DIE AUTOMORPHISMENGRUPPE DER OKTAVENEBENE

REGINA BLACH

1. Einleitung

Während die einfachen endlichen Gruppen erst vor wenigen Jahrzehnten klassifiziert werden konnten, geht die Klassifikation der einfachen Liegruppen bereits auf das 19. (Wilhelm Killing) und frühe 20. Jahrhundert (Élie Cartan) zurück. Wie bei den endlichen Gruppen gibt es unendliche Serien und eine Reihe von "sporadischen" oder Ausnahme-Gruppen: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Die (kompakten) Gruppen G_2 und F_4 erwiesen sich später als Automorphismengruppen der Cayley-Oktaven $\mathbb{O}$ und der hermiteschen 3×3-Matrizen $H_3(\mathbb{O})$ über $\mathbb{O}$. Der letztere Raum enthält die projektive Oktaven-Ebene $\mathbb{O}P^2$ als Untermannigfaltigkeit (als Menge der einfachen Idempotente in $H_3(\mathbb{O})$), die unter alle Automorphismen invariant bleibt; deshalb ist F_4 auch die Isometriegruppe von $\mathbb{O}P^2$. Die geometrische Bedeutung von E_6, E_7, E_8 dagegen blieb lange Zeit verborgen. In einer berühmten Arbeit konnte H. Freudenthal 1951 zeigen [2], dass die (nichtkompakte) E_6 die Automorphismen- oder Kollineationsgruppe der projektiven Ebene über den Oktaven ist. Der Beweis dieses Satzes ist der Gegenstand der vorliegenden Bachelorarbeit. Allerdings war der Originalbeweis von Freudenthal ungeeignet, weil dort die Kenntnis der äußeren Automorphismen von E_6 vorausgesetzt und dazu auf eine alte Arbeit von Cartan verwiesen wird. Es werden daher Ideen von Freudenthal und von Salzmann et al. [3] gemischt, um einen neuen Beweis zu finden, der diese Schwierigkeiten umgeht. Die vorliegende Arbeit ist die Bachelor-Arbeit der Autorin. Sie wuchs hervor aus einer Vorlesung und einem Seminar über Quaternonen und Oktaven und stellt eine Ergänzung zum Skriptum [1] dieser Vorlesung dar.

Die Gruppe E_6 wird definiert als die Untergruppe von $GL(H_3(\mathbb{O}))$, deren Elemente g die Determinante erhalten: $\det gX = \det X$ für alle $X \in H_3(\mathbb{O})$. Die Determinante ist hier ein sehr spezielles Konzept, das

Date: 24. Januar 2012.

nicht für beliebige oktaviale Matrizen, sondern nur genau für hermitesche 3×3-Matrizen definierbar ist. Der Nachweis, dass diese Gruppe das Dynkin-Diagramm E_6 besitzt, wird von Freudenthal gegeben; er war nicht Teil der Aufgabe der vorliegenden Bachelor-Arbeit. Im Vorlesungsskriptum wurde bereits gezeigt, dass die so definierte E_6 genannte Gruppe ebenfalls die Untermannigfaltigkeit $\mathbb{O}P^2$ invariant lässt und dabei Geraden auf Geraden abbildet; Kollinearität lässt sich mit Hilfe der Determinante ausdrücken. Damit besteht E_6 bereits aus geradentreuen Diffeomorphismen von $\mathbb{O}P^2$ und ist somit eine Untergruppe der Kollineations- oder Automorphismengruppe dieser Geometrie. Zu zeigen ist, dass es nicht noch mehr Kollineationen gibt als die in E_6 vorhandenen.

Dazu muss gezeigt werden, dass einerseits die E_6 nicht zu klein und andererseits die Kollineationsgruppe nicht zu groß ist:

(1) Die E_6 operiert transitiv auf den nichtentarteten Vierecken.
(2) Der Stabilisator eines Vierecks in der Kollineationsgruppe liegt in E_6.

Zu (1): In der Vorlesung [1] wurde bereits gezeigt, dass die Liealgebra von $E_6 \subset GL(H_3(\mathbb{O}))$ von den linearen Abbildungen $X \mapsto A \circ X = AX + XA^* : H_3(\mathbb{O}) \to H_3(\mathbb{O})$ für alle spurfreien oktavialen 3×3-Matrizen A erzeugt wird und in diesem Sinne "nicht zu klein" ist. Dieser Umstand muss zum Beweis von (1) ausgenutzt werden. Das wichtigste Hilfsmittel dazu bilden die projektiven Punktspiegelungen. Diese besitzen eine Gerade a aus lauter Fixpunkten ("Achse") und einen weiteren Fixpunkt Z außerhalb von a. Ein Punkt X hat als Bildpunkt denjenigen Punkt X' auf der Geraden $g = XZ$, für den die vier Punkte $(X, Z, X', g \cap a)$ in harmonischer Lage liegen, d.h. "Doppelverhältnis -1" haben. Obwohl das Doppelverhältnis in der Oktavenebene allgemein keinen Sinn macht, ist das Doppelverhältnis -1 noch definiert, denn vier Punkte einer oktavialen Geraden, einer 8-Sphäre, liegen stets auf einer quaternionalen Geraden, einer 4-Sphäre (und sogar auf einer komplexen Geraden, einer 2-Sphäre, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist). Die von den projektiven Punktspiegelungen erzeugte Gruppe erweist sich als groß genug, um transitiv auf den Vierecken zu operieren. Es muss gezeigt werden, dass sie in E_6 enthalten ist. Wenn wir zunächst die Achse a als die Ferngerade wählen, dann erhalten wir die euklidischen Punktspiegelungen und die Translationen auf $\mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$. Von diesen wird explizit gezeigt, dass sie in E_6 liegen. Die Punktspiegelungen mit beliebiger Achse a sind zu diesen konjugiert unter jeder Kollineation, die a auf die Ferngerade abbildet, und solche Kollineationen finden wir in E_6, sogar bereits in $F_4 \subset E_6$.

Zu (2): Hier folgt die Autorin im Wesentlichen der Darstellung von Salzmann et al., die zunächst den Stabilisator eines Dreiecks bestimmen und daraus ableiten, dass der Stabilisator eines Vierecks nur noch aus Automorphismen von $\mathbb{O}$ besteht; solche Automorphismen liegen aber in $G_2 \subset F_4 \subset E_6$.[1]

(J.-H. Eschenburg)

2. Die Automorphismengruppe der Oktavenebene

Wir wollen nun herausfinden, dass die E_6 bzw. die $PGL_n(\mathbb{K})$ bereits die volle Kollineationsgruppe ist. Den Beweis treten wir von zwei Seiten an: Zuerst betrachten wir die E_6 und danach die Kollineationsgruppe.

Ziel des ersten Abschnitts ist es, die Transitivität der E_6 auf allen Vierecken zu zeigen. Das werden wir mithilfe der von allen Punktspiegelungen erzeugten Gruppe S machen. Wir müssen erkennen, dass S eine Untergruppe der E_6 ist. Hierfür benötigen wir noch die Überlegung, dass die E_6 transitiv auf den nicht inzidenten Paaren (Punkt, Gerade) wirkt.

Im zweiten Abschnitt wollen wir herausfinden, woraus der Stabilisator des Standard-Vierecks $(0,0),(1,1),(0)$ und (∞) besteht. Den Weg dahin gehen wir über den Stabilisator des Dreiecks $(0,0),(0)$ und (∞), den wir uns mithilfe einer Erkenntnis über die Additivität bestimmter affiner Abbildungen zuerst ansehen.

Aus den Ergebnissen der beiden Teile folgt mit einer kurzen Überlegung, dass $\mathsf{E}_6 = Koll(\mathbb{K}P^2)$ gilt.

Wir müssen also zunächst beweisen, dass die E_6 bzw. die $PGL_n(\mathbb{K})$ transitiv auf den nicht inzidenten Paaren (Punkt, Gerade) wirkt, d.h. wir müssen zeigen, dass wir jede beliebige Gerade g und jeden beliebigen Punkt $P \notin g$ auf die Gerade $E_2 \vee E_3 = g_{E_1}$, also die Ferngerade zu E_1, und den Punkt E_1 abbilden können.

Wir wissen bereits, dass die Untergruppe F_4 jeweils einzeln schon auf der Menge der Punkte bzw. der Menge der Geraden (dual dazu) transitiv wirkt. Also können wir durch Anwenden eines Elements aus F_4 die Gerade g schon auf die gewünschte Ferngerade abbilden. P wird dabei auch verschoben, und zwar auf irgendeinen Punkt A, der nicht auf der Ferngerade g_{E_1} liegt. Folglich müssen wir uns nur noch um eine Translation des Punktes A auf den Punkt E_1 kümmern, die g_{E_1} jedoch festhält.

[1] Kleine Korrekturen: Im Beweis des Hilfssatzes 2.1 muss es “Element” statt “Untergruppe” heißen. Auf S. 10 müsste es $Aut(\mathbb{O},+)$ statt $Aut(\mathbb{O})$ heißen, denn über die Multiplikation wird noch nichts ausgesagt.

Um nun zu sehen, dass eine Untergruppe der E_6 transitiv auf den Elementen der affinen Ebene wirkt, wollen wir eine Translation für den Punkt A finden. Dazu betrachten wir die Abbildung $A \mapsto TAT^*$ mit der Matrix $T := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ v & I \end{smallmatrix}\right)$ mit $v \in \mathbb{O}^2$, $I = I_2 = diag(1,1)$.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass g_{E_1} durch diese Abbildung nicht verändert wird: Sei B ein beliebiger Punkt von g_{E_1}. Dann ist B von der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & C \end{smallmatrix}\right)$, wobei C eine oktaviale 2×2- Matrix ist. Dann gilt

$$TBT^* = \begin{pmatrix} 1 & \\ v & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \\ & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \bar{v} \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & C \end{pmatrix}$$

Wir werden nun nicht den Punkt A auf E_1 verschieben, sondern umgekehrt zeigen, dass durch die Abbildung $E_1 \mapsto TE_1T^*$ jeder Punkt A in $\mathbb{O}P^2$ erreicht werden kann. Ist $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ v & I \end{smallmatrix}\right)$ mit $v \in \mathbb{K}^2$, so gilt

$$TE_1T^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ v & I \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & v^* \\ & I \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & v^* \\ v & vv^* \end{smallmatrix}\right).$$

Andererseits ist auch $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ v \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 1 & v^* \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & v^* \\ v & vv^* \end{smallmatrix}\right)$; diese Matrix entspricht also dem homogenen Vektor $[a] = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ v \end{smallmatrix}\right)]$ unter der Abbildung $[a] \mapsto aa^*$, die die beiden Modelle von $\mathbb{K}P^2$ (homogene Vektoren einerseits, Projektoren andererseits) miteinander verbindet. Die homogenen Vektoren mit einer Eins in der ersten Komponente bilden aber genau die affine Ebene $\mathbb{K}P^2 \setminus g_{E_1}$; wir können also jeden Punkt der affinen Ebene, $[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ v \end{smallmatrix}\right)]$, $v \in \mathbb{K}^2$, durch Anwendung einer Translation T auf E_1 erreichen.

Wir müssen uns nun noch überlegen, warum $A \mapsto TAT^*$ überhaupt ein Element von E_6 ist.

Ein Problem besteht nur für $\mathbb{K} = \mathbb{O}$. Wir kennen eigentlich nicht die Wirkung von E_6 auf $H_3\mathbb{O}$, sondern nur die Wirkung der Liealgebra von E_6: Diese geschieht durch $T \circ X = \frac{1}{2}(TX + XT^*)$, sofern $Spur(T) = 0$. Um daraus die Wirkung der Gruppe zu ermitteln, müssen wir die Matrix-Exponentialabbildung benutzen: Wenn wir die Abbildung $X \mapsto T \circ X$ mit $a(T)$ bezeichnen ($a(T) \in \mathrm{End}(H_3\mathbb{O})$), dann ist jedes Element von E_6 von der Form $e^{a(T)} = I + a(T) + \frac{1}{2}a(T)^2 + \frac{1}{6}a(T)^3 + \dots$, also

$$e^{a(T)}X = X + T \circ X + \frac{1}{2}T \circ (T \circ X) + \frac{1}{6}T \circ (T \circ (T \circ X)) + \dots$$

Dies ist im Allgemeinen schwer zu berechnen, aber für $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $X = E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)$ geht es leicht: Dann ist $TX = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $XT^* = \left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ & 0 \end{smallmatrix}\right)$, also $2T \circ E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Weiterhin ist

$$4T \circ (T \circ X) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \\ & 2vv^* \end{smallmatrix}\right)$$

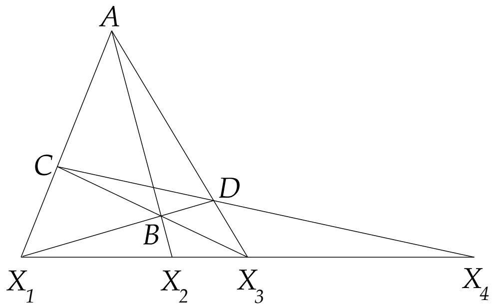
und schließlich $8T \circ (T \circ (T \circ X)) = 0$. Somit erhalten wir mit $w = \frac{1}{2}v$

$$e^{a(T)}E_1 = E_1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & \\ & vv^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & w^* \\ w & ww^* \end{pmatrix} = WE_1W^*$$

mit $W = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ w & I \end{smallmatrix}\right)$.

Bevor wir uns im nächsten Schritt mit der von allen Punktspiegelungen erzeugten Gruppe beschäftigen können, müssen wir uns erst darüber im Klaren sein, wie Punktspiegelungen in der Oktavengeometrie durchgeführt werden.

Dazu müssen wir beachten, dass der $\mathbb{O}P^2$ harmonisch ist. Harmonisch bedeutet, dass für drei Punkte X_i, die auf einer Geraden liegen, der vierte Punkt durch folgende Konstruktion bestimmt werden kann:



Die Konstruktion des 4. Punktes ist eindeutig, d.h. unabhängig davon, wo wir A und einen der anderen Hilfspunkte B, C oder D wählen, sofern dieser auf der jeweiligen Strecke zwischen A und X_i liegt.

Diese Figur wird als "vollständiges Vierseit" bezeichnet.

Um nun einen beliebigen Punkt X an einem beliebigen festen Punkt, dem Zentrum Z, zu spiegeln, wählen wir in der Oktavengeometrie zusätzlich eine Achse a, zum Beispiel die Ferngerade. Legt man nun eine Gerade durch Z und X und schneidet diese mit a, erhält man einen weiteren Punkt F.

Der Bildpunkt X' liegt nun in harmonischer Lage zu den anderen drei Punkten und kann mithilfe obiger Figur bestimmt werden.

Hilfssatz 2.1. *Sei S die von allen Punktspiegelungen erzeugte Gruppe. Dann ist S eine Untergruppe von E_6.*

Beweis. Mit S_g bezeichnen wir die Untergruppe von S, die als Achse die Gerade g hat. Dies können wir machen, weil eine Punktspiegelung eine Achse hat. Außerdem wissen wir, dass $\langle \bigcup_g S_g \rangle = S$ gilt. Wir haben schon bewiesen, dass die Translationen Elemente der E_6 sind. Somit können wir schon von einer Untergruppe, der $S_{g_{E_1}}$, sagen, dass sie Element der E_6 ist. Die $S_{g_{E_1}}$ besteht nämlich nur aus Translationen und einer Punktspiegelung; dies wird sofort klar, wenn man sich diese Untergruppe geometrisch vorstellt. Um zu erkennen, dass diese Punktspiegelung ebenfalls in E_6 liegt, betrachten wir die $Spin_9$. Es gilt $Spin_9 \subset F_4 \subset \mathsf{E}_6$. Außerdem wissen wir, dass $-1 \in Spin_9$ gilt.

Sei nun a ein beliebiges Element aus $Spin_9$ und $X \in H_3(\mathbb{O})$, $X = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & v^* \\ v & \hat{x} \end{smallmatrix}\right)$ mit $v \in \mathbb{O}^2 = \mathbb{R}^{16}$ und $\hat{x} = \left(\begin{smallmatrix} \beta & x^* \\ x & \gamma \end{smallmatrix}\right)$.

Nach Gleichung (12.2) aus [3] gilt

$$a(X) = \begin{pmatrix} \alpha & (\rho_s(a)v)^* \\ \rho_s(a)v & \rho_v(a)\hat{x} \end{pmatrix}$$

mit $\rho_s =$ Spindarstellung und $\rho_v =$ Vektordarstellung der $Spin_9$.

Speziell für $a = -1$ gilt

$$a(X) = \begin{pmatrix} \alpha & -v^* \\ -v & \hat{x} \end{pmatrix}$$

Nun benötigen wir eine weitere Überlegung: Im Tangentialraum im Punkt E_1 sind Matrizen vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & v^* \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$, im Normalraum sind Matrizen vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \hat{x} \end{smallmatrix}\right)$. Wendet man nun $a = -1$ an, ändert sich also nur etwas im Tangentialraum; dieser wird am Normalraum gespiegelt.

Für die anderen S_g überlegen wir uns folgendes: Für jede Kollineation b mit $b(g_{E_1}) = g$ gilt $S_g = bS_{g_{E_1}}b^{-1}$, denn Kollineationen überführen vollständige Vierseite wieder in vollständige Vierseite. Darum bilden sie Punktspiegelungen mit Achse g_{E_1} in solche mit Achse g ab, denn die Figur, über die Punktspiegelungen definiert sind, bleibt von der Kollineationsgruppe erhalten. Wenn wir insbesondere $b \in \mathsf{E}_6$ (oder sogar $b \in F_4$) wählen, sehen wir, dass S_g in E_6 enthalten ist. □

Satz 2.1. *$PGL_n(\mathbb{K})$ bzw. E_6 operiert transitiv auf allen (nicht entarteten) Vierecken.*

Beweis. Wir wählen S_g und S wie oben. Wir haben gerade gesehen, dass S eine Untergruppe der E_6 ist, und es ist klar, dass S auch Untergruppe der $PGL_n(\mathbb{K})$ ist. Da $\langle \bigcup_g S_g \rangle = S$ genügt es die Transitivität von S_g auf $\mathbb{K}P^2 \setminus g$ zu zeigen. Wir betrachten nicht sofort das Viereck, sondern bauen uns dieses erst auf, indem wir zuerst Punkte, dann Punktepaare und Dreiecke betrachten und uns erst dann dem Viereck widmen.

1. Punkte

Mithilfe einer Translation aus S_g können wir jeden beliebigen Punkt aus $\mathbb{K}P^2$ außerhalb der Achse g in jeden beliebigen anderen außerhalb

g überführen; sollte uns ein Punkt genau auf dieser Achse interessieren, wählen wir einfach eine andere (also z.B. S_h).

2. Punktepaare

Hier können wir ausnutzen, dass wir die Transitivität für einen Punkt schon gezeigt haben, denn dadurch wissen wir, dass wir einen Punkt von unserem Paar beliebig verschieben können, also dürfen wir uns diesen wählen. Wir müssen uns folglich nur noch der Gruppe widmen, die den zweiten Punkt verschiebt, den ersten dabei aber festlässt.

Wir wählen den ersten Punkt als den Schnittpunkt zweier beliebiger Geraden g und h, also $g \cap h$. Zunächst betrachten wir nur die Gerade g (und wählen uns diese als Achse). Wir können nun wieder jeden beliebigen Punkt außerhalb von g auf jeden beliebigen außerhalb von g verschieben. Der erste Punkt $g \cap h$ bleibt dabei ja fest, denn er liegt auf g. Genau dasselbe Vorgehen wenden wir an, wenn wir statt nur g jetzt nur h betrachten. Dies ergibt analog, dass wir jeden beliebigen Punkt außerhalb h erreichen können. Wenn wir diese beiden Betrachtungen kombinieren, können wir den zweiten Punkt also auf jeden beliebigen Punkt verschieben (außer auf $g \cap h$ selbst; dieser Punkt bleibt bei der so konstruierten Abbildung wie gewollt fest). Demnach operiert $\langle S_g \cup S_h \rangle$ transitiv auf $\mathbb{K}P^2 \setminus (g \cap h)$.

3. Dreiecke

Wir wählen uns ein Dreieck mit 2 Punkten auf der Ferngeraden. Mit Hilfe einer Transformation können wir nun je 2 Ecken jedes beliebigen anderen Dreiecks auf die beiden Punkte auf der Ferngeraden des von uns gewählten Dreiecks abbilden. Die dritte Ecke befindet sich außerhalb dieser Ferngeraden, und wir können sie durch eine Translation wieder in jeden beliebigen Punkt außerhalb g überführen. Damit folgt auch hier wieder die Transitivität.

4. Vierecke

Bisher konnten wir die Transitivität in allen Divisionsalgebren gleichzeitig zeigen, doch dieser Luxus hört bei den Vierecken auf. Wegen der fehlenden Assoziativität von $\mathbb{O}$ müssen wir diesen Fall gesondert betrachten. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ können wir unser gewohntes Schema fortsetzen. Dieses Mal dürfen wir 3 Punkte wählen, und wir nehmen den Ursprung $(0, 0)$ und die beiden Fernpunkte (0) und (∞). Nimmt man noch den Punkt $(1, 1)$ dazu, erhält man das sog. Standard-Viereck. Den Punkt $(1, 1)$ kann man mithilfe der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & b \end{smallmatrix}\right)$ auf (a, b) bringen, wobei (a, b) ein beliebiger Punkt ist mit $a, b \neq 0$ [2]. Die Matrix

[2] Wenn a oder b gleich 0 gilt, liegt der Punkt (a, b) auf einer der Koordinatenachsen; dann wäre unser Viereck entartet.

$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ lässt den Ursprung $(0,0)$ fest, und an den Fernpunkten ändert sie auch nichts, denn die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ bildet die Gerade durch den Ursprung und e_1, also die Gerade mit Steigung 0, auf die Gerade durch $(0,0)$ und ae_1 ab, also wieder auf sich selbst. Genau das Gleiche passiert mit der Geraden durch $(0,0)$ und e_2. Die Ferngerade wird durch die Anwendung einer Diagonalmatrix wieder in sich selbst überführt. Also bleibt das gemeinsame Element der Ferngeraden und der Gerade durch $(0,0)$ und e_1 (also (0)) bzw. durch $(0,0)$ und e_2 (also (∞)) durch die Abbildung erhalten. Somit liegt $\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ im Stabilisator von $((\infty),(0),(0,0))$.

In $\mathbb{O}$ kann man das Verfahren mit den Diagonalmatrizen nicht benutzen, da die Konjugation mit einer oktavialen Diagonalmatrix gar nicht definiert ist (nur mit Klammersetzung), denn wenn $D = diag(d_1, d_2, d_3)$ ist, dann ist die ij-Komponente von DXD^{-1} gleich $d_i x_{ij} d_j^{-1}$. Diese Komponente ist also ein Produkt aus 3 verschiedenen Oktaven. Verwendet man jedoch reelle Diagonalmatrizen, hat man kein Problem mehr, denn für eine reelle Diagonalmatrix $D = diag(e^\alpha, e^\beta, e^\gamma)$ mit $\alpha + \beta + \gamma = 0$ gehört die Abbildung $A_D : X \mapsto DXD^t = DXD$ zur Gruppe E_6, da $A_D = exp(a_{D'})$ mit $D' = diag(\alpha, \beta, \gamma)$ und $a_{D'}(X) = D' \circ X$. Wie wir wissen liegen diese Abbildungen in der Liealgebra von E_6.

In $\mathbb{O}^2$ ersetzen wir die Diagonalmatrizen durch die $Spin_8$ (vgl. [3], S. 34). Es gilt $Spin_8 \subset Spin_9 \subset F_4$ und $Spin_8$ erhält die "Koordinatenachsen“ $\mathbb{O}e_1$ und $\mathbb{O}e_2$ (also in der affinen Terminologie die drei Punkte $((0,0),(0),(\infty))$. Betrachten wir die Menge der anderen affinen Geraden durch $(0,0)$, also diejenigen mit Steigung $a \neq 0, \infty$, wirkt die $Spin_8$ schon beinahe transitiv darauf. Wie wir wissen gilt: Ein Paar (A,B) mit $A, B \in SO_8$ liegt genau dann in $Spin_8$, wenn es ein $C \in SO_8$ gibt mit $C(x)A(y) = B(xy)$ für alle $x, y \in \mathbb{O}$ (Trialität). Wendet man so ein (A,B) auf den Vektor $(x, ax) \in \mathbb{O}^2$ an, ergibt sich $(A(x), B(ax)) = (A(x), C(a)A(x)) = (\tilde{x}, \tilde{a}\tilde{x})$ mit $\tilde{x} = A(x)$, $\tilde{a} = C(a)$. Also werden Geraden in Geraden abgebildet und zwar auf solche, die zwar beliebige Steigung $\tilde{a} \in \mathbb{O}$ haben, aber die Bedingung $|\tilde{a}| = |a|$ erfüllen müssen, denn C darf eine beliebige Matrix in SO_8 sein. Um Geraden vom Typ $y = \lambda ax$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ zu erreichen, können wir Abbildungen A_D mit reellen Diagonalmatrizen benutzen.

Wir wollen uns nun überlegen, wie wir einen beliebigen Punkt (x,y) mit $x, y \neq 0$ auf den Punkt $(1,1)$ abbilden können. Dazu betrachten wir zuerst die Gerade $\{(\tilde{x}, a\tilde{x});\ \tilde{x} \in \mathbb{O}\}$ mit $a \in \mathbb{O} \setminus \{0\}$, auf der der Punkt (x,y) liegt. Diese können wir (isomorph) auf die Gerade $\mathbb{O}(1,1)$ abbilden; dazu benötigen wir nur Elemente aus der $Spin_8$ und reelle Diagonalmatrizen. Demnach können wir (x, y) auf (c, c) abbilden. Dieses (c, c) können wir mithilfe reeller Diagonalmatrizen auf (c', c') mit $|c'| = 1$ abbilden. Für den nächsten Schritt überlegen wir uns, dass die $Spin_7 \subset SO_8$ in der $Spin_8$ diagonal als Untergruppe enthalten ist, d.h. die $Spin_7$ besteht aus den Matrizenpaaren (A, A), zu denen es ein C gibt mit $C(u)A(v) = A(uv)$; das sind genau die Paare $(A, A) \in Spin_7$ (vgl. [2], (78)). Nach Folgerung 17.2 aus [2] operiert die $Spin_7$ transitiv auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{O} = \mathbb{R}^8$. Also können wir jeden Vektor (c', c') mit $|c'| = 1$ auf $(1, 1)$ abbilden.

Die Gruppe $Spin_8$ und die reellen Dreiecksmatrizen gehören zum Stabilisator des Dreiecks $(0), (0, 0), (\infty)$ unter der Gruppe E_6. Somit wirkt dieser transitiv auf $\mathbb{O}^2 \setminus (\mathbb{O}e_1 \cup \mathbb{O}e_2)$.

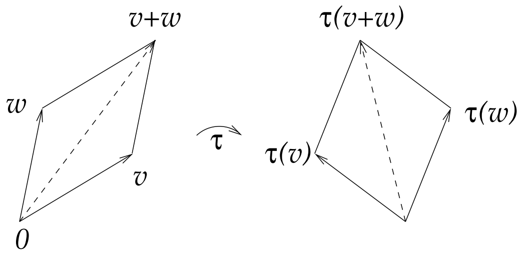
Damit ist gezeigt, dass E_6 transitiv auf der Menge der nichtentarteten Vierecke wirkt. □

Wir wollen uns nun mit dem Stabilisator der Kollineationsgruppe des Standard-Vierecks beschäftigen.

Hierzu betrachten wir wieder zunächst das Dreieck, bevor wir zum Viereck übergehen. Wir wollen zeigen, dass der Stabilisator des Dreiecks $(0, 0), (0), (\infty)$ genau den Transformationen $\tau : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ mit $\tau(x, y) = (x^\alpha, y^\beta)$; $\alpha, \beta \in Aut(\mathbb{K}, +)$ und $\tau(0, 0) = (0, 0)$ entspricht. Dazu brauchen wir zunächst folgende allgemeine Aussage:

Satz 2.2. *Jede affine Abbildung* $\tau : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ *mit* $\tau(0, 0) = (0, 0)$ *ist additiv.*

Beweis. Dazu erinnern wir uns an die Definition von affin: Eine projektive Abbildung τ heißt affin $\iff$ $\tau(Ferngerade) = Ferngerade$. Das bedeutet, dass τ die Parallelität und den Punkt $(0, 0)$ erhält. Für zwei Vektoren v, w kann man die Wirkung von τ also so illustrieren:



Da τ die Parallelität erhält, gilt $\tau(v + w) = \tau(v) + \tau(w)$ □

Satz 2.3. *Die Kollineationen von* $\mathbb{O}P^2$*, die im Stabilisator vom Dreieck* $(0, 0), (0)$ *und* (∞) *liegen, sind genau die Tansformationen der Form*

$$(x, y) \mapsto (x^\alpha, y^\beta), (s) \mapsto (s^\gamma), (\infty) \mapsto (\infty)$$

mit Automorphismen α, β, γ der additiven Gruppe von $\mathbb{K}$, die die Gleichung

$$(sx)^\beta = s^\gamma x^\alpha \text{ für alle } s, x \in \mathbb{K}$$

erfüllen.

Beweis. Den Beweis teilen wir uns in 4 Schritte ein.

Sei τ ein Element aus dem Stabilisator des Dreiecks.

1. Wir müssen die Additivität von τ überprüfen, also $\tau(v + w) = \tau(v) + \tau(w)$. Dies gilt aber nach vorangegangenem Satz.

2. Wir müssen uns vergewissern, dass τ die Koordinatenachsen invariant lässt. Dies ist ebenfalls erfüllt, denn τ stabilisiert das Dreieck, also insbesondere (0), (∞) und den Ursprung.

3. Wir müssen zeigen, dass die 1. Komponente von $\tau(x, y)$ unabhängig von der zweiten aus (x, y) ist (und umgekehrt). Den beliebigen Punkt (x, y) können wir auch als Summe seiner Achsenabschnitte schreiben: $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Also gilt $\tau(x, y) = \tau((x, 0) + (0, y)) \overset{*}{=} \tau(x, 0) + \tau(0, y) = (\tilde{x}, 0) + (0, \tilde{y})$ mit $(\tilde{x}, 0) := \tau(x, 0)$ und $(0, \tilde{y}) := \tau(0, y)$; das Gleichheitszeichen "$\overset{*}{=}$"gilt hierbei wegen der Additiviät von τ, die wir uns schon im 1. Schritt überlegt hatten. Offensichtlich ist $(\tilde{x}, 0)$ unabhängig von y, und im Gegenzug auch $(0, \tilde{y})$ unabhängig von x.

4. Sei $\tilde{x} =: x^\alpha, \tilde{y} =: y^\beta$ mit $\alpha, \beta : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{O}$, also $\tau(x, y) = (x^\alpha, y^\beta)$ Wir müssen nun zeigen: $\alpha, \beta \in Aut\mathbb{O}$

Wir ersetzen y nun durch $sx + t$: $\tau(x, sx + t) = (x^\alpha, (sx + t)^\beta)$. Die Gerade durch den Punkt $(x, sx + t)$ lässt sich schreiben als $\{(x', sx' + t);\ x' \in \mathbb{O}\}$. Also können wir ihr Bild schreiben als $\{(x'^\alpha, (sx'+t)^\beta);\ x' \in \mathbb{O}\}$. Da dies wieder eine Gerade sein muss, gibt es foglich ein $\tilde{s}$ und ein $\tilde{t}$, so dass gilt: $\{(x'^\alpha, (sx' + t)^\beta);\ x' \in \mathbb{O}\} = \{(\tilde{x}', \tilde{s}\tilde{x}' + \tilde{t});\ \tilde{x}' \in \mathbb{O}\}$

Setzen wir nun $x'^\alpha = \tilde{x}'$, brauchen wir nur noch die zweiten Komponenten betrachten, die gleich sein müssen:

$(sx' + t)^\beta = \tilde{s}\tilde{x}' + \tilde{t}$, also mit $x'^\alpha = \tilde{x}'$:

$$(sx' + t)^\beta = \tilde{s}x'^\alpha + \tilde{t} \tag{2.1}$$

Speziell für $t = 0$ gilt auch $\tilde{t} = 0$, denn wegen $\tau(0, 0) = (0, 0)$ bleibt der Ursprung fest. Deshalb werden Ursprungsgeraden wieder in Ursprungsgeraden überführt. Somit folgt

$$(sx')^\beta = \tilde{s}x'^\alpha \tag{2.2}$$

Setzt man nun (2.2) in (2.1) ein, folgt

$$(sx' + t)^\beta = (sx')^\beta + \tilde{t} \tag{2.3}$$

Speziell für $s = 0$ gilt:

$$t^\beta = \tilde{t} \tag{2.4}$$

(2.4) in (2.3) eingesetzt ergibt dann $(sx' + t)^\beta = (sx')^\beta + t^\beta$, also ist β additiv.

Warum dürfen wir nun $\tilde{s} = s^\gamma$ mit einer Abbildung $\gamma : \mathbb{O} \mapsto \mathbb{O}$ schreiben? Dazu setzen wir $x' = 1$ in (2.2) und erhalten $s^\beta = \tilde{s}1^\alpha$, also gilt

$$\tilde{s} = s^\beta / 1^\alpha =: s^\gamma \tag{2.5}$$

Setzen wir nun (2.5) in (2.2) ein, erhalten wir $(sx')^\beta = s^\gamma x'^\alpha$. Mit dieser Gleichung und der Additivität von β kann man schließlich auch zeigen, dass α und γ ebenfalls additiv sind:

$(sx' + s'x')^\beta = (sx')^\beta + (s'x')^\beta = s^\gamma x'^\alpha + s'^\gamma x'^\alpha = (s^\gamma + s'^\gamma)x'^\alpha$

Andererseits gilt: $(sx' + s'x')^\beta = ((s + s')x')^\beta = (s + s')^\gamma x'^\alpha$

Also ist γ additiv. Für α gilt die Additivität, weil

$(sx' + sx'')^\beta = (sx')^\beta + (sx'')^\beta = s^\gamma x'^\alpha + s^\gamma x''^\alpha = s^\gamma (x'^\alpha + x''^\alpha)$

und $(sx' + sx'')^\beta = (s(x' + x''))^\beta = s^\gamma (x' + x'')^\alpha$ □

Nun betrachten wir das Standard-Viereck.

Satz 2.4. *Der Stabilisator des Standard-Vierecks unter der Kollineationsgruppe besteht genau aus den Transformationen* $f : \mathbb{O}^2 \mapsto \mathbb{O}^2$;
$f(x, y) = (x^\alpha, y^\alpha); f(s) = (s^\alpha); (\infty) \mapsto (\infty)$ *mit* $\alpha \in Aut\mathbb{O}$.

Beweis. Wir nehmen uns ein τ aus dem Stabilisator des Dreiecks und zeigen, dass für den Fall des Standard-Vierecks $\tau = f$ gilt, wenn τ den 4. Punkt $(1, 1)$ festlässt: $(1, 1) = \tau(1, 1) = (1^\alpha, 1^\beta)$, also folgt $1 = 1^\alpha$ und $1 = 1^\beta$

Mit $(sx)^\beta = s^\gamma x^\alpha$ folgt für $x = 1$:

$s^\beta = s^\gamma 1^\alpha = s^\gamma 1 = s^\gamma$, also folgt $\beta = \gamma$ und $(sx)^\beta = s^\beta x^\alpha$

Wählen wir nun $s = 1$ folgt $x^\beta = (1x)^\beta = 1^\beta x^\alpha = 1x^\alpha = x^\alpha$, also $\alpha = \beta$ und somit $(sx)^\alpha = s^\alpha x^\alpha$. Damit ist α ein Automorphismus, also $\alpha \in Aut\mathbb{O} = G_2 \subset F_4 \subset \mathsf{E}_6$. □

Somit ist nun gezeigt, dass E_6 die ganze Kollineationsgruppe ist, denn wir wissen, wenn wir ein $g \in Koll(\mathbb{K}P^2)$ haben, welches ein beliebiges Viereck in das Standard-Viereck überführt, muss dieses g in E_6 liegen:

Wir nehmen uns ein beliebiges $g \in Koll(\mathbb{K}P^2)$. Mit diesem g können wir ein beliebiges Viereck V in das Standard-Viereck V_0 abbilden. Wir haben aber gezeigt, dass es in E_6 eine Abbildung $\tilde{g}$ gibt, die ebenfalls V in V_0 überführt, also $\tilde{g}(V) = V_0$. Diese können wir umformen zu $V = \tilde{g}^{-1}(V_0)$. Damit gilt:

$g\tilde{g}^{-1}(V_0) = V_0$ bzw. mit $h := g\tilde{g}^{-1} : h(V_0) = V_0$

Also folgt mit vorangegangenem Satz (da V_0 von h festgelassen wird): $h \in Aut(\mathbb{K}) \subset \mathsf{E}_6$. Somit gilt $g = h\tilde{g} \in \mathsf{E}_6$.

Literatur

[1] J.-H. Eschenburg: Skript zur Vorlesung *Quaternionen und Oktaven (2)*, http://www.math.uni-augsburg.de/∼eschenbu/

[2] H. Freudenthal: *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*, Notes Utrecht 1951, 1960, reprinted in Geom. Dedicata 19 (1985), 7 - 63

[3] H. Salzmann et al.: *Compact Projective Planes*, De Gruyter 1995