiten stillschweigend vorausgesetzt werden.

**Theorem 2.25** (Abelsches Theorem). *Gegeben sei ein Gitter  $\Lambda$ , sowie zwei disjunkte Listen  $a_1, \dots, a_m$  und  $b_1, \dots, b_n$  von Punkten in  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Genau dann existiert eine elliptische Funktion  $f$  zum Gitter  $\Lambda$ , welche die  $a_i$  als Nullstellen und die  $b_i$  als Polstellen besitzt, wenn  $m = n$  und*

$$a_1 + \dots + a_m \equiv b_1 + \dots + b_n \quad \text{modulo } \Lambda$$

*gilt.*

Der Beweis basiert auf der Existenz spezieller elliptischer Funktionen.<sup>18</sup> Wir können den Beweis an dieser Stelle schon allein deswegen nicht führen, weil wir uns bisher noch nicht davon überzeugen konnten, dass es überhaupt nichtkonstante elliptische Funktionen gibt. Mit dieser Fragestellung werden wir uns erst später für beliebige Gitter auseinandersetzen.

**Bemerkung 2.26.** Nach Korollar 2.18 (elliptische Funktionen mit gleicher Null- und Polstellenverteilung unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor) ist die sich ergebende Funktion  $f$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig.

<sup>18</sup>Der Beweis findet sich etwa bei Freitag/Busam (FB06), Kapitel V. § 6.

### 3 Konstruktion elliptischer Funktionen mit Symmetrien

Wir haben bereits festgestellt, dass eine elliptische Funktion nicht die Ordnung 1 besitzen kann. Daher ist es naheliegend, den einfachsten verbleibenden Fall zu betrachten, also eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Hierbei sind zwei verschiedene Szenarien möglich: Entweder es liegt ein doppelter Pol modulo  $\Lambda$  vor, oder wir haben es mit zwei einfachen Polen zu tun. In der einschlägigen Literatur<sup>19</sup> konzentriert man sich hier ausschließlich auf den Spezialfall einer elliptischen Funktion mit einem doppelten Pol bei  $[0]$ . Eine solche elliptische Funktion wird dort überall mit Hilfe einer Mittag-Lefflerschen Partialbruchreihe konstruiert. Wir wollen die Konstruktion an dieser Stelle noch nicht nachvollziehen, sondern zunächst einen eigenen Weg gehen. Das Ziel wird es sein, auf Basis einfacher geometrischer Überlegungen und mit funktionentheoretischen Mitteln zu bestimmten Gittern elliptische Funktionen 2. Ordnung zu konstruieren, welche gewisse Symmetrien aufweisen. Die Kenntnis eben dieser Symmetrien gewinnt man aus der erwähnten Standardkonstruktion nicht. Wir erhalten auf diese Weise mehr Information über das Verhalten bestimmter elliptischer Funktionen.

#### 3.1 Elliptische Funktionen 2. Ordnung

Zunächst wollen wir das Verhalten der elliptischen Funktionen der Ordnung 2 noch näher beleuchten, um bei der späteren Konstruktion alle nötigen Informationen zu besitzen. Wie wir bereits wissen, besitzt jeder Wert in  $\hat{\mathbb{C}}$  bezüglich einer elliptischen Funktion 2. Ordnung in Vielfachheit gezählt genau zwei Urbilder. Es wird also nur zwei Sorten von Werten geben: Solche, die zweimal mit Vielfachheit 1 angenommen werden, und solche, die einmal mit Vielfachheit 2 angenommen werden. Entsprechend unterscheiden wir auf dem Torus zwei Sorten von Punkten: reguläre Punkte, die ihren Wert mit Vielfachheit 1 annehmen, und doppelte Punkte, die ihren Wert mit Vielfachheit 2 annehmen.

Im nächsten Satz fassen wir einige zentrale Aspekte der elliptischen Funktionen 2. Ordnung zusammen. Um ihn griffig formulieren zu können, stellen wir eine kurze Definition voran:

**Definition 3.1.** Gegeben sei ein Gitter  $\Lambda$ . Ein Punkt  $z \in \mathbb{C}$  heißt Halbgitterpunkt von  $\Lambda$ , falls  $z \notin \Lambda$ , aber  $z + z \in \Lambda$ .

Wie man sich leicht klarmacht, gibt es modulo  $\Lambda$  genau drei verschiedene Halbgitterpunkte, welche sich für ein beliebiges Erzeugerpaar  $\omega_1, \omega_2$  von  $\Lambda$  zu  $\frac{\omega_1}{2}$ ,  $\frac{\omega_2}{2}$  und  $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  ergeben.

**Satz 3.2** (Verzweigungspunkte elliptischer Funktionen zweiter Ordnung). *Gegeben sei eine elliptische Funktion  $f$  der Ordnung 2 zum Gitter  $\Lambda$ . Es gilt:*

1.  *$f$  besitzt modulo  $\Lambda$  genau 4 Verzweigungspunkte.*
2. *Die Verzweigungspunkte sind Punktsymmetriezentren von  $f$ .*
3. *Je zwei verschiedene Verzweigungspunkte unterscheiden sich um einen Halbgitterpunkt von  $\Lambda$ .*

*Beweis.* Sei  $f$  eine elliptische Funktion wie im Satz gefordert. Wir beweisen die drei Eigenschaften der Reihe nach.

<sup>19</sup>gemeint sind die Werke, welche sich mit elliptischen Funktionen befassen, etwa (Ach90), (Cha85), (Lan73), (Hur64), (FB06) und (Lam05).

1. Wir verwenden die Hurwitz-Formel<sup>20</sup>. Diese besagt, dass eine kompakte Riemannsche Fläche, welche der Sphäre mit Abbildungsgrad  $n$  überlagert ist, und  $k$  Verzweigungspunkte der Gesamtordnung  $v = v_1 + \dots + v_k$  besitzt, das Geschlecht

$$p = \frac{v}{2} - n + 1$$

besitzt. Hierbei ist zu betonen, dass die Verzweigungsordnung eines  $(i + 1)$ -fachen Punktes  $i$  ist. Wir kennen den Abbildungsgrad  $n$  von  $f$ , sowie das Geschlecht  $p$  des Torus:  $n = 2$  und  $p = 1$ . Daher können wir nach der Gesamtverzweigungsordnung der Abbildung auflösen:

$$v = 2(p + n - 1) = 2(1 + 2 - 1) = 4.$$

Die Gesamtverzweigungsordnung von  $f$  ist also 4. Da  $f$  als elliptische Funktion 2. Ordnung aber höchstens doppelte Punkte besitzt, ist jeder Verzweigungspunkt von der Ordnung 1. Damit gibt es genau vier Verzweigungspunkte, wie behauptet.

2. Es sei  $a \in \mathbb{C}/\Lambda$  ein Verzweigungspunkt von  $f$ , und  $z \in \mathbb{C}/\Lambda$  beliebig. Zu zeigen ist:  $f(a + z) = f(a - z)$ . Es gibt modulo  $\Lambda$  nur einen weiteren Punkt  $b$  mit  $f(a + z) = f(b)$ , wobei möglicherweise  $b = a + z$  gilt. Nach Korollar 2.24 gilt dann  $a + a = (a + z) + b$ . Damit folgt  $b = a - z$  und wir haben die Behauptung gezeigt.

3. Es seien  $a, b \in \mathbb{C}/\Lambda$  Verzweigungspunkte von  $f$ . Mit  $z := b - a$  gilt:

$$a + a = b + b \quad \Rightarrow \quad 0 = b - a + b - a = z + z.$$

Die Differenz  $z$  der beiden Verzweigungspunkte ist also tatsächlich ein Halbgitterpunkt. □

Die Abbildung 3.1 illustriert die Anordnung der Verzweigungspunkte. Wir können zwei Dinge direkt folgern:

**Korollar 3.3.** *Es sei  $f$  eine elliptische Funktion der Ordnung 2.*

- *$f$  unterscheidet sich nur um eine Translation von einer geraden Funktion, d.h.: Es existiert eine gerade elliptische Funktion  $g(-z) = g(z)$  und eine Translation*

$$t : z \mapsto z - \gamma,$$

*so dass  $f = g \circ t$ .*

- *Ist  $f$  selbst gerade, so sind die Verzweigungspunkte genau die Halbgitterpunkte von  $f$ .* □

Aus diesen Resultaten geht hervor, dass elliptische Funktionen 2. Ordnung gewissen Einschränkungen unterliegen. Wir werden darauf in einem späteren Kapitel noch zurückkommen. In diesem Kapitel werden wir die angeführten Eigenschaften ausnutzen um solche Funktionen zu konstruieren. Dafür benötigen wir noch weitere Vorbereitungen.

<sup>20</sup>Darüber kann im Buch von Behnke/Sommer (BS72) im Anhang an Kapitel V. auf den Seiten 499 bis 511 nachgelesen werden.

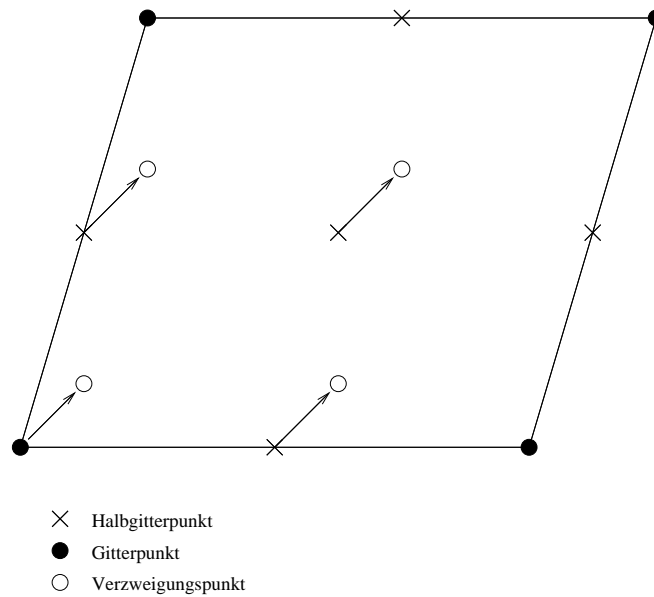


Abbildung 3.1: Lage der Verzweigungspunkte einer elliptischen Funktion 2. Ordnung

### 3.2 Gitter und Tori

Wenden wir uns den Gittern, beziehungsweise den Tori zu, auf denen die elliptischen Funktionen ja definiert sind. Wir wissen bereits, dass Tori als Riemannsche Flächen aufgefasst werden können, und die elliptischen Funktionen als holomorphe Funktionen zwischen zwei Riemannschen Flächen: einem Torus und der Riemannschen Zahlkugel. Nun ist es für Riemannsche Flächen sinnvoll, sie nur bis auf Biholomorphie zu unterscheiden:

**Definition 3.4.** Zwei Riemannsche Flächen  $X$  und  $Y$  heißen (biholomorph) äquivalent, falls es eine Bijektion  $\phi$  zwischen beiden gibt, welche holomorph ist und deren Umkehrfunktion  $\phi^{-1}$  ebenfalls holomorph ist.

Sind nämlich  $X$  und  $Y$  äquivalent, so lässt sich aus einer Abbildung auf  $X$  durch dazuschalten der Bijektion  $\phi$  eine Funktion auf  $Y$  gewinnen, welche genau die selben Eigenschaften besitzt, und umgekehrt.

Für uns bedeutet dies, dass wir Tori nur bis auf Biholomorphie zu unterscheiden brauchen: existiert eine biholomorphe Abbildung  $\phi$  zwischen zwei Tori  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$ , so wollen wir diese beiden Tori als gleich ansehen. Kennen wir nämlich die elliptischen Funktionen  $f$  von  $\mathbb{C}/\Lambda_1$ , so kennen wir auch die elliptischen Funktionen von  $\mathbb{C}/\Lambda_2$ . Es sind dies die Funktionen  $f \circ \phi^{-1}$ .

Es stellt sich also die Frage, wann zwei Tori äquivalent sind. Diese Frage beantwortet folgender Satz:

**Satz 3.5.** Gegeben seien zwei Gitter  $\Lambda_1$  und  $\Lambda_2$ . Die zugehörigen Tori  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  sind genau dann biholomorph äquivalent, wenn es eine komplexe Zahl  $\alpha \neq 0$  gibt, so dass  $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$ .

*Beweis.* Es gebe zunächst eine komplexe Zahl  $\alpha \neq 0$ , so dass  $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$  gilt. Wir suchen eine biholomorphe Abbildung zwischen den Tori  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$ . Die Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto$



$\alpha z$  ist trivialerweise holomorph. Sie ist sogar biholomorph mit Umkehrfunktion  $f^{-1}: z \mapsto \frac{z}{\alpha}$ . Ferner bildet sie äquivalente Punkte modulo  $\Lambda_1$  auf äquivalente Punkte modulo  $\Lambda_2$  ab: Es sei  $z - \tilde{z} \in \Lambda_1$ . Dann gilt für die Bilder:  $f(z) - f(\tilde{z}) = \alpha z - \alpha \tilde{z} = \alpha(z - \tilde{z}) \in \Lambda_2$ . Daher induziert sie eine wohldefinierte Abbildung  $\tilde{f}: \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2, [z]_1 \mapsto [\alpha z]_2$  zwischen den beiden Tori. Die Notation  $[\cdot]_i$  meint natürlich die Äquivalenzklassen modulo  $\Lambda_i$ . Die Abbildung  $\tilde{f}$  ist eine biholomorphe Abbildung zwischen den beiden Tori  $\mathbb{C}/\Lambda_1$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  (denn: um jeden Punkt erhält man in passend gewählten Karten wieder  $f$  bzw.  $f^{-1}$ , was holomorph ist).

Für die Rückrichtung nehmen wir nun an, dass die beiden Tori biholomorph äquivalent sind und zwar vermittelt der Abbildung  $\phi: \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2$ . Wir müssen zeigen, dass es ein  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt, so dass  $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$  gilt. Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Indem wir eventuell zu der Abbildung  $\hat{\phi}: \mathbb{C}/\Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda_2, \hat{\phi}([z]) = \phi([z]) - \phi([0])$  übergehen, welche mit  $\phi$  ebenfalls biholomorph ist, können wir annehmen, dass  $\phi([0]) = [0]$  erfüllt ist.
2. Es existiert eine stetige Abbildung  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C}/\Lambda_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{C}/\Lambda_2 \end{array}$$

kommutiert. Dabei sind die  $\pi_i$  die kanonischen Quotientenabbildungen. Die gewünschte stetige Abbildung  $F$  erhalten wir aus der Überlagerungstheorie. Ein Satz, der etwa bei Forster (For77) auf der Seite 25 nachgelesen werden kann, liefert wegen

$$\phi\left(\pi_1\left(\omega^{(1)}\right)\right) = \phi([0]) = [0] = \pi_2\left(\omega^{(2)}\right)$$

für jedes Paar

$$\omega^{(1)} \in \Lambda_1 \quad \text{und} \quad \omega^{(2)} \in \Lambda_2$$

die Existenz genau einer (stetigen) Liftung

$$F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \pi_2 \circ F = \phi \circ \pi_1 \quad \text{und} \quad F\left(\omega^{(1)}\right) = \omega^{(2)}.$$

Voraussetzungen sind, dass  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  Hausdorff-Räume sind und  $\pi_2$  eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung ist. Ferner muss  $\mathbb{C}$  genügend zusammenhängend<sup>21</sup> sein und  $\phi \circ \pi_1$  stetig. All dies ist natürlich der Fall. Wir wählen speziell diejenige Liftung mit  $F(0) = 0$ .

3.  $F$  ist holomorph. Dies folgt mit einem weiteren Satz aus der Überlagerungstheorie im Zusammenhang mit Riemannschen Flächen. Sind nämlich  $X, Y, Z$  Riemannsche Flächen,  $p: Y \rightarrow X$  eine holomorphe unverzweigte Überlagerung und  $f: Z \rightarrow X$  eine holomorphe Abbildung, so ist jede Liftung  $F: Z \rightarrow Y$  von  $f$  holomorph.<sup>22</sup> In unserem Fall sind  $Y, Z = \mathbb{C}$  und  $X = \mathbb{C}/\Lambda_2$ , was natürlich Riemannsche Flächen sind. Die unverzweigte

<sup>21</sup>die genau Forderung ist an dieser Stelle nicht von Bedeutung;  $\mathbb{C}$  ist so zusammenhängend, wie man es nur fordern kann.

<sup>22</sup>dieser Satz stammt ebenfalls aus dem Buch von Forster (For77), S. 21.

Überlagerung  $p$  ist  $\pi_2$ , was als Karte für  $\mathbb{C}/\Lambda_2$  per Definition holomorph ist. Die Rolle der holomorphen Abbildung  $f$  spielt in unserem Fall  $\phi \circ \pi_1$ . Wir erhalten also tatsächlich, dass  $F$  holomorph ist.

4. Wir zeigen nun, dass die Ableitung  $F'$  eine beschränkte und auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion und damit konstant ist. Da  $F$  holomorph ist, besitzt auch  $F'$  keine Pole. Die Beschränktheit erhalten wir, indem wir zeigen, dass  $F'$  eine elliptische Funktion ist. Damit hat dann  $F$  die Form  $F(z) = \alpha z + \beta$ .

Um die Elliptizität von  $F'$  zu zeigen, wählen wir ein beliebiges Element  $\omega \in \Lambda_1$  aus und betrachten die Funktion  $\hat{F}(z) := F(z + \omega)$ . Wie man leicht nachrechnet, erfüllt auch  $\hat{F}$  die Identität  $\pi_2 \circ \hat{F} = \phi \circ \pi_1$ . Nun zeigen wir, dass die Funktion  $G(z) := F(z) - \hat{F}(z)$  konstant ist. Es gilt

$$\pi_2 \circ G = \pi_2 \circ (F - \hat{F}) = \pi_2 \circ F - \pi_2 \circ \hat{F} = \phi \circ \pi_1 - \phi \circ \pi_1 \equiv [0].$$

Für ein beliebiges  $\tilde{z} \in \mathbb{C}$  gilt also  $[G(\tilde{z})] = [0]$ , oder äquivalent  $G(\tilde{z}) \in \Lambda_2$ . Da  $G$  stetig ist, gilt damit  $G \equiv \tilde{\omega}$  für ein  $\tilde{\omega} \in \Lambda_2$ . Da  $G$  konstant ist, folgt

$$F'(z) - F'(z + \omega) = 0,$$

also ist  $F'$  elliptisch und damit konstant.

Wir wissen nun also, dass  $F$  von der Form  $F(z) = \alpha z$  ist, denn wegen  $F(0) = 0$  muss  $\beta = 0$  gelten. Da  $f$  biholomorph ist, muss  $\alpha \neq 0$  gelten.

5. Abschließend müssen wir noch einsehen, dass  $\alpha\Lambda_1 = \Lambda_2$  gilt. Das folgt aber direkt, da  $\phi$  biholomorph ist und  $\phi([0]) = [0]$ : Einerseits wird ein  $\omega \in \Lambda_1$  wegen

$$[F(\omega)] = (\pi_2 \circ F)(\omega) = (\phi \circ \pi_1)(\omega) = \phi([\omega]) = \phi([0]) = [0]$$

auf ein  $\tilde{\omega} \in \Lambda_2$  abgebildet. Andererseits: Da  $\phi$  biholomorph ist, wird kein  $z$  mit  $[z] \neq [0]$  durch  $F$  auf einen Gitterpunkt von  $\Lambda_2$  abgebildet. Ist also  $\tilde{\omega} \in \Lambda_2$ , so gilt natürlich  $F(\frac{\tilde{\omega}}{\alpha}) = \tilde{\omega}$  und aus eben genannten Gründen muss  $\frac{\tilde{\omega}}{\alpha} \in \Lambda_1$  gelten. Damit ist die Mengengleichheit  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$  gezeigt.

Dies schließt den Beweis ab. □

Die Beweisidee für den obigen Satz ist bei Freitag (Fre07) auf S. 23 angedeutet.

Während zwei Tori zu verschiedenen Gittern zwar stets topologisch äquivalent sind, zeigt uns Satz 3.5, dass sie durchaus unterschiedliche komplexe Strukturen tragen können. Wie eingangs erwähnt, wollen wir zwei Tori genau dann unterscheiden, wenn sie unterschiedliche komplexe Strukturen tragen, das heißt, wenn ihre Gitter nicht durch Drehstreckung auseinander hervorgehen. Formal haben wir es mit einer Äquivalenzrelation von Gittern zu tun. Zwei Gitter heißen genau dann äquivalent, wenn sie durch Drehstreckung auseinander hervorgehen. Wir können ein Gitter durch die Angabe zweier erzeugender Gittervektoren  $\omega_1, \omega_2$  beschreiben. Diese Beschreibung ist nicht eindeutig. Unser Ziel ist es nun, aus jeder Äquivalenzklasse von Gittern einen bestimmten Repräsentanten zu wählen und diesen durch Angabe eines speziellen Erzeugerpaars  $\omega_1, \omega_2$  zu charakterisieren.

Zuerst führen wir eine Drehstreckung  $z \mapsto \frac{z}{\omega}$  des Gitters durch, so dass das betraglich kleinste von Null verschiedene Gitterelement  $\omega$  auf 1 zu liegen kommt. Dieses Element  $\omega$  ist auch bis

auf das Vorzeichen nicht unbedingt eindeutig bestimmt, da es eventuell ein Erzeugerpaar mit  $|\omega_1| = |\omega_2|$  gibt. Darauf werden wir noch kurz zurückkommen. Wir wählen nun ein Gitterelement  $\tilde{\omega}$  aus, welches zusammen mit 1 ein Erzeugendenpaar des Gitters ist. Indem wir eventuell zu  $-\tilde{\omega}$  übergehen, können wir annehmen, dass  $\text{Im } \tilde{\omega} > 0$ . Es gilt natürlich  $|\tilde{\omega}| \geq 1$ , da es ja kein betraglich kleineres Gitterelement als 1 gibt. Wir wollen nun zeigen, dass das Gitter auch ein Erzeugerpaar  $1, \tau$  besitzt, so dass  $-\frac{1}{2} \leq \text{Re } \tau \leq \frac{1}{2}$  und  $|\tau| \geq 1$ : Indem wir so oft 1 von  $\tilde{\omega}$  subtrahieren bzw. zu  $\tilde{\omega}$  addieren, bis der Realteil des sich ergebenden Gitterelementes  $\tau$  in  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  liegt, erhalten wir wieder ein Erzeugendenpaar  $1, \tau$ . Da das gesamte Gitter aber kein betraglich kleineres Element als 1 besitzt, muss  $|\tau| \geq 1$  gelten.

Wir halten fest:

**Satz 3.6.** *Jede Klasse von bezüglich Drehstreckung äquivalenten Gittern enthält ein Gitter, welches durch ein*

$$\tau \in \mathcal{M} := \left\{ \tau \in \mathbb{C} \mid |\tau| \geq 1 \text{ und } -\frac{1}{2} \leq \text{Re } \tau \leq \frac{1}{2} \right\}$$

erzeugt wird. □

**Bemerkung 3.7.** Die Menge  $\mathcal{M}$  der Gitter-Erzeuger  $\tau$  ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Sagt man, ein Gitter wird durch  $\tau$  erzeugt, so meint man freilich stillschweigend das Paar  $1, \tau$ .

Jedem  $\tau \in \mathcal{M}$  entspricht natürlich ein Gitter, welches durch  $\tau$  erzeugt wird. Klar ist auch, dass im Inneren von  $\mathcal{M}$  keine zwei Elemente das selbe Gitter erzeugen. Auf den vertikalen Rändern von  $\mathcal{M}$  liegen sich immer zwei Erzeuger des selben Gitters gegenüber:  $\text{Re } \tau_1 = -\frac{1}{2}$  und  $\text{Re } \tau_2 = \frac{1}{2}$  mit  $\text{Im } \tau_1 = \text{Im } \tau_2$ . Die beiden Punkte unterscheiden sich ja gerade um 1. Außerdem gehören auf dem unteren Rand von  $\mathcal{M}$ , der Menge mit  $|\tau| = 1$  noch jeweils diejenigen  $\tau_1, \tau_2$  zum selben Gitter, welche  $\text{Re } \tau_1 = -\text{Re } \tau_2$  und damit  $\text{Im } \tau_1 = \text{Im } \tau_2$  erfüllen. Hier lässt sich ein Gitter durch Drehung in das andere überführen. In diesem Fall war die Wahl des betraglich kleinsten Erzeugers nicht eindeutig, wie wir bereits kurz angedeutet haben. Alle anderen Elemente von  $\mathcal{M}$  erzeugen verschiedene Gitter. Daher haben wir folgendes gezeigt:

**Satz 3.8.**  *$\mathcal{M}$  ist nach Identifikation von Randpunkten, deren Imaginärteile gleich und deren Realteile bis auf das Vorzeichen gleich sind, ein Fundamentalbereich für die Menge aller Tori mit verschiedenen komplexen Strukturen.* □

Wir wollen diesen Fundamentalbereich verwenden, um die verschiedenen Gitter nach ihren Symmetrie-Eigenschaften zu klassifizieren (vgl. Abbildung 3.2).

**Definition 3.9.** Wir unterscheiden sechs verschiedene Gittertypen:

1. Das Gitter zu  $\tau = i$ , also  $\Lambda = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  nennen wir das Quadratgitter.
2. Die Gitter zu  $\tau = \lambda i$ , mit  $\lambda \in (1, \infty)$ , werden als Rechteckgitter bezeichnet.
3. Das Gitter zu  $\tau = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  heißt 60°-Gitter.
4. Die Gitter zu  $|\tau| = 1, \text{Re } \tau \in (0, \frac{1}{2})$  heißen rhombische Gitter.
5. Die Gitter zu  $\text{Re } \tau = \frac{1}{2}$  mit  $|\tau| > 1$  nennen wir zentriert.

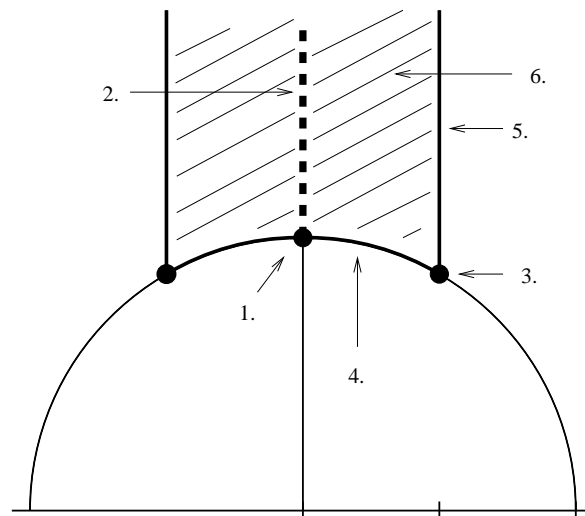


Abbildung 3.2: Die verschiedenen Gittertypen

6. Die Gitter, welche keiner der vorherigen Gruppen angehören nennen wir generische Gitter. Sie gehören zu  $\operatorname{Re} \tau \notin \{0, \pm \frac{1}{2}\}$ ,  $|\tau| \neq 1$  und stellen Gitter in allgemeiner Lage dar.

**Bemerkung 3.10.** Sieht man genauer hin, so erkennt man, dass zwei dieser Gitterarten gleichartig sind: Die rhombischen und die zentrierten Gitter. Beide entstehen, indem zwei identische Rechtecksgitter zentriert übereinandergelegt werden. Der einzige Unterschied zwischen den rhombischen und den zentrierten Gittern ist dabei das Seitenverhältnis des zugehörigen Rechtecks (vgl. Abbildung 3.3). Wir werden diese beiden Gitterformen in einen Topf werfen und sie als zentrierte Rechtecksgitter bezeichnen, da die spätere Konstruktion für beide das selbe Ergebnis liefert.

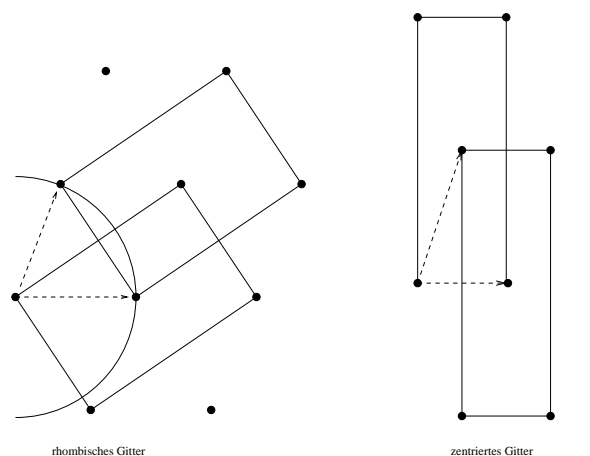


Abbildung 3.3: Rhombische und zentrierte Gitter sind zentrierte Rechtecksgitter

### 3.3 Die Konstruktion

#### 3.3.1 Das Ziel

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es, elliptische Funktionen zweiter Ordnung zu bestimmten Gittern zu konstruieren, und zwar zu all denjenigen Gittern, die Spiegelsymmetrien besitzen. Die Funktionen, die wir konstruieren, werden Symmetrien besitzen, und zwar im folgenden Sinne:

Es wird auf dem Torus eine endliche Spiegelungsgruppe  $G$  und auf der Sphäre eine endliche Spiegelungsgruppe  $H$  operieren. Ferner wird ein Gruppenhomomorphismus  $\Phi$  von  $G$  nach  $H$  existieren, so dass unsere Funktion  $f$  das Äquivarianzprinzip erfüllt:

Für alle  $z \in \mathbb{C}/\Lambda$  und alle  $g \in G$  gilt:

$$f(gz) = \Phi(g) f(z).$$

Die endlichen Spiegelungsgruppen zerlegen Torus bzw. Sphäre in kongruente Polygone, die sogenannten „Spiegelzellen“<sup>23</sup>. Die Spiegelzellen sind die größten (bei uns: kompakten) Teilmengen des Torus bzw. der Sphäre, die kein Paar von unter der Gruppenoperation äquivalenten Punkten enthalten. Ist  $F$  eine Spiegelzelle des Torus, so überdeckt

$$GF = \{gF \mid g \in G\}$$

den gesamten Torus.<sup>24</sup>

Eine ausführliche Behandlung von endlichen Spiegelungsgruppen findet man etwa im Buch von Grove/Benson (GB71) oder bei Brown (Bro96), sowie bei Grünbaum/Shephard (GS87) oder bei Humphreys (Hum90).

Wir wollen zunächst die Grundidee der Konstruktion erläutern und dann eine Bedingung angeben, unter der sie zum Ziel führen wird. Die Idee selbst geht, wie bereits erwähnt, auf Hermann Karcher zurück, der auf diese Weise auch Minimalflächen studiert hat.<sup>25</sup>

#### 3.3.2 Die Grundidee

Wir wollen den Torus auf die Sphäre abbilden. Der Riemannsche Abbildungssatz gibt uns die Möglichkeit, einfach zusammenhängende Gebiete biholomorph aufeinander abzubilden. Ihn wollen wir benutzen, jedoch ist der Torus nicht einfach zusammenhängend, und aufgrund des unterschiedlichen Geschlechts der Flächen ist eine global biholomorphe Abbildung ohnehin nicht möglich. Aber ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet des Torus kann mit dem Riemannschen Abbildungssatz auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet der Sphäre abgebildet werden. Diese „Keimzelle“ einer Abbildung möchte man dann auf den gesamten Torus fortsetzen. Wir wollen dazu das Schwarzsche Spiegelungsprinzip verwenden. Dazu ist es nötig, dass das Anfangsteilgebiet, das mit dem Riemannschen Abbildungssatz abgebildet wird, nicht vollkommen beliebig ist, denn sonst ist davon auszugehen, dass das Schwarzsche Spiegelungsprinzip zum Chaos führt: Zunächst benötigt man zum Spiegeln gewisse Randeigenschaften. Es ist ferner weder gesichert, dass der gesamte Torus überdeckt werden kann,

<sup>23</sup>für gewöhnlich werden die Spiegelzellen als (strenge) Fundamentalbereiche bezeichnet, aber dieser Begriff ist bereits vergeben. Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir den Begriff Spiegelzellen.

<sup>24</sup>vgl. S. 55 im Buch von Grünbaum und Shephard (GS87)

<sup>25</sup>vgl. das Vorlesungsskript zu „Riemannsche Flächen, spezielle Funktionen, Minimalflächen“ (Kar95) vom Wintersemester 1995/1996

noch dass die entstehende Konstruktion bei Überschneidungen mit Gebieten, auf denen die Funktion bereits definiert ist, ein eindeutiges (also wohldefiniertes) Ergebnis liefert.

Wir werden daher auf Torus und Sphäre endliche Spiegelungsgruppen finden (was für den Torus nur dann nichttrivial möglich ist, wenn das Gitter Spiegelsymmetrien besitzt) und eine Spiegelzelle des Torus mit dem Riemannsches Abbildungssatz auf eine Spiegelzelle der Sphäre abbilden. Auf diese Weise stellen wir schon einmal sicher, dass durch Spiegeln entlang Randkanten auch tatsächlich der gesamte Torus überdeckt werden kann, und dass die Funktion auch die Möglichkeit hat, alle Werte anzunehmen. Ein Problem das bleibt ist allerdings die Frage, ob die entstehende Funktion auch wohldefiniert ist. Mit dieser Frage werden wir uns zu beschäftigen haben. Können wir das jedoch sicherstellen, so werden wir eine holomorphe Abbildung vom Torus in die Sphäre erhalten.

Indem wir dafür sorgen, dass diese Funktion genau vier Verzweigungspunkte hat, stellen wir sicher, dass eine elliptische Funktion zweiter Ordnung entsteht. Das liefert uns dann die Hurwitz-Formel<sup>26</sup>: Abbildungsgrad ist gleich halbe Gesamtverzweigungsordnung (vier) weniger Geschlecht (eins) plus eins, also zwei. Die Äquivarianz der Funktion erhalten wir dann aufgrund der Konstruktion mittels Schwarzschem Spiegelungsprinzip geschenkt - das Schwarzsche Spiegelungsprinzip baut die Funktion gerade so, dass sie äquivariant ist.

Da Riemannsches Abbildungssatz und Schwarzsches Spiegelungsprinzip allgemein in einer schwächeren Form bekannt sind, als wir sie hier verwenden wollen, werden wir die Versionen formulieren, mit denen wir arbeiten wollen. Beginnen wir mit dem Riemannsches Abbildungssatz.

Die Version, die wir verwenden wollen, kann bei Behnke/Sommer (BS72) auf den Seiten 357 – 372 nachgelesen werden. Sie besagt:

**Satz 3.11** (Riemannsches Abbildungssatz mit Randverhalten). *Sind  $G$  und  $\tilde{G}$  einfach zusammenhängende Gebiete mit je mehr als einem und nur „normalen“<sup>27</sup> Randpunkten, so gibt es genau eine Abbildungsfunktion  $f : G \rightarrow \tilde{G}$ , welche biholomorph ist, und stetig auf den Rändern von  $G$  und  $\tilde{G}$ , so dass drei vorgegebene Randpunkte  $P_1, P_2, P_3$  von  $G$  in drei ebenfalls vorgegebene, im gleichen Umlaufsinn aufeinanderfolgende Randpunkte  $Q_1, Q_2, Q_3$  von  $\tilde{G}$  übergehen.*  $\square$

**Bemerkung 3.12.** Unsere Gebiete werden die von Geradenstücken bzw. Kreisbögen berandeten Spiegelzellen sein und damit die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen.

Ebenso werden die Voraussetzungen der stärkeren Version des Schwarzschen Spiegelungsprinzips in unserem Fall stets erfüllt sein:

**Satz 3.13** (Verallgemeinertes Schwarzsches Spiegelungsprinzip). *Sei  $G$  ein Gebiet und enthalte auf seiner Berandung als „freien Randbogen“<sup>28</sup> das analytische Kurvenstück<sup>29</sup>  $C$ . Die Funktion  $f : G \rightarrow \tilde{G}$  sei in  $G$  holomorph und auf dem Rand noch stetig. Das Bild von  $C$  unter  $f$  sei ein analytisches Kurvenstück  $\tilde{C}$ . Dann ist  $f$  mittels des Spiegelungsverfahrens über die inneren Punkte von  $C$  hinaus holomorph fortsetzbar und auf dem gesamten neuen Rand stetig.*  $\square$

<sup>26</sup>Siehe Sommer (BS72) S. 511.

<sup>27</sup>Was genau die Eigenschaft „normal“ bedeutet, ist an dieser Stelle nicht wichtig. Es sei aber darauf hingewiesen, dass die von uns verwendeten Spiegelzellen nur solche normalen Randpunkte besitzen.

<sup>28</sup>Auch hier wollen wir nicht genauer darauf eingehen, was ein freier Randbogen ist. In dem uns interessierenden, sehr viel spezielleren Fall ist diese Forderung aber erfüllt.

<sup>29</sup>Ein analytisches Kurvenstück ist in jedem Punkt lokal das Bild eines Stückes der reellen Geraden unter einer biholomorphen Abbildung. Das wird in den von uns betrachteten Spezialfällen immer so sein.

Der Beweis kann bei Behnke/Sommer (BS72) auf den Seiten 373ff. nachgelesen werden. Beide Sätze sind zunächst natürlich nur in der komplexen Zahlenebene bewiesen. Wie man sich leicht überlegt, können sie auf Torus und Sphäre verwendet werden, da wir in Karten arbeiten können, die groß genug sind, um jeweils den gesamten relevanten Bereich auf Torus bzw. Sphäre in die Ebene zu bringen.

Für unsere Situation können wir das Spiegelungsverfahren ganz explizit angeben. Wir formulieren den Satz so, wie wir ihn später benutzen werden. Abbildung 3.4 illustriert das Verfahren.

**Satz 3.14.** *Es sei  $F$  eine Spiegelzelle einer endlichen Spiegelungsgruppe  $G$  auf dem Torus und  $\tilde{F}$  eine Spiegelzelle einer endlichen Spiegelungsgruppe  $H$  auf der Sphäre und  $f : F \rightarrow \tilde{F}$  im Inneren von  $F$  holomorph und auf dem Rand noch stetig. Die Randkante  $C$  von  $F$  ist ein Stück einer Spiegelachse des Torus, sie gehöre zum Gruppenelement  $g \in G$ . Das Bild unter  $f$  von  $C$  ist ein Stück einer Spiegelachse der Sphäre und gehöre zum Gruppenelement  $h \in H$ . Dann lässt die Abbildung  $f$  sich über die inneren Punkte von  $C$  hinaus holomorph fortsetzen und wird auf dem gesamten neuen Rand stetig sein. Die Vorschrift zur Fortsetzung von  $f$  auf die entlang der Kante  $C$  zu  $F$  benachbarte Spiegelzelle  $F'$  ist:*

$$f(z) = hf(gz) \quad \text{für alle } z \in F'.$$

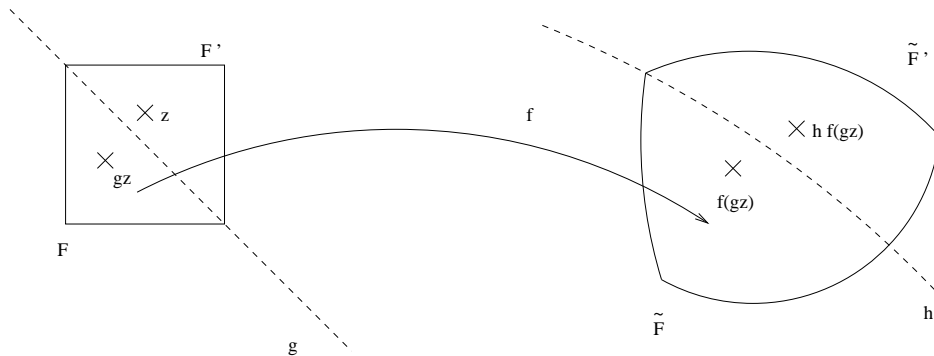


Abbildung 3.4: Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip für Spiegelzellen

*Beweis.* Die Aussage folgt aus der Vorschrift für das allgemein bekannte „kleine“ Schwarzsche Spiegelungsprinzip, und geht aus dem Beweis des allgemeineren Prinzips bei Behnke/Sommer (BS72) hervor. □

Nun zu der Frage, wann die skizzierte Konstruktion funktioniert.

Gegeben sei eine endliche Spiegelungsgruppe  $G$  des Torus. Diese zerlegt den Torus in kongruente Polygone, die Spiegelzellen. Wir zeichnen eine der Spiegelzellen als „Keimzelle“ aus und nennen sie  $F_0$ . Mit dieser Auszeichnung entsprechen nun die Elemente von  $G$  bijektiv den Spiegelzellen, in die der Torus zerlegt wird: Ein  $g \in G$  gehört zu der Spiegelzelle  $F$ , für die  $gF_0 = F$  gilt. Das ist gerade die Bedeutung der Spiegelzellen.

Wir „färben“ nun die Kanten  $k_1, \dots, k_n$  von  $F_0$  in verschiedenen Farben ein: Wir wählen eine Bijektion  $l : \{k_1, \dots, k_n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ . Diese Färbung wird nun auf alle Spiegelzellen fortgesetzt, und zwar so, dass sie mit der Gruppenoperation verträglich ist: Für jedes Gruppenelement  $g$  soll gelten:  $l(k_i) = l(gk_i)$ . Dass das funktioniert ist gerade eine Eigenschaft

der endlichen Spiegelungsgruppen bzw. ihrer Spiegelzellen und hängt damit zusammen, dass keine zwei Punkte der selben Spiegelzelle durch ein Gruppenelement aufeinander abgebildet werden.<sup>30</sup>

Ferner sei eine endliche Spiegelungsgruppe  $H$  der Sphäre gegeben. Diese zerlegt die Sphäre in kongruente sphärische Polygone, die Spiegelzellen. Auch hier wollen wir eine der Spiegelzellen als „Keimzelle“ auszeichnen. Wir nennen sie  $\tilde{F}_0$ .

Mit dem Riemannschen Abbildungssatz bilden wir nun  $F_0$  auf  $\tilde{F}_0$  ab, indem wir drei Eckpunkte von  $F_0$  und deren Werte (Eckpunkte von  $\tilde{F}_0$ , soweit möglich) im korrekten Umlaufsinn vorschreiben. Die im Inneren von  $F_0$  biholomorphe und auf dem Rand stetige Funktion, die so entsteht, nennen wir  $f$ .

Nun färben wir die Kanten von  $\tilde{F}_0$  entsprechend der Färbung von  $F_0: l(f(k_i)) := l(k_i)$ .

**Bemerkung 3.15.** Dabei kann es passieren, dass Kanten von  $\tilde{F}_0$  geteilt werden. Daran wollen wir uns nicht stören. Eines müssen wir aber beachten: Es darf nicht passieren, dass zwei verschiedene Kanten von  $\tilde{F}_0$  die selbe Färbung erhalten. Wir werden später sehen, weshalb das wichtig ist. Wir werden es sicherstellen, indem wir als vorgeschriebene Toruspunkte immer Eckpunkte wählen und auf dem Sphärenpolygon ebenfalls alle Eckpunkte belegen (vgl. Abbildung 3.5). Das ist möglich, da Spiegelzellen auf der Sphäre höchstens drei Ecken besitzen,<sup>31</sup> und Spiegelzellen des Torus als ebene Polygone mindestens drei Ecken besitzen.

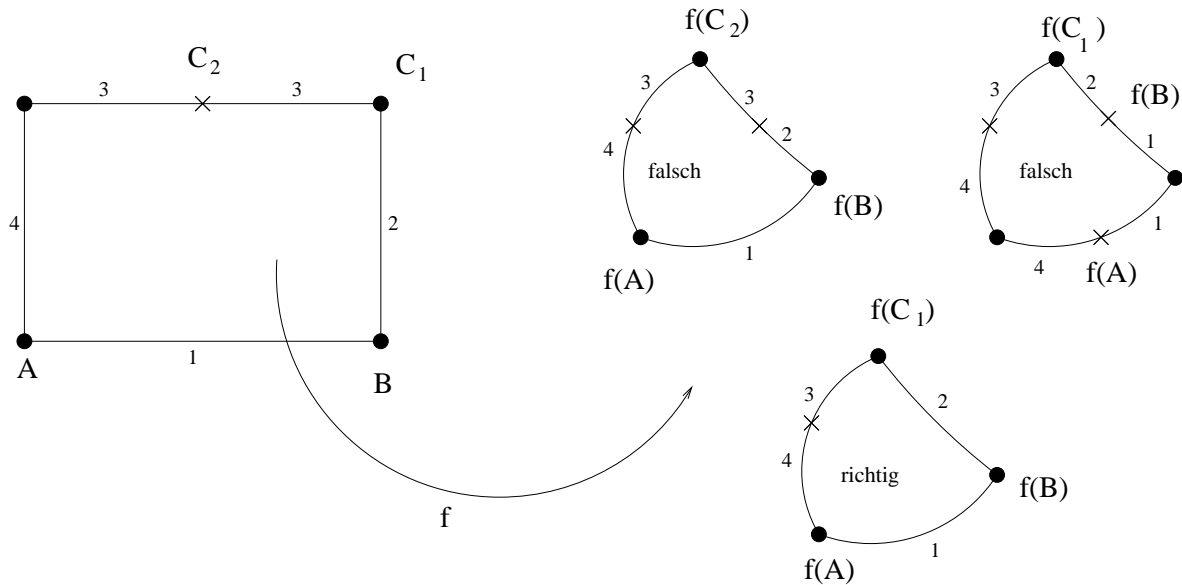


Abbildung 3.5: Riemannscher Abbildungssatz und Kantenfärbung

Die entstandene Färbung wird nun auf alle Zellkanten so fortgesetzt, dass sie mit den Gruppenelementen von  $H$  verträglich ist. Da auch  $H$  endliche Spiegelungsgruppe ist, gibt es dabei keine Schwierigkeiten.

Wir führen nun Relationen zwischen Spiegelzellen ein:

<sup>30</sup>vgl. auch das Buch von Brown, (Bro96) S. 29 f

<sup>31</sup>vgl. z.B. Grove/Benson (GB71) oder Lamotke (Lam05).



**Definition 3.16.** Zwei verschiedene Spiegelzellen  $F_i \neq F_j$  des Torus (bzw. der Sphäre) stehen in  $p$ -Relation, falls  $F_i \cap F_j \neq \emptyset$  und

$$l(F_i \cap F_j) = p.$$

Wir schreiben dann

$$F_i \sim_p F_j.$$

Dass zwei Spiegelzellen in  $p$ -Relation stehen, bedeutet, dass sie benachbart sind und die gemeinsame Kante die Färbung  $p$  hat. Wie erwähnt kann es auf der Sphäre sein, dass eine Kante geteilt wird, und somit zwei Färbungen hat. Wir wollen das so auffassen, dass dann  $l(k)$  eine Menge ist, und wir werden  $l(k) = p$  schreiben, wenn wir eigentlich  $p \in l(k)$  meinen. Alles was wir bisher beschrieben haben, ist für jede Wahl von Gruppen  $G$  und  $H$  möglich, solange die Spiegelzellen einfach zusammenhängend sind (Anwendbarkeit des Riemannsches Abbildungssatzes);  $G = \{\text{id}\}$  darf daher nicht vorkommen. Nun wollen wir die Bedingung angeben, unter der die Anwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips eine wohldefinierte Abbildung liefert.

**Satz 3.17** (Kriterium für das Gelingen der Konstruktion). *Falls eine Abbildung  $\phi$  von der Menge der Spiegelzellen des Torus in die Menge der Spiegelzellen der Sphäre existiert, mit  $\phi(F_0) = \tilde{F}_0$  und für je zwei verschiedene Spiegelzellen  $F_i \neq F_j$  des Torus gilt*

$$F_i \sim_p F_j \Rightarrow \phi(F_i) \sim_p \phi(F_j),$$

*so wird das Schwarzsche Spiegelungsprinzip eine wohldefinierte Abbildung liefern.*

*Beweis.* Wir nehmen die Existenz einer Funktion  $\phi$  wie oben beschrieben an. Sei  $F$  eine beliebige Spiegelzelle des Torus und  $F_0$  die Keimzelle. Dann gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $gF_0 = F$ . Zu  $F$  gehört vermöge  $\phi$  eine Spiegelzelle  $\phi(F)$  der endlichen Spiegelungsgruppe  $H$  auf der Sphäre, der wiederum bijektiv ein  $h \in H$  mit  $h\tilde{F}_0 = \phi(F)$  entspricht.

Es sei nun  $F_0, F_1, F_2, \dots, F_N = F$  ein Weg von  $F_0$  nach  $F$ . Das bedeutet, dass  $F_i$  aus  $F_{i-1}$  durch Spiegelung an einer Achse, die eine Randkante von  $F_{i-1}$  enthält, hervorgeht. Abbildung 3.6 illustriert die Situation. Die Spiegelung (und die Achse und die Kante) von  $F_{i-1}$  nach  $F_i$  bezeichnen wir mit  $s_i$ . Entlang eines solchen Weges kann man das Schwarzsche Spiegelungsprinzip anwenden, um  $f$  nach  $F$  fortzusetzen. Für  $k = 1, \dots, N$  bezeichnen wir mit  $\tilde{F}_k$  diejenige Spiegelzelle, die das Schwarzsche Spiegelungsprinzip als Bildzelle von  $F_k$  liefert. Die zugehörigen Spiegelungen (bzw. Achsen, Kanten) in der Sphäre bezeichnen wir mit  $\tilde{s}_i$ . Auf diese Weise erhält man als Bild von  $F$  unter  $f$  eine Spiegelzelle  $\tilde{F} = \tilde{F}_N$  von  $H$  auf der Sphäre.

Die Behauptung ist nun, dass sich unabhängig von dem gewählten Weg stets  $\tilde{F} = \phi(F)$  ergibt. Damit werden wir die Wohldefiniertheit beweisen.

Wir beweisen die Behauptung mit Induktion über die Länge des Weges.

Der Induktionsanfang folgt, da  $\phi(F_0) = \tilde{F}_0$  ist.

Um das Prinzip zu verstehen, führen wir den ersten Schritt aus. Wir wollen zeigen, dass  $\tilde{F}_1 = \phi(F_1)$  gilt. Die Kanten, über die gespiegelt wird sind  $s_1 = F_0 \cap F_1$  und  $\tilde{s}_1 = \tilde{F}_0 \cap \tilde{F}_1$ , wobei (nach Voraussetzung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips) gilt:  $f(s_1) = \tilde{s}_1$ , und nach Wahl der Färbungen:  $l(s_1) = l(\tilde{s}_1) = p$ . Da  $F_1$  durch Spiegelung an  $s_1$  aus  $F_0$  hervorgeht, gilt natürlich

$$F_0 \sim_p F_1.$$

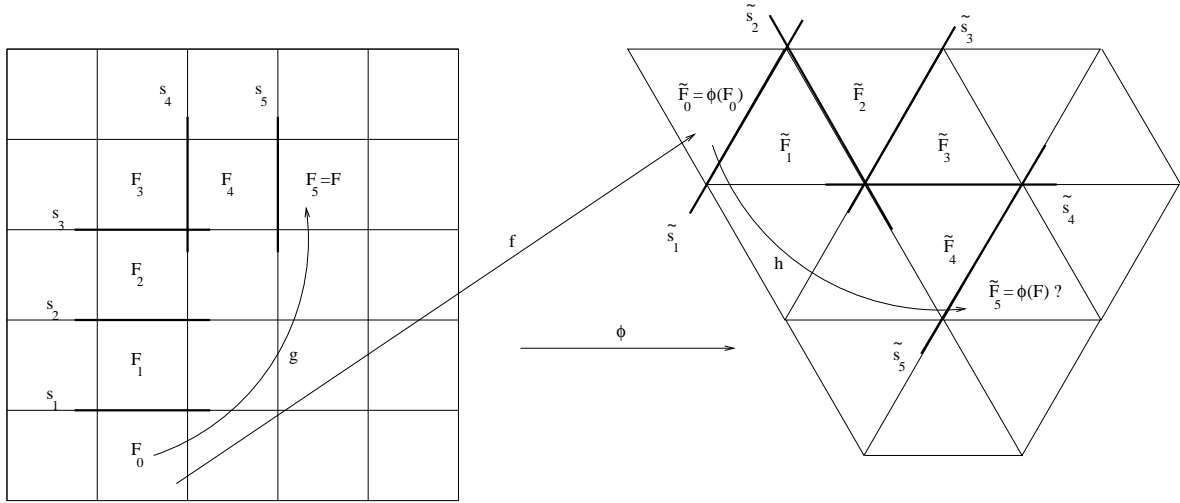


Abbildung 3.6: Anwendung des Schwarzchen Spiegelungsprinzips und die globale Zellzuordnung  $\phi$

Nach Voraussetzung über  $\phi$  folgt:

$$\tilde{F}_0 = \phi(F_0) \sim_p \phi(F_1).$$

Wegen  $l(\tilde{s}_1) = p$  sind also die Spiegelzellen  $\tilde{F}_0$  und  $\phi(F_1)$  entlang der Kante  $\tilde{s}_1$  benachbart. Da  $\tilde{F}_1$  aus  $\tilde{F}_0$  bei der Anwendung des Schwarzchen Spiegelungsprinzips durch Spiegelung an der Kante  $\tilde{s}_1$  entsteht, sind die Spiegelzellen  $\tilde{F}_0$  und  $\tilde{F}_1$  ebenfalls entlang der Kante  $\tilde{s}_1$  benachbart.

Die Zelle  $\tilde{F}_0$  ist also über die Kante  $\tilde{s}_1$  sowohl zu  $\phi(F_1)$  als auch zu  $\tilde{F}_1$  benachbart. Die beiden Zellen müssen daher gleich sein. (An dieser Stelle geht die Bemerkung 3.15 ein.) Wir haben also tatsächlich  $\phi(F_1) = \tilde{F}_1$ , wie behauptet.

Die Induktionsannahme lautet, dass für  $F_j$  gilt:  $\tilde{F}_j = \phi(F_j)$  für alle  $j = 0, \dots, k - 1$ .

Für den Induktionsschritt ist zu zeigen, dass  $\tilde{F}_k = \phi(F_k)$ .

Die Kanten, über die von  $F_{k-1}$  zu  $F_k$  gespiegelt wird, sind auf dem Torus  $s_k$  und auf der Sphäre  $\tilde{s}_k$ . Nach Voraussetzung des Schwarzchen Spiegelungsprinzips gilt:  $f(s_k) = \tilde{s}_k$ . Wir müssen noch einsehen, dass  $l(s_k) = l(\tilde{s}_k) = q$  gilt. Dann können wir genau wie im Argument für den ersten Schritt schließen, dass  $\phi(F_k) = \tilde{F}_k$ .

$l(s_k) = l(\tilde{s}_k) = q$  folgt aber induktiv, da die Kante  $s_k$  durch Anwendung von  $s_{k-1} \circ \dots \circ s_1$  aus einer Kante  $k$  von  $F_0$  mit der Färbung  $q$  entstanden ist. Die Kante  $\tilde{k} = f(k) \subset \tilde{F}_0$  trägt die Färbung  $q$  und wird durch  $\tilde{s}_{k-1} \circ \dots \circ \tilde{s}_1$  gerade auf die Kante  $\tilde{s}_k$  abgebildet. Da die Färbungen so gewählt sind, dass sie mit den Spiegelungen, sowie mit der Keimzell-Abbildung  $f$  verträglich sind, tragen  $s_k$  und  $\tilde{s}_k$  also tatsächlich beide die Färbung  $q$ , und die Behauptung folgt.

Wir erkennen also, dass wir für eine beliebige Spiegelzelle  $F$  auf dem Torus durch Anwendung des Schwarzchen Spiegelungsprinzips unabhängig vom Weg, auf dem wir uns dort hin spiegeln, stets die selbe Spiegelzelle  $\phi(F)$  auf der Sphäre als Bild erhalten. Überzeugen wir uns noch davon, dass auch innerhalb dieser Spiegelzelle die Werteverteilung auf jedem Weg die gleiche wird.

Für die erste Zelle  $F_1$  gilt:

$$f(z) = \tilde{s}_1 f(s_1 z) \quad \text{für alle } z \in F_1$$

entsprechend folgt induktiv für die beliebige Zelle  $F = F_N$ :

$$f(z) = \tilde{s}_N \circ \dots \circ \tilde{s}_1 f(s_1 \circ \dots \circ s_N z) \quad \text{für alle } z \in F$$

Die Kette  $s_1 \circ \dots \circ s_N$  bildet  $F$  auf  $F_0$  ab. Unabhängig vom Weg, auf dem man von  $F_0$  nach  $F$  gelangt, gibt es genau ein Gruppenelement  $g \in G$ , das dies tut. Die Kette  $\tilde{s}_N \circ \dots \circ \tilde{s}_1$  bildet  $\tilde{F}_0$  auf  $\tilde{F}$  ab. Auch hier gibt es nur genau ein Gruppenelement  $h \in H$ , das dies tut.

Damit ist die Abbildung  $f$ , die durch Fortsetzung entlang eines speziellen Weges mittels des Schwarzschen Spiegelungsprinzips entsteht, aufgrund der global definierten Funktion  $\phi$  vom Weg unabhängig. Sie ist wie folgt bestimmt:

Sei  $F$  eine beliebige Spiegelzelle der Spiegelungsgruppe des Torus, und  $z \in F$  beliebig.  $F_0$  ist die Keimzelle, und  $g$  sei das eindeutige Gruppenelement mit  $gF = F_0$ . Sei ferner  $\tilde{F}_0$  die Keimzelle auf der Sphäre, und  $h$  das eindeutige Gruppenelement mit  $h\tilde{F}_0 = \phi(F)$ . Dann gilt:

$$f(z) = h f(gz).$$

Die Eindeutigkeit der entstehenden Abbildung beruht also auf der Eindeutigkeit des Gruppenelements, welches eine Spiegelzelle auf eine andere abbildet. Hier sieht man auch direkt, dass  $f$  bezüglich  $G$  und  $H$  äquivariant ist. Der Gruppenhomomorphismus ist definiert durch  $\Phi : G \rightarrow H$ ,  $g \mapsto h$ , wobei  $g$  und  $h$  wie oben zusammengehören.<sup>32</sup>  $\square$

**Satz 3.18.** *Die entstandene Funktion  $f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ist holomorph.*

*Beweis.* Wir bilden zunächst durch den Riemannschen Abbildungssatz eine Spiegelzelle des Torus im Inneren biholomorph und am Rand noch stetig auf eine Spiegelzelle der Sphäre ab. Die Abbildung  $f$  entsteht durch das Schwarzsche Spiegelungsprinzip. Durch das Spiegeln wird die Stetigkeit weitergegeben. Die Wohldefiniertheit bzw. Eindeutigkeit der Abbildung sorgt dafür, dass  $f$  wirklich auf dem gesamten Torus stetig ist. Im Inneren der Spiegelzellen ist die Abbildung holomorph und auch im Inneren der Randkanten der Spiegelzellen, da sie ja durch das Schwarzsche Spiegelungsprinzip entsteht. In den fehlenden Punkten, den Eckpunkten der Spiegelzellen nämlich, ist sie wie gesagt stetig. Da diese Punkte isoliert liegen, folgt mit dem Riemannschen Hebbarkeitssatz die Holomorphie der Funktion in diesen Punkten.  $\square$

Wir haben nun also eine Methode gefunden, wie wir holomorphe Abbildungen vom Torus in die Sphäre erhalten. Die Abbildungen, die wir konstruieren wollen, sollen Abbildungsgrad 2 haben, bzw. äquivalent (Hurwitz-Formel), vier Verzweigungspunkte besitzen.

Wir werden uns bei der Konstruktion auf gerade Funktionen beschränken. Nach Korollar 3.3 sind das bis auf eine Translation ohnehin alle. Wir wissen dann, wo die Verzweigungspunkte liegen müssen: Es sind gerade die Gitterpunkte und die Halbgridpunkte.

Die Verzweigungspunkte können in unserer Konstruktion lediglich auf den Spiegelachsen liegen, da der Riemannsche Abbildungssatz uns im Inneren der Spiegelzellen Biholomorphie garantiert, also liegen im Inneren der Spiegelzellen nur einfache Punkte.

Diese Information werden wir bei der Wahl der Spiegelungsgruppe des Torus natürlich berücksichtigen.

<sup>32</sup>Vorsicht: Die Abbildungen  $\phi$  und  $\Phi$  sind natürlich zwei völlig verschiedene Objekte.

Wir wollen uns noch ein paar weitere Gedanken zur Spiegelungsgruppe des Torus machen, die uns später die Wahl erleichtern werden.

Zunächst können wir feststellen, dass alle Spiegelachsen, welche die Spiegelungsgruppe des Torus erzeugen, Verzweigungspunkte auf Verzweigungspunkte abbilden. Der Grund hierfür ist, dass in Verzweigungspunkten Winkel verdoppelt werden (denn dort verhält sich die Funktion wie  $z^2$ ). Diese Eigenschaft wird beim Spiegeln natürlich weitergegeben. Da wir bereits wissen, an welchen Stellen Verzweigungspunkte liegen müssen (in den Gitterpunkten und den Halbgitterpunkten), erhalten wir dadurch eine Einschränkung an die erlaubten Spiegelachsen, die die Spiegelungsgruppe erzeugen.

Nehmen wir nun an, es liegt bereits eine endliche Spiegelungsgruppe des Torus vor, deren sämtliche Gruppenelemente Verzweigungsorte auf Verzweigungsorte abbilden. Die Spiegelzellen dieser Gruppe liefern uns dann bereits zwei notwendige Bedingungen an die Spiegelungsgruppe der Sphäre:

Erstens muss die Anzahl der Spiegelzellen der Sphären-Gruppe halb so groß sein wie die Anzahl der Spiegelzellen der Torus-Gruppe (da der Torus der Sphäre doppelt überlagert sein soll, und die einzelnen Zellen einander im Inneren biholomorph entsprechen).

Zweitens sind die Winkel der Spiegelzellen der Sphärengruppe durch die Winkel der Spiegelzellen der Torusgruppe eindeutig bestimmt: Hat man etwa auf dem Torus Spiegelzellen mit Winkeln von  $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  und bei einem der  $45^\circ$ -Winkel liegt ein Verzweigungsort, so müssen die Spiegelzellen der Sphäre die Winkel  $45^\circ, 90^\circ, 90^\circ$  haben.

Diese beiden Bedingungen lassen für die Spiegelungsgruppe der Sphäre bei gegebener Spiegelungsgruppe des Torus nur höchstens eine Möglichkeit übrig, da für sphärische Dreiecke die Winkelsumme den Flächeninhalt bestimmt, ebenso wie die Anzahl der Dreiecke dies tut.

Nun haben wir uns zu dieser Konstruktion aber genügend theoretische Gedanken gemacht. Wir wollen jetzt mit der expliziten Durchführung für die vier verschiedenen symmetrischen Gittertypen beginnen.

### 3.4 Durchführung

#### 3.4.1 Rechtecksgitter

Wir müssen zunächst die Spiegelachsen des Rechteckstoros bestimmen. Es sind dies gerade diejenigen Achsen, die äquivalente Punkte auf äquivalente Punkte abbilden, da genau diese auch den Torus bijektiv auf sich selbst abbilden. Um die Symmetrieachsen eines Gitters zu bestimmen, betrachtet man am besten die sogenannte Dirichlet-Zelle:

**Definition 3.19.** Gegeben sei ein Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ . Die Dirichlet-Zelle  $\mathcal{D}(\Lambda)$  ist definiert als

$$\mathcal{D}(\Lambda) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq |z - \omega| \forall \omega \in (\mathbb{C}/\Lambda) \setminus \{0\}\}.$$

Die Randkanten der Dirichlet-Zelle sind Mittelsenkrechte zwischen 0 und den nächsten Nachbargitterpunkten  $\omega \neq 0$ . Daher sind Symmetrieachsen der Zelle auch Symmetrieachsen des Systems der nächsten Nachbarn von 0. Da bereits zwei  $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Gitterpunkte das gesamte Gitter aufspannen, und das System der nächsten Nachbarn von 0 mindestens zwei solche Gitterpunkte enthalten muss, sind Symmetrieachsen der Dirichlet-Zelle auch Symmetrieachsen des Gitters. Umgekehrt sind natürlich Symmetrieachsen des Gitters auch Symmetrieachsen der Dirichlet-Zelle. Es gilt also:

**Lemma 3.20.** *Die Symmetrieachsen der Dirichlet-Zelle eines Gitters sind genau die Symmetrieachsen des Gitters selbst.*  $\square$

Die Dirichlet-Zelle eines Rechteckgitters ist selbst ein Rechteck. Das Gitter besitzt daher zwei Symmetrieachsen, die senkrecht aufeinander stehen (vgl. Abbildung 3.7). Die Symmetrieachsen des Gitters sowie deren Translate sind es, die äquivalente Punkte auf äquivalente Punkte abbilden, und damit sind dies die Symmetrieachsen des Torus.

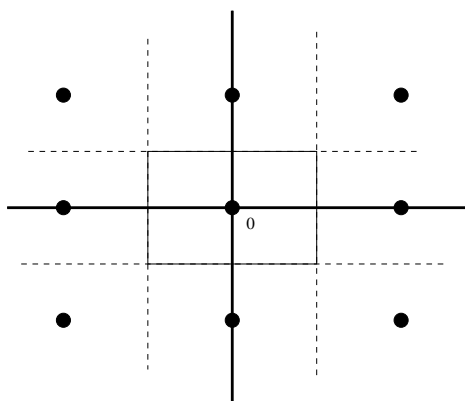


Abbildung 3.7: Die Dirichlet-Zelle eines Rechteckgitter und ihre Symmetrieachsen

Wir wählen nun einen Fundamentalbereich des Torus, dessen Randkanten Symmetrieachsen sind und zeichnen auch gleich die Verzweigungsorte (durch Kreuze angedeutet) ein, sowie diejenigen Spiegelachsen, die Verzweigungsorte auf Verzweigungsorte abbilden. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.8 dargestellt.

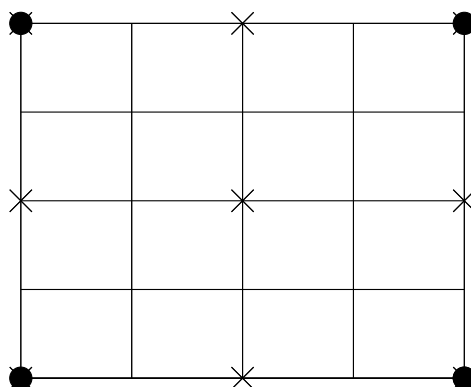


Abbildung 3.8: Die maximal mögliche Unterteilung des Rechteckstoros durch Symmetrieachsen

Die Achsen erzeugen eine Spiegelungsgruppe, deren Spiegelzellen die Teilrechtecke sind. Wir nennen sie Rechtecksgruppe.

Als nächstes müssen wir eine endliche Spiegelungsgruppe der Sphäre wählen. Es gibt hier nur ganz bestimmte Möglichkeiten, die man etwa Grove/Benson (GB71) oder teilweise auch dem Buch von Lamotke (Lam05) entnehmen kann.

Wir wissen bereits, dass die Gruppe acht Symmetriezellen besitzen muss, deren Winkel  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $90^\circ$  sind (der vierte  $90^\circ$ -Winkel der Spiegelzellen des Torus wird als doppelter Punkt

zu  $180^\circ$  aufgebogen). Dafür gibt es nur eine Möglichkeit. Es ist dies die Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 2$ , die in Abbildung 3.9 bereits auf der Sphäre in einer bestimmten Metrik und Lage realisiert dargestellt ist.<sup>33</sup>

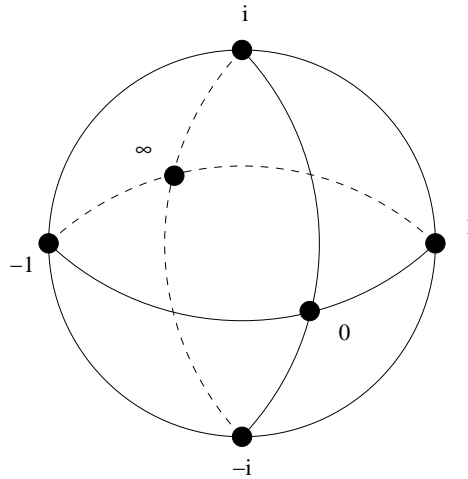


Abbildung 3.9: Die Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 2$

Wir wählen nun auf dem Torus sowie auf der Sphäre je eine Keimzelle (schraffiert) aus, um die beiden aufeinander abzubilden. Bevor wir abbilden, färben wir noch die Kanten der Toruszellen, siehe Abbildung 3.10.

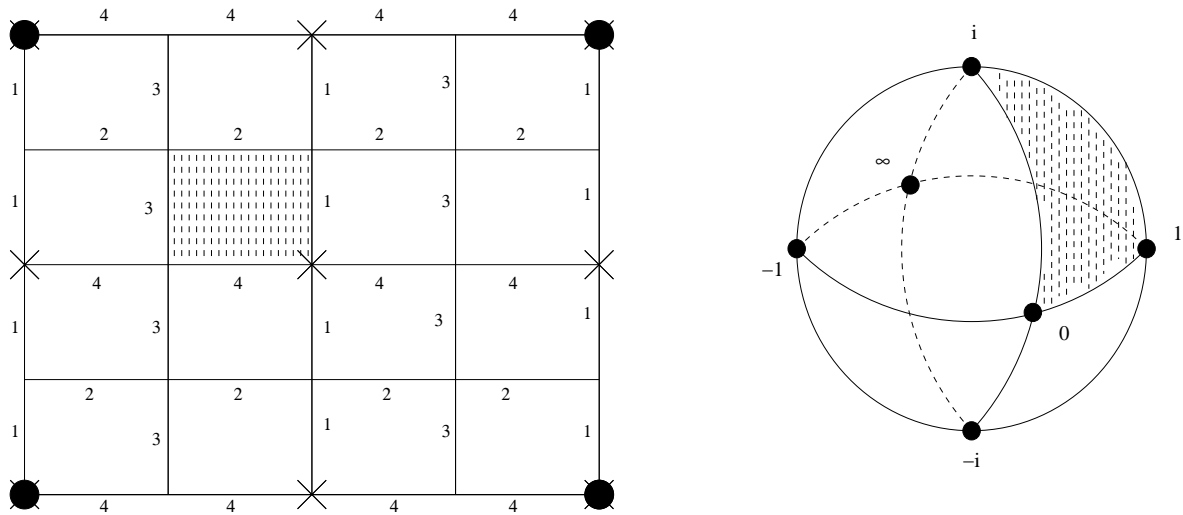


Abbildung 3.10: Eingefärbte Toruskanten und Keimzellen auf Torus und Sphäre

Wir bilden nun mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes die beiden Keimzellen aufeinander ab, und übertragen die Kantenfärbung dann passend auf die Sphäre. Das Ergebnis sieht man in Abbildung 3.11.

<sup>33</sup>Wir werden auf der Sphäre immer die Standardmetrik verwenden, die von der stereographischen Projektion herkommt. Die mittels Möbiustransformationen konjugierten Metriken sind aber natürlich genauso gut.

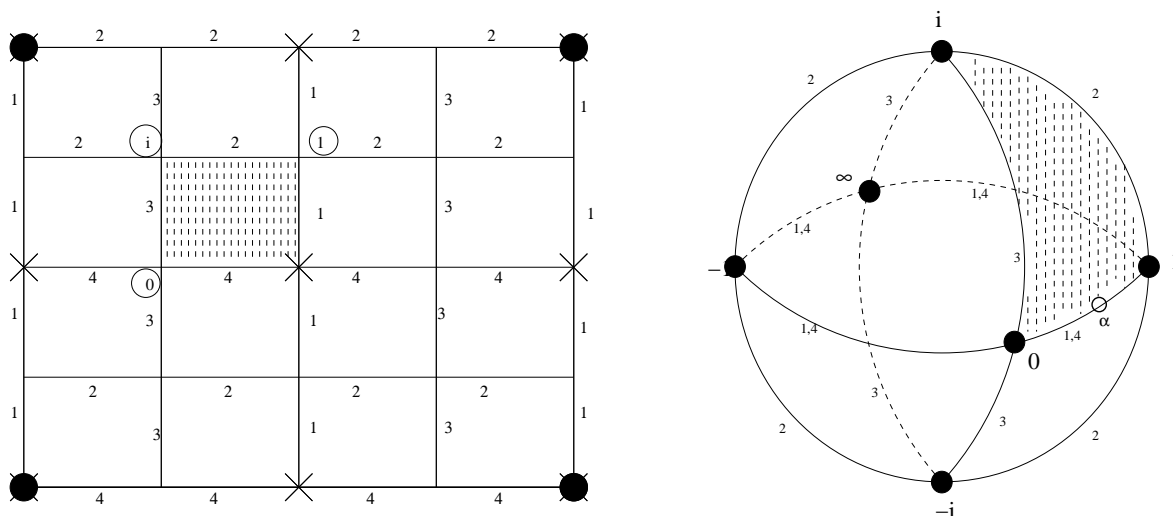


Abbildung 3.11: Übertragene Kantenfärbung nach Anwendung des Riemannschen Abbildungssatzes

Der vierte Eckpunkt der Torus-Keimzelle nimmt einen Wert  $\alpha \in (0, 1)$  an. Der genaue Wert hängt vom Seitenverhältnis des Rechtecksgitters ab.

Wir können uns nun auf die Suche nach einer Abbildung  $\phi$  machen, welche die Spiegelzellen des Torus auf die Spiegelzellen der Sphäre abbildet und dabei die Nachbarschaften gemäß Satz 3.17 erhält. Um die Abbildung angeben zu können, werden wir die Spiegelzellen des Torus von 1 bis 16 durchnummerieren, und die Spiegelzellen der Sphäre mit den Buchstaben A bis H versehen. Da das im dreidimensionalen Bild der Sphäre für Verwirrung sorgen würde, wählen wir eine stilisierte Darstellung der Sphäre: Wir zeichnen zwei Kreise als Vorder- und Rückseite der Sphäre, und deuten mit einem Pfeil an, wie die beiden Hälften zusammengehören (vgl. Abbildung 3.12).

Nun geben wir eine Abbildung  $\phi$  an, von der man dann anhand von Abbildung 3.12 überprüft, dass sie die geforderten Eigenschaften besitzt. Dazu muss für jede der 16 Spiegelzellen überprüft werden, dass die Nachbarschaft zu jeder der vier Nachbarzellen durch  $\phi$  korrekt übertragen wird. Bei der Überprüfung hilft es, festzustellen (durch betrachten von Abbildung 3.12), dass jeweils Gruppen von vier Spiegelzellen auf Torus bzw. Sphäre einander bijektiv zugeordnet werden: linkes oberes Torusviertel auf Halbsphäre mit positivem Imaginärteil (linker Kreis), rechtes oberes Torusviertel auf Halbsphäre mit negativem Imaginärteil (rechter Kreis), linkes unteres Torusviertel auf Halbsphäre mit negativem Imaginärteil (rechter Kreis) und rechtes unteres Torusviertel auf Halbsphäre mit positivem Imaginärteil (linker Kreis).

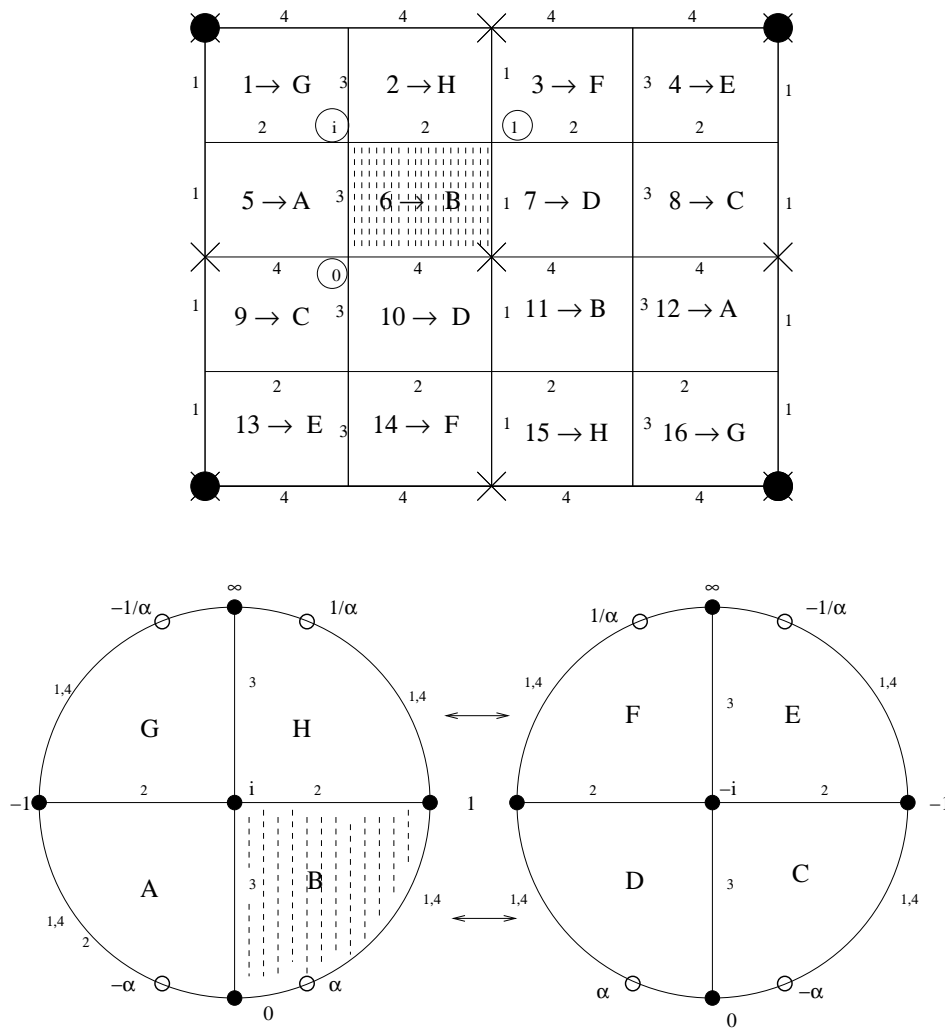


Abbildung 3.12: Benannte Spiegelzellen von Torus und Sphäre

**Satz 3.21.** Die Abbildung  $\phi$  mit unten angegebener Abbildungsvorschrift erfüllt die Bedingungen von Satz 3.17.

$$\begin{array}{llll}
 1 \mapsto G & 5 \mapsto A & 9 \mapsto C & 13 \mapsto E \\
 2 \mapsto H & 6 \mapsto B & 10 \mapsto D & 14 \mapsto F \\
 3 \mapsto F & 7 \mapsto D & 11 \mapsto B & 15 \mapsto H \\
 4 \mapsto E & 8 \mapsto C & 12 \mapsto A & 16 \mapsto G
 \end{array}$$

□

Nachdem wir uns überzeugt haben, dass das Schwarzsche Spiegelungsprinzip eine wohldefinierte Abbildung liefern wird, können wir die Kantenfärbungen und die Bezeichnungen der Spiegelzellen wieder vergessen, und den Funktionskeim, den uns der Riemannsche Abbildungssatz geliefert hat, mit dem Schwarzchen Spiegelungsprinzip auf den gesamten Torus





### 3.4.2 Quadratgitter

Das Quadratgitter ist ein Spezialfall eines Rechtecksgitters, das weitere Symmetrien aufweist. Wir ermitteln die Symmetrien wieder anhand der Dirichlet-Zelle (vgl. Abbildung 3.14). Es sind die vier Symmetrieachsen des Quadrates.

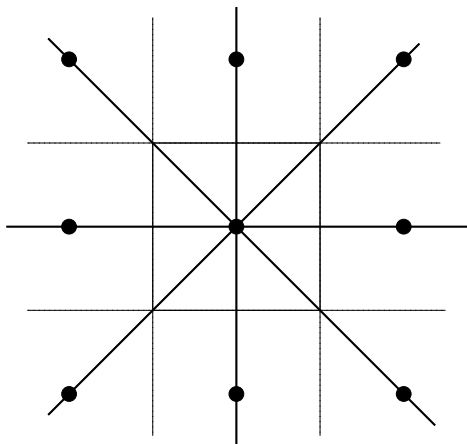


Abbildung 3.14: Die Dirichlet-Zelle des Quadratgitters und ihre Symmetrieachsen

Wir zeichnen in einen von Spiegelachsen begrenzten Fundamentalbereich des Quadrattorus die Verzweigungspunkte ein, sowie diejenigen Symmetrieachsen des Torus, welche Verzweigungspunkte auf Verzweigungspunkte abbilden. Die entstehenden Teildreiecke sind Spiegelzellen der von diesen Achsen erzeugten Spiegelungsgruppe des Torus, die wir Quadratgruppe nennen werden. Wir stellen fest, dass es sich um eine Verfeinerung der Rechtecksgruppe handelt. Diese ist eine Untergruppe der Quadratgruppe. Daher sind die Spiegelzellen der Quadratgruppe Unterteilungen der Spiegelzellen der Rechtecksgruppe. In Abbildung 3.15 ist der unterteilte Fundamentalbereich dargestellt. Die Spiegelachsen, welche in der Quadratgruppe gegenüber der Rechtecksgruppe dazukommen, sind gestrichelt eingezeichnet.

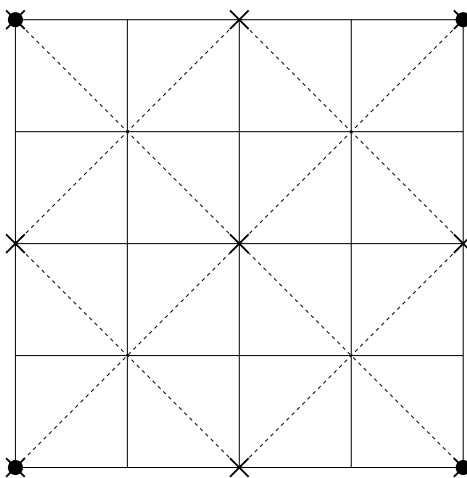


Abbildung 3.15: Die maximal mögliche Unterteilung des Quadrattorus durch Symmetrieachsen

Als nächstes müssen wir eine Spiegelungsgruppe der Sphäre wählen. Diese muss die Sphäre in 16 Spiegelzellen zerlegen, und die Winkel dieser Spiegelzellen müssen  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $90^\circ$  sein. Das erfüllt die Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 4$ . Wir stellen sie wie zuvor beim Rechteck als zwei Kreise dar. An dieser Darstellung erkennt man, dass auch hier die Sphärengruppe des Rechtecks eine Untergruppe ist, auch wenn wir diesmal eine andere Realisierung der Gruppe auf der Sphäre wählen. Wir zeichnen die neuen Achsen wieder gestrichelt. Die Realisierung ist in Abbildung 3.16 dargestellt. Dabei sind die Punkte  $a, b, c, d$  im Prinzip bekannt, da sie sich als Bilder von  $\frac{1+i}{2}$ ,  $\frac{1-i}{2}$ ,  $\frac{-1+i}{2}$  bzw.  $\frac{-1-i}{2}$  unter der Möbiustransformation  $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$  ergeben.

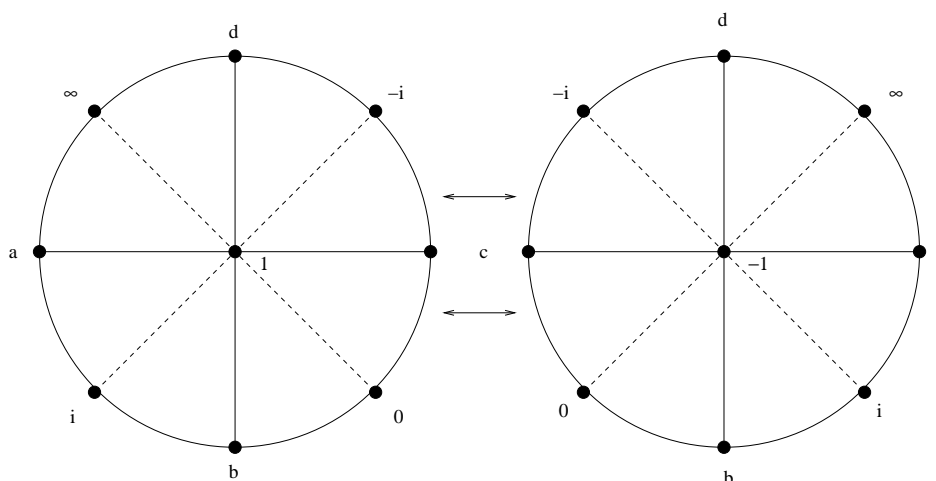


Abbildung 3.16: Die Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 4$

Als nächstes wählen wir wieder je eine Keimzelle auf Torus und Sphäre, die aufeinander abgebildet werden sollen.

**Bemerkung 3.22.** Wir werden ab jetzt nicht mehr vor der Konstruktion auf die Existenz der Abbildung  $\phi$  eingehen, sondern hinterher: Wir werden davon ausgehen, dass die gewählten Spiegelungsgruppen sowie die Zuordnung der Keimzellen mittels Riemannschem Abbildungssatz zusammenpassen, und folglich eine Abbildung  $\phi$  gemäß Satz 3.17 existiert. Dann werden wir mit dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip eine Funktion vom Torus in die Sphäre erzeugen. Diese Abbildung wird insbesondere eine Zuordnung der Spiegelzellen des Torus auf die Spiegelzellen der Sphäre liefern. Wenn diese Zuordnung die geforderten Eigenschaften besitzt, so haben wir die Korrektheit der Konstruktion im Nachhinein gerechtfertigt.

Bilden wir also zunächst mit dem Riemannschem Abbildungssatz zwei Keimzellen (schraffiert in Abbildung 3.17) aufeinander ab, und wenden dann das Schwarzsche Spiegelungsprinzip an, um die Abbildung auf den gesamten Torus fortzusetzen. Das Ergebnis ist der Abbildung 3.17 zu entnehmen.

In Abbildung 3.18 sind die Kantenfärbungen eingetragen, damit nach der neuen Methode im Nachhinein überprüft werden kann, dass die Zuordnung der Torus-Spiegelzellen zu den Sphären-Spiegelzellen die in Satz 3.17 geforderten Eigenschaften besitzt.

Dies sehen wir am einfachsten, indem wir uns klarmachen, dass hier ganze Gruppen von Spiegelzellen bijektiv aufeinander abgebildet werden, nämlich die Spiegelzellen der Rechtecksgruppe bzw. der Sphärengruppe des Rechteckstoros. Innerhalb dieser Gruppen muss daher natürlich insbesondere die Nachbarschaft sich gemäß Satz 3.17 übertragen. Es genügt nun

also, die Nachbarschaft der größeren Zellen untereinander zu überprüfen. Aber das ist beim Rechtecksgitter bereits geschehen: Vergleicht man die Abbildung für das Rechtecksgitter mit derjenigen für das Quadratgitter, so stellt man fest, dass die Zellen einander in gleicher Weise entsprechen. Daher werden die Nachbarschaften alle korrekt übertragen.

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, wissen wir nun, dass die entstandene Funktion tatsächlich eine elliptische Funktion 2. Ordnung ist, und das Äquivarianzprinzip bezüglich der gewählten Spiegelungsgruppen erfüllt. Wie schon zuvor beim Rechteckstoros ist das Resultat von maximal möglicher Symmetrie, da die Torus-Gruppe alle Spiegelungen enthält, welche Verzweigungspunkte auf Verzweigungspunkte abbilden. In Abbildung 3.19 ist das Ergebnis noch einmal dargestellt.

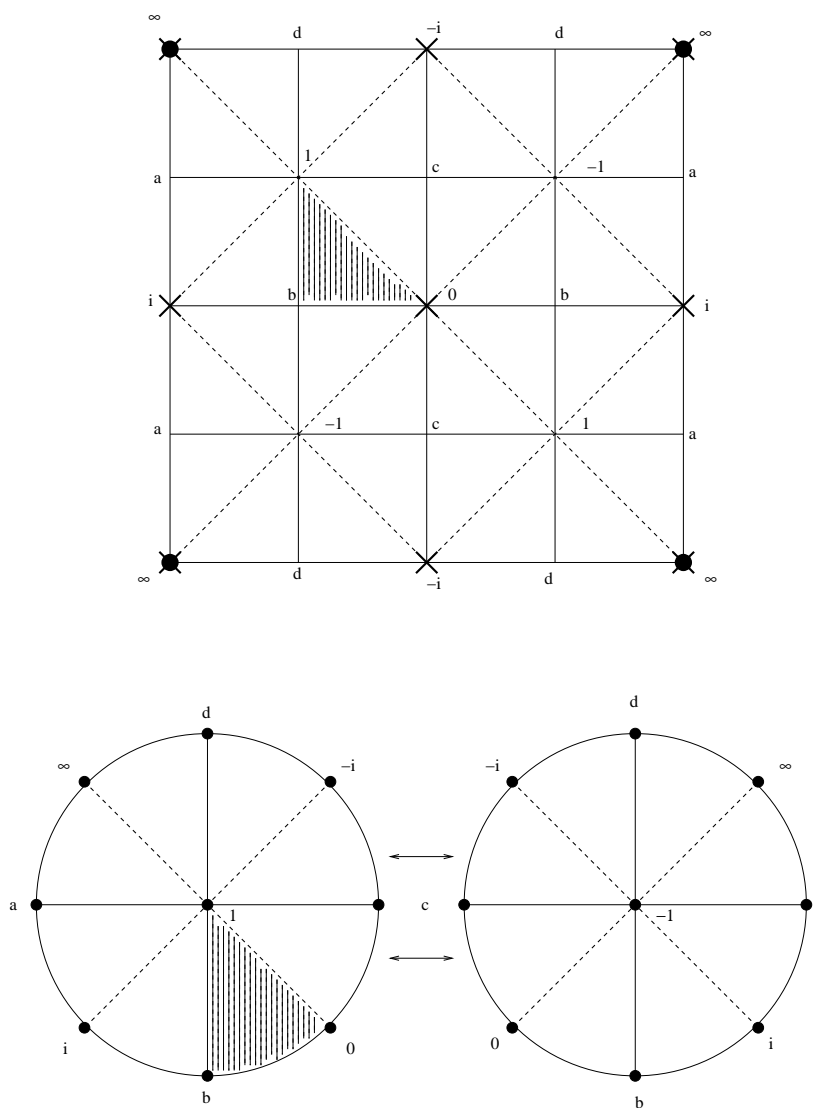


Abbildung 3.17: Riemannscher Abbildungssatz und Schwarz'sches Spiegelungsprinzip für Quadratorus

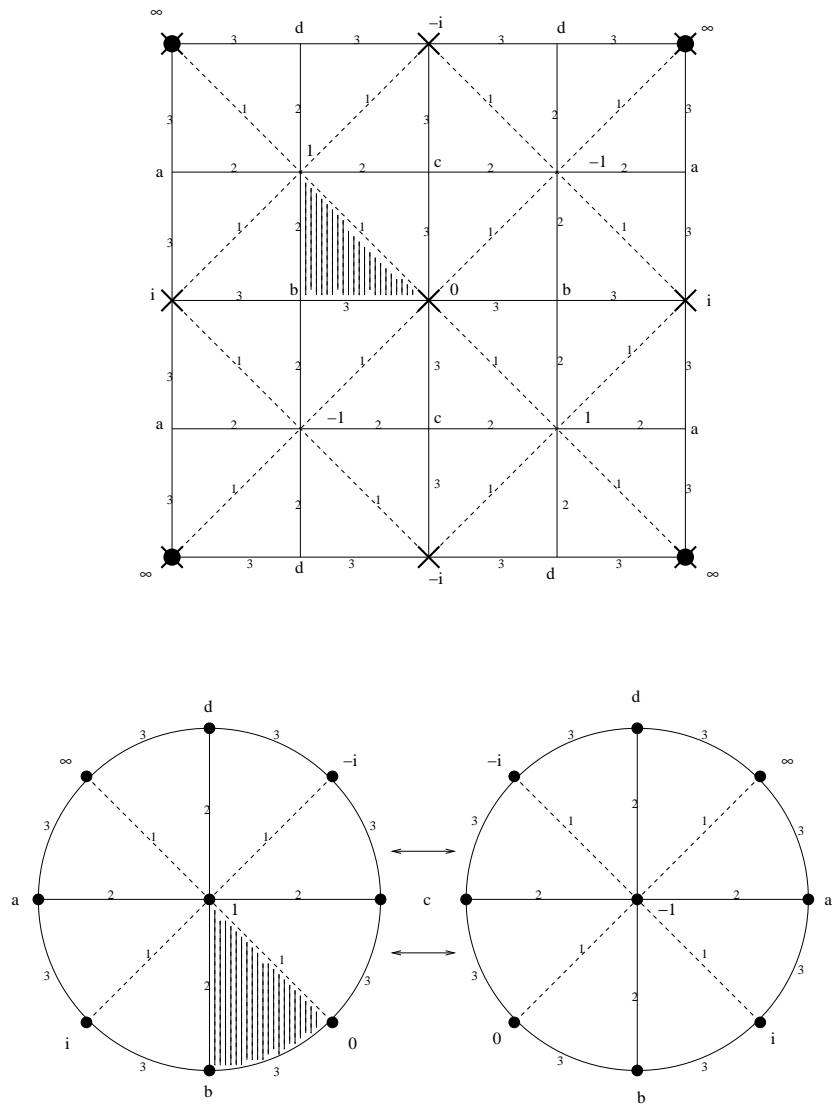


Abbildung 3.18: Kantenfärbungen zur Überprüfung der Zellenabbildung  $\phi$

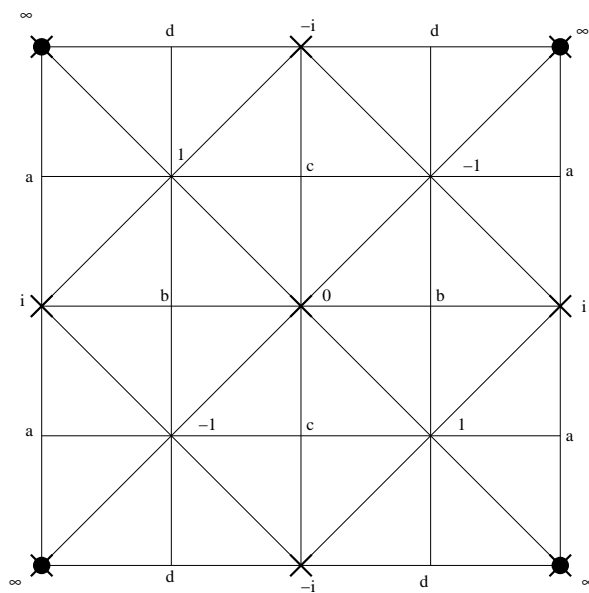


Abbildung 3.19: Elliptische Funktion 2. Ordnung zum Quadrattorus

### 3.4.3 Zentriertes Rechtecksgitter

Nun wenden wir uns den zentrierten Rechtecksgittern zu. Auch hier werden wir die Symmetrien des Gitters anhand der Dirichlet-Zelle ermitteln. Diese hat die Form einer Wabe, wie man in Abbildung 3.20 erkennen kann. Die Symmetrieachsen sind die selben wie beim Rechtecksgitter, nämlich alle Translate der horizontalen und vertikalen Achse.

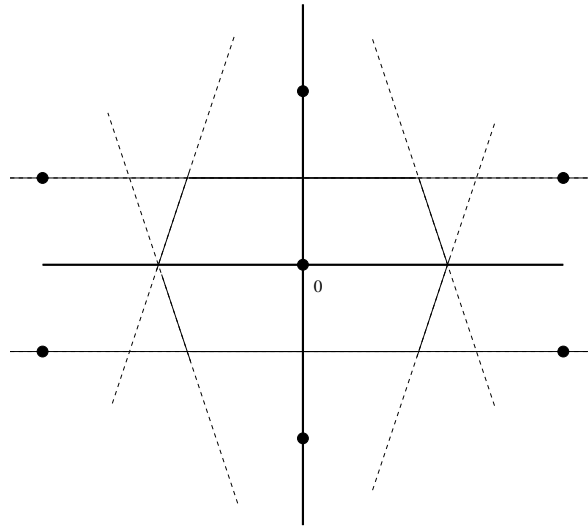


Abbildung 3.20: Dirichlet-Zelle eines zentrierten Rechtecksgitters

Wir betrachten wieder einen von Symmetrieachsen begrenzten Fundamentbereich,<sup>34</sup> in dem wir die Verzweigungsorte markieren. Sodann zeichnen wir alle Symmetrieachsen ein, die Verzweigungsorte auf Verzweigungsorte abbilden. Die von diesen Spiegelungen erzeugte Spiegelungsgruppe zerlegt den Torus in acht Spiegelzellen, wie man in Abbildung 3.21 sehen kann.

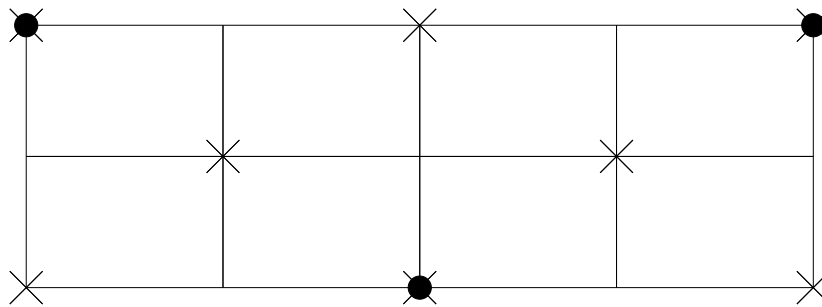


Abbildung 3.21: Die maximal mögliche Unterteilung des zentrierten Rechteckstoruses durch Symmetrieachsen

Auf der Sphäre benötigen wir daher eine Spiegelungsgruppe, welche die Sphäre in vier Spiegelzellen zerlegt, und die Winkel  $90^\circ$ ,  $90^\circ$  besitzt (die anderen beiden rechten Winkel werden zu  $180^\circ$  aufgebogen, da sie an Verzweigungsorten anliegen). Dies erfüllt gerade die Doppel-

<sup>34</sup>Vorsicht, dieser Fundamentbereich (vgl. Abbildung 3.21) hat Tücken: Während sich auf dem vertikalen Rand äquivalente Punkte gegenüberliegen, sind äquivalente Punkte auf den horizontalen Randkanten um die halbe Breite des Fundamentbereichs gegeneinander verschoben.



Dieder-Gruppe mit  $n = 1$  (bzw. die Diedergruppe mit  $n = 2$ , was das selbe ist). Abbildung 3.22 stellt eine Realisierung dieser Gruppe auf der Sphäre  $\hat{\mathbb{C}}$  dar.

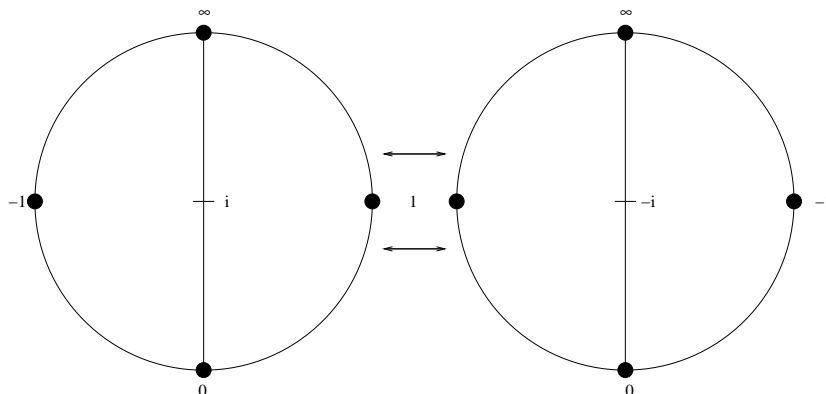


Abbildung 3.22: Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 1$

Wir wählen wieder je eine Keimzelle (schraffiert in Abbildung 3.23) aus und schreiben in drei Punkten die Werte  $0$ ,  $-1$  und  $\infty$  vor (vgl. Abbildung 3.23). Der vierte Wert ist dann  $\lambda i$  mit  $\lambda \in (0, \infty)$ , abhängig vom Seitenverhältnis des Rechtecks. Dann setzen wir die Funktion mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips auf den gesamten Torus fort. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Um nun zu überprüfen, ob die entstandene Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist, färben wir wieder die Kanten ein und sehen nach, ob die entstandene Zuordnung der Torus-Zellen zu den Sphären-Zellen auch die Voraussetzungen unseres Satzes 3.17 erfüllen. Die Färbungen sind in Abbildung 3.24 dargestellt. Anhand dieser Abbildung kann man die Nachbarschaftsverhältnisse leicht nachprüfen.

Wir erhalten also auch hier eine elliptische Funktion 2. Ordnung, welche die maximal mögliche Symmetrie besitzt. Diese ist in Abbildung 3.25 nochmals dargestellt.

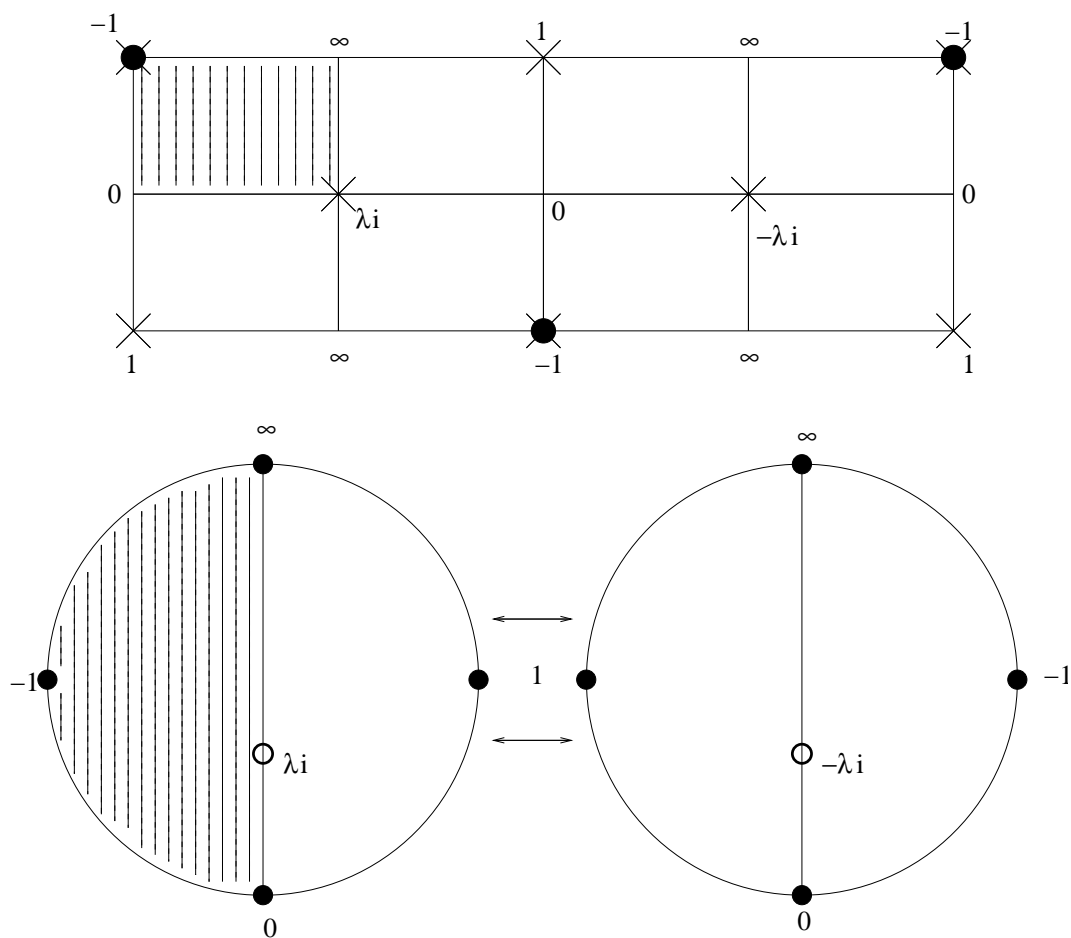


Abbildung 3.23: Riemannscher Abbildungssatz und Schwarz'sches Spiegelungsprinzip für zentrierten Rechteckstorus

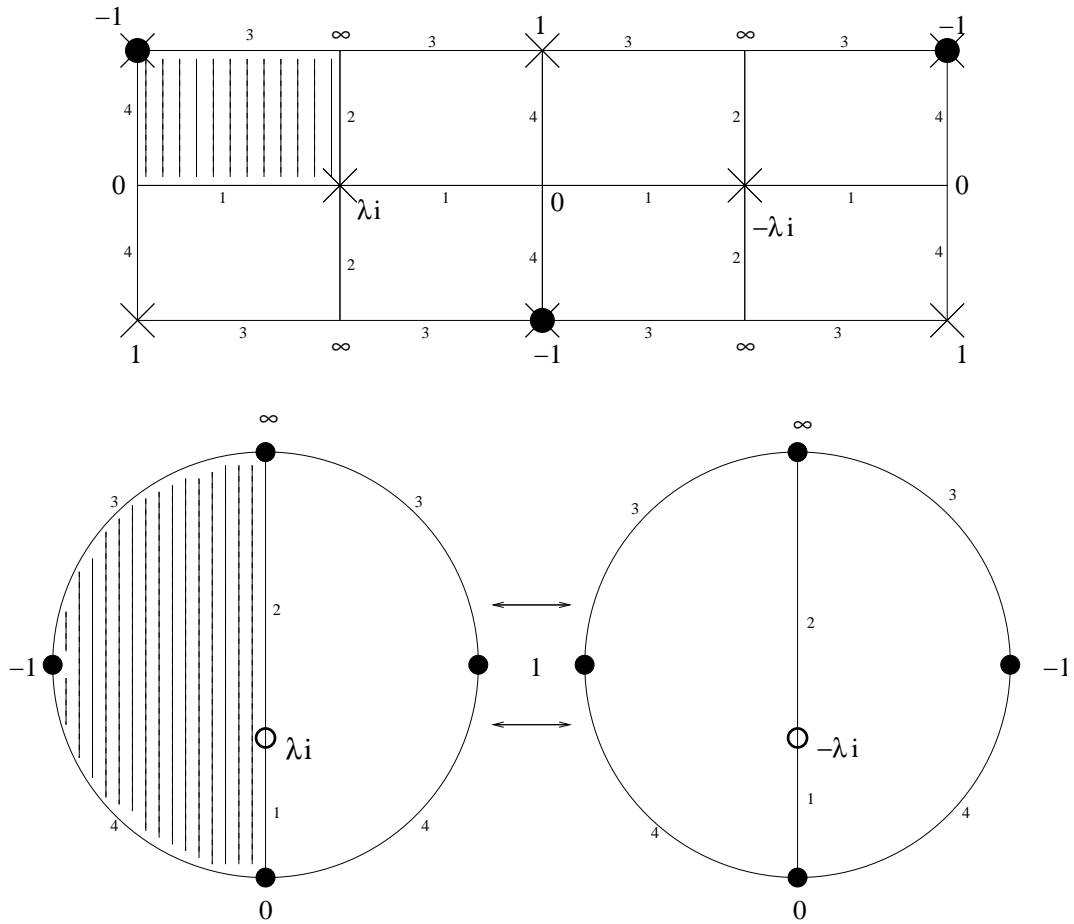


Abbildung 3.24: Kantenfärbungen zur Überprüfung der Zellenabbildung  $\phi$

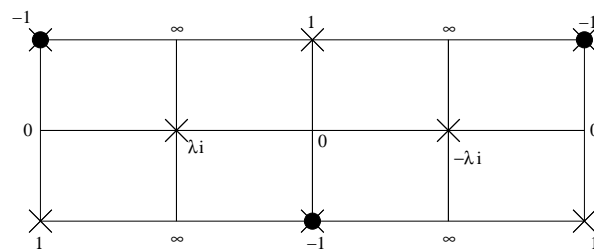


Abbildung 3.25: Elliptische Funktion 2. Ordnung zum zentrierten Rechteckstor

### 3.4.4 $60^\circ$ -Gitter

Als letztes wenden wir uns noch dem  $60^\circ$ -Grad-Gitter zu, einem Spezialfall des zentrierten Rechtecksgitters. Die Wabe, welche die Dirichlet-Zelle des zentrierten Rechtecksgitters darstellt, ist hier zum gleichseitigen Sechseck entartet und besitzt daher sechs Symmetrieachsen (vgl. Abbildung 3.26).

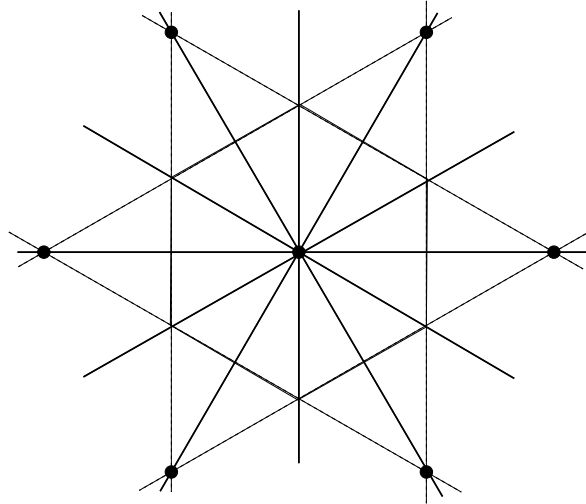


Abbildung 3.26: Dirichlet-Zelle eines  $60^\circ$ -Gitters

Wir wählen den selben Fundamentalbereich wie beim zentrierten Rechtecksgitter und unterteilen ihn mit allen Symmetrieachsen des  $60^\circ$ -Torus, welche Verzweigungsorte auf Verzweigungsorte abbilden. Diese bilden die Spiegelungsgruppe auf dem Torus, die wir betrachten werden. Wir nennen sie  $60^\circ$ -Gruppe. Abbildung 3.27 zeigt die Zerlegung. In der Abbildung sind die „neuen“ Symmetrieachsen, welche zu denen des zentrierten Rechteckstorus hinzukommen, gestrichelt eingezeichnet. Die  $60^\circ$ -Gruppe zerlegt den Fundamentalbereich in 48 Spiegelzellen, deren Winkel  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  sind.

Daher wissen wir über die Spiegelungsgruppe, die wir auf der Sphäre wählen, bereits, dass sie die Sphäre in 24 Spiegelzellen mit den Winkeln  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  zerlegen muss. Dies erfüllt gerade die Spiegelungsgruppe, welche von den sechs Diagonalspiegelungen des Würfels erzeugt wird. Diese Gruppe werden wir uns als auf dem Würfel realisiert veranschaulichen, und zwar durch ein Netz, bei dem wir mit Pfeilen kennzeichnen, wie die Kanten zusammengehören. Um zu sehen, dass die Verhältnisse tatsächlich so sind, wie in Abbildung 3.28 dargestellt, nimmt man am besten ein Modell eines Würfels zur Hand. In der Realisierung der Würfelgruppe, die in Abbildung 3.28 dargestellt ist, haben wir die 0 auf einen Schnittpunkt von drei Spiegelachsen (Würfecke) gelegt, und die drei Achsen so ausgerichtet, dass eine davon die reelle Achse ist. Die anderen beiden Achsen, die durch 0 gehen, sind dann die Achse  $\rho\mathbb{R}$  und  $\rho^2\mathbb{R}$ , wobei  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ . Die Werte  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  in Abbildung 3.28 sind dabei fest. In der Abbildung sind manche Achsen als durchgezogene Linien, manche als gestrichelte Linien dargestellt. Die durchgezogenen Linien sind die Erzeuger einer Realisierung der Doppel-Dieder-Gruppe mit  $n = 1$ , der Gruppe, die wir für das zentrierte Rechtecksgitter auf der Sphäre haben. Diese ist also eine Untergruppe der hier vorliegenden. Diese Erkenntnis wird uns nachher die Überprüfung der Konstruktion erleichtern.

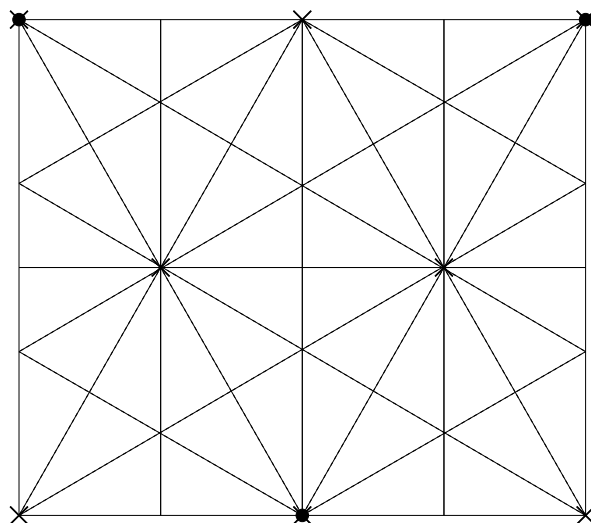


Abbildung 3.27: Die maximal mögliche Unterteilung des  $60^\circ$ -Gitters durch Symmetrieachsen

Zunächst wollen wir die Konstruktion jedoch durchführen. Dazu bilden wir wieder mit Hilfe des Riemannsches Abbildungssatzes zwei Keimzellen aufeinander ab (schraffiert in Abbildung 3.29) und setzen die Abbildung dann mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips auf den gesamten Torus fort. Das Ergebnis kann Abbildung 3.29 entnommen werden.

Nachdem wir nun eine Zuordnung der Toruszellen zu den Sphärenzellen erhalten haben, prüfen wir die Erhaltung der Nachbarschaftsverhältnisse wie sie Satz 3.17 fordert. Dazu ist in Abbildung 3.30 die Kantenfärbung auf Torus und Sphäre dargestellt. Wir erkennen nun aber, dass hier immer Gruppen mehrerer Spiegelzellen biholomorph aufeinander abgebildet werden: nämlich gerade diejenigen, die zur selben Spiegelzelle bezüglich der Spiegelungsgruppen des zentrierten Rechtecksgitters gehören (durchgezogene Linien). Indem wir diese Erkenntnis nutzen, müssen wir uns nur noch klarmachen, dass die großen Spiegelzellen in korrekter Weise benachbart sind. Dies ist aber der Fall, wie wir schon im Abschnitt zum zentrierten Rechtecksgitter gesehen haben. Daher funktioniert auch diese Konstruktion.

In Abbildung 3.31 ist die elliptische Funktion 2. Ordnung, die wir für den  $60^\circ$ -Torus konstruiert haben noch einmal dargestellt.

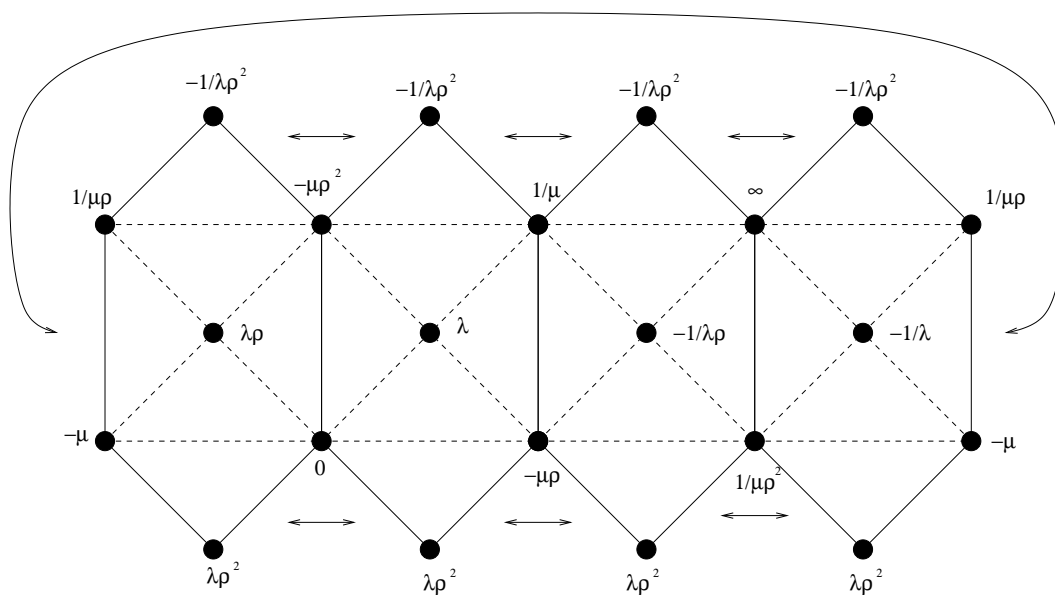


Abbildung 3.28: Die Würfelgruppe



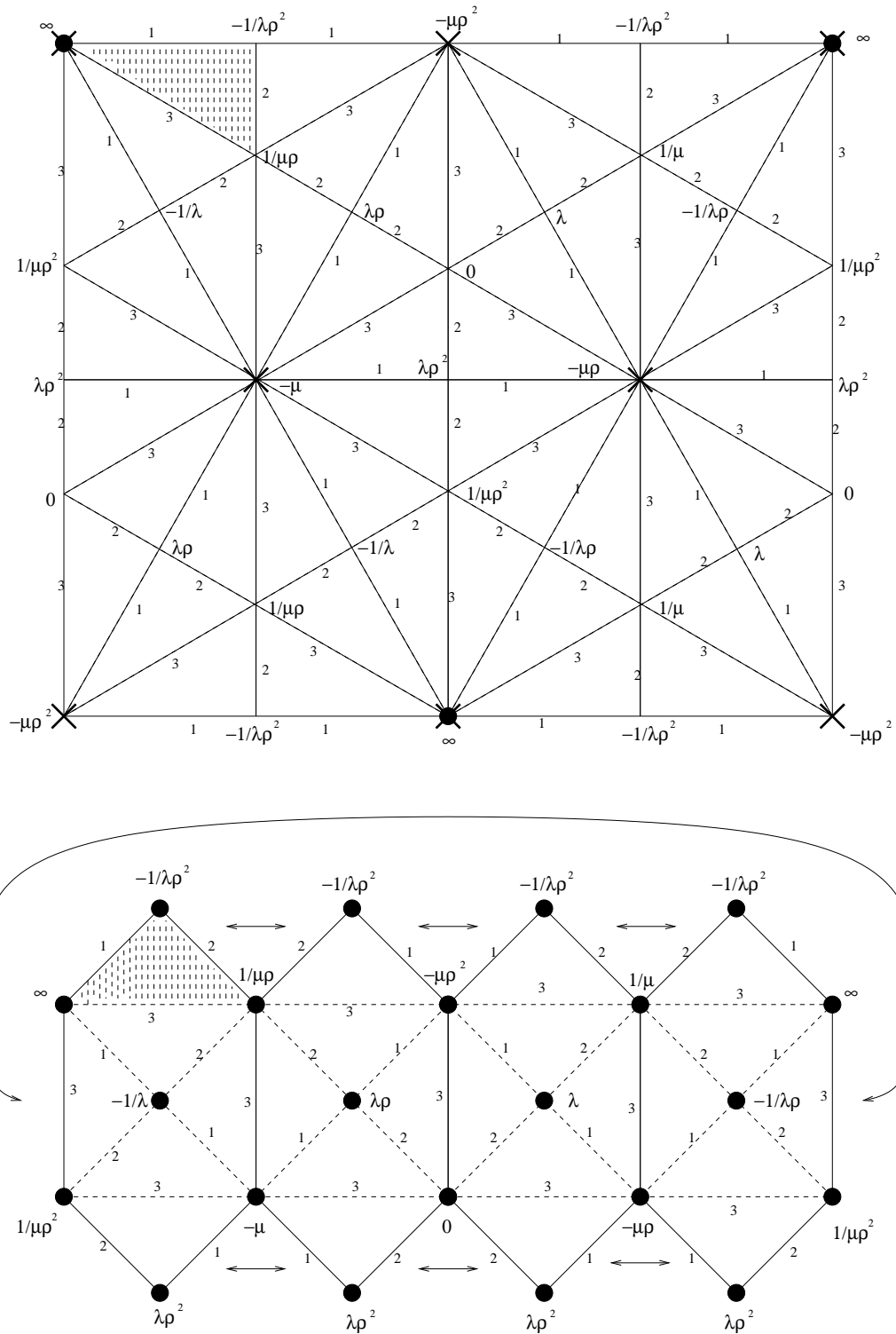


Abbildung 3.30: Kantenfärbungen zur Überprüfung der Zellenabbildung  $\phi$



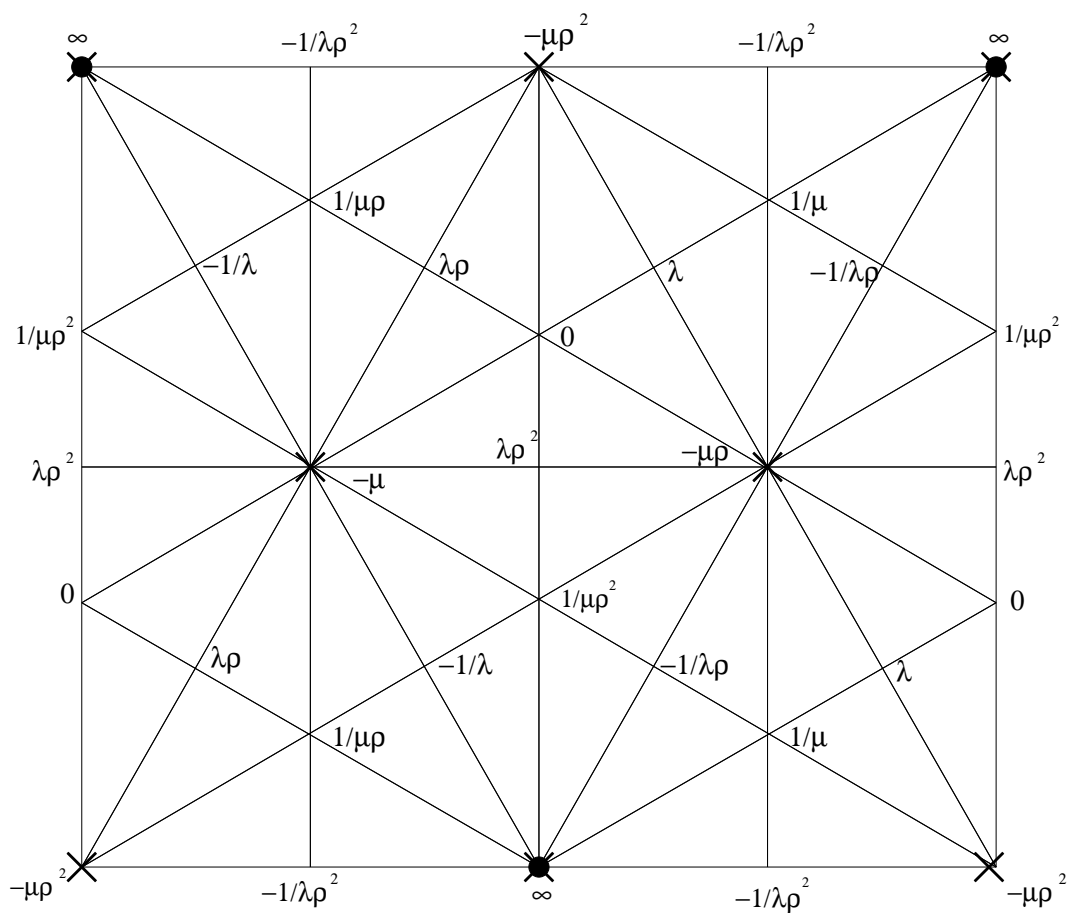


Abbildung 3.31: Elliptische Funktion 2. Ordnung zum 60°-Torus

### 3.4.5 Zusammenfassung

Wir haben nun für all jene Gitter mit Spiegelsymmetrien elliptische Funktionen 2. Ordnung konstruiert, welche ein Äquivarianzprinzip erfüllen. Die Torus-Spiegelungsgruppen, bezüglich denen die konstruierten Funktionen äquivariant sind, sind insofern für die jeweiligen Gitter maximal, als sie in allen vier Fällen von sämtlichen Spiegelungen erzeugt werden, die Verzweigungspunkte auf Verzweigungspunkte abbilden. Da die Dirichlet-Zelle eines generischen Gitters keine Spiegelsymmetrie aufweist, sondern nur die Drehsymmetrie zum Winkel  $\pi$  (vgl. Abbildung 3.32), können wir für diese Gitter keine solche Konstruktion erreichen.

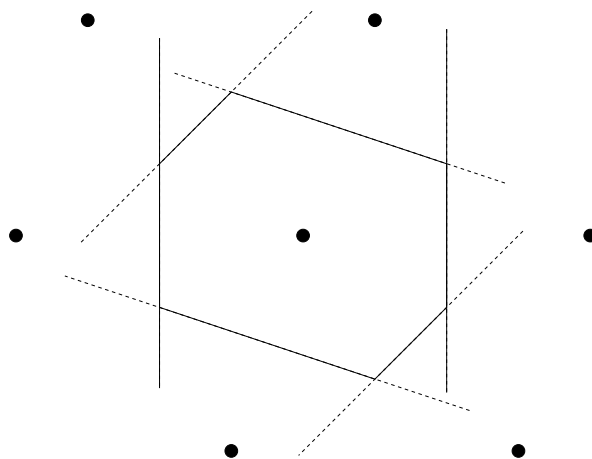


Abbildung 3.32: Dirichletzelle eines generischen Gitters: Keine Spiegelsymmetrie

Wir werden im nächsten Kapitel den Standardweg zum Erhalt einer elliptischen Funktion 2. Ordnung für beliebige Gitter gehen. Dann werden wir uns auch für generische Gitter von der Existenz nichtkonstanter elliptischer Funktionen überzeugen. Die Bedeutung der obigen Konstruktion ist insofern weniger im Existenznachweis nichttrivialer elliptischer Funktionen zu sehen, als mehr in der Erkenntnis, dass solche Funktionen Symmetrien besitzen, falls das Gitter spezielle Symmetrien aufweist.

Wir werden auf die Ergebnisse dieses Kapitels am Ende des nächsten Kapitels noch zurückkommen und sie mit zusätzlichem Wissen über die Struktur des Körpers der elliptischen Funktionen in einen größeren Zusammenhang einordnen.

## 4 Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion

Nachdem wir bisher nicht für jedes Gitter eine elliptische Funktion konstruieren konnten, wollen wir uns nun zurück auf den klassischen Weg begeben und eine Methode verwenden, die uns zu einem beliebigen Gitter eine elliptische Funktion zweiter Ordnung liefert. Diese Methode basiert, wie bereits erwähnt, auf den sogenannten Mittag-Lefflerschen Partialbruchreihen<sup>35</sup>. Die zu konstruierende Funktion, die sogenannte „Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion“, wird uns einen gewissen theoretischen Unterbau liefern, auf dessen Grundlage wir die Resultate der vorhergehenden Kapitels 3 nochmals beleuchten wollen.

### 4.1 Definition und Diskussion der $\wp$ -Funktion

Unser Ziel ist es nun also, für ein beliebiges Gitter  $\Lambda$  eine elliptische Funktion 2. Ordnung zu konstruieren, welche in den Gitterpunkten Pole 2. Ordnung besitzt. Die Existenz einer Funktion mit der gewünschten Polstellenverteilung liefert uns der Partialbruchsatz von Mittag-Leffler, der etwa im Buch von Freitag/Busam (FB06) auf den Seiten 222 ff formuliert und bewiesen wird.

**Satz 4.1** (Partialbruchsatz von Mittag-Leffler). *Sei  $S \subset \mathbb{C}$  eine diskrete Menge. Zu jedem Punkt  $s \in S$  sei  $h_s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $h_s(0) = 0$  eine holomorphe Funktion. Dann existiert eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Hauptteil in  $s \in S$  durch  $h_s$  gegeben wird, d.h. für jedes  $s \in S$  besitzt  $f(z) - h_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$  im Punkt  $z = s$  eine hebbare Singularität.*  $\square$

Wir wollen eine meromorphe Funktion konstruieren, welche in den Gitterpunkten Pole 2. Ordnung mit dem Residuum 0 (wegen des 2. Liouvilleschen Satzes 2.19) und den Hauptteilen

$$h_n\left(\frac{1}{z-\omega}\right) = \frac{1}{(z-\omega)^2}$$

hat, und sonst keine Pole besitzt.

**Lemma 4.2.** *Sei  $\Lambda$  ein Gitter. Durch*

$$\wp(z; \Lambda) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]$$

*wird eine Funktion mit dem oben angegebenen singulären Verhalten definiert.*

*Beweis.* Der Beweis, welcher auf dem Mittag-Lefflerschen Verfahren beruht, kann etwa bei Freitag/Busam (FB06) auf S.225 sowie S. 266-268 nachgelesen werden.  $\square$

**Definition 4.3.** Die Funktion

$$\wp(z; \Lambda) := \begin{cases} \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right] & \text{für } z \notin \Lambda \\ \infty & \text{für } z \in \Lambda \end{cases}$$

heißt Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Lambda$ .

<sup>35</sup>mit der Theorie dieser Partialbruchreihen befassen sich etwa die Funktionentheoriebücher (FB06), S. 222 ff bzw. (Jän04), S. 99 f oder (BS72), S. 236 ff oder aber (FL88), S. 169

Wir wollen die  $\wp$ -Funktion untersuchen, da sie für die gesamte Theorie der elliptischen Funktionen von zentraler Bedeutung ist. Sie ist nach Karl Weierstraß benannt, der in einer Vorlesung in den 1860er Jahren als erster die Theorie der elliptischen Integrale aus der Theorie der elliptischen Funktionen ableitete. Die  $\wp$ -Funktion stand dabei im Mittelpunkt seiner Ausführungen.

Wir können zunächst schon folgendes feststellen:

**Korollar 4.4.** *Die  $\wp$ -Funktion ist eine gerade Funktion und ihre Laurentreihe um 0 ist von der Form*

$$\wp(z) = z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots \quad (\text{also } a_0 = 0).$$

*Beweis.* Dass die  $\wp$ -Funktion gerade ist sieht man durch einsetzen in die definierende Reihe, wenn man berücksichtigt, dass  $-\Lambda = \Lambda$  gilt. Dass in der Laurentreihe  $a_0 = 0$  gilt, sieht man, indem man den Pol bei 0 weghebt:  $\wp(z) - 1/z^2$  lässt sich holomorph nach 0 fortsetzen. Der Wert ergibt sich zu

$$a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots|_{z=0} = a_0 = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left[ \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right]_{|z=0} = 0.$$

□

Mit der  $\wp$ -Funktion ist auch ihre Ableitung  $\wp'$  von großer Bedeutung. Aufgrund des Konvergenzverhaltens der Reihe lässt sich die Ableitung gliedweise bilden:

**Lemma 4.5.** *Die Ableitung der  $\wp$ -Funktion ist*

$$\wp' = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z - \omega)^3}.$$

$\wp'$  hat Pole dritter Ordnung in den Gitterpunkten und ist außerhalb von  $\Lambda$  holomorph. Sie stellt eine ungerade Funktion dar:

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

□

**Satz 4.6.** *Die Funktionen  $\wp$  und  $\wp'$  sind elliptische Funktionen der Ordnungen 2 bzw. 3.*

*Beweis.* Sei  $\tilde{\omega} \in \Lambda = \omega_1 \mathbb{Z} + \omega_2 \mathbb{Z}$ . Wir beginnen mit  $\wp'$ . Es gilt

$$\wp'(z + \tilde{\omega}) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z + \tilde{\omega} - \omega)^3} = \wp'(z),$$

da mit  $\omega$  auch  $\omega - \tilde{\omega}$  alle Gitterpunkte durchläuft. Damit ist  $\wp'$  eine elliptische Funktion. Die Ordnung 3 kann man an der Anzahl der Polstellen ablesen.

Für  $\wp$  selbst kann man aufgrund der Konvergenz erzeugenden Summanden  $-\frac{1}{\omega^2}$  nicht so direkt schließen. Die Kenntnis der Elliptizität von  $\wp'$  hilft uns aber weiter. Sei  $i \in \{1, 2\}$ . Die Funktion  $\wp(z) - \wp(z - \omega_i)$  ist konstant, denn:

$$[\wp(z) - \wp(z - \omega_i)]' = \wp'(z) - \wp'(z - \omega_i) = 0.$$

Den Wert der Konstante können wir ermitteln, indem wir die Funktion an der Stelle  $\frac{\omega_i}{2}$  auswerten:

$$\wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right) - \wp\left(\frac{\omega_i}{2} - \omega_i\right) = \wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_i}{2}\right) = 0,$$

da  $\wp$  eine gerade Funktion ist. Somit gilt  $\wp(z) = \wp(z + \omega)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und alle  $\omega \in \Lambda$ . Die Ordnung 2 erhält man wieder aus der Anzahl der Polstellen modulo  $\Lambda$ .  $\square$

Da  $\wp$  von der Ordnung 2 ist und die Gitterpunkte als Verzweigungspunkte besitzt, kennen wir nach Satz 3.2 auch die Lage der anderen Verzweigungspunkte von  $\wp$ : es sind die Halbgitterpunkte  $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ .

**Definition 4.7.** Die Werte  $\wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$  von  $\wp$  in den Halbgitterpunkten nennt man Halbwerte der  $\wp$ -Funktion und bezeichnet sie mit  $e_1, e_2, e_3$ .

**Korollar 4.8.** Die Halbgitterpunkte sind genau die Nullstellen von  $\wp'$ .

*Beweis.* Es sei  $z$  ein Halbgitterpunkt, d.h.  $z \notin \Lambda$ , aber  $z + z \in \Lambda$ .

$$\wp'(z) = -\wp'(-z) = -\wp'((z+z) - z) = -\wp'(z)$$

Also gilt  $\wp'(z) = 0$ . Es gibt genau drei Halbgitterpunkte modulo  $\Lambda$  und  $\wp'$  besitzt genau drei Nullstellen.  $\square$

**Bemerkung 4.9.** Das ist auch völlig klar, wenn man wieder die Perspektive wechselt und die  $\wp$ -Funktion als holomorphe Funktion vom Torus in die Sphäre betrachtet. Wir wissen, dass die Halbgitterpunkte Verzweigungspunkte sind. Da ihre Werte endlich sind, verhält sich die Funktion dort wie  $z^2$  und insbesondere hat die Ableitung der Funktion dort eine einfache Nullstelle. Dass die (endlichen) Verzweigungspunkte einer elliptischen Funktion Nullstellen ihrer Ableitung sind, gilt also ganz allgemein.

Da wir im Folgenden darauf zurückgreifen werden, geben wir nun noch die Laurentreihenentwicklung von  $\wp$  um 0 an. Ihre Herleitung findet sich etwa bei Freitag/Busam (FB06) auf S. 271.

**Satz 4.10.** Die Reihe  $G_n = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$  konvergiert für  $n \geq 3$  absolut und es gilt

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) G_{2(n+1)} z^{2n}$$

auf der größten punktierten Kreisscheibe um 0, die keinen Gitterpunkt enthält.  $\square$

**Bemerkung 4.11.** Die  $G_n$  heißen Eisensteinreihen, nach dem deutschen Mathematiker Gotthold Max Eisenstein.

## 4.2 Der Körper der elliptischen Funktionen

Wir wissen bereits, dass die elliptischen Funktionen zu einem Gitter  $\Lambda$  einen Körper bilden. Wir hatten diesen Körper  $K(\Lambda)$  genannt, vergleiche Definition 2.7 im Kapitel 2. Wir wissen nun für jedes Gitter, dass  $K(\Lambda)$  neben den konstanten Funktionen zumindest noch  $\wp$  und  $\wp'$  enthält. Es ist der nächste Schritt, nach einer vollständigen Beschreibung der Struktur dieses Körpers zu fragen.

So wie man etwa über den Körper  $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}})$  der meromorphen Funktionen auf der Riemannschen Zahlkugel (also der holomorphen Funktionen von der Riemannschen Fläche  $\hat{\mathbb{C}}$  in sich), weiß, dass es sich um die rationalen Funktionen handelt, also  $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ ,<sup>36</sup> möchte man auch den Körper der meromorphen Funktionen auf einem Torus,  $\mathcal{M}(\mathbb{C}/\Lambda) = K(\Lambda)$  kennen. Daran werden wir nun arbeiten.

Zunächst betrachten wir gerade elliptische Funktionen, deren Pole Gitterpunkte sind.

**Lemma 4.12.** *Sei  $f$  eine gerade elliptische Funktion, deren Pole die Gitterpunkte sind. Dann ist  $f$  ein Polynom in  $\wp$ .*

*Beweis.* Die Funktion  $f$  besitze in 0 einen  $2n$ -fachen Pol. Die Laurentreihe von  $f$  in 0 ist dann von der Form

$$f(z) = a_{-2n}z^{-2n} + \dots + a_{-2}z^{-2} + a_0 + a_2z^2 + a_4z^4 + \dots$$

Die Abbildung  $f - a_{-2n}\wp^n$  besitzt wegen

$$(a_{-2n}\wp^n)(z) = a_{-2n} \left( \frac{1}{z^2} + 3G_4z^2 + 5G_6z^4 + \dots \right)^n = a_{-2n}z^{-2n} + \dots$$

einen Pol höchstens  $2(n-1)$ -ter Ordnung, also echt kleinerer Ordnung als  $f$ .

Auf diese Weise kann man induktiv den Pol von  $f$  ganz wegheben und erhält ein Polynom  $\tilde{P}$ , so dass  $f - \tilde{P}(\wp)$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph und damit konstant ist. Damit ist

$$f = \tilde{P}(\wp) + c = P(\wp)$$

ein Polynom in  $\wp$ . □

Als nächstes gehen wir weiter zu geraden elliptischen Funktionen mit beliebigen Polen.

**Satz 4.13.** *Sei  $f$  eine gerade elliptische Funktion. Dann ist  $f$  eine rationale Funktion in  $\wp$ .*

*Beweis.* Die Funktion  $f$  besitzt modulo  $\Lambda$  nur endlich viele Pole. Sei  $a$  ein Pol von  $f$ , welcher nicht im Gitter liegt (gibt es das nicht, sind wir fertig). Die Funktion

$$(\wp(z) - \wp(a))^N f(z)$$

besitzt für genügend großes  $N$  eine hebbare Singularität bei  $z = a$ , denn  $(\wp(z) - \wp(a))^N$  besitzt eine mindestens  $N$ -fache Nullstelle bei  $z = a$ . Indem man auf diese Weise die endlich vielen Pole von  $f$  modulo  $\Lambda$  weghebt, erhält man eine gerade elliptische Funktion

$$f(z) \cdot \prod_{k=1}^m (\wp(z) - \wp(a_k))^{N_k} =: f(z) \cdot P(\wp(z)),$$

welche einerseits das Produkt aus  $f$  und einem Polynom  $P$  in  $\wp$  ist, und andererseits nur Pole in den Gitterpunkten besitzt und gerade ist, also nach Lemma 4.12 ein Polynom in  $\wp$  ist:

$$f(z) \cdot P(\wp(z)) = Q(\wp(z)).$$

Damit ist

<sup>36</sup>dies kann man etwa dem Buch von Lamotke (Lam05), S. 21, entnehmen.

$$f = \frac{P(\wp)}{Q(\wp)}$$

eine rationale Funktion in  $\wp$ . □

Obwohl das immer noch sehr speziell aussieht, sind wir an dieser Stelle im Prinzip fertig, und können den Struktursatz für den Körper der elliptischen Funktionen formulieren:

**Theorem 4.14** (Struktursatz für elliptische Funktionen). *Zu jeder elliptischen Funktion  $f$  existieren rationale Funktionen  $R, S \in \mathbb{C}(z)$ , so dass*

$$f = R(\wp) + \wp' S(\wp)$$

*gilt, d.h.:*

$$K(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp) + \wp' \mathbb{C}(\wp)$$

*Beweis.* Sei  $f$  eine beliebige elliptische Funktion. Dann lässt sich  $f$  schreiben als

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z)) =: g(z) + h(z)$$

wobei offensichtlich  $g$  eine gerade und  $h$  eine ungerade elliptische Funktion ist. Daher gilt mit Satz 4.13:  $g = R(\wp)$  für eine rationale Funktion  $R$ . Die Funktion  $\hat{h} := \frac{h}{\wp'}$  ist als Quotient zweier ungerader Funktionen gerade, und daher gibt es eine rationale Funktion  $S$  so dass  $\hat{h} = S(\wp)$  gilt.

Insgesamt haben wir also:

$$f = g + h = g + \wp' \hat{h} = R(\wp) + \wp' S(\wp).$$

□

### 4.3 Differentialgleichung der $\wp$ -Funktion

Die Erkenntnisse, die wir nun über die Struktur des Körpers der elliptischen Funktionen gewonnen haben, können wir verwenden, um eine Differentialgleichung herzuleiten, welche die  $\wp$ -Funktion erfüllt. Wir verwenden dazu das konstruktive Verfahren aus dem Beweis von Lemma 4.12, und zwar wenden wir es auf die Funktion  $\wp'^2$  an. Da  $\wp'$  ungerade ist, handelt es sich bei  $\wp'^2$  um eine gerade Funktion, und die Pole liegen in den Gitterpunkten. Daher muss sich  $\wp'^2$  als Polynom in  $\wp$  schreiben lassen. Dieses Polynom wollen wir nun bestimmen. Wir schreiben uns dafür zunächst einmal die Laurentreihen um 0 von  $\wp$ ,  $\wp'$  und  $\wp'^2$  auf:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + 3G_4 z^2 + 5G_6 z^4 + 7G_8 z^6 + O(z^8)$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 6G_4 z + 20G_6 z^3 + 42G_8 z^5 + O(z^7)$$

$$\wp'^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 - 168G_8 z^2 + 36G_4^2 z^2 + O(z^4)$$

Der erste Term der Laurentreihe von  $\wp'^2$  zeigt uns, dass wir von  $\wp'^2$  zum Wegheben des Pols zunächst  $4\wp^3$  abziehen müssen. Dazu benötigen wir zunächst die Laurentreihe von  $\wp^3$ .

$$\wp^2(z) = \frac{1}{z^4} + 6G_4 + 10G_6z^2 + O(z^4)$$

$$\wp^3(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + O(z^2)$$

Daher gilt:

$$(\wp'^2 - 4\wp^3)(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 - \frac{4}{z^6} - \frac{36G_4}{z^2} - 60G_6 + O(z^2) = -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + O(z^2)$$

Um den führenden Term dieser Laurentreihe zu eliminieren, müssen wir diesmal  $60G_4\wp$  addieren:

$$(\wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp)(z) = -140G_6 + O(z^2)$$

Diese elliptische Funktion besitzt keine Pole und ist daher konstant. Der Wert der Konstanten ist  $-140G_6$ .

Es ergibt sich also:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - 60G_4\wp - 140G_6$$

Wir setzen gemäß allgemeiner Konvention

$$g_2 := 60G_4 \quad \text{und} \quad g_3 := 140G_6$$

und erhalten somit:

**Satz 4.15** (Algebraische Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion). *Die  $\wp$ -Funktion erfüllt folgende Differentialgleichung:*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{4.1}$$

□

**Bemerkung 4.16.** Die Eisensteinreihen hängen vom Gitter  $\Lambda$  ab und damit natürlich auch die sogenannten Gitterkonstanten  $g_2, g_3$ . Wenn wir dies betonen wollen, schreiben wir  $g_2(\Lambda)$  und  $g_3(\Lambda)$ . Es gilt für  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$g_2(\alpha\Lambda) = \alpha^{-4}g_2(\Lambda)$$

und

$$g_3(\alpha\Lambda) = \alpha^{-6}g_3(\Lambda).$$

Es gibt nun zwei Gitter mit einer Besonderheit: Beim Quadratgitter gilt  $i\Lambda = \Lambda$ , und beim  $60^\circ$ -Gitter gilt  $\zeta\Lambda = \Lambda$ , wobei  $\zeta^6 = 1$ , also etwa  $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{6}}$ . Man sagt, diese Gitter erlauben komplexe Multiplikation. Aus diesen Identitäten folgt für das Quadratgitter  $g_3 = -g_3$ , also  $g_3 = 0$ . Für das  $60^\circ$ -Gitter folgt  $g_2 = \rho g_2$  (mit  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ) und damit  $g_2 = 0$ .

Wir zeigen noch folgende Aussage über die Gitterkonstanten:



**Lemma 4.17.** *Es sei  $\Lambda$  ein Gitter und  $g_2(\Lambda), g_3(\Lambda)$  die zugehörigen Gitterkonstanten. Dann gilt:*

$$\Delta := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

*Beweis.* Wir haben gesehen, dass die  $\wp$ -Funktion die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = P(\wp) \quad \text{mit} \quad P(t) = 4t^3 - g_2t - g_3$$

erfüllt.  $P$  ist ein Polynom dritten Grades und lässt sich natürlich auch wie folgt schreiben:

$$P(t) = 4(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3).$$

Wir wollen zeigen, dass die  $t_i$  paarweise verschieden sein müssen. Dazu nehmen wir an, dass etwa  $t_1 = t_2$  gelte. Die Differentialgleichung ist also von der Form

$$\wp'^2 = 4(\wp - t_1)^2(\wp - t_3).$$

Es sei  $\tilde{z} \in \mathbb{C}/\Lambda$  ein Punkt mit  $\wp(\tilde{z}) = t_1$ . Dann besitzt  $\wp'$  nach der Differentialgleichung eine Nullstelle in  $\tilde{z}$ . Damit ist  $\tilde{z}$  mindestens eine doppelte  $t_1$ -Stelle von  $\wp$ . Damit ist dann aber  $\tilde{z}$  nach der Differentialgleichung mindestens eine vierfache Nullstelle von  $\wp'^2$  und damit mindestens eine doppelte Nullstelle von  $\wp'$ . Daraus ergibt sich, dass  $\tilde{z}$  sogar eine mindestens dreifache  $t_1$ -Stelle von  $\wp$  sein muss. Dies stellt einen Widerspruch dar, da  $\wp$  von der Ordnung 2 ist. Wir erkennen also, dass  $P$  ein Polynom dritten Grades mit getrennten Nullstellen sein muss.

Multipliziert man die linke Seite der Gleichung

$$4(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = 4t^3 - g_2t - g_3$$

aus, so ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den  $t_i$  und den  $g_i$ . Einfaches Nachrechnen ergibt, dass

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(t_1 - t_2)^2(t_2 - t_3)^2(t_3 - t_1)^2$$

gilt. Da die  $t_i$  ja paarweise verschieden sind, muss tatsächlich

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$$

gelten. Die Bezeichnung  $\Delta$  kommt von „Diskriminante“. □

**Bemerkung 4.18.** Die Umkehrung, dass nämlich jedes Paar  $g_2, g_3$  mit  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  Gitterkonstanten eines Gitters  $\Lambda$  sind, ist wahr, aber nicht so einfach zu beweisen.<sup>37</sup> Es ist dies das sogenannte Jacobische Problem, das Weierstraß, aber auch Hurwitz gelöst haben, und dem große Bedeutung unter anderem für die Lösbarkeit elliptischer Integrale zukommt.<sup>38</sup> In Kapitel 1, Abschnitt 1.3.1 haben wir gezeigt, dass eine Funktion, welche die Differentialgleichung

$$f'^2 = 4f^3 - g_2f - g_3$$

<sup>37</sup>Ein Beweis findet sich etwa bei Freitag/Busam (FB06) ab Seite 313.

<sup>38</sup>vgl. z.B. die historischen Anmerkungen bei Lamotke (Lam05) S. 35,101,105.

erfüllt, Umkehrfunktion des elliptischen ersten Grundintegrals

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} dx$$

ist. Die Frage nach der Existenz eines Gitters mit den Konstanten  $g_2$  und  $g_3$  mit  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  ist damit äquivalent zur Lösbarkeit dieses ersten Grundintegrals mittels elliptischer Funktionen für jedes Polynom  $P$  dritten oder vierten Grades mit getrennten Nullstellen.

Übrigens lassen sich auch die Integrale zweiter und dritter Gattung der Normalform von Weierstraß als Umkehrfunktionen elliptischer Funktionen betrachten. Man betrachtet dazu eine elliptische Funktion  $\zeta$ , deren negative Ableitung  $\wp$  ist; sowie eine Funktion  $\sigma$ , deren logarithmische Ableitung wiederum  $\zeta$  ist. Genauer findet sich im Buch von Hurwitz (Hur64) auf den Seiten 237 bis 241.

Die Resultate dieses Kapitels sind bis hierher nicht neu sondern können als der Standard-Einstieg in die Theorie der elliptischen Funktionen angesehen werden. Die Resultate sind insofern auch in praktisch jedem Buch, das sich mit diesem Thema befasst, zu finden.<sup>39</sup> Wir haben uns in unserer Darstellung an derjenigen im Buch von Freitag/Busam (FB06) orientiert.

#### 4.4 Vergleich mit den symmetrischen Funktionen

Ausgehend von den bisher dargelegten Tatsachen wollen wir im Rest des Kapitels unsere eigenen Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel einordnen und in den Gesamtzusammenhang stellen. Dem schicken wir jedoch noch ein Resultat über elliptische Funktionen der Ordnung 2 voraus. Dieses wird uns zeigen, welche Freiheiten elliptische Funktionen 2. Ordnung überhaupt noch besitzen, nachdem wir bereits im Abschnitt 3.1 einige Einschränkungen ihrer „Beweglichkeit“ erkannt haben.

**Satz 4.19** (Charakterisierung elliptischer Funktionen 2. Ordnung). *Für jede elliptische Funktion  $f$  der Ordnung 2 existiert eine Translation*

$$t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z - \gamma,$$

sowie eine Möbiustransformation

$$r : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

so dass gilt:

$$f = r \circ \wp \circ t.$$

*Beweis.* Sei  $f$  eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Sei  $\gamma$  einer der Verzweigungspunkte von  $f$ . Da  $\gamma$  nach Satz 3.2 ein gerades Punktsymmetriezentrum für  $f$  ist, ist die Funktion  $g(z) = f(\gamma + z)$  gerade:  $g(-z) = f(\gamma - z) = f(\gamma + z) = g(z)$ . Wir haben also:  $g = f \circ s$ , wobei  $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z + \gamma$  eine Translation ist. Als gerade elliptische Funktion ist  $g$  nach Satz 4.13 eine rationale Funktion in  $\wp$ :

$$g = r \circ \wp, \quad r \in \mathbb{C}(z).$$

<sup>39</sup>hier seien nochmals einige genannt: (Ach90), (Cha85), (Lan73), (Hur64), (FB06), (Lam05)

Der Abbildungsgrad der Hintereinanderschaltung zweier holomorpher Funktionen zwischen Riemannschen Flächen ist gleich dem Produkt der Abbildungsgrade der Einzelfunktionen.<sup>40</sup> Da  $g$  mit  $f$  Abbildungsgrad 2 hat, und  $\wp$  ebenfalls Abbildungsgrad 2 hat, muss die rationale Funktion  $r$  Abbildungsgrad 1 haben. Es muss sich bei  $r$  also um eine biholomorphe Selbstabbildung von  $\hat{\mathbb{C}}$  handeln. Das sind aber gerade die Möbiustransformationen. Die Translation  $s$  ist insbesondere biholomorph, mit der Umkehrfunktion  $t : z \mapsto z - \gamma$ , welche auch eine Translation ist. Daher können wir auch schreiben

$$f = g \circ t = r \circ \wp \circ t,$$

wie behauptet. □

Dieser Satz zeigt uns, dass es zu einem gegebenen Gitter  $\Lambda$  „im Wesentlichen“, also bis auf Translationen auf dem Torus und Möbiustransformationen auf der Sphäre, überhaupt nur eine elliptische Funktion der Ordnung 2 gibt: Die  $\wp$ -Funktion. Das wiederum bedeutet, dass die Konstruktion aus Kapitel 3 „im Wesentlichen“ die  $\wp$ -Funktion liefert. Insbesondere besitzt die  $\wp$ -Funktion zu einem der symmetrischen Gitter (Rechteckgitter, Quadratgitter, zentrierte Rechteckgitter bzw.  $60^\circ$ -Gitter) die selben Symmetrien wie die zu diesem Gitter in Kapitel 3 konstruierte Funktion.<sup>41</sup> Es sei nochmals betont, dass die Spiegelsymmetrien, welche wir aus unserer Konstruktion erhalten haben, tatsächlich die maximal möglichen Symmetrien waren. Daher können wir sicher sein, alle Spiegelsymmetrien der  $\wp$ -Funktion zu kennen. Zu dieser Einsicht gelangt man durch die Mittag-Lefflersche Partialbruchreihe nicht ohne Weiteres. Ein weiterer Aspekt, den wir noch näher betrachten wollen, ist folgender:

**Lemma 4.20.** *Jede elliptische Funktion  $f$  der Ordnung 2 erfüllt eine Differentialgleichung der Form*

$$f'^2 = Q(f),$$

wobei  $Q$  ein Polynom vom Grad 3 (falls  $f$  einen doppelten Pol besitzt) oder 4 (falls  $f$  zwei einfache Pole besitzt) mit getrennten Nullstellen ist.

*Beweis.* Sei  $f$  eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall:  $f$  besitzt einen doppelten Pol.

Dieser möge bei  $a \in \mathbb{C}/\Lambda$  liegen. Dann liegen die anderen drei Verzweigungspunkte bei  $a + \frac{\omega_1}{2}$ ,  $a + \frac{\omega_2}{2}$  und  $a + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  (vgl. Satz 3.2). Dies sind die (einfachen) Nullstellen von  $f'$ , wie in Bemerkung 4.9 ausgeführt. Die Werte von  $f$  in diesen drei Punkten mögen  $f(a + \frac{\omega_1}{2}) = c_1$ ,  $f(a + \frac{\omega_2}{2}) = c_2$  und  $f(a + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}) = c_3$  sein. Diese müssen paarweise verschieden sein, da  $f$  von der Ordnung 2 ist.

Es gilt daher

$$f'^2 = \eta(f - c_1)(f - c_2)(f - c_3) \text{ für ein } \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

<sup>40</sup>vgl. etwa Lamotke, (Lam05) S. 16.

<sup>41</sup>Im Falle einer nachgeschalteten Möbiustransformation liegt die Symmetrie bezüglich einer konjugierten Metrik der Sphäre vor. Da solche Metriken aber als gleichberechtigt zu der von uns gewählten Standardmetrik zu sehen sind, schmälert dies das Ergebnis nicht.

denn wie man leicht einsieht, stimmen die Null- und Polstellenverteilung von  $f'^2$  und  $(f - c_1)(f - c_2)(f - c_3)$  überein, und nach Korollar 2.18 ist der Quotient aus beiden Funktionen dann konstant.

2. Fall:  $f$  besitzt zwei einfache Pole.

In diesem Fall sind alle vier Verzweigungspunkte von  $f$  endliche Punkte. Die Verzweigungspunkte seien  $a, a + \frac{\omega_1}{2}, a + \frac{\omega_2}{2}$  und  $a + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ . Die entsprechenden Werte von  $f$  seien  $c_1, \dots, c_4$ .

Dann gilt, wieder wegen der identischen Null- und Polstellenverteilung,

$$f'^2 = \eta (f - c_1)(f - c_2)(f - c_3)(f - c_4) \text{ für ein } \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es erfüllt  $f$  also in beiden Fällen eine Differentialgleichung von der behaupteten Form.  $\square$

Wir haben für die  $\wp$ -Funktion bereits gesehen, dass sie eine solche Differentialgleichung erfüllt. Auf diesem Weg erhalten wir die faktorisierte Darstellung:

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3).$$

Die  $e_i$  sind die Halbwerte aus Definition 4.7. Den Faktor 4 entnehmen wir der Differentialgleichung, die wir bereits kennen:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Aber auch die in Kapitel 3 konstruierten Funktionen erfüllen Differentialgleichungen, die wir nun herleiten wollen. Kennen wir die Verzweigungspunkte und die Polstellen von  $f$ , so kennen wir natürlich auch die Null- und Polstellen von  $f'$  und können vorgehen wie im Beweis von 4.20. Lediglich die Konstante  $\eta$  bleibt bei diesem Vorgehen offen. Das liegt daran, dass unsere Konstruktion lediglich Symmetrien verwendet, nie aber die tatsächliche Größe eines Gitters. Dadurch muss die Konstante auftauchen, um der Möglichkeit einer Drehstreckung des Gitters Rechnung zu tragen, welche die Differentialgleichung ändert.

Wir wollen die Differentialgleichungen ermitteln, welche die in Kapitel 3 konstruierten Funktionen erfüllen. Dazu muss man nur die Werte der Funktionen in den Verzweigungspunkten, sowie die Lage aller Polstellen kennen. Diese gehen aus den Konstruktionen von Kapitel 3 (Abbildungen 3.13, 3.25, 3.19 bzw. 3.31) aber hervor.

Beginnen wir mit dem Quadratgitter. Die konstruierte Funktion  $f$  ist in Abbildung 3.19 dargestellt. Sie besitzt einen doppelten Pol in den Gitterpunkten. Die Werte der restlichen Verzweigungspunkte sind 0,  $i$  und  $-i$ . Sowohl  $f'^2$  als auch die Funktion

$$f(f - i)(f + i)$$

besitzen doppelte Nullstellen in den Halbgitterpunkten, und sechsfache Pole in den Gitterpunkten. Weitere Pole bzw. Nullstellen gibt es nicht. Daher ist der Quotient der beiden Funktionen eine elliptische Funktion der Ordnung 0 und somit konstant. Es ergibt sich die Differentialgleichung

$$f'^2 = \eta f(f + i)(f - i) = \eta (f^3 + f), \quad \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Das stimmt mit der Form der Differentialgleichung für die  $\wp$ -Funktion überein. Wir sehen hier außerdem, dass tatsächlich  $g_3 = 0$  gilt, wie in Bemerkung 4.16 ausgeführt.

Als nächstes wenden wir uns dem  $60^\circ$ -Gitter zu. Die zugehörige Funktion können wir Abbildung 3.31 entnehmen. Sie besitzt einen doppelten Pol in den Gitterpunkten. Die Verzweigungspunkte in den Halbgitterpunkten nehmen die endlichen Werte  $-\mu$ ,  $-\mu\rho$ , und  $-\mu\rho^2$  an. Der Wert  $\mu$  ist für alle  $60^\circ$ -Gitter der selbe. Wir wollen uns hier aber nicht mit seiner Ermittlung beschäftigen. Da die Funktionen  $f'^2$  und

$$(f + \mu)(f + \mu\rho)(f + \mu\rho^2)$$

beide sechsfache Pole in den Gitterpunkten und doppelte Nullstellen in den drei Halbgitterpunkten besitzen, ergibt sich die Differentialgleichung

$$f'^2 = \eta(f + \mu)(f + \mu\rho)(f + \mu\rho^2) = \eta(f^3 + \mu^3) \quad \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Auch hier haben wir die Form der Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion vorliegen. Wir sehen in Übereinstimmung mit der Überlegung von Bemerkung 4.16, dass  $g_2 = 0$  gilt.

Nun zum Rechtecksgitter. Wir entnehmen Abbildung 3.13, dass hier zwei einfache Pole vorliegen. Die Werte in den vier Verzweigungspunkten sind  $\alpha$ ,  $-\alpha$ ,  $\frac{1}{\alpha}$  und  $-\frac{1}{\alpha}$ , wobei  $\alpha$  vom Seitenverhältnis des Rechtecks abhängt. Die Funktionen  $f'^2$  und

$$(f - \alpha)(f + \alpha) \left(f - \frac{1}{\alpha}\right) \left(f + \frac{1}{\alpha}\right)$$

besitzen zwei vierfache Pole an den selben Stellen. Ferner besitzen sie in den vier Gitter- und Halbgitterpunkten doppelte Nullstellen. Dies sind alle Null- und Polstellen der beiden Funktionen. Damit ergibt sich die Differentialgleichung

$$f'^2 = \eta(f - \alpha)(f + \alpha) \left(f - \frac{1}{\alpha}\right) \left(f + \frac{1}{\alpha}\right) = \eta(f^2 - \alpha^2) \left(f^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \quad \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dies ist nicht von der Form der Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion, da die rechte Seite ein Polynom vierten Grades in  $f$  ist. Das liegt daran, dass die Funktion zwei einfache Pole anstatt eines doppelten Pols besitzt. Wir wollen noch ein Wort dazu sagen, weshalb wir für das Rechtecksgitter eine andere Konstruktion haben. Betrachten wir Abbildung 3.11, in der das Ergebnis des Riemannschen Abbildungssatzes für das Rechtecksgitter zu sehen ist. Man erkennt, dass der Wert der Funktion im Verzweigungspunkt vom Seitenverhältnis des Rechtecks abhängt. Fordert man, dass dieser Wert  $\infty$  sein soll, so weiß man nicht, welche Werte die drei übrigen Eckpunkte der Spiegelzelle annehmen. Es ist zwar prinzipiell möglich, auch für das Rechtecksgitter eine elliptische Funktion mit doppeltem Pol zu konstruieren, aber alle anderen Werte bleiben uns dann verschlossen. Daher ist es sinnvoller, eine elliptische Funktion mit zwei einfachen Polen zu konstruieren, wie wir das getan haben. Wir wissen ja, dass es sich dabei bis auf eine Möbiustransformation ohnehin um die  $\wp$ -Funktion handelt. Vergleicht man die entstandene Differentialgleichung mit den Ausführungen aus Kapitel 1 Abschnitt 1.1.2, so erkennt man das Polynom der Normalform von Legendre (in leichter Abwandlung, die aber zu beheben wäre) wieder.

Beim zentrierten Rechtecksgitter erhalten wir ebenfalls eine Funktion mit zwei einfachen Polen, wie man in Abbildung 3.25 sieht. Die Werte der Verzweigungspunkte sind  $1$ ,  $-1$ ,  $\lambda$

und  $-\lambda i$ , wobei hier wieder  $\lambda$  vom Seitenverhältnis des Rechtecks abhängt. Hier ergibt sich auf dem bereits bekannten Weg die Differentialgleichung

$$f'^2 = \eta (f - 1) (f + 1) (f - \lambda i) (f + \lambda i) = \eta (f^2 - 1) (f^2 + \lambda^2) \quad \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Aus dem selben Grund wie beim Rechtecksgitter ist es auch hier zweckmäßiger, eine Funktion mit zwei einfachen Polen zu konstruieren. Entsprechend ist die rechte Seite der Differentialgleichung auch hier wieder ein Polynom vierten Grades in  $f$ , welches dem Polynom der Normalform von Legendre entspricht.

Damit wollen wir die Überlegungen zu den Konstruktionen aus Kapitel 3 abschließen, und uns einem anderen Aspekt zuwenden, den es im Bezug auf elliptische Funktionen zu untersuchen gibt.

## 5 Elliptische Funktionen und elliptische Kurven

Die Konstruktion der Weierstraßschen  $\wp$ -Funktion hat uns nicht nur eine Abrundung der Untersuchung der elliptischen Funktionen ermöglicht, sondern sie wird uns ferner die Tür zu einigen neuen Erkenntnissen öffnen, welche dem Gebiet der algebraischen Kurven bzw. der elliptischen Kurven zuzurechnen sind. Auch diesem Pfad wollen wir ein Stück weit folgen.

Einführungen in algebraische Kurven geben etwa die Bücher von Griffiths/Harris (GH94) bzw. Griffiths (Gri89), Kirwan (Kir92) oder Kendig (Ken77). Wir wollen hier kurz die Grundlagen ausführen, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen werden.

Vertiefte Einblicke in die Theorie der elliptischen Kurven geben beispielsweise die Bücher von Husemöller (Hus87), Silverman (Sil86), Lang (Lan73) oder Koblitz (Kob84).

### 5.1 Einführung in algebraische Kurven

Wir wollen uns mit komplex-projektiven ebenen algebraischen Kurven beschäftigen. Um dorthin zu kommen, beginnen wir zunächst mit der Definition einer reellen algebraischen Kurve.

**Definition 5.1.** Es sei  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom in zwei Variablen mit reellen Koeffizienten. Dann heißt die Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$ , welche durch die Gleichung  $P(x, y) = 0$  definiert ist, eine reelle, ebene algebraische Kurve. Der Grad des Polynoms  $P$  heißt Grad der Kurve.

**Bemerkung 5.2.** Die Attribute reell und eben erklären sich daraus, dass die Kurve eine Teilmenge des reellen, zweidimensionalen Vektorraums  $\mathbb{R}^2$  ist. Algebraisch heißt die Kurve, da sie durch eine algebraische Gleichung definiert ist.

Bekannte Beispiele für solche reellen, ebenen algebraischen Kurven sind etwa diejenigen vom Grad eins, also die Geraden, bzw. diejenigen vom Grad zwei, die Kegelschnitte.

Das Studium der reellen algebraischen Kurven führt sehr schnell zu Problemen, die im wesentlichen darauf zurückgeführt werden können, dass der Körper der reellen Zahlen nicht algebraisch abgeschlossen ist. Dies äußert sich etwa darin, dass man keine allgemeine Aussage darüber machen kann, wieviele Schnittpunkte eine beliebige Gerade mit einer reellen algebraischen Kurve hat.

**Beispiel 5.3.** Gegeben sei die Kurve  $P(x, y) := x^3 - y^2 + xy + x - y = 0$ . Diese hat mit der Geraden  $x = 0$  zwei Schnittpunkte:  $-y^2 - y = 0$  ergibt  $(0, 0)$  und  $(0, -1)$ . Mit der Geraden  $y = 0$  besitzt sie wegen  $x^3 + x = x(x^2 + 1) = 0$  nur den Schnittpunkt  $(0, 0)$ . Mit der Geraden  $x = y$  schließlich besitzt sie wegen  $x^3 = 0$  den dreifachen Schnittpunkt  $(0, 0)$ .

Wir gehen daher zum algebraisch abgeschlossenen Körper der komplexen Zahlen über.

**Definition 5.4.** Es sei  $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom in zwei Variablen mit komplexen Koeffizienten. Dann heißt die Punktmenge in  $\mathbb{C}^2$ , welche durch die Gleichung  $P(x, y) = 0$  definiert ist, eine affine, komplexe, ebene algebraische Kurve. Der Grad des Polynoms  $P$  heißt Grad der Kurve.

**Beispiel 5.5** (Fortsetzung von Beispiel 5.3). Über dem Körper der komplexen Zahlen besitzt die Kurve  $P(x, y) := x^3 - y^2 + xy + x - y = 0$  mit der Geraden  $y = 0$  nun drei Schnittpunkte:  $x(x^2 + 1) = 0$  liefert  $(0, 0)$ ,  $(i, 0)$  und  $(-i, 0)$ . Mit der Kurve  $x = 0$  besitzt sie jedoch immer noch nur zwei Schnittpunkte.

**Bemerkung 5.6.** Da wir grundsätzlich im Komplexen arbeiten werden (es sei denn das Gegenteil wird explizit gesagt), werden wir meist von einer affinen Kurve sprechen, wenn wir eine affine, komplexe, ebene algebraische Kurve meinen. Die Bezeichnung „ebene Kurve“ wirkt hier zunächst eigenartig, da es sich um ein reell-zweidimensionales Objekt im reell-vierdimensionalen Raum handelt. Man benutzt sie trotzdem, denn um mit diesen Objekten arbeiten zu können, benötigt man die Vorstellung einer Kurve parallel zur Vorstellung von einer Fläche.

Wir wollen nun untersuchen, wieviele Schnittpunkte eine beliebige Gerade  $L$  mit einer ebenen Kurve  $C$  hat.

Die Gerade kann wie folgt parametrisiert werden:

$$x = \alpha t + \gamma, \quad y = \beta t + \delta,$$

für feste  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ , wobei  $t$  ganz  $\mathbb{C}$  durchläuft.

Das Polynom  $P$ , welches  $C$  über  $P(x, y) = 0$  bestimmt, sei vom Grad  $n$ . Dann lässt es sich schreiben als

$$P(x, y) = P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) + \dots + P_0,$$

wobei jedes der  $P_k$  ein homogenes Polynom vom Grad  $k$  ist. Wir führen nun eine lineare Koordinatentransformation durch und setzen

$$x \leftarrow x - \gamma \quad \text{und} \quad y \leftarrow y - \delta.$$

Dies bewirkt, dass unsere Gerade eine Ursprungsgerade wird:

$$x = \alpha t \quad \text{und} \quad y = \beta t.$$

Am Grad des Polynoms ändert eine solche lineare Koordinatentransformation natürlich nichts. Wir verwenden für das neue Polynom wieder die alte Bezeichnung  $P$  und  $P_k$  für die homogenen Polynome vom Grad  $k$ . Indem wir die Parametrisierung der Geraden in die Bestimmungsgleichung der Kurve  $C$  einsetzen, erhalten wir die Gleichung

$$P_n(\alpha, \beta) t^n + P_{n-1}(\alpha, \beta) t^{n-1} + \dots + P_0 = 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt diese Gleichung genau  $n$  Lösungen, wenn man in Vielfachheit zählt. Allerdings nur dann, wenn  $P_n(\alpha, \beta) \neq 0$  ist. Diese Einschränkung ist unerwünscht. Nehmen wir aber einmal an, es gilt

$$P_n(\alpha, \beta) = \dots = P_{m+1}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{und} \quad P_m(x, y) \neq 0.$$

Dann haben wir in Vielfachheit gezählt genau  $m$  Schnittpunkte. Wir machen uns auf die Suche nach den „fehlenden“  $n - m$  Schnittpunkten, indem wir  $t = \frac{1}{s}$  substituieren und die Gleichung mit  $s^n$  durchmultiplizieren. Das Ergebnis ist:

$$P_n(\alpha, \beta) + P_{n-1}(\alpha, \beta) s + \dots + P_0 s^n = s^{n-m} (P_m(\alpha, \beta) + P_{m-1}(\alpha, \beta) s + \dots + P_0 s^m) = 0.$$

Diese Gleichung besitzt bei  $s = 0$ , was  $t = \infty$  entspricht, eine  $n - m$ -fache Lösung. Dies entspricht einem  $n - m$ -fachen Schnittpunkt von  $L$  und  $C$  im Unendlichen.



Wenn man also die „Schnittpunkte im Unendlichen“ mitzählt, so besitzt eine ebene Kurve  $n$ -ten Grades mit einer Geraden in Vielfachheit gezählt genau  $n$  Schnittpunkte. Wir müssen also unseren Raum  $\mathbb{C}^2$  ins Unendliche erweitern. Dies geschieht, indem man zur komplexen projektiven Ebene  $\mathbb{C}P^2$  übergeht. Dabei wird nicht nur ein Punkt im Unendlichen hinzugefügt, sondern ein Punkt für jede Richtung, entlang derer man in der Ebene ins Unendliche gehen kann. Dies ergibt eine ganze „unendlich ferne Gerade“.

Wir wollen die komplex-projektive Ebene  $\mathbb{C}P^2$  natürlich formal definieren. Dazu führen wir sogenannte homogene Koordinaten ein:

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  durch:

$$(X, Y, Z) \sim (X', Y', Z') \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (X, Y, Z) = \lambda (X', Y', Z')$$

Die Menge der Äquivalenzklassen  $[(X, Y, Z)]$  bezüglich dieser Äquivalenzrelation, versehen mit der Quotiententopologie ist  $\mathbb{C}P^2$ . Also entsprechen die Punkte in  $\mathbb{C}P^2$  genau den Richtungen in  $\mathbb{C}^3$ .

Wir definieren nun die Objekte, mit denen wir uns eigentlich befassen wollen:

**Definition 5.7.** Es sei  $P : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  ein homogenes Polynom ohne mehrfache Faktoren. Dann wird durch die Gleichung

$$P(X, Y, Z) = 0$$

eine (komplex-)projektive (ebene, algebraische) Kurve definiert:

$$C = \{[(X, Y, Z)] \mid P(X, Y, Z) = 0\}$$

Der Grad des Polynoms  $P$  heißt der Grad der Kurve.

**Bemerkung 5.8.** Halten wir noch zwei Dinge fest:

1. Da es sich um ein homogenes Polynom handelt, erfüllt auch tatsächlich mit einem Punkt  $(X, Y, Z)$  die gesamte Äquivalenzklasse  $[(X, Y, Z)]$  die Gleichung  $P(X, Y, Z) = 0$ .
2. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass wir nur solche homogenen Polynome  $P$  betrachten wollen, in deren Zerlegung in irreduzible Polynome,  $P = P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_k$ , kein Faktor doppelt vorkommt. In dem Spezialfall, dass  $P$  selbst schon irreduzibel ist, spricht man bei der zugehörigen Kurve auch von einer irreduziblen Kurve.

Wir schließen noch eine Definition an:

**Definition 5.9.** Eine Gerade in  $\mathbb{C}P^2$  ist definiert als die Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms ersten Grades:  $L \subset \mathbb{C}P^2$  heißt eine Gerade, wenn

$$L = \{[(X, Y, Z)] \mid P(X, Y, Z) = 0\},$$

wobei  $P$  ein homogenes Polynom vom Grad 1 ist, also von der Form

$$P(X, Y, Z) = AX + BY + CZ.$$

Diese Definition ist analog zu derjenigen von Geraden in  $\mathbb{C}^2$ . Dass dies eine sinnvolle Definition ist, werden wir nach den folgenden Überlegungen sehen:

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen projektiven Kurven und affinen Kurven. Um diesen zu erkennen, benutzen wir die kanonische Einbettung von  $\mathbb{C}^2$  in  $\mathbb{C}P^2$ :

$$\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2 \quad (x, y) \mapsto [(x, y, 1)]$$

Alternativ wäre als Bild auch  $[(x, 1, y)]$  oder  $[(1, x, y)]$  möglich, d.h. es gibt eigentlich drei kanonische Einbettungen.

**Lemma 5.10** (Zusammenhang zwischen projektiven und affinen Kurven).  $\mathbb{C}^2$  sei in kanonischer Weise in  $\mathbb{C}P^2$  eingebettet. Dann gehört zu einer projektiven Kurve  $C \subset \mathbb{C}P^2$  eine eindeutig bestimmte affine Kurve  $C_0 \subset \mathbb{C}^2$  mit

$$C \cap \mathbb{C}^2 = C_0$$

und umgekehrt gehört zu jeder affinen Kurve in dieser Weise eine eindeutige projektive Kurve.

**Bemerkung 5.11.** Nachdem wir drei kanonische Einbettungen haben, ist die Eindeutigkeit als Eindeutigkeit nach Festlegung auf eine der drei kanonischen Einbettungen zu verstehen.

*Beweis.* Wir arbeiten mit der Einbettung  $(x, y) \mapsto [(x, y, 1)]$ .

Von einer gegebenen affinen Kurve  $C_0 \subset \mathbb{C}^2$  mit zugehörigem Polynom  $p(x, y)$  vom Grad  $d$  kommt man durch

$$P(X, Y, Z) := Z^d \cdot p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

zu einer projektiven Kurve

$$C = \{[(X, Y, Z)] \mid P(X, Y, Z) = 0\},$$

welche

$$C \cap \mathbb{C}^2 = C_0$$

erfüllt.

Ist umgekehrt

$$C = \{[(X, Y, Z)] \mid P(X, Y, Z) = 0\},$$

gegeben, setze

$$p(x, y) := P(x, y, 1).$$

Dann erfüllt die durch  $p(x, y) = 0$  definierte affine Kurve  $C_0$  wiederum

$$C \cap \mathbb{C}^2 = C_0.$$

□

**Bemerkung 5.12.** Der Prozess des Übergangs von der affinen Kurve zur projektiven Kurve heißt Homogenisierung. Man spricht auch vom Abschluss der affinen Kurve im projektiven Raum. Der Weg von der projektiven zur affinen Kurve nennt sich Dehomogenisierung.

Wir sehen also insbesondere, dass die Geraden in  $\mathbb{C}P^2$  genau die Geraden in  $\mathbb{C}^2$  sind, abgeschlossen durch einen unendlich fernen Punkt.

Wir haben die komplex projektiven Kurven mit dem Ziel eingeführt, eine allgemeingültige Aussage über die Zahl der Schnittpunkte einer solchen Kurve mit einer beliebigen Geraden zu machen. Überzeugen wir uns also, dass dies nun tatsächlich möglich ist.

**Satz 5.13.** *Sei  $C \subset \mathbb{C}P^2$  eine komplex-projektive Kurve vom Grad  $n$  und  $L \subset \mathbb{C}P^2$  eine Gerade, welche nicht in  $C$  enthalten ist. Dann besitzt  $C$  mit einer beliebigen Geraden  $L \subset \mathbb{C}P^2$  in Vielfachheit gezählt genau  $n$  Schnittpunkte.*

**Beispiel 5.14** (2. Fortsetzung von Beispiel 5.3). Wir projektivieren die Kurve  $P(x, y) = x^3 - y^2 + xy + x - y = 0$  und erhalten  $X^3 - Y^2Z + XYZ + XZ^2 - YZ^2 = 0$ . Diese Kurve wollen wir mit der Gerade  $X = 0$  schneiden. Es bleibt  $-Y^2Z - YZ^2 = 0$ . Den Bereich der Kurve, wo  $Z \neq 0$  gilt, kennen wir bereits. Wir erhalten ihn durch Dehomogenisierung nach  $Z = 1$ :  $-y^2 - y = 0$ . Dies ergibt die Lösungen  $[(0, 0, 1)]$  und  $[(0, -1, 1)]$ . Der Bereich mit  $Z = 0$  liefert schließlich den fehlenden dritten Schnittpunkt:  $[(0, 1, 0)]$ .

*Beweis von Satz 5.13.* Es sei  $P$  das definierende homogene Polynom für  $C$  und  $G$  das definierende Polynom für die Gerade  $L$ , also vom Grad 1:

$$G(X, Y, Z) = AX + BY + CZ.$$

Indem wir die lineare Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} X &\leftarrow X \\ Y &\leftarrow Y \\ Z &\leftarrow AX + BY + CZ \end{aligned}$$

durchführen, können wir annehmen, dass  $L$  die Gerade  $Z = 0$  ist. Das Polynom  $P$  benennen wir nach der Transformation nicht um. Dass  $L$  nicht in  $C$  enthalten ist, bedeutet, dass  $G$  nicht  $P$  teilt. Da  $G$  das Polynom  $P$  nicht teilt, lässt sich das transformierte  $P$  nicht durch  $Z$  teilen. Es gibt also einen Summanden in  $P$ , in dem  $Z$  nicht vorkommt:

$$P(X, Y, Z) = DX^kY^{n-k} + \dots, \quad D \neq 0.$$

Wir führen nun folgende Koordinatentransformation durch:

$$\begin{aligned} X &\leftarrow X + D^{-k}Y \\ Y &\leftarrow Y \\ Z &\leftarrow Z \end{aligned}$$

Dadurch wird der Term  $DX^kY^{n-k}$  zu

$$D \left( X + D^{-k}Y \right)^k Y^{n-k} = DD^{-1}Y^kY^{n-k} + \dots = Y^n + \dots,$$

also erhält man im neuen  $P$  einen Term  $Y^n$ :

$$P(X, Y, Z) = Y^n + \text{Terme niedrigerer Ordnung in } Y$$

Die simultanen Lösungen von  $P = 0$  und  $G = 0$  sind gegeben durch die Gleichung

$$P(X, Y, 0) = 0.$$

Es gilt:

$$\# \{P(X, Y, 0) = 0\} = \# \{P(X, Y, 0) = 0 \mid X \neq 0\} + \# \{P(0, Y, 0) = 0\}.$$

Der zweite Summand ist Null, da

$$\# \{P(0, Y, 0) = 0\} = \# \{[0, Y, 0] \mid Y^n = 0\}$$

aber  $[0, 0, 0] \notin \mathbb{C}P^2$ .

Wir dehomogenisieren den ersten Summanden nach  $X$ , wodurch wegen  $X \neq 0$  keine Lösungen verloren gehen, und wenden den Fundamentalsatz der Algebra an:

$$\begin{aligned} \# \{P(X, Y, 0) = 0 \mid X \neq 0\} &= \# \{P(1, y, 0) = 0\} = \\ &= \# \{y^n + (\text{Terme niedrigerer Ordnung in } y) = 0\} = \\ &= n, \end{aligned}$$

wenn man in Vielfachheit zählt. Damit haben also  $L$  und  $C$  in Vielfachheit genau  $n$  Schnittpunkte.  $\square$

Dieses Resultat werden wir im Folgenden noch benötigen. Wir schließen noch eine Definition an:

**Definition 5.15.** Eine Kurve heißt regulär, wenn sie keinen Punkt enthält, in dem alle partiellen Ableitungen des definierenden Polynoms verschwinden.

**Bemerkung 5.16.** Eine solche Kurve ist als Urbild eines regulären Wertes eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^2$ .

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Einführung des Begriffs der Parametrisierung einer Kurve.

**Definition 5.17.** Es sei  $C \in \mathbb{C}P^2$  eine komplex-projektive Kurve. Eine Abbildung  $\phi : M \rightarrow C$  einer Riemannschen Fläche  $M$  (also einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit), welche surjektiv ist und eine Immersion, deren Ableitung  $D_z\phi$  also in jedem Punkt injektiv ist, heißt Parametrisierung von  $C$ . Eine Kurve  $C$ , welche eine Parametrisierung besitzt, heißt regulär parametrisierbare Kurve.

**Bemerkung 5.18.** Besitzt eine Kurve eine Parametrisierung, so kann sie zwar Selbstschnitte besitzen, aber sie muss sich dennoch „anständig“ verhalten. Die Injektivität von  $D\phi$  stellt sicher, dass es für jeden Punkt  $z \in G$  es eine Umgebung  $U$  gibt, so dass  $\phi(U)$  Graph einer holomorphen Funktion ist.

Zu impliziten Funktionentheoremen siehe etwa (Ken77) Kapitel II Abschnitt 3.

## 5.2 Das Additionstheorem der $\wp$ -Funktion

Wir betrachten nun ein Gitter  $\Lambda$  und die zu diesem Gitter gehörige  $\wp$ -Funktion. Wir haben gesehen, dass sie die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = \wp^3 - g_2\wp - g_3$$

erfüllt. Für einen Toruspunkt  $z \neq 0$  gilt mit  $x = \wp(z)$ ,  $y = \wp'(z) \in \mathbb{C}$  die Gleichung

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

Wir definieren uns nun durch Homogenisierung dieser Gleichung eine komplex-projektive algebraische Kurve, die zur  $\wp$ -Funktion, beziehungsweise zum Gitter  $\Lambda$  gehört:

**Definition 5.19.** Die Kurve  $E \subset \mathbb{C}P^2$ , welche durch

$$Y^2Z - 4X^3 + g_2(\Lambda)XZ^2 + g_3(\Lambda)Z^3 = 0$$

definiert ist, heißt die elliptische Kurve zum Gitter  $\Lambda$ .

**Lemma 5.20.** Die Kurve  $E$  ist regulär.

*Beweis.* Das Polynom

$$P(X, Y, Z) = Y^2Z - 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3$$

besitzt die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial X} &= -12X^2 + g_2Z^2 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} &= 2YZ \\ \frac{\partial P}{\partial Z} &= Y^2 + 2g_2XZ + 3g_3Z^2. \end{aligned}$$

Wir suchen diejenigen Punkte in  $\mathbb{C}P^2$ , für die alle drei partiellen Ableitungen verschwinden.  $\frac{\partial P}{\partial Y} = 0$  bedeutet, dass  $Y = 0$  oder  $Z = 0$  gilt.

**1. Fall:**  $Z \neq 0$ . Dann ist  $Y = 0$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial X} &= -12X^2 + g_2Z^2 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Z} &= 2g_2XZ + 3g_3Z^2 \end{aligned}$$

Setzt man die dritte partielle Ableitung gleich Null, so erhält man

$$2g_2X = -3g_3Z.$$

Wäre  $g_2 = 0$ , so wäre auch  $g_3 = 0$  und damit  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 = 0$ , ein Widerspruch. Also gilt:

$$X = -\frac{3g_3}{2g_2}Z.$$

Einsetzen in die erste partielle Ableitung und Nullsetzen ergibt:

$$12\frac{9g_3^2}{4g_2^2}Z^2 = g_2Z^2 \Leftrightarrow 27g_3^2 - g_2^3 = 0,$$

ein Widerspruch. In diesem Fall verschwinden also niemals alle drei partiellen Ableitungen gleichzeitig.

**2.Fall:**  $Z = 0$ . In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial X} &= -12X^2 \\ \frac{\partial P}{\partial Y} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial Z} &= Y^2.\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass nur für  $X = Y = Z = 0$  alle drei partiellen Ableitungen verschwinden. Der Punkt  $[(0, 0, 0)]$  liegt aber gar nicht in  $\mathbb{C}P^2$ , also insbesondere nicht auf der Kurve.

Die Kurve  $E$  ist also regulär, und damit eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{C}P^2$ . □

**Lemma 5.21.** *Die Kurve  $E$  ist irreduzibel.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass sich das Polynom

$$P(X, Y, Z) = Y^2Z - 4X^3 + g_2XZ^2 + g_3Z^3$$

nicht als

$$(aX + bY + cZ)(dX^2 + eY^2 + fZ^2 + gXY + hYZ + iXZ)$$

schreiben lässt. Angenommen, dies wäre doch der Fall.

Da in  $P$  kein  $Y^3$ -Term vorkommt, muss  $be = 0$  gelten.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

**1.Fall:**  $b = 0$

Da in jedem Fall ein  $X^3$ -Term und ein  $Y^2Z$ -Term auftauchen, muss  $a, d \neq 0$  und  $e, c \neq 0$  gelten.

Da kein  $XY^2$ -Term auftritt, muss  $ae = 0$  gelten, was ein Widerspruch zu  $a, e \neq 0$  ist.

**2.Fall:**  $b \neq 0$ , also  $e = 0$ .

Da es keinen  $XY^2$ -Term gibt, muss  $g = 0$  gelten. Da es auch keinen  $X^2Y$ -Term gibt, muss  $ag + bd = bd = 0$  und damit  $d = 0$  gelten. Dann gibt es aber keinen  $X^3$ -Term, ein Widerspruch.

Damit ist gezeigt, dass das Polynom  $P$  irreduzibel ist.  $\square$

**Bemerkung 5.22.** Die Kurve  $E$  besitzt mit jeder beliebigen Geraden  $G \subset \mathbb{C}P^2$  also in Vielfachheit gezählt genau drei Schnittpunkte.

**Korollar 5.23.** Jedes homogene Polynom dritten Grades der Form  $P(X, Y, Z) = Y^2Z + aX^3 + bX^2Z + cXZ^2 + dZ^3$  mit  $a \neq 0$  ist irreduzibel.

*Beweis.* Betrachtet man den Beweis von Lemma 5.21, so stellt man fest, dass lediglich eingeht, dass es keine gemischten  $X$ - und  $Y$ -Terme gibt, sowie, dass der  $X^3$ -Term nicht verschwindet.  $\square$

Wir gehen nun genauer auf den Zusammenhang zwischen  $E$  und der  $\wp$ -Funktion ein. Indem wir uns zunächst auf diejenigen Punkte beschränken, für die  $Z \neq 0$  gilt, können wir gemäß  $Z = 1$ , oder anders gesagt  $x = \frac{X}{Z}$  und  $y = \frac{Y}{Z}$ , dehomogenisieren und erhalten wieder die Gleichung

$$y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3,$$

welche aufgrund der algebraischen Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion von jedem Punktepaar  $x = \wp(z)$ ,  $y = \wp'(z)$  mit  $z \in (\mathbb{C}/\Lambda) \setminus \{0\}$  erfüllt wird. Wir werden die Kurve  $E$  mit Hilfe von  $\wp$  und  $\wp'$  parametrisieren. Wir zeigen sogar mehr:

**Satz 5.24.** Die Abbildung

$$\phi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow E \subset \mathbb{C}P^2 \quad z \mapsto \begin{cases} [(\wp(z), \wp'(z), 1)] & \text{für } z \neq 0 \\ [(0, 1, 0)] & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

ist eine Biholomorphie.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass

$$\hat{\phi} : (\mathbb{C}/\Lambda) \setminus \{0\} \rightarrow E \setminus \{[(0, 1, 0)]\} \quad z \mapsto [(\wp(z), \wp'(z), 1)]$$

bijektiv ist. Dann ist die Behauptung für  $\phi$  leicht zu folgern. Zunächst machen wir uns klar, dass  $[(0, 1, 0)]$  der einzige Punkt auf  $E$  ist, für den  $Z = 0$  gilt. Dies sieht man direkt, wenn man in der definierenden Gleichung  $Z = 0$  einsetzt. Alle Punkte in  $E \setminus \{[(0, 1, 0)]\}$  sind also insbesondere von der Form  $[(u, v, 1)]$ .

- Surjektivität:

Sei  $[(u, v, 1)] \in E \setminus \{[(0, 1, 0)]\}$ . Es gilt also die Gleichung

$$v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3.$$

Da die  $\wp$ -Funktion jeden Wert annimmt, existiert ein  $z \in \mathbb{C}/\Lambda$ ,  $z \neq 0$  mit  $\wp(z) = u$ . Aufgrund der algebraischen Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion gilt  $\wp'(z) = \pm v$ .

Im Fall  $\wp'(z) = v$  folgt direkt  $[(u, v, 1)] = [(\wp(z), \wp'(z), 1)]$ .

Im Fall  $\wp'(z) = -v$  folgt  $[(u, v, 1)] = [(\wp(-z), \wp'(-z), 1)]$ , da  $\wp$  eine gerade Funktion ist, und  $\wp'$  eine ungerade Funktion.

Dies zeigt die Surjektivität von  $\hat{\phi}$  und damit auch von  $\phi$ .

- Injektivität:

Es gelte  $[(\wp(z), \wp'(z), 1)] = [(\wp(w), \wp'(w), 1)]$ , also  $\wp(z) = \wp(w)$  und  $\wp'(z) = \wp'(w)$ .

Aus  $\wp(z) = \wp(w)$  folgt  $z \equiv \pm w$ , denn:

$$f(z) := \wp(z) - \wp(w)$$

ist eine elliptische Funktion der Ordnung 2. Nullstellen liegen bei  $[z] = \pm[w]$ . Im Fall  $[w] = -[w]$  ist  $w$  ein Halbgitterpunkt und daher gilt  $f'(w) = \wp'(w) = 0$ . Dann ist  $[z] = [w]$  eine doppelte Nullstelle von  $f$ .

Haben wir  $z \equiv w$ , so sind wir fertig. Aus  $z \equiv -w$  folgt wegen  $\wp'(z) = \wp'(w)$ , dass  $\wp'(w) = 0$  gilt, und  $w$  daher ein Halbgitterpunkt ist. In diesem Fall impliziert  $z \equiv -w$  auch  $z \equiv w$ .

Das zeigt die Injektivität von  $\hat{\phi}$ . Damit ist auch  $\phi$  injektiv.

Nun zur Holomorphie von  $\phi$ . Wir betrachten zunächst diejenigen Punkte mit  $\phi(z) \neq [(0, 1, 0)]$ , also  $z \neq 0$ . Dazu können wir nach  $Z$  dehomogenisieren. In dieser Karte wird  $\phi$  zu

$$z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)),$$

was für  $z \neq 0$  holomorph ist.

Wir überzeugen uns auch gleich, dass  $D\phi$  nicht verschwindet.

$$D_z\phi = (\wp'(z), \wp''(z)),$$

wobei nicht beide Komponenten gleichzeitig verschwinden, da  $\wp'$  nur einfache Nullstellen besitzt.

Um  $z = 0$  herum brauchen wir eine andere Karte. Wir dehomogenisieren nach  $Y$ , indem wir durch  $\wp'$  dividieren. Wir erhalten

$$z \mapsto \left( \frac{\wp}{\wp'}(z), \frac{1}{\wp'}(z) \right).$$

Da  $\wp$  in  $z = 0$  einen doppelten Pol und  $\wp'$  dort einen dreifachen Pol hat, hat die erste Komponente dort eine einfache Nullstelle und die zweite Komponente eine dreifache Nullstelle.  $\phi$  ist in  $z = 0$  also ebenfalls holomorph.

Nun zu  $D_z\phi$ : Da  $\wp$  einen doppelten Pol bei  $z = 0$  hat, hat  $g := 1/\wp$  dort eine doppelte Nullstelle. Durch  $g$  ausgedrückt, ist  $\phi$  von der Form

$$z \mapsto \left( -\frac{g}{g'}(z), -\frac{g^2}{g'}(z) \right)$$

und damit erhält man für die erste Komponente von  $D_z\phi$ :

$$\left( -\frac{g}{g'} \right)'(z) = -\frac{g'^2 - gg''}{g'^2}(z),$$

was in  $z = 0$  den Wert  $-1$  annimmt.

Die Abbildung  $\phi$  ist also tatsächlich holomorph und  $D\phi$  verschwindet in keinem Punkt. Daher ist  $\phi$  biholomorph, wie behauptet.  $\square$



Damit sind  $\mathbb{C}/\Lambda$  und  $E$  biholomorph äquivalent. Wir können außerdem die Gruppenstruktur von  $\mathbb{C}/\Lambda$  auf  $E$  übertragen:

**Lemma 5.25** (Addition auf der Kurve). *Die Kurve  $E$  zusammen mit der Verknüpfung*

$$+ : E \times E \rightarrow E \quad \phi(z_1) + \phi(z_2) := \phi(z_1 + z_2)$$

*ist eine abelsche Gruppe.*

*Beweis.* Alle Gruppeneigenschaften werden von der Gruppe  $(\mathbb{C}/\Lambda, +)$  ererbt. Neutrales Element ist  $[(0, 1, 0)] \in E$ .  $\square$

**Bemerkung 5.26.** Durch die in Lemma 5.25 definierte Gruppenstruktur auf der kubischen Kurve  $E$  wird eigentlich erst die Bezeichnung „elliptische“ Kurve gerechtfertigt, welche wir bereits zu Beginn dieses Abschnitts in Definition 5.19 eingeführt haben. In der Literatur<sup>42</sup> werden elliptische Kurven definiert als reguläre, kubische, ebene Kurven (über einem beliebigen Körper  $K$ ), zusammen mit einem ausgezeichneten Punkt  $O$ , welcher auf der Kurve liegt. Aus diesen Voraussetzungen lässt sich dann eine Gruppenstruktur gewinnen. Die Vorgehensweise hierzu werden wir gleich sehen. Die Theorie der elliptischen Kurven über endlichen Körpern besitzt Anwendungen in der Kryptographie.

**Satz 5.27** (Additionstheorem der  $\wp$ -Funktion). *Drei Punkte auf der Kurve  $E$  haben genau dann die Summe  $0 = [(0, 1, 0)]$ , wenn sie auf einer Geraden liegen, und jeder Kurvenpunkt so oft als Summand vorkommt, wie die Vielfachheit des Schnittes der Gerade mit der Kurve angibt.*

Wir wollen zwei Beweise für Satz 5.27 geben, welche die Situation aus verschiedenen Perspektiven beleuchten.

*Beweis.* Zunächst machen wir uns klar, dass drei Punkte

$$[(X_1, Y_1, Z_1)], [(X_2, Y_2, Z_2)], [(X_3, Y_3, Z_3)] \in \mathbb{C}P^2$$

genau dann auf einer Geraden liegen, wenn die Vektoren

$$(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) \in \mathbb{C}^3$$

linear abhängig sind. Diese Erkenntnis ist insofern trivial, als sie lediglich auf dem Wechsel der Blickwinkel zwischen Punkten in  $\mathbb{C}P^2$  und Richtungen in  $\mathbb{C}^3$  beruht. Die Geraden in  $\mathbb{C}P^2$  sind ja durch Gleichungen der Form  $AX + BY + CZ = 0$  definiert, wobei  $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ . Das sind genau die Hyperebenen in  $\mathbb{C}^3$ . Die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3)$$

ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{pmatrix} = 0.$$

<sup>42</sup>etwa bei Silverman (Sil86) auf S. 63, bei Husemüller (Hus87) auf S.15, oder bei Koblitiz (Kob84) auf S. 9

In Lemma 5.21 haben wir gezeigt, dass  $E$  eine irreduzible Kurve ist und daher keine Gerade enthält. Daher folgt aus Satz 5.13, dass  $E$  als Kurve vom Grad 3 mit einer beliebigen Gerade in Vielfachheit gezählt drei Schnittpunkte besitzt.

Es genügt nun zu zeigen, dass drei Punkte, welche sich zu 0 summieren, auf einer Geraden liegen.

Denn mögen umgekehrt drei Kurvenpunkte  $A, B, C \in E$  gegeben sein, welche auf einer Geraden  $G$  liegen. Dabei muss jeder Punkt so oft vorkommen, wie die Vielfachheit des Schnittes der Geraden mit der Kurve angibt. Dadurch wird durch zwei davon, etwa durch  $A, B$  bereits die Gerade  $G$  festgelegt. Denn falls  $A = B$  ist, dann muss die Gerade in  $A$  tangential an die Kurve verlaufen und ist damit auch eindeutig festgelegt. Ferner gibt es genau einen dritten Punkt  $C'$ , mit dem sie sich zu Null aufsummieren. Mit diesem dritten Punkt  $C'$  liegen die beiden dann auf einer gemeinsamen Geraden  $G'$ , welche bereits durch  $A$  und  $B$  festgelegt ist und daher identisch mit  $G$  sein muss. Da  $G$  die Kurve außerdem genau dreimal schneidet, muss es sich bei dem dritten Punkt  $C'$  um den ursprünglichen dritten Punkt  $C$  handeln. Also addieren sich die drei Punkte  $A, B, C$  zu Null, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Nun also zum Beweis der obigen Aussage. Gegeben seien drei Punkte  $A, B, C$ , welche sich zu  $0 = [(0, 1, 0)]$  aufsummieren. Wir unterscheiden drei Fälle.

**1.Fall:** o.B.d.A. gilt  $A = B = 0 = [(0, 1, 0)]$ .

Dann muss auch  $C = 0 = [(0, 1, 0)]$  gelten, damit die Punkte sich zu  $0 = [(0, 1, 0)]$  addieren. Wir müssen zeigen, dass  $[(0, 1, 0)]$  ein dreifacher Schnittpunkt einer Geraden mit der Kurve  $E$  ist. Wir haben bereits gesehen (im Beweis von Satz 5.24), dass nur  $[(0, 1, 0)]$  auf  $E$  und der Geraden  $Z = 0$  liegt. Damit muss es sich um einen dreifachen Schnittpunkt handeln.

**2.Fall:** o.B.d.A. gilt  $A = [(0, 1, 0)]$  und  $B, C \neq [(0, 1, 0)]$

Es sei  $B = [(\wp(u), \wp'(u), 1)]$  und  $C = [(\wp(v), \wp'(v), 1)]$ .

Wegen

$$\phi(0) = [(0, 1, 0)] = A + B + C = \phi(0) + \phi(u) + \phi(v) = \phi(0 + u + v),$$

muss  $v = -u$  gelten.

Die Determinante sieht daher so aus:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(-u) & \wp'(-u) & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(u) & -\wp'(u) & 1 \end{pmatrix} = \wp(u) - \wp(u) = 0.$$

Die drei Punkte liegen also auf einer gemeinsamen Geraden.

**3.Fall:**  $A, B, C \neq [(0, 1, 0)]$  Es gilt  $A = [(\wp(u), \wp'(u), 1)]$ ,  $B = [(\wp(v), \wp'(v), 1)]$ ,  $C = [(\wp(w), \wp'(w), 1)]$ . Dass die drei sich zu Null aufsummieren bedeutet:  $w = -u - v$ .

Die drei Punkte liegen genau dann auf einer Geraden, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(-u-v) & \wp'(-u-v) & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Um das Verschwinden der Determinante zu zeigen, definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &:= \det \begin{pmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(z) & \wp'(z) & 1 \end{pmatrix} = \\ &=: \alpha + \beta\wp(z) + \gamma\wp'(z). \end{aligned}$$

Falls  $\gamma$  von Null verschieden ist, handelt es sich dabei um eine elliptische Funktion der Ordnung 3. Sie hat einen dreifachen Pol in 0 und Nullstellen bei  $u$  und  $v$ . Wegen Satz 2.23 müssen sich die drei Nullstellen zur Polsumme  $0 + 0 + 0 = 0$  addieren. Daher muss die dritte Nullstelle von  $f$  bei  $-u - v$  liegen.

Nun möge  $0 = \gamma = \wp(v) - \wp(u)$  gelten. Dies impliziert  $u = \pm v$ . Dabei kann allerdings  $u = -v$  nicht auftreten, da sonst  $w = 0$  gilt und wir in einem der ersten beiden Fälle sind. Also gilt  $u = v$ . In diesem Fall gilt  $f \equiv 0$  und die Behauptung folgt ebenfalls.

□

**Bemerkung 5.28.** Wir wollen uns Satz 5.27 veranschaulichen. Dazu betrachten wir den reellen, affinen Teil der elliptischen Kurve zur Differentialgleichung  $\wp'^2 = 4\wp^3 - 4\wp$ .<sup>43</sup> Der unendlich ferne Punkt  $[(0, 1, 0)]$  gehört zu der Richtung, welche zur  $y$ -Achse parallel ist. Verläuft eine Gerade tangential an die Kurve, so ist der Berührungspunkt als doppelter Schnittpunkt zu betrachten. In Abbildung 5.1 sind einige Geraden-Kurven-Schnitte dargestellt.

Aus der Aussage des Satzes 5.27 ergibt sich ein rein geometrischer Zugang zum Gruppengesetz auf der Kurve  $E$ : Sind zwei beliebige Punkte gegeben, so ergibt sich ihre Summe als das negative des dritten Schnittpunktes der eindeutig bestimmten Geraden durch diese beiden Punkte mit der Kurve  $E$ . Auf diesem Weg lässt sich für eine elliptische Kurve (definiert gemäß Bemerkung 5.26) ausgehend von dem ausgezeichneten Punkt  $O$  das Gruppengesetz gewinnen. Hierfür benötigt man lediglich den Begriff des projektiven Raums, welcher über beliebigen Körpern zur Verfügung steht.

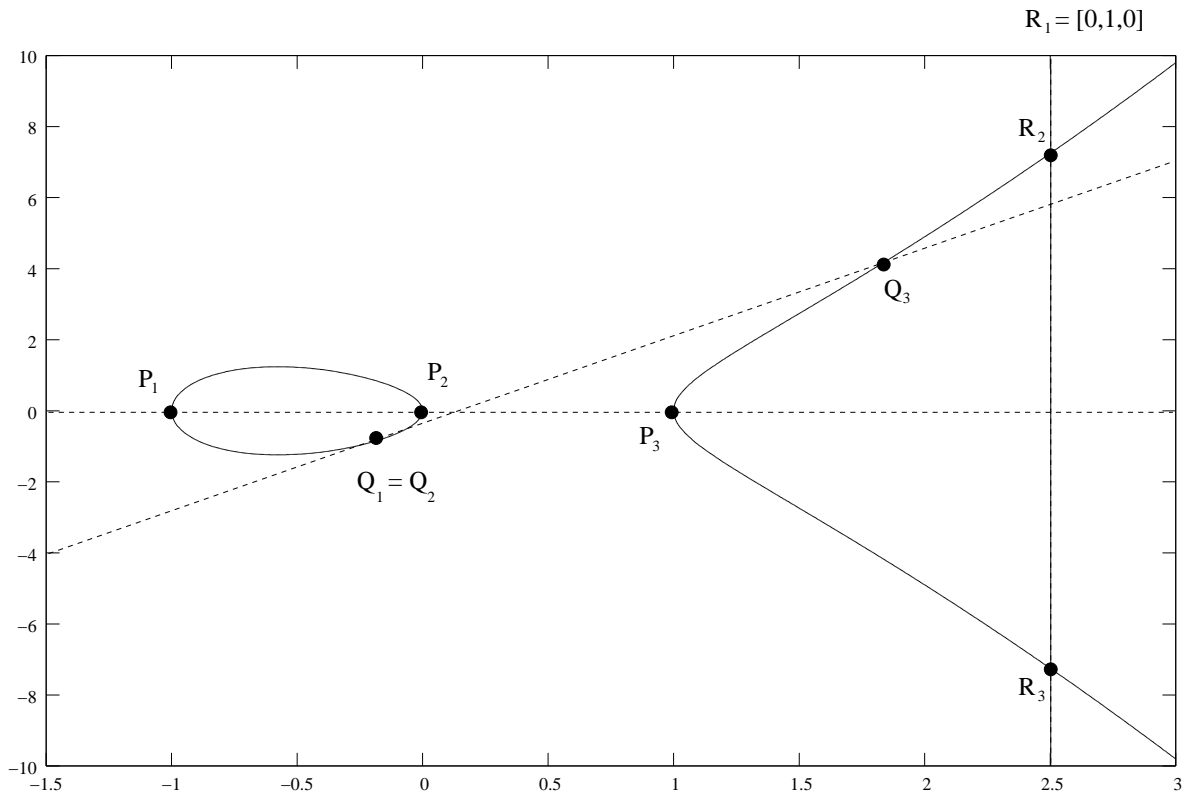
Wie versprochen, wollen wir noch einen weiteren Beweis für Satz 5.27 geben, in dem wir uns auf die Theorie der Riemannschen Flächen stützen.

*Alternativbeweis von Satz 5.27.* Wir haben bereits eingesehen, dass es genügt, eine Richtung zu zeigen. Diesmal wählen wir die andere: Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der Kurve  $E$ , in der korrekten Vielfachheit genommen, addieren sich zu Null.

Zunächst zeigen wir, dass es eine Gerade gibt, für die die Behauptung erfüllt ist. Dies ist die Gerade  $Z = 0$ . Sie schneidet  $E$  dreifach in  $[(0, 1, 0)]$ . Die Schnittpunkte addieren sich also wirklich zu Null.

Im nächsten Schritt zeichnen wir einen Punkt  $P \in \mathbb{C}P^2$  aus, der nicht auf  $E$  liegt. Wir wollen alle Geraden durch  $P$  betrachten. Dazu wählen wir noch eine Gerade  $G$ , die  $P$  nicht enthält.

<sup>43</sup>Wir sehen, dass  $g_3 = 0$  gilt. Es handelt sich also um die  $\wp$ -Funktion zum Quadratgitter.

Abbildung 5.1: Das Additionstheorem der  $\wp$ -Funktion

Die Menge der Punkte auf  $G$  entspricht bijektiv der Menge der Geraden durch  $P$ , da jede Gerade durch  $P$  die Gerade  $G$  in genau einem Punkt schneidet, und jeder Punkt  $Q$  auf  $G$  genau eine Gerade durch  $P$  definiert: diejenige durch  $P$  und  $Q$  (vgl. Abbildung 5.2).

Wir definieren nun eine Abbildung  $F_P : G \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ . Diese ordnet einem Punkt  $Q \in G$  die Summe der Urbilder (unter  $\phi$ ) der drei Schnittpunkte der Geraden durch  $P$  und  $Q$  mit  $E$  zu. Wir haben zu zeigen, dass  $F_P$  holomorph ist. Diese Abbildung können wir dann nach  $\mathbb{C}$  liften, da  $G$  isomorph zu  $\mathbb{C}P^1$  und damit einfach zusammenhängend ist. Da  $G$  kompakt ist, liegt eine holomorphe Abbildung von einer kompakten Menge nach  $\mathbb{C}$  vor, welche also konstant ist. Daher muss bereits  $F_P$  konstant sein.

Zeigen wir also, dass  $F_P$  holomorph ist. Dazu betrachten wir zunächst die Hintereinanderschaltung

$$\tilde{U} := \pi \circ \phi : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow G,$$

wobei  $\pi : \mathbb{C}P^2 \setminus \{P\} \rightarrow G$  die Zentralprojektion durch  $P$  auf  $G$  ist. Dies ist eine algebraische Abbildung und daher insbesondere holomorph. Als Hintereinanderschaltung zweier holomorpher Abbildungen ist  $\tilde{U}$  holomorph.<sup>44</sup> Da  $E$  mit jeder Geraden in Vielfachheit gezählt drei Schnittpunkte besitzt, ist der Abbildungsgrad 3. Es gibt nur endlich viele Punkte  $Q \in G$ , welche nicht drei verschiedene Urbilder unter der verzweigten Überlagerung  $\tilde{U}$  besitzen.<sup>45</sup> Für jeden anderen Punkt  $Q \in G$  gibt es also zu jedem der drei Urbildpunkte eine lokale,

<sup>44</sup>Beachte, dass  $P$  nicht in  $E$  enthalten ist.

<sup>45</sup>Verzweigungspunkte liegen isoliert

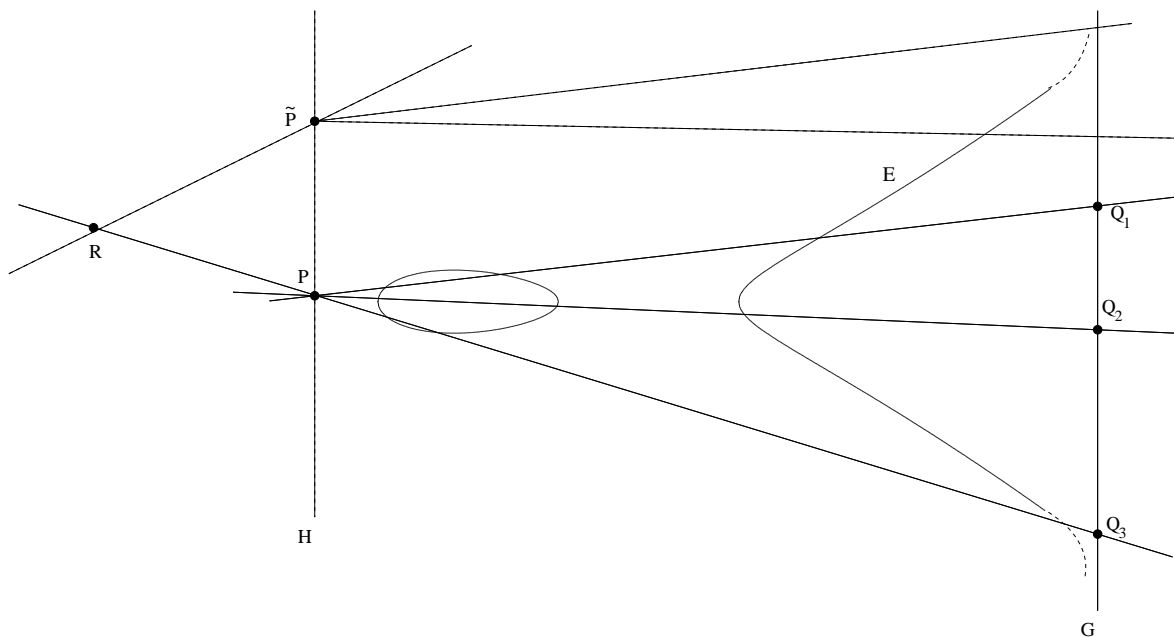


Abbildung 5.2: Beweisskizze zum Alternativbeweis

holomorphe Umkehrfunktion. Bildet man nun  $Q$  auf die Summe seiner drei Urbildpunkte ab, so ist diese Abbildung eindeutig und holomorph. Da die Abbildung stetig auch in die Bilder der Verzweigungspunkte von  $\tilde{U}$  fortgesetzt werden kann, ist sie lokal um diese Punkte herum beschränkt und daher nach dem Riemannschem Hebbarkeitssatz dort ebenfalls holomorph. Wir konnten also tatsächlich zeigen, dass  $F_P$  holomorph ist und wissen deshalb nun, dass  $F_P$  konstant ist.

Mit dem selben Argument können wir nun für eine ganze Gerade  $H$  durch  $P$  folgern, dass  $F_{\tilde{P}}$  für alle  $\tilde{P} \in H$  konstant ist. Wir müssen jetzt also nur noch zeigen, dass diese Konstanten alle den selben Wert haben.

Dazu wählen wir einen letzten Punkt  $R \notin H$ . Auch für diesen Punkt gilt wieder, dass  $F_R$  konstant ist. Da aber durch jedes  $\tilde{P} \in H$  auch eine Gerade durch  $R$  geht, nehmen alle  $F_{\tilde{P}}$  den selben Wert an wie  $F_R$ .

Da sich in  $\mathbb{C}P^2$  je zwei Geraden schneiden, gilt also, dass für jede Gerade in  $\mathbb{C}P^2$  die Summe ihrer Schnittpunkte mit  $E$  gleich ist. Nachdem wir eine Gerade kennen, deren Schnittpunkte sich zu 0 addieren, muss dies für alle Geraden gelten.  $\square$

### 5.3 Additionstheorem zu allen elliptischen Funktionen der Ordnung 2

Als nächstes wollen wir uns mit der allgemeineren Situation einer beliebigen elliptischen Funktion der Ordnung 2 beschäftigen, und herausfinden, ob und in wie weit sich die Erkenntnisse des vorhergehenden Abschnittes übertragen lassen.

Wir haben in Lemma 4.20 festgestellt, dass jede elliptische Funktion  $f$  der Ordnung 2 eine Differentialgleichung der Form

$$f'^2 = Q(f)$$

erfüllt, wobei  $Q$  ein Polynom vom Grad 3 oder 4 mit getrennten Nullstellen ist. Für ein Punktepaar  $x = f(z)$ ,  $y = f'(z)$  gilt daher stets

$$y^2 = Q(x).$$

Indem wir uns also an der Differentialgleichung orientieren, können wir wie zuvor für die  $\wp$ -Funktion geschehen, durch Homogenisierung eine Kurve definieren:

**Definition 5.29.** Sei  $f$  eine elliptische Funktion 2. Ordnung, und die zugehörige Differentialgleichung sei

$$f'^2 = Q(f).$$

Dann heißt die projektive algebraische Kurve  $C_f$ , welche durch

$$Z^d \cdot \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 = Z^d \cdot Q\left(\frac{X}{Z}\right)$$

beziehungsweise durch

$$0 = -Z^d \cdot \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 + Z^d \cdot Q\left(\frac{X}{Z}\right) =: P(X, Y, Z)$$

definiert ist, die zu  $f$  gehörige Kurve. Dabei ist  $d$  der Grad des Polynoms  $Q$ .

Das ganze sieht nun aber komplizierter aus, als es ist. Am einfachsten sieht man an einem Beispiel, was passiert.

**Beispiel 5.30.** Die elliptische Funktion  $f$  möge die Differentialgleichung

$$f'^2 = (1 - f^2)(1 - 4f^2) =: Q(f)$$

erfüllen. Für zwei Punkte  $x = f(z)$ ,  $y = f'(z)$  gilt dann

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - 4x^2).$$

Dann ist die zugehörige projektive Kurve definiert durch die homogenisierte Gleichung

$$Y^2 Z^2 = (Z^2 - X^2)(Z^2 - 4X^2)$$

bzw.

$$0 = -Y^2 Z^2 + (Z^2 - X^2)(Z^2 - 4X^2) =: P(X, Y, Z).$$

**Bemerkung 5.31.** Wir müssen ein wenig aufpassen: Zu der Kurve  $C_f$  gehört das homogene Polynom  $P$ , welches die Kurve definiert. Andererseits haben wir aber das Polynom  $Q$  mit den getrennten Nullstellen, welches in der Differentialgleichung für  $f$  auftaucht. Um die beiden nicht zu verwechseln, werden wir die Bezeichnungen mit  $P$  und  $Q$  wie hier eingeführt beibehalten.

### 5.3.1 Ein doppelter Pol

Wir betrachten zunächst diejenigen elliptischen Funktionen 2. Ordnung mit einem doppelten Pol, jene also, zu denen eine kubische Kurve gehört. Wir haben im Korollar 5.23 bereits gezeigt, dass eine solche Kurve irreduzibel ist und daher insbesondere keine Gerade enthält. Daher wissen wir:

**Lemma 5.32.** *Eine zu einer elliptischen Funktion  $f$  der Ordnung 2 gehörige kubische Kurve  $C_f$  besitzt mit jeder Geraden in  $\mathbb{C}P^2$  in Vielfachheit gezählt genau drei Schnittpunkte.  $\square$*

Wir zeigen weiter:

**Lemma 5.33.** *Ist  $f$  eine elliptische Funktion 2. Ordnung mit einem doppelten Pol, so ist die zugehörige Kurve  $C_f$  regulär.*

*Beweis.* Das definierende Polynom ist von der Form

$$P(X, Y, Z) = -Y^2Z + aX^3 + bX^2Z + cXZ^2 + dZ^3 \quad \text{wobei } a \neq 0.$$

Wir betrachten zunächst diejenigen  $[(X, Y, Z)]$  mit  $Z \neq 0$  und dehomogenisieren dazu nach  $Z$ :

$$p(x, y) := P(x, y, 1) = -y^2 + ax^3 + bx^2 + cx + d =: -y^2 + Q(x) \quad \text{wobei } a \neq 0.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= Q'(x) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -2y, \end{aligned}$$

was genau dann simultan verschwindet, wenn  $y = 0$  und  $Q'(x) = 0$ . Auf der Kurve liegt ein solcher Punkt dann, wenn zusätzlich  $Q(x) = 0$  gilt. Das würde bedeuten, dass  $Q$  in  $x$  eine doppelte Nullstelle besitzt, was nach Lemma 4.20 nicht der Fall ist.

Nun bleibt noch  $Z = 0$  zu betrachten, was mit der Kurve nur den Schnittpunkt  $[(0, 1, 0)]$  besitzt. Wir dehomogenisieren also nach  $Y$  und betrachten die resultierende Kurve im Punkt  $(x, z) = (0, 0)$ :

$$\tilde{p}(x, z) = P(x, 1, z) = -z + ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3.$$

Wegen

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}|_{x=z=0} = 1$$

ist auch dieser Punkt regulär.

Damit ist es die gesamte Kurve.  $\square$

**Lemma 5.34.** *Es sei  $f$  eine elliptische Funktion 2. Ordnung mit einem doppelten Pol bei  $a$ . Die Abbildung*

$$\phi_f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_f \subset \mathbb{C}P^2 \quad z \mapsto \begin{cases} [(f(z), f'(z), 1)] & \text{für } z \neq a \\ [(0, 1, 0)] & \text{für } z = a \end{cases}$$

*ist eine Biholomorphie.*

*Beweis.* Es sei  $a \in \mathbb{C}/\Lambda$  der (doppelte) Pol von  $f$ . Wir betrachten die Funktion  $\tilde{f} = f(z - a)$ , welche einen doppelten Pol bei 0 besitzt und daher gerade ist. Die beiden Funktionen erfüllen die selbe Differentialgleichung, wie man sich leicht klarmacht. Daher gehört zu ihnen die selbe Kurve  $C_f$ . Für  $\phi_{\tilde{f}}$  können wir den Beweis von Satz 5.24 direkt übertragen, und wissen daher, dass die Abbildung

$$\phi_{\tilde{f}} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_f \subset \mathbb{C}P^2 \quad z \mapsto \begin{cases} [(f(z), f'(z), 1)] & \text{für } z \neq 0 \\ [(0, 1, 0)] & \text{für } z = 0 \end{cases}$$

biholomorph ist.  
Die Abbildung

$$t : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \quad z \mapsto z + a$$

ist eine biholomorphe Selbstabbildung des Torus.

Daher ist die Abbildung  $\tilde{f} \circ t = f$  eine Biholomorphie zwischen  $\mathbb{C}/\Lambda$  und  $C_f$ .  $\square$

Die Situation ist also sehr ähnlich wie bei der  $\wp$ -Funktion. Es wird auch wieder eine Gruppenstruktur auf die Kurve  $C_f$  übertragen, und zwar vermittelt

$$\phi_f(z_1) + \phi_f(z_2) := \phi_f(z_1 + z_2).$$

Der Unterschied ist, dass in diesem Fall der Nullpunkt  $\phi_f(0)$  nicht unbedingt mit dem Ausnahmepunkt  $[(0, 1, 0)]$  zusammenfällt.

Wir erhalten daher ein etwas anderes Additionstheorem:

**Satz 5.35** (Additionstheorem für elliptische Funktionen 2. Ordnung mit doppeltem Pol). *Es sei  $f$  eine elliptische Funktion der Ordnung 2 mit einem doppelten Pol bei  $a$  und  $C_f$  die zugehörige Kurve.*

*Dann haben drei Punkte auf der Kurve  $C_f$  genau dann die Summe  $\phi(a + a + a)$ , wenn sie auf einer Geraden liegen, und jeder Kurvenpunkt so oft als Summand vorkommt, wie die Vielfachheit des Schnittes der Geraden mit der Kurve angibt.*

*Beweis.* Es genügt, den Alternativbeweis des Additionstheorems der  $\wp$ -Funktion 5.27 genau anzuschauen. Der Beweis gliedert sich in zwei wesentliche Teile: Zunächst bestimmt man den Wert der Summe der drei Schnittpunkte einer speziellen Geraden mit der Kurve. Sodann zeigt man, dass der Wert dieser Summe für alle Geraden gleich sein muss.

Der zweite Teil lässt sich direkt auf  $f$  übertragen.

Wir müssen also nur noch den Wert bestimmen, den die Summe für  $f$  annimmt. Dazu schneiden wir wieder  $C_f$  mit der Geraden  $Z = 0$ . Als einzigen und damit dreifachen Schnittpunkt erhalten wir  $[(0, 1, 0)] = \phi_f(a)$  und daher ergibt sich die behauptete Summe.  $\square$



### 5.3.2 Zwei einfache Pole

Nun wenden wir uns denjenigen elliptischen Funktionen 2. Ordnung zu, die zwei Pole erster Ordnung besitzen und deren zugehörige Kurve daher vom Grad 4 ist, da sie eine Differentialgleichung der Form

$$f'^2 = Q(f)$$

mit einem Polynom  $Q$  vom Grad 4 erfüllen. Die Gleichung der Kurve ist also von der Form

$$0 = -Y^2Z^2 + (X - aZ)(X - bZ)(X - cZ)(X - dZ)$$

bzw. ausmultipliziert:

$$0 = -Y^2Z^2 + AX^4 + BX^3Z + CX^2Z^2 + DXZ^3 + EZ^4.$$

Hier liegen die Dinge nicht ganz so einfach. Wir beginnen mit folgender Feststellung:

**Lemma 5.36.** *Sei  $f$  eine elliptische Funktion 2. Ordnung, welche zwei einfache Pole besitzt, und  $C_f$  die zugehörige Kurve. Dann schneidet  $C_f$  eine beliebige Gerade in Vielfachheit gezählt genau vier mal.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass das bestimmende Polynom

$$P(X, Y, Z) = -Y^2Z^2 + AX^4 + BX^3Z + CX^2Z^2 + DXZ^3 + EZ^4 \quad \text{mit } A \neq 0$$

sich nicht als

$$P(X, Y, Z) = (\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \cdot (\delta X^3 + \varepsilon Y^3 + \eta Z^3 + \zeta X^2Y + \mu XY^2 + \lambda X^2Z + \chi XZ^2 + \nu Y^2Z + \rho YZ^2 + \varphi XYZ)$$

schreiben lässt.

Nehmen wir an, dies wäre doch möglich. Dann erkennen wir durch Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} \gamma\nu + \rho\beta &\neq 0 && (Y^2Z^2\text{-Term}) \\ \alpha\delta &\neq 0 && (X^4\text{-Term}) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha\varepsilon + \beta\mu = 0 & (XY^3\text{-Term}) & \beta\zeta + \alpha\mu = 0 & (X^2Y^2\text{-Term}) \\ \beta\delta + \alpha\zeta = 0 & (X^3Y\text{-Term}) & \beta\varepsilon = 0 & (Y^4\text{-Term}) \\ \gamma\varepsilon + \beta\nu = 0 & (ZY^3\text{-Term}) & \beta\eta + \gamma\rho = 0 & (Z^3Y\text{-Term}) \\ \alpha\nu + \beta\varphi + \gamma\mu = 0 & (XY^2Z\text{-Term}) & \alpha\varphi + \beta\lambda + \zeta\gamma = 0 & (X^2YZ\text{-Term}) \\ \gamma\varphi + \alpha\rho + \chi\beta = 0 & (XYZ^2\text{-Term}) & & \end{array}$$

Am Koeffizienten des  $Y^4$ -Terms erkennen wir, dass  $\beta$  oder  $\varepsilon$  verschwinden müssen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $\beta = 0$ .

Dann dürfen wegen des  $Y^2Z^2$ -Terms weder  $\gamma$  noch  $\nu$  verschwinden.

Betrachten wir den  $X^2Y^2$ -Term, so erkennen wir, dass  $\mu = 0$  gelten muss, da  $\alpha \neq 0$  ( $X^4$ -Term).

Der  $XY^2Z$ -Term reduziert sich zu  $\alpha\nu = 0$ . Dies ist ein Widerspruch, da weder  $\alpha$  noch  $\nu$  verschwinden dürfen.

2. Fall:  $\beta \neq 0$ , also  $\varepsilon = 0$ .

Der  $XY^3$ -Term liefert  $\mu = 0$ . Dies zieht im  $X^2Y^2$ -Term  $\zeta = 0$  nach sich. Dies liefert aber im  $X^3Y$ -Term  $\delta = 0$  und damit einen Widerspruch zu  $\alpha\delta \neq 0$  ( $X^4$ -Term).

Das Polynom enthält also keinen Linearfaktor.  $\square$

Die Kurve  $C_f$  ist in diesem Falle keine reguläre Kurve.

Es liegt eine Singularität im Punkt  $[(0, 1, 0)]$  vor. Das erkennen wir, indem wir nach  $Y$  dehomogenisieren und uns die affine Kurve um  $(x, z) = (0, 0)$  ansehen. Es ergibt sich

$$0 = \tilde{p}(x, z) := P(x, 1, z) = -z^2 + (x - az)(x - bz)(x - cz)(x - dz)$$

Im Punkte  $(0, 0)$  verschwinden nun die partiellen Ableitungen von  $\tilde{p}$ , weshalb die Kurve  $C_f$  nicht regulär ist.

**Bemerkung 5.37.** Das Verhalten bei  $[(0, 1, 0)]$  gleicht zwei Parabeln, die sich im Scheitel berühren. Das wollen wir uns klarmachen:

Wir haben bereits nach  $Y$  dehomogenisiert, und klammern nun noch  $x^4$  aus:

$$z^2 = x^4(1 - aw)(1 - bw)(1 - cw)(1 - dw) \quad (5.1)$$

mit  $w := z/x$ , oder nach Division durch  $x^2$ :

$$w^2 = x^2s(w)$$

mit  $s(w) := (1 - aw)(1 - bw)(1 - cw)(1 - dw)$ . Wenn  $|w| < \varepsilon$ , können wir aus  $s(w)$  eine holomorphe Quadratwurzel ziehen, weil  $s(0) = 1$ , und mit  $g(w) := w/\sqrt{s(w)}$  ergibt sich

$$g(w) = \pm x.$$

Die Funktion  $g(w)$  ist biholomorph in einer Umgebung von  $w = 0$ , da  $g'(0) = 1$ ; die Umkehrfunktion heiße  $g^{-1} = h$  mit  $h'(0) = 1$ . Dann ergibt sich

$$w = h(\pm x) = \pm x + O(x^2).$$

Setzen wir wieder  $w = z/x$  ein, so erhalten wir nahe  $x = z = 0$ :

$$z = x \cdot h(\pm x) = \pm x^2 + O(x^3).$$

Warum dürfen wir  $|w| < \varepsilon$  annehmen, wenn  $z$  nahe 0 ist? Dazu klammern wir in Gleichung 5.1  $z^4$  statt  $x^4$  aus:

$$z^2 = (x - az)(x - bz)(x - cz)(x - dz) = z^4(v - a)(v - b)(v - c)(v - d) =: z^4q(v)$$

mit  $v = x/z = 1/w$ , also  $q(v) = 1/z^2$  und somit  $|q(v)| \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow 0$ , also auch  $v \rightarrow \infty$  und daher  $w = 1/v \rightarrow 0$ .

Nachdem wir nun eine Vorstellung von der Kurve  $C_f$  haben, wollen wir versuchen, eine Parametrisierung zu finden.

Es seien  $b_1, b_2 \in \mathbb{C}/\Lambda$  die Polstellen von  $f$ . Wir betrachten die Abbildung

$$\phi_f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}P^2 \quad z \mapsto \begin{cases} [(f(z), f'(z), 1)] & \text{für } z \neq b_1, b_2 \\ [(0, 1, 0)] & \text{für } z = b_1, b_2. \end{cases}$$

**Lemma 5.38.** *Die Abbildung*

$$\phi_f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_f \subset \mathbb{C}P^2 \quad z \mapsto \begin{cases} [(f(z), f'(z), 1)] & \text{für } z \neq b_1, b_2 \\ [(0, 1, 0)] & \text{für } z = b_1, b_2. \end{cases}$$

ist eine holomorphe Immersion mit Bild  $\phi_f = C_f$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst Bild  $\phi_f = C_f$ . Dass der Wert  $[(0, 1, 0)]$  angenommen wird, ist klar. Wir wählen daher direkt die Dehomogenisierung  $Z = 1$  für  $C_f$ . Sei also  $(x, y)$  gegeben mit  $y^2 = Q(x)$ . Die Funktion  $f$  nimmt jeden Wert an. Sei  $f(z) = x$ . Wegen der Differentialgleichung für  $f$  gilt:  $f'(z) = \pm y$ .

Falls  $f'(z) = y$ , so sind wir fertig.

Falls  $f'(z) = -y$ , so spiegeln wir  $z$  an einem Verzweigungspunkt:

Gilt  $z = a + c$  für einen Verzweigungspunkt  $a$ , so erfüllt  $\tilde{z} = a - c$  gerade  $f(\tilde{z}) = x$  und  $f'(\tilde{z}) = y$ , da  $f$  um  $a$  gerade ist, und damit  $f'$  um  $a$  ungerade.

Damit ist Bild  $\phi_f = C_f$  gezeigt.

Als nächstes machen wir uns klar, dass  $\phi_f$  holomorph ist und  $D\phi_f$  nirgends verschwindet.

Wir beginnen mit einer Karte für  $Z \neq 0$ , also  $z \neq b_1, b_2$ . Dort ist  $\phi_f$  von der Form

$$z \mapsto (f(z), f'(z)),$$

was für  $z \neq 0$  natürlich holomorph ist. Für die Ableitung gilt

$$D_z \phi_f = (f'(z), f''(z)).$$

Die beiden Komponenten verschwinden nicht gleichzeitig, da die Nullstellen von  $f'$  einfach sind, und daher dort  $f'' \neq 0$  gilt.

Nun kommen wir zu  $Z = 0$ , also  $z = b_i$  und wählen die Karte  $Y = 1$ . Wir erhalten

$$\phi_f(z) = \left( \frac{f}{f'}(z), \frac{1}{f'}(z) \right).$$

Da  $f$  in  $z = b_i$  einen einfachen Pol besitzt, hat  $g = \frac{1}{f'}$  dort eine einfache Nullstelle. Wegen  $f' = -g'/g^2$  und  $f'/f = -g'/g$  ist

$$\phi_f(z) = \left( -\frac{g}{g'}(z), -\frac{g^2}{g'}(z) \right),$$

was um  $z = b_i$  herum offensichtlich holomorph ist: die erste Komponente hat dort eine einfache und die zweite Komponente eine doppelte Nullstelle.

Im Punkte  $b_i$  ist bereits die Ableitung der ersten Komponente ungleich 0, denn

$$\left( -\frac{g}{g'} \right)'(z) = -\frac{g'^2 - gg''}{g'^2}(z)$$

hat bei  $b_i$  den Wert  $-1$ .

Damit ist  $D_z\phi_f$  überall injektiv und somit ist  $\phi_f$  eine Immersion.  $\square$

Wir wollen folgendes Additionstheorem zeigen:

**Satz 5.39** (Additionstheorem für elliptische Funktionen mit zwei einfachen Polen). *Sei  $G \subset \mathbb{C}P^2$  eine beliebige Gerade, und  $\mathcal{U}$  das Urbild ihrer Schnittmenge mit  $C_f$  unter  $\phi_f$ :*

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}/\Lambda \mid \phi_f(z) \in G \cap C_f\}.$$

*Sei  $z \in \mathcal{U}$ , und  $U_z$  eine genügend kleine Umgebung von  $z$ , so dass  $\phi_f|_{U_z}$  injektiv ist.*

*Es sei  $\nu(z)$  die Vielfachheit, mit der  $G$  das Kurvenstück  $\phi_f(U_z)$  schneidet.*

*Dann gilt:*

$$\sum_{z \in \mathcal{U}} \nu(z) \cdot z = a + a + a + a,$$

wobei  $a$  Verzweigungspunkt von  $f$  ist.

**Bemerkung 5.40.** Was bedeutet das?

Schneidet man eine beliebige Gerade mit der Kurve, so addieren sich die Urbilder der Schnittpunkte - in korrekter Vielfachheit aufgeschrieben - zu einem konstanten Punkt in  $\mathbb{C}/\Lambda$ . Das haben wir auch für kubische Kurven. Dort haben wir aber noch mehr: Wenn sich drei Punkte in  $\mathbb{C}/\Lambda$  zu einem bestimmten Wert addieren (dort:  $a+a+a$ ), so müssen deren Bilder unter  $\phi_f$  auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Das bekommen wir hier nicht.

*Beweis von Satz 5.39.* Wir wollen im Prinzip so vorgehen, wie im Alternativbeweis des Additionstheorems der  $\wp$ -Funktion:

Wir zeigen, dass die Summe für alle Geraden durch einen festen Punkt konstant ist. Dann kann man den Punkt entlang einer Geraden variieren lassen und für jeden dieser Punkte ist die Summe für alle hindurchlaufenden Geraden konstant. Schließlich wendet man das selbe Argument ein letztes mal für einen Punkt an, der außerhalb der Variationsgeraden liegt. Dies liefert schließlich das Ergebnis, dass die Konstante für alle Punkte der Variationsgeraden gleich sein muss. Dann muss die Konstante nur noch durch Untersuchen einer speziellen Geraden ermittelt werden.

Sei also  $P \notin C_f$  und  $G$  eine Gerade in  $\mathbb{C}P^2$  mit  $P \notin G$ .<sup>46</sup>

Die Zentralprojektion  $\pi : \mathbb{C}P^2 \setminus \{P\}$  durch  $P$  auf  $G$  ist algebraisch, also holomorph. Das kann man in Karten einfach nachrechnen. Die Einschränkung der Zentralprojektion auf  $C_f$  bildet genau die Schnittpunkte einer Geraden durch  $P$  mit  $C_f$  auf einen gemeinsamen Bildpunkt ab: Den Schnittpunkt dieser Geraden mit  $G$ .

Die Abbildung  $\phi_f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{C}P^2$  ist ebenfalls holomorph, wie wir in Lemma 5.38 gesehen haben.

Damit ist auch die Hintereinanderschaltung  $\ddot{U} := \pi \circ \phi_f : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow G$  holomorph.<sup>47</sup> Der Abbildungsgrad dieser holomorphen verzweigten Überlagerungsabbildung ist 4, da eine beliebige Gerade die Kurve  $C_f$  in Vielfachheit gezählt viermal schneidet, und  $\phi_f$  außerhalb der  $b_i$  bijektiv ist, wie man sich analog zu Satz 5.24 überlegt.

<sup>46</sup>Dies liefert uns eine Bijektion zwischen den Geraden durch  $P$  und den Punkten von  $G$ : Eine Gerade durch  $P$  hat genau einen Schnittpunkt mit  $G$ .

<sup>47</sup>Beachte, dass wir  $P \notin C_f$  vorausgesetzt haben.

Es gibt nur endlich viele Punkte in  $G$ , welche nicht vier verschiedene Urbilder unter  $\ddot{U}$  besitzen.<sup>48</sup>

Zu allen anderen  $Q \in G$  gibt es für jedes der vier Urbilder, da diese ja einfache Punkte sind, eine lokale Umkehrung von  $\ddot{U}$ . Die Abbildung, welche  $Q$  auf die Summe der vier Urbildpunkte abbildet ist holomorph und in allen Punkten außer den endlich vielen Ausnahmepunkten wohldefiniert. Da sich die Abbildung stetig in die Ausnahmepunkte hinein fortsetzen lässt, ist sie nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz dort ebenfalls holomorph.

Wir haben also eine holomorphe Abbildung  $F_P : G \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  gefunden, welche einem Punkt in  $G$  die Summe ihrer in Vielfachheit aufgeschriebenen Urbilder unter  $\ddot{U}$  zuordnet. Diese Zuordnung (für beliebige Geraden) ist es gerade, über die wir eine Aussage machen wollen. Da  $G$  isomorph zu  $\mathbb{C}P^1$  und damit einfach zusammenhängend ist, kann diese Abbildung nach  $\mathbb{C}$  geliftet werden. Die geliftete Abbildung  $\hat{F}_P : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist konstant, und daher ist schon  $F_P$  konstant.

Mit den eingangs genannten Argumenten schließen wir von hier aus, dass alle Geraden in  $\mathbb{C}P^2$ , mit  $C_f$  geschnitten, die selbe Urbild-Summe der Schnittpunkte liefern.

Was ist nun der Wert dieser Summe? Wir betrachten die Gerade  $Y = 0$ . Diese hat genau 4 verschiedene Schnittpunkte mit  $C_f$ , deren Urbilder unter  $\phi_f$  gerade die Verzweigungspunkte von  $f$  sind (da  $Y = f' = 0$ ). Ist  $a$  ein Verzweigungspunkt von  $f$ , so ist die Summe:

$$a + \left(a + \frac{\omega_1}{2}\right) + \left(a + \frac{\omega_2}{2}\right) + \left(a + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right) = a + a + a + a.$$

□

## 5.4 Beliebige elliptische Funktionen, Ausblick

Wir wollen nun noch einmal einen Blick auf das Additionstheorem der  $\wp$ -Funktion werfen, und eine andere Formulierung erarbeiten, welche auch eine andere Interpretation erlauben wird.

**Satz 5.41** (Additionstheorem der  $\wp$ -Funktion - Algebraische Form). *Es seien  $z, w \in \mathbb{C}/\Lambda$ . Dann gilt:*

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w). \quad (5.2)$$

*Beweis.* Wir betrachten nur  $z, w, z+w \neq 0$  und paarweise verschieden. Die anderen Fälle ergeben sich als Grenzwerte. Wir betrachten die Punkte

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (\wp(z), \wp'(z)) \\ (x_2, y_2) &= (\wp(w), \wp'(w)) \\ (x_3, y_3) &= (\wp(z+w), -\wp'(z+w)). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Formulierung des Additionstheorems über Determinanten:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \\ \wp(z+w) & -\wp'(z+w) & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

<sup>48</sup>Verzweigungspunkte liegen isoliert.

Es folgt, dass unsere drei Punkte auf einer Geraden liegen:  $y = mx + b$ . Die Steigung der Geraden ergibt sich zu

$$m = \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}.$$

Aus der algebraischen Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion folgt, dass die  $x_i$  Nullstellen des kubischen Polynoms

$$4x^3 - g_2x - g_3 - (mx + b)^2$$

sind. Da sie paarweise verschieden sind, gibt es keine weiteren Nullstellen. Das Polynom

$$4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 4x^3 - 4(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + s_2x + s_3$$

besitzt die selben Nullstellen und den selben führenden Koeffizienten. Die beiden Polynome sind also identisch.

Durch Koeffizientenvergleich bei den quadratischen Termen erhält man für die Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m^2}{4}.$$

Das ist genau die Behauptung. □

Wir haben nun also eine andere Form des Additionstheorems der  $\wp$ -Funktion, eine Form, in der man die Parallele zu den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen deutlicher erkennen kann. Tatsächlich besteht ja eine gewisse Verwandtschaft zwischen den trigonometrischen Funktionen und den elliptischen Funktionen.<sup>49</sup> Wir wollen das neue Additionstheorem 5.2 noch ein wenig abwandeln, so dass die Ableitung der  $\wp$ -Funktion nicht mehr vorkommt. Dies erreichen wir, indem wir die algebraische Differentialgleichung verwenden:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Wir isolieren zunächst die  $\wp'$ -Terme aus 5.2:

$$4(\wp(z) + \wp(w) + \wp(z+w)) \cdot (\wp(z) - \wp(w))^2 = \wp'^2(z) - 2\wp'(z)\wp'(w) + \wp'^2(w).$$

Die quadratisch vorkommenden  $\wp'$ -Terme können wir mit Hilfe der Differentialgleichung durch  $\wp$ -Terme ersetzen und auf die linke Seite bringen. Dann steht links ein Polynom 3. Grades in  $\wp(z)$ ,  $\wp(w)$ ,  $\wp(z+w)$ :

$$Q(\wp(z), \wp(w), \wp(z+w)) = -2\wp'(z)\wp'(w)$$

Indem wir beide Seiten quadrieren, die rechte Seite wieder mit Hilfe der Differentialgleichung in lauter  $\wp$ -Terme verwandeln und auf die linke Seite schaffen, erhalten wir

$$\tilde{Q}(\wp(z), \wp(w), \wp(z+w)) = 0,$$

wobei  $\tilde{Q}$  ein Polynom 6. Grades in  $\wp(z)$ ,  $\wp(w)$  und  $\wp(z+w)$  ist.

Wir wollen nun zeigen, dass jede elliptische Funktion ein Additionstheorem in diesem Sinne besitzt.

---

<sup>49</sup>vgl. Bemerkung 1.3

Dafür werden wir ein Additionstheorem für  $\wp'$  benötigen, das es uns erlaubt,  $\wp'(z+w)$  durch einen algebraischen Ausdruck in  $\wp(z)$ ,  $\wp(w)$ ,  $\wp'(z)$  und  $\wp'(w)$  darzustellen.

**Lemma 5.42.** *Seien  $z, w \in \mathbb{C}/\Lambda$ . Dann gilt:*

$$\wp'(z+w) = \frac{\wp'(z)(\wp(w) - \wp(z+w)) - \wp'(w)(\wp(z) - \wp(z+w))}{\wp(z) - \wp(w)}. \quad (5.3)$$

*Beweis.* Wir entwickeln die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \\ \wp(z+w) & -\wp'(z+w) & 1 \end{pmatrix} = 0$$

nach der dritten Zeile. □

Mit Hilfe des Additionstheorems der  $\wp$ -Funktion lässt sich in Gleichung 5.3 noch  $\wp(z+w)$  eliminieren, so dass wir das gewünschte Ergebnis erhalten: Eine algebraische Gleichung zwischen  $\wp(z)$ ,  $\wp(w)$ ,  $\wp'(z)$ ,  $\wp'(w)$  und  $\wp'(z+w)$ .

**Satz 5.43.** *Es sei  $f$  eine beliebige elliptische Funktion. Dann existiert ein von Null verschiedenes Polynom  $Q$  in drei Variablen mit komplexen Koeffizienten, so dass*

$$Q(f(z), f(w), f(z+w)) = 0$$

für alle  $z, w \in \mathbb{C}/\Lambda$  gilt.

Der Beweis benutzt Tatsachen aus der elementaren Algebra. Er soll hier skizziert werden.

*Beweis.* Wir verwenden:

Sei  $K : k$  Erweiterungskörper und  $a_1, \dots, a_n \in K$  so dass  $K$  über  $k(a_1, \dots, a_n)$  algebraisch ist. Dann sind je  $n+1$  Elemente von  $K$  algebraisch abhängig über  $k$ . Der Beweis dieser Tatsache verwendet sogenannte Transzendenzbasen. Er kann etwa bei Lorenz (Lor87) auf den Seiten 245 bis 253 nachgelesen werden.

Wir betrachten nun den Körper  $\mathcal{M}(\mathbb{C} \times \mathbb{C})$  der meromorphen Funktionen  $f(z, w)$  zweier Variabler. Dieser hat  $k = \mathbb{C}$  und  $K = \mathbb{C}(\wp(z), \wp(w), \wp'(z), \wp'(w))$  als Unterkörper.

$K$  ist algebraisch über  $k(\wp(z), \wp(w))$ , da  $\wp'(z)$  bzw.  $\wp'(w)$  die algebraischen (Differential-) Gleichungen

$$4\wp_{z,w}^3 - g_2\wp_{z,w} - g_3 - X^2 = 0$$

erfüllen.

Daher sind je drei Elemente von  $K$  über  $k$ , also über  $\mathbb{C}$ , algebraisch abhängig.

$K$  enthält wegen des Additionstheorems für  $\wp$  auch  $\wp(z+w)$  und wegen des Additionstheorems für  $\wp'$  auch  $\wp'(z+w)$ .

Da

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}(\wp) + \wp'\mathbb{C}(\wp)$$

gilt, ist somit auch  $f(z), f(w), f(z+w)$  in  $K$  enthalten.

Diese drei Elemente sind also über  $\mathbb{C}$  algebraisch abhängig, d.h. es existiert ein Polynom  $Q \neq 0$  über  $\mathbb{C}$  in drei Variablen mit

$$Q(f(z), f(w), f(z+w)) = 0.$$

□

Dieses Resultat, das elliptische Funktionen beliebiger Ordnung betrifft, stellt den Abschluss der vorliegenden Arbeit dar. Es soll noch kurz auf mögliche Anknüpfungspunkte eingegangen werden.

Einerseits könnte man versuchen, die Konstruktion aus Kapitel 3 für elliptische Funktionen höherer Ordnung durchzuführen, was sicher mit wachsender Ordnung komplizierter werden dürfte.

Andererseits erfüllen elliptische Funktionen höherer Ordnung auch algebraische Differentialgleichungen<sup>50</sup>. Diese Differentialgleichungen und die zugehörigen Kurven könnte man möglicherweise in ähnlicher Weise untersuchen, wie dies für die elliptischen Funktionen 2. Ordnung in Kapitel 5 geschehen ist.

---

<sup>50</sup>Das wurde hier nicht nachgewiesen, kann aber bei Freitag/Busam (FB06) auf S. 284/285 nachgelesen werden.



**Literaturverzeichnis**

- [Ach90] ACHIEZER, Naum I.: *Elements of the theory of elliptic functions*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1990 (Zitiert auf den Seiten 21, 30, and 74.)
- [AS65] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover Publications Inc., 1965 (Zitiert auf der Seite 11.)
- [Bro96] BROWN, Kenneth S.: *Buildings*. Heidelberg : Springer Verlag, 1996 (Zitiert auf den Seiten 37 and 40.)
- [BS72] BEHNKE, Heinrich ; SOMMER, Friedrich: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1972 (Zitiert auf den Seiten 21, 31, 38, 39, and 67.)
- [BSMM01] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 2001 (Zitiert auf den Seiten 12 and 15.)
- [Bud67] BUDO, A.: *Klassische Mechanik*. Berlin (Ost) : Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1967 (Zitiert auf der Seite 15.)
- [Cha85] CHANDRASEKHARAN, Komaravolu: *Elliptic Functions*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1985 (Zitiert auf den Seiten 21, 30, and 74.)
- [FB06] FREITAG, E. ; BUSAM, R.: *Funktionentheorie 1*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2006 (Zitiert auf den Seiten 20, 21, 28, 29, 30, 67, 69, 73, 74, and 104.)
- [FL88] FISCHER, Wolfgang ; LIEB, Ingo: *Funktionentheorie*. Braunschweig : Vieweg Verlag, 1988 (Zitiert auf den Seiten 21, 23, 24, and 67.)
- [For77] FORSTER, Otto: *Riemannsche Flächen*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1977 (Zitiert auf den Seiten 22 and 33.)
- [Fre07] FREITAG, Eberhard: *Funktionentheorie 2*. 2007. – Universität Heidelberg: <http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/skripten/FunktionentheorieII/> zuletzt besucht am 1. Juli 2008 (Zitiert auf der Seite 34.)
- [GB71] GROVE, L. C. ; BENSON, C. T.: *Finite Reflection Groups*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1971 (Zitiert auf den Seiten 37, 40, and 45.)
- [GH94] GRIFFITHS, Phillip ; HARRIS, Joseph: *Principles of Algebraic Geometry*. New York : John Wiley and Sons, Inc., 1994 (Zitiert auf der Seite 79.)
- [Gri89] GRIFFITHS, Phillip A.: *Introduction to Algebraic Curves*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1989 (Zitiert auf der Seite 79.)
- [GS87] GRÜNBAUM, Branko ; SHEPHARD, G. C.: *Tilings and Patterns*. New York : W.H. Freeman and Company, 1987 (Zitiert auf der Seite 37.)
- [Hum90] HUMPHREYS, James E.: *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge : Cambridge University Press, 1990 (Zitiert auf der Seite 37.)

- [Hur64] HURWITZ, Adolf: *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1964 (Zitiert auf den Seiten 21, 30, and 74.)
- [Hus87] HUSEMÖLLER, Dale: *Elliptic Curves*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1987 (Zitiert auf den Seiten 79 and 89.)
- [Jän04] JÄNICH, Klaus: *Funktionentheorie*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2004 (Zitiert auf den Seiten 26 and 67.)
- [Kar95] KARCHER, Hermann: *Vorlesung: Riemannsche Flächen, Spezielle Funktionen, Minimalflächen*. 1995. – Universität Bonn (Zitiert auf der Seite 37.)
- [Ken77] KENDIG, Keith: *Elementary Algebraic Geometry*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1977 (Zitiert auf den Seiten 79 and 84.)
- [Kir92] KIRWAN, Frances: *Complex Algebraic Curves*. Cambridge : Cambridge University Press, 1992 (Zitiert auf der Seite 79.)
- [Kob84] KOBLITZ, Neal: *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. Heidelberg : Springer Verlag, 1984 (Zitiert auf den Seiten 79 and 89.)
- [Kön04] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis 1*. Heidelberg : Springer-Verlag, 2004 (Zitiert auf der Seite 5.)
- [Lam05] LAMOTKE, Klaus: *Riemannsche Flächen*. Heidelberg : Springer Verlag, 2005 (Zitiert auf den Seiten 26, 27, 30, 40, 45, 70, 73, 74, and 75.)
- [Lan73] LANG, Serge: *Elliptic Functions*. Reading, Massachusetts : Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1973 (Zitiert auf den Seiten 21, 30, 74, and 79.)
- [Lor87] LORENZ, Falko: *Einführung in die Algebra, Teil I*. Mannheim : BI Wissenschaftsverlag, 1987 (Zitiert auf der Seite 103.)
- [Sil86] SILVERMAN, Joseph H.: *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Heidelberg : Springer-Verlag, 1986 (Zitiert auf den Seiten 79 and 89.)