

Mathematische Konzepte II^a

G.-L. Ingold, L. Chioncel, U. Eckern
Institut für Physik
Universität Augsburg

17. Juli 2019

^aDas Modul “Mathematische Konzepte II” wurde von Gert-Ludwig Ingold entwickelt. Aktuelle T_EX-Version von Liviu Chioncel, mit verschiedenen Ergänzungen von Ulrich Eckern.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoranalysis	1
1.1	Skalar- und Vektorfelder in der Mechanik und der Elektrodynamik	1
1.2	Nabla-Operator (∇)	3
1.3	Divergenz, Sätze von Gauß und Green	4
1.4	Wiederholung: Integrale	10
1.5	Rotation	10
1.6	Rotation und Wirbel, Satz von Stokes	11
1.7	Zusammenfassung	15
1.8	Krummlinig-orthogonale Koordinaten	16
1.8.1	Linien-, Flächen- und Volumenelement	16
1.8.2	Differentialoperatoren	18
2	Funktionentheorie	22
2.1	Komplexe Zahlen	22
2.2	Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen	22
2.3	Analytische Funktionen	24
2.4	Integration in der komplexen Ebene	29
2.5	Residuensatz	33
2.6	Zusammenfassung	44
3	Zerlegung nach orthogonalen Funktionensystemen	45
3.1	Motivation	45
3.2	Fourierreihe	46
3.3	Fouriertransformation	52
3.4	Delta-Funktion	56
3.5	Lösung linearer Differentialgleichungen durch Fouriertransformation	58
3.6	Legendre-Polynome	62
3.7	Zusammenfassung	74
4	Partielle Differentialgleichungen	75
4.1	Beispiele, Klassifikation	75
4.2	Lösung durch Separationsansatz	76

4.2.1	Kartesische Koordinaten	76
4.2.2	Kugelkoordinaten	79
4.3	Diffusionsgleichung, Wellengleichung	89
4.4	Sine-Gordon-Gleichung	91
4.5	Zusammenfassung	93

Zielgruppe: Das Modul ‘Mathematische Konzepte II’ (PHM-0034) richtet sich an Studierende im zweiten Semester der Studiengänge Bachelor Physik, Bachelor Materialwissenschaften und Lehramt Gymnasium (falls Mathematik nicht zweites Fach ist).

Zeitaufwand (in Vorlesungs-Doppelstunden):

- Kapitel 1, Vektoranalysis: ca. 7
- Kapitel 2, Funktionentheorie: ca. 7
- Kapitel 3, Orthogonale Funktionensysteme: ca. 8
- Kapitel 4, Partielle Differentialgleichungen: ca. 5

Empfohlene Literatur

- Lehrbücher
 - S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik (Teubner)
 - W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik, I: Klassische Mechanik (Springer)
 - R. Shankar, Basic Training in Mathematics (Plenum Press)
 - M. Scherfner, T. Volland, Mathematik für das erste Semester (Spektrum/Springer)
 - C. B. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik (Elsevier/Spektrum)
 - M. L. Boas, Mathematical methods in the physical sciences (Wiley)
 - G. B. Arfken, H. J. Weber, Mathematical methods for physicists (Academic)
 - F. Ehlotzky, Angewandte Mathematik für Physiker (Springer)
 - Chun Wa Wong, Introduction to Mathematical Physics: Methods and Concepts (Oxford)
- Formelsammlungen
 - I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik (Harri Deutsch)
 - I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Tables of integrals, series, and products (Academic)
- Sonstige Skripten ...
 - ... finden sich im Web: einfach nach ‘Mathematische Methoden’ suchen!

Kapitel 1

Vektoranalysis

1.1 Skalar- und Vektorfelder in der Mechanik und der Elektrodynamik

Beispiel aus der Mechanik

Ein Teilchen der Masse m , Koordinate $\mathbf{r}(t)$, Kraft $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, Newton'sche Bewegungsgleichung: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Durch Lösen dieser Differentialgleichung (mit Anfangsbedingungen) ergibt sich die Bahnkurve, $\mathbf{r}(t)$.

- Kraftfeld, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) =$ Vektorfeld: jedem Punkt \mathbf{r} wird ein Vektor zugeordnet.

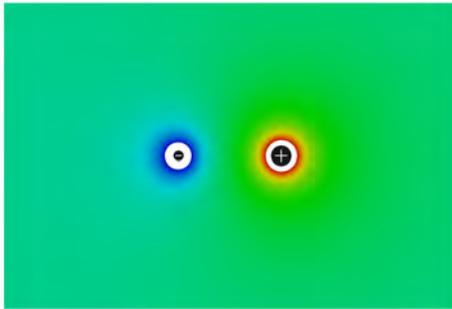
Beispiel aus der Hydrodynamik

Die Hydrodynamik befasst sich mit der Bewegung *vieler* Teilchen, zum Beispiel der Atome in einem Gas oder einer Flüssigkeit. Wir betrachten einen bestimmten (festen) Punkt \mathbf{r} und ein festes (kleines) Volumenelement ΔV ; die Zahl der Atome in diesem Volumenelement sei $\Delta N(\mathbf{r})$. Die Größe $n(\mathbf{r}) = \Delta N(\mathbf{r})/\Delta V$ nennt man Teilchendichte. Multipliziert man die Teilchendichte mit der Masse m der Atome, erhält man die Massendichte. Sind die Teilchen geladen und haben alle die gleiche Ladung q , ist $qn(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte. Analog kann man auch die lokale Geschwindigkeit der strömenden Flüssigkeit, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, definieren. Damit ergibt sich die lokale Stromdichte zu $n(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ und die Massenstromdichte bzw. die Ladungstromdichte zu $mn(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$ bzw. $qn(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Achtung, Dichte und Stromdichte hängen im Allgemeinen auch von der Zeit ab! Und oft wird für die Stromdichten das gleiche Symbol, \mathbf{j} , verwendet!

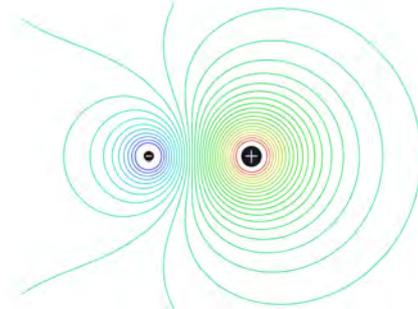
- Dichte, $n(\mathbf{r}) =$ Skalarfeld: jedem Punkt \mathbf{r} wird ein Skalar zugeordnet.
- Geschwindigkeit, $\mathbf{v}(\mathbf{r}) =$ Vektorfeld: jedem Punkt \mathbf{r} wird ein Vektor zugeordnet.

Beispiel aus der Elektrostatik: zwei verschieden große gegennamige Ladungen

- Elektrisches Potential: Skalarfeld $\Phi(\mathbf{r})$

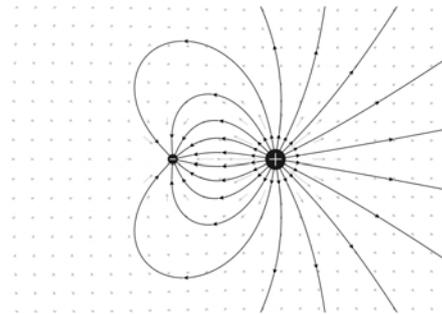
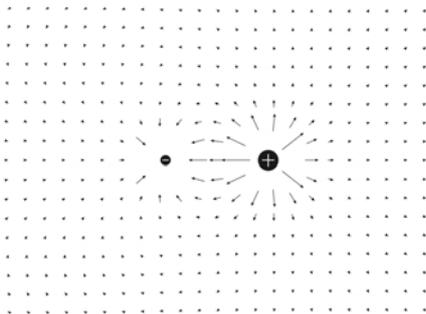


Skalarfeld $\Phi(\mathbf{r})$

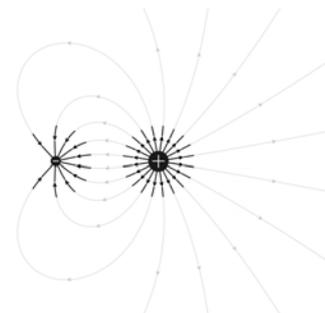
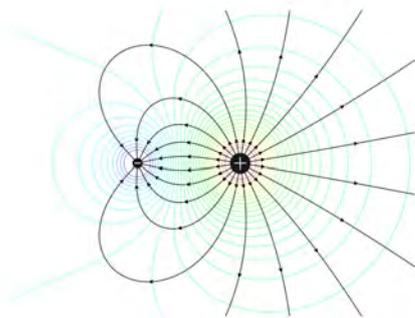


Äquipotentiallinien

- Elektrisches Feld: Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$



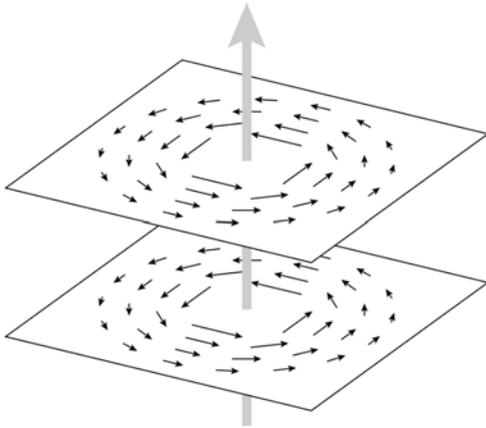
Feldlinien



Äquipotential- und Feldlinien stehen senkrecht aufeinander (siehe Math. Konz. I, Kapitel 2.6).

Ladungen sind Quellen und Senken des elektrischen Feldes.

Beispiel aus der Magnetostatik: gerader stromdurchflossener Leiter



Magnetisches Feld: Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$
Ströme führen zu Wirbeln im Magnetfeld.

Im Folgenden befassen wir uns mit der Frage, wie sich (zum Beispiel) die oben gezeigten Strukturen (Vektorfelder) mathematisch beschreiben lassen. Ausgehend von vorgegebenen Quellen und Senken: Wie sehen die entsprechenden Vektorfelder aus? Und umgekehrt: Wie bestimmt man die Quellen und Senken aus einem vorgegebenen Feld?

1.2 Nabla-Operator (∇)

Am Beispiel des elektrischen Potentials Φ und des elektrischen Felds \mathbf{E} (vgl. Math. Konz. I, Kapitel 2.6):

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi = -\nabla \Phi$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Formal: ‘Multiplikation’ eines vektoriellen Differentialoperators mit einem Skalar. Es sind noch andere ‘Arten’ der Multiplikation möglich, insbesondere:

- Divergenz:

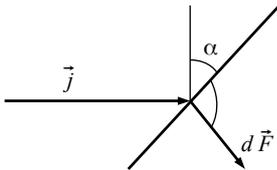
$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.1)$$

- Rotation:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

1.3 Divergenz, Sätze von Gauß und Green

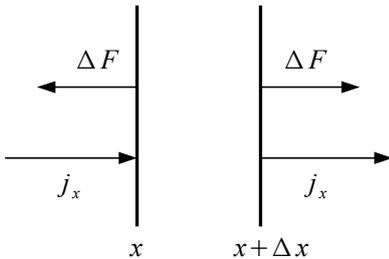
Physikalische Interpretation: Fluss durch eine Fläche (siehe auch Math. Konz. I, Kapitel 2.8, Flächenintegral). Wir betrachten hier das Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, zum Beispiel die Stromdichte. Der Strom durch die abgebildete Fläche hängt offensichtlich vom Winkel zwischen der Stromdichte und der Flächennormalen ab:



Strom durch Fläche =

$$|\mathbf{j}| |d\mathbf{F}| \cos \alpha = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} \quad (1.3)$$

Als Konvention wird festgelegt: Die Flächennormalenvektoren zeigen immer nach außen. Strom durch die beiden Flächen:



$$-j_x(x)\Delta F, \quad j_x(x + \Delta x)\Delta F$$

Das ergibt den Nettostrom:

$$j_x(x + \Delta x)\Delta F - j_x(x)\Delta F = \frac{j_x(x + \Delta x) - j_x(x)}{\Delta x} \Delta V$$

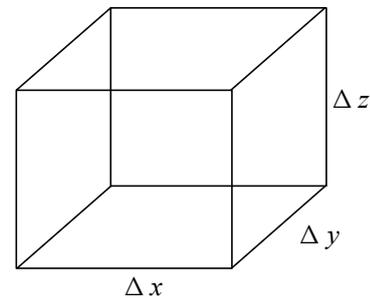
Volumenelement: $\Delta V = \Delta x \Delta F$. Im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{j_x(x + \Delta x) - j_x(x)}{\Delta x} \Delta V = \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta V \quad (1.4)$$

Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Nettofluss nach außen (Summe über alle sechs Oberflächen):

$$\begin{aligned} & (j_x(x + \Delta x, y, z) - j_x(x, y, z)) \Delta y \Delta z \\ & + (j_y(x, y + \Delta y, z) - j_y(x, y, z)) \Delta x \Delta z \\ & + (j_z(x, y, z + \Delta z) - j_z(x, y, z)) \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (1.5)$$



$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right) \Delta V = \text{div } \mathbf{j} \cdot \Delta V$$

(Volumenelement: $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$)

Kontinuitätsgleichung: Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl im Volumen ΔV ergibt sich aus dem Strom in das Volumen bzw. aus dem Volumen heraus – was wir gerade bestimmt haben.

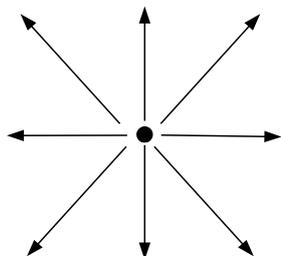
$$\operatorname{div} \mathbf{j} \cdot \Delta V = -\frac{dN}{dt} \leftrightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial n}{\partial t}$$

Hier ist $n(\mathbf{r}, t)$ die Teilchenzahldichte. Da diese Größe i. A. von Raum und Zeit abhängt, ist es besser, bei der Zeitableitung die partielle Ableitung zu verwenden.

- $\operatorname{div} \mathbf{j} > 0 \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} < 0 \rightarrow$ Fluss aus dem Volumen heraus (Quelle)
- $\operatorname{div} \mathbf{j} < 0 \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} > 0 \rightarrow$ Fluss in das Volumen hinein (Senke)

Beispiele:

Quelle mit konstanter Stärke im gesamten

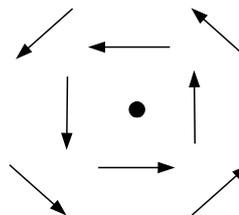


Raum:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Keine Quellen oder Senken:



$$\mathbf{u} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Rechenregeln:

- $\operatorname{div} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \operatorname{div} (\mathbf{u}) + \operatorname{div} (\mathbf{v})$
- $\operatorname{div} (a \mathbf{u}) = a \operatorname{div} (\mathbf{u})$, a : konstanter Skalar
- $\operatorname{div} (S \mathbf{v}) = S \operatorname{div} (\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S$, S : Skalarfeld

Herleitung der dritten Beziehung:

$$\operatorname{div} (S\mathbf{v}) = \partial_i (Sv_i) = v_i \partial_i S + S \partial_i v_i = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S + S \operatorname{div} (\mathbf{v}) \tag{1.6}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.7}$$

Hier wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet: Wenn ein Index 2-mal auftritt, wird über ihn summiert ($i = 1, 2, 3$).

Anwendung:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) + \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathbf{r} \\ \operatorname{div} \mathbf{r} &= 3 \\ \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) &= \operatorname{grad} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \\ \rightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) &= -3 \frac{r^2}{r^5} + \frac{3}{r^3} = 0 \text{ für } \mathbf{r} \neq 0\end{aligned}\tag{1.8}$$

Anmerkung: Betrachte $\operatorname{grad} f(r)$, wobei $f(r)$ eine beliebige Funktion ist, die aber nur vom Abstand r und nicht von der Richtung von \mathbf{r} selbst abhängt:

$$\nabla f(r) = \sum_i \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \sum_i \mathbf{e}_i \cdot f' \frac{x_i}{r} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = f' \cdot \mathbf{e}_r$$

→ Die Gradientenbildung zerfällt in das Produkt aus radialem Einheitsvektor und der eindimensionalen ‘einfachen’ Ableitung von f nach r .

Satz von Gauß

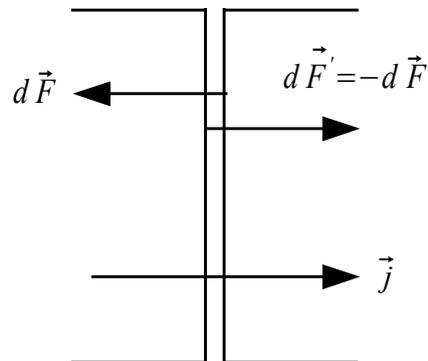
Das Elektrische Feld $\mathbf{E} = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ besitzt außerhalb des Ursprungs keine Quellen oder Senken. Wie kann man die Stärke der Quelle bei $\mathbf{r} = 0$ bestimmen? Betrachte dazu nochmals ein kleines Würfelvolumen:

$$\begin{aligned}j_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - j_x(x, y, z) \Delta y \Delta z &+ \\ j_y(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z - j_y(x, y, z) \Delta x \Delta z &+ \\ j_z(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - j_z(x, y, z) \Delta x \Delta y &= \operatorname{div} \mathbf{j} \Delta x \Delta y \Delta z\end{aligned}\tag{1.9}$$

Auf der linken Seite stehen die Beiträge $(\mathbf{j} \cdot d\mathbf{F})_i$ von allen sechs Seitenflächen:

$$\sum_{i=1}^6 (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{F})_i = \operatorname{div} \mathbf{j} \cdot dV\tag{1.10}$$

Ein beliebiges Volumen lässt sich in infinitesimale Würfel zerlegen, wobei sich die Beiträge der Innenflächen gegenseitig wegheben, falls \mathbf{j} stetig ist:



Grenzfläche zweier kleiner Würfel, die Beiträge an der Innenseite kompensieren sich.

Die Summation über alle Würfel liefert im Grenzfall infinitesimal kleiner Würfel eine Integration. Nur die Beiträge der Volumenoberfläche bleiben übrig. Wir erhalten:

$$\int_O \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \cdot dV$$

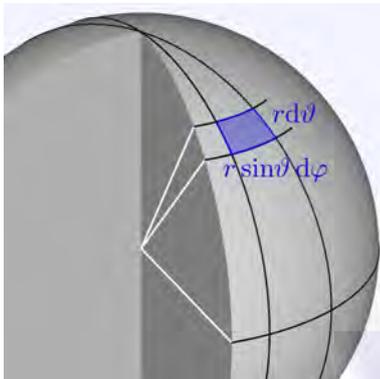
Dies ist der bekannte Satz von Gauß, wobei O die Oberfläche des Volumens V bezeichnet.

Anwendung: $\mathbf{j} = \mathbf{r}/r^3$



Aus Symmetriegründen ist es sinnvoll, als Integrationsvolumen eine Kugel mit Zentrum im Ursprung

zu wählen. Der Kugelradius sei R .



$$d\mathbf{F} = \mathbf{n} R^2 d\theta \sin \theta d\phi \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \quad |\mathbf{r}| = R \quad (1.11)$$

$$\int_0 \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi R^2 \frac{\mathbf{r}}{R} \frac{\mathbf{r}}{R^3} = 4\pi \quad (1.12)$$

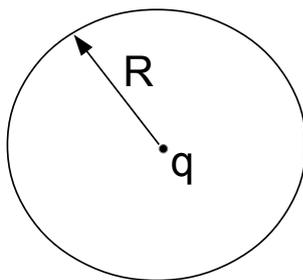
Unabhängig vom Radius R liegt eine Quelle der Stärke 4π im Volumen, und zwar im Ursprung, da das Ergebnis unabhängig von R ist; das restliche Volumen ist quellenfrei. Vgl. Math. Konz. I, Kapitel 2.8.

Beispiel: Feld einer Punktladung

Die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ stellt die Quelle für das elektrische Feld \mathbf{E} dar.

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0,$$

Eine Punktladung q sitze im Ursprung. Wegen der Kugelsymmetrie steht das elektrische Feld immer senkrecht auf jeder Kugeloberfläche um den Ursprung. Verwende den Satz von Gauß mit einem Kugelvolumen (Radius R).



Erster Schritt: Integration über Kugelvolumen

$$\int \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad (1.13)$$

Zweiter Schritt: Satz von Gauß

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{F} = \frac{q}{\epsilon_0} = 4\pi R^2 E_r \quad (1.14)$$

Hier wurde verwendet, dass das elektrische Feld aus Symmetriegründen nur eine Radialkomponente E_r besitzt, deren Betrag nicht von der Richtung abhängt.

$$\rightarrow E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \quad \text{für } |\mathbf{r}| = R \quad (1.15)$$

In vektorieller Schreibweise:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.16)$$

Anmerkung (1):

Mathematisch kann die Ladungsverteilung einer Punktladung mithilfe der δ -Funktion dargestellt werden. Wir betrachten zunächst den eindimensionalen Fall und definieren:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases} \quad (1.17)$$

derart, dass das Integral eins ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \delta(x - x_0) = 1 \quad (1.18)$$

für beliebige $\epsilon > 0$. Offensichtlich ist die δ -Funktion die Ableitung der Stufenfunktion, vgl. Math. Konz. I, Kapitel 4. Und damit folgt:

$$\Theta(x - x_0) = \int_{-\infty}^x dx' \delta(x' - x_0) \quad (1.19)$$

Ebenso gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0) \quad (1.20)$$

falls $f(x_0) \neq 0$. Falls $f(x)$ zudem unendlich oft differenzierbar ist, ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x_0) \quad (1.21)$$

Hier bezeichnet $\delta^{(n)}(x - x_0)$ die n -te Ableitung der δ -Funktion und $f^{(n)}(x_0)$ die n -te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0 (vorausgesetzt, diese ist ungleich null). Somit kann eine Punktladung im Ursprung mithilfe einer 3-dimensionalen δ -Funktion dargestellt werden:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (1.22)$$

Man kann sich eine δ -Funktion natürlich auch als Grenzfall einer Funktionenfolge vorstellen, zum Beispiel:

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.23)$$

Anmerkung (2):

Differentialoperatoren können auch nacheinander angewandt werden. Zum Beispiel:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \text{div grad } \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Poisson-Gleichung}) \quad (1.24)$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \phi &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \phi &= \mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi &= \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Laplace-Operator (Δ):

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.26)$$

Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

Beispiel aus der Quantenmechanik

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung des freien Teilchens hat die folgende Form:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}) \quad (1.28)$$

Dies stellt ein Eigenwertproblem dar: Gesucht sind Lösungen dieser (linearen) Differentialgleichung unter bestimmten Randbedingungen, wobei Letztere festlegen, für welche E -Werte Lösungen existieren.

Anwendung des Satzes von Gauß

Wir verwenden

$$\operatorname{div}(S\mathbf{v}) = S\operatorname{div}(\mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} S$$

und erhalten folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi) &= \Phi \Delta \Psi + (\operatorname{grad} \Phi)(\operatorname{grad} \Psi) - \Psi \Delta \Phi - (\operatorname{grad} \Psi)(\operatorname{grad} \Phi) \\ &= \Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi \end{aligned} \quad (1.29)$$

Diese Gleichung wird über ein Volumen V integriert und dann der Satz von Gauß verwendet. Resultat:

$$\boxed{\int_V (\Phi \Delta \Psi - \Psi \Delta \Phi) dV = \int_O (\Phi \operatorname{grad} \Psi - \Psi \operatorname{grad} \Phi) \cdot d\mathbf{F} \quad (\text{Satz von Green})}$$

1.4 Wiederholung: Integrale

Siehe Math. Konz. I, Kapitel 2.7 und 2.8.

1.5 Rotation

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (1.30)$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (1.31)$$

Komponentenschreibweise: $(\text{rot } \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$ (Einstein'sche Summenkonvention!)

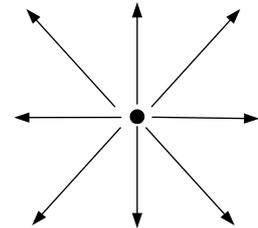
Beispiele:

1. $\mathbf{v} = \mathbf{r}$

$$\text{rot } \mathbf{r} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) = 0$$

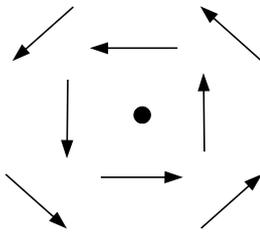
Alternativ:

$$(\text{rot } \mathbf{r})_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j x_k = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \delta_{jk} = \sum_j \epsilon_{ijj} = 0$$



Aber: $\text{div } \mathbf{r} = 3!$ Dieses Vektorfeld besitzt Quellen, jedoch keine Wirbel.

2. $\mathbf{v} = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$



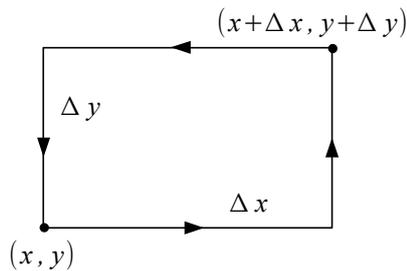
$$\text{rot } \mathbf{v} = -\mathbf{e}_x \frac{\partial x}{\partial z} - \mathbf{e}_y \frac{\partial y}{\partial z} + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 2\mathbf{e}_z$$

Aber: $\text{div } \mathbf{v} = 0!$ Dieses Vektorfeld ist ein Wirbelfeld, besitzt aber keine Quellen oder Senken.

Im Allgemeinen ist ein Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ eine Kombination aus einem Wirbelfeld und einem Quellen-/Senkenfeld, d. h. $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla S$. Damit folgt, siehe folgendes Unterkapitel: $\nabla \times \mathbf{f} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{v}$, $\nabla \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \nabla S = \Delta S$.

1.6 Rotation und Wirbel, Satz von Stokes

Berechne ein Linienintegral um eine infinitesimal kleine Fläche dF :



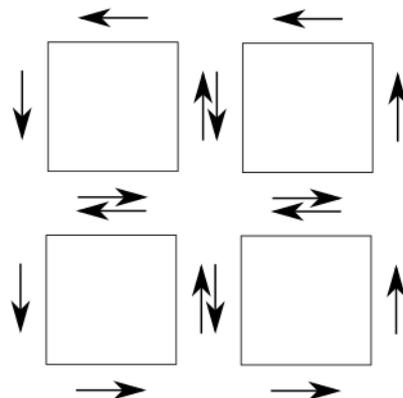
$$v_x \Delta x|_y + v_y \Delta y|_{x+\Delta x} - v_x \Delta x|_{y+\Delta y} - v_y \Delta y|_x = \left(\frac{v_y(x + \Delta x, y) - v_y(x, y)}{\Delta x} - \frac{v_x(x, y + \Delta y) - v_x(x, y)}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta y$$

Im Limes $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) dF = (\text{rot } \mathbf{v})_z dF = (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{F} \quad (1.32)$$

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{F} \quad (\text{infinitesimales } dF!) \quad (1.33)$$

Eine nicht verschwindende Rotation hängt mit Wirbeln zusammen. Verallgemeinerung auf beliebige



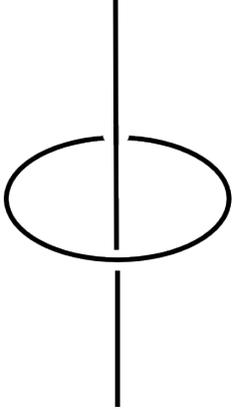
Bei Unterteilung einer Fläche in kleine Rechtecke heben sich Beiträge an den Innenflächen weg. Im Grenzfall einer unendlich feinen Unterteilung liefert diese lediglich den Beitrag des Randes der Fläche.

Konturen: Setze die Fläche aus vielen kleinen Rechtecken zusammen. Die Beiträge der inneren Kanten heben sich gegenseitig weg, sofern das Vektorfeld stetig ist. Somit erhält man ein Linienintegral über den Rand C (gelegentlich auch als ∂F bezeichnet) der Fläche F :

$$\boxed{\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_F (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{F} \quad (\text{Satz von Stokes})}$$

Anwendung in der Elektrodynamik

In der Magnetostatik gilt $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$:



- \mathbf{B} magnetische Induktion (manchmal einfach Magnetfeld)
- \mathbf{j} (Ladungs-)Stromdichte

B_φ hängt wegen der Zylindersymmetrie nicht von φ ab. Integration über Kreisscheibe mit Radius R :

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{F} = \mu_0 I \\ &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi R B_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (1.34) \end{aligned}$$

Rechenregeln für Rotation:

- $\text{rot}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{u}) + \text{rot}(\mathbf{v})$
- $\text{rot}(a\mathbf{u}) = a \text{rot}(\mathbf{u})$, a : konstanter Skalar
- $\text{rot}(S\mathbf{u}) = S \text{rot}(\mathbf{u}) + (\text{grad } S) \times \mathbf{u}$, S : Skalarfeld

Beweis dieser Beziehung:

$$\begin{aligned} [\text{rot}(S\mathbf{u})]_i &= \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j (S u_k) = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (S \partial_j u_k + u_k \partial_j S) \\ &= S \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j u_k + \sum_{jk} \epsilon_{ijk} (\partial_j S) u_k = S (\text{rot } \mathbf{u})_i + ((\text{grad } S) \times \mathbf{u})_i \\ \rightarrow \text{rot}(S\mathbf{u}) &= S (\text{rot } \mathbf{u}) + (\text{grad } S) \times \mathbf{u} \end{aligned}$$

- Gradientenfelder sind wirbelfrei: $\text{rot grad } S = 0$ oder $\nabla \times \nabla S = 0$, da $\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_k S = 0$.
- Wann ist ein Kraftfeld \mathbf{K} konservativ, d. h. wann existiert ein zugehöriges Potential? Nach Math. Konz. I, Kapitel 2.7 muss das Linienintegral über jede geschlossene Kurve verschwinden. Satz von Stokes:

$$\oint_C d\mathbf{s} \cdot \mathbf{K} = \int_F d\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{K} \quad (1.35)$$

Es muss also $\text{rot } \mathbf{K} = 0$ sein. Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn seine Rotation überall verschwindet.

In der Elektrostatik ist das elektrische Feld rotationsfrei:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

so dass man ein elektrisches Potential ϕ mit $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ einführen kann.

- Die Divergenz eines Rotationsfeldes ist immer null:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$$

oder

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

da

$$\sum_{ijk} \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j u_k = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j u_k = 0.$$

→ Ein Rotationsfeld ist quellenfrei, umgekehrt kann man ein quellenfreies Vektorfeld immer also Rotationsfeld schreiben.

In der Elektrodynamik gilt ganz allgemein: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, das heißt das \mathbf{B} -Feld hat keine Quellen (es gibt keine magnetischen Monopole).

→ Man kann daher

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

setzen, wobei \mathbf{A} Vektorpotential heißt.

Weitere Beziehungen, die die Rotation enthalten:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \\ \operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \\ \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} \end{aligned}$$

Beweis der ersten Beziehung (Einstein'sche Summenkonvention!):

$$\begin{aligned} [\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]_i &= \partial_i u_j v_j = u_j \partial_i v_j + v_j \partial_i u_j & (1.36) \\ [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]_i &= \epsilon_{ijk} u_j \epsilon_{klm} \partial_l v_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} u_j \partial_l v_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l v_m = u_j \partial_i v_j - u_j \partial_j v_i \\ [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}]_i &= v_j \partial_i u_j - v_j \partial_j u_i \\ \rightarrow [\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})]_i &= u_j \partial_j v_i + [\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}]_i + v_j \partial_j u_i + [\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}]_i \\ \rightarrow \operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} \end{aligned}$$

1.7 Zusammenfassung

- Nabla-Operator:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.37)$$

- Gradient: $\nabla S = \text{grad } S$
- Divergenz: $\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}$, beschreibt Quellen von \mathbf{v}
- Rotation: $\nabla \times \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}$, beschreibt Wirbel von \mathbf{v}
- Wichtige Integralsätze:

- Satz von Gauß:

$$\int_V dV \text{div } \mathbf{j} = \int_O d\mathbf{F} \cdot \mathbf{j} \quad (1.38)$$

Der Flächennormalenvektor zeigt in den Außenraum.

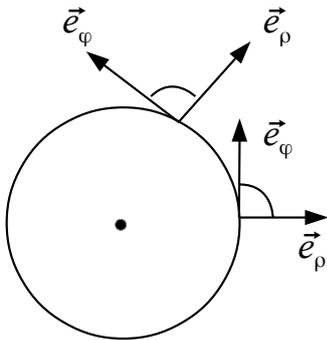
- Satz von Stokes:

$$\int_F d\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{j} = \int_C ds \cdot \mathbf{j} \quad (1.39)$$

- Wichtige Identitäten:
 - $\text{rot grad } S = 0$: Ein wirbelfreies Vektorfeld lässt sich als Gradientenfeld schreiben.
 - $\text{div rot } \mathbf{v} = 0$: Ein Rotationsfeld hat keine Quellen.
- Ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{f} kann in der Form $\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{v} + \nabla S$ geschrieben werden.

1.8 Krummlinig-orthogonale Koordinaten

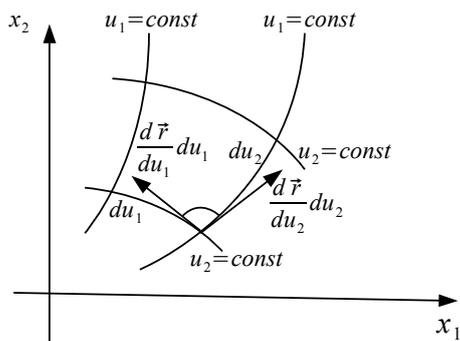
Abhängig von der Problemstellung kann es günstig sein, statt kartesischer Koordinaten Kugel- oder Zylinderkoordinaten zu verwenden. Die Basisvektoren hängen dann vom Ort ab, stehen aber immer noch paarweise senkrecht aufeinander. *Anmerkung: Wir beschränken uns auf diesen Fall, obwohl einige der folgenden Relationen auch gelten, wenn dies nicht so ist.*



Beispiel: Polarkoordinaten oder Zylinderkoordinaten in einer Ebene senkrecht zur z -Achse

1.8.1 Linien-, Flächen- und Volumenelement

Erinnerung an Math. Konz. I, Kapitel 2.7 und 2.8: Wir gehen aus von den kartesischen Koordinaten x, y, z und betrachten dann ‘neue’ Koordinaten u_1, u_2, u_3 . Wir nehmen an, dass es einen eindeutigen Zusammenhang $x, y, z \leftrightarrow u_1, u_2, u_3$ gibt.



Basisvektoren in den neuen Koordinaten u_i :

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{|\partial \mathbf{r} / \partial u_i|} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}, \quad h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|$$

Berechnung der h_i

Zylinderkoordinaten:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \rightarrow u_1 = \rho, \quad u_2 = \varphi, \quad u_3 = z$$

$$\begin{aligned}
h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\
h_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \\
h_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\boxed{h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1}$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

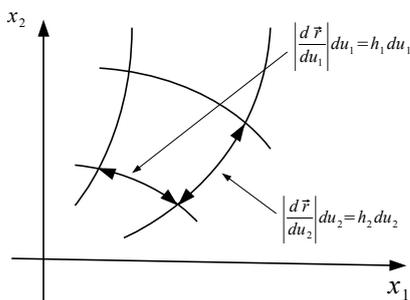
$$z = r \cos \theta$$

$$u_1 = r, u_2 = \theta, u_3 = \varphi$$

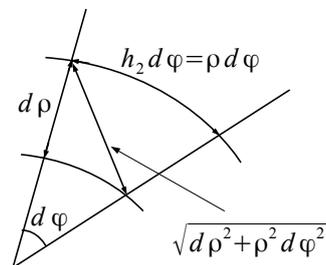
$$\begin{aligned}
h_1^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = 1 \\
h_2^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \\
h_3^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta}$$

Linielement



Beispiel: Polarkoordinaten



Da die Basisvektoren orthogonal zueinander sind, erhält man das Linienelement mit Hilfe des Satz von Pythagoras:

$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 \tag{1.41}$$

Flächenelement

Als Beispiel betrachten wir das Flächenelement senkrecht zur 3-Richtung, $d\mathbf{F}_3$:

$$d\mathbf{F}_3 = h_1 h_2 \cdot du_1 du_2 \cdot \mathbf{e}_3 \quad (1.42)$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die anderen Flächen.

Volumenelement

$$dV = h_1 h_2 h_3 \cdot du_1 du_2 du_3 \quad (1.43)$$

- In Zylinderkoordinaten: $dV = r \cdot dr d\varphi dz$
- In Kugelkoordinaten: $dV = r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\varphi$

1.8.2 Differentialoperatoren

Gradient:

$$dU = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = \text{grad } U \cdot d\mathbf{r} \quad (1.44)$$

$$\boxed{(\text{grad } U)_i = \lim_{\Delta u_i \rightarrow 0} \frac{U(u_i + \Delta u_i) - U(u_i)}{\Delta u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial U}{\partial u_i}} \quad (1.45)$$

Für die Herleitung ist Folgendes hilfreich:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 \\ &= \mathbf{e}_1 h_1 du_1 + \mathbf{e}_2 h_2 du_2 + \mathbf{e}_3 h_3 du_3 \end{aligned} \quad (1.46)$$

sowie:

$$\begin{aligned} dU = U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) &= \nabla U \cdot d\mathbf{r} \\ &= \nabla U \cdot (\mathbf{e}_1 h_1 du_1 + \dots) \\ &= (\nabla U \cdot \mathbf{e}_1) h_1 du_1 + \dots \\ &= \frac{\partial U}{\partial u_1} du_1 + \dots \\ \rightarrow \frac{\partial U}{\partial u_1} &= (\nabla U \cdot \mathbf{e}_1) h_1 = (\nabla U)_1 h_1 \end{aligned} \quad (1.47)$$

- Kartesische Koordinaten:

$$\text{grad } U = \mathbf{e}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.48)$$

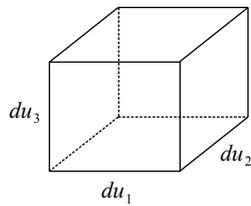
- Zylinderkoordinaten:

$$\text{grad } U = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.49)$$

- Kugelkoordinaten:

$$\text{grad } U = \mathbf{e}_r \frac{\partial U}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \quad (1.50)$$

Divergenz:



$$\text{div } \mathbf{V} \cdot dV =$$

$$\text{div } \mathbf{V} \cdot h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 =$$

$$\begin{aligned} &+ [V_1(u_1 + du_1, u_2, u_3)h_2(u_1 + du_1, u_2, u_3)h_3(u_1 + du_1, u_2, u_3) \\ &- V_1(u_1, u_2, u_3)h_2(u_1, u_2, u_3)h_3(u_1, u_2, u_3)]du_2 du_3 \\ &+ [V_2(u_1, u_2 + du_2, u_3)h_1(u_1, u_2 + du_2, u_3)h_3(u_1, u_2 + du_2, u_3) \\ &- V_2(u_1, u_2, u_3)h_1(u_1, u_2, u_3)h_3(u_1, u_2, u_3)]du_1 du_3 \\ &+ [V_3(u_1, u_2, u_3 + du_3)h_1(u_1, u_2, u_3 + du_3)h_2(u_1, u_2, u_3 + du_3) \\ &- V_3(u_1, u_2, u_3)h_1(u_1, u_2, u_3)h_2(u_1, u_2, u_3)]du_1 du_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{div } \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 V_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 V_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_3)}{\partial u_3} \right]} \quad (1.51)$$

- Kartesische Koordinaten:

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (1.52)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{V} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} V_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{aligned}$$

- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{V} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r} V_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} V_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.53)$$

Laplace-Operator:

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial U}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial U}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial U}{\partial u_3} \right) \right]} \quad (1.54)$$

Dieses Resultat folgt direkt aus den obigen Ergebnissen für $\operatorname{grad} U$ und $\operatorname{div} \mathbf{V}$.

- Kartesische Koordinaten:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.55)$$

- Zylinderkoordinaten:

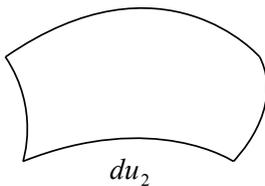
$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (1.57)$$

Rotation:

Betrachte kleine Fläche senkrecht zur 1-Richtung:



$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{F}_1 &= \\ (\operatorname{rot} \mathbf{V})_1 h_2 h_3 du_2 du_3 &= [V_3(u_1, u_2 + du_2, u_3) h_3(u_1, u_2 + du_2, u_3) \\ &\quad - V_3(u_1, u_2, u_3) h_3(u_1, u_2, u_3)] du_3 \\ &\quad - [V_2(u_1, u_2, u_3 + du_3) h_3(u_1, u_2, u_3 + du_3) \\ &\quad - V_2(u_1, u_2, u_3) h_3(u_1, u_2, u_3)] du_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{(\operatorname{rot} \mathbf{V})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_3 V_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 V_2)}{\partial u_3} \right)}$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Komponenten, $(\operatorname{rot} \mathbf{V})_2$ und $(\operatorname{rot} \mathbf{V})_3$.

- Kartesische Koordinaten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (1.58)$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mathbf{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} \right) + \mathbf{e}_z \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right) \quad (1.59)$$

- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{V} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \mathbf{e}_\theta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

Anmerkung:

Alternativ kann man bei derartigen Umrechnungen auch ‘einfach’ die Kettenregel verwenden:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u_3}, \text{ etc.} \quad (1.61)$$

Dabei tritt wieder die Jacobi-Matrix auf, die bereits in Math. Konz. I, Kapitel 2.8 eingeführt wurde. Wir benutzen folgende Abkürzungen: $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_1 = \partial/\partial u_1$, etc, und erhalten:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x & \partial u_2/\partial x & \partial u_3/\partial x \\ \partial u_1/\partial y & \partial u_2/\partial y & \partial u_3/\partial y \\ \partial u_1/\partial z & \partial u_2/\partial z & \partial u_3/\partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

In der ersten Spalte der hier auftretenden Matrix erkennt man den Gradienten von u_1 , in der zweiten Spalte den Gradienten von u_2 , etc. Außerdem ist diese Matrix gerade die Transponierte der Matrix \mathbf{J}^{-1} , siehe Math. Konz. I, Gleichung 2.175:

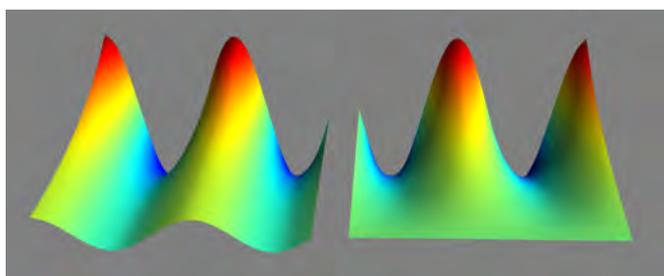
$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \partial u_1/\partial x & \partial u_1/\partial y & \partial u_1/\partial z \\ \partial u_2/\partial x & \partial u_2/\partial y & \partial u_2/\partial z \\ \partial u_3/\partial x & \partial u_3/\partial y & \partial u_3/\partial z \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

Zu beachten ist, dass wir dort die kartesischen Koordinaten mit x_1, x_2, x_3 bezeichnet hatten.

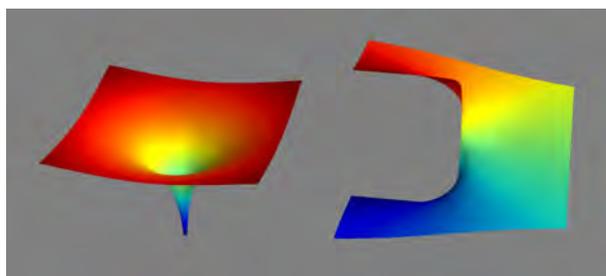
Kapitel 2

Funktionentheorie

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$



$$\ln(x + iy)$$



In diesen Bildern ist jeweils links der Realteil und rechts der Imaginärteil der beiden angegebenen Funktionen dargestellt.

2.1 Komplexe Zahlen

Siehe Skript Math. Konz. I, Kapitel 3.

2.2 Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

Die komplexwertige Funktion $w = f(z)$, bildet die komplexe Zahl $z = x + iy$ auf die komplexe Zahl $w = u + iv$ ab, wobei x, y, u, v reell sind.

Beispiel: $f(z) = z^2, z = 1 + 2i \rightarrow x = 1, y = 2$

$$w = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i, \quad u = -3, v = 4 \quad (2.1)$$

Lassen sich komplexwertige Funktionen differenzieren? Mit anderen Worten: Existiert eine eindeutige

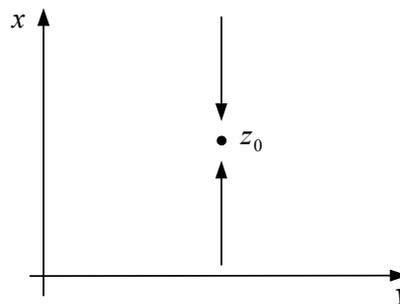
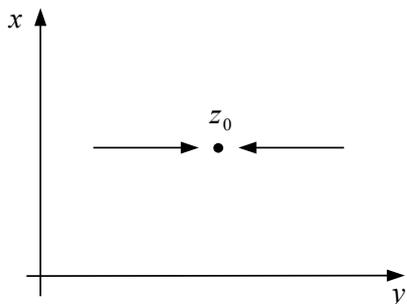
Ableitung

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (2.2)$$

die unabhängig von der Richtung ist, aus der man sich dem Punkt z_0 nähert?

Differentiation entlang der x -Richtung:

Differentiation entlang der y -Richtung:



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{z=z_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial(iy)} \right|_{z=z_0} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Die Forderung, dass diese beiden Ausdrücke gleich sind, liefert die *Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3)$$

Diese Bedingungen sind *notwendig* für die (totale) Differenzierbarkeit; sie werden *hinreichend*, wenn alle ersten Ableitungen existieren und stetig sind.

Eine eindeutige Funktion $f(z)$ heißt *analytisch* im Punkt z_0 , wenn sie im Punkt z_0 und einer Umgebung von z_0 differenzierbar ist. Anderenfalls ist sie in z_0 *singulär*.

Beispiele:

a) $w = z^2 = x^2 - y^2 + i 2xy, \quad u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \quad (2.5)$$

→ w ist analytisch mit

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2x + i2y = 2z \quad (2.6)$$

Auch jede andere Potenz, $w = z^n$, ist analytisch in der gesamten komplexen Ebene.

b) $w = z^* = x - iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.9)$$

→ Die komplexe Konjugation ist keine analytische Funktion. Entsprechendes gilt, wenn man zum Beispiel Potenzen von z mit Potenzen von z^* multipliziert, $f(z) = z^n(z^*)^m$.

Physikalische Anwendung: Wir betrachten zwei Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$, die den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen genügen. Außerdem nehmen wir an, dass die zweiten partiellen Ableitungen stetig und vertauschbar sind. Dann folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (2.10)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.11)$$

Entsprechend gilt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (2.12)$$

Diese beiden Funktionen u und v , die Lösungen der zweidimensionalen Laplacegleichung $\Delta\phi = 0$ sind, nennt man 'harmonisch'. Die tatsächliche Lösung wird durch die Randbedingungen festgelegt. Vergleiche erste Maxwell-Gleichung (ohne Quellen) in zwei Dimensionen.

2.3 Analytische Funktionen

Wir diskutieren zunächst verschiedene Beispiele.

1. Exponentialfunktion:

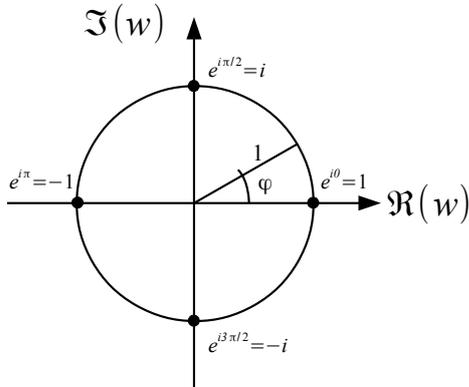
$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (2.13)$$

Analytische Funktion?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \quad (2.15)$$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad (2.16)$$



e^z ist in imaginärer Richtung 2π -periodisch:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} \\ &= e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) = e^{x+iy} = e^z \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ergibt sich die Euler-Formel:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (2.17)$$

$$\Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}) \quad (2.18)$$

$$\Leftrightarrow \Re e^{iy} = \cos y, \quad \Im e^{iy} = \sin y \quad (2.19)$$

In der Praxis rechnet man häufig mit einem komplexen Ansatz, siehe Kapitel 4 in Math. Konz. I, zum Beispile bei gedämpften Schwingungen, und nimmt am Ende den Real- oder Imaginärteil. Dadurch vereinfacht sich die Multiplikation und die Differentiation.

2. Sinus und Kosinus:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) \\ &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cos x - i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \sin x \\ \cos z &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hier taucht der Sinus Hyperbolicus und der Kosinus Hyperbolicus auf:

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad (2.21)$$

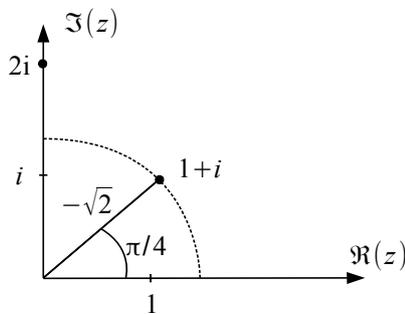
$$\rightarrow \cos(iy) = \cosh y \quad (x = 0) \quad (2.22)$$

Entsprechend:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \quad (2.23)$$

$$\rightarrow \sin(iy) = i \sinh y \quad (x = 0) \quad (2.24)$$

3. Potenzen:



$$z^n = (|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} \quad (2.25)$$

Beispiel:

$$z = 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad z^2 = (1 + i)^2 = 2i = 2 e^{i\pi/2}$$

Achtung – komplexe Wurzeln sind mehrdeutig, zum Beispiel:

$$z^{1/2} = (|z| e^{i\varphi})^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\varphi/2}$$

aber auch

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{i\varphi/2 + \pi i}$$

Weiteres Beispiel:

$$(2i)^{1/2} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \quad \text{oder} \quad (2i)^{1/2} = \sqrt{2} e^{i5\pi/4}$$

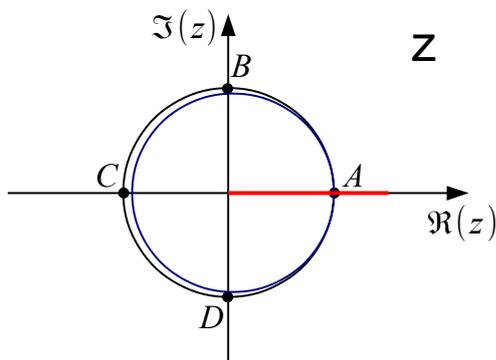
Noch ein Beispiel:

$$1^{1/3} = 1 \quad \text{oder} \quad 1^{1/3} = e^{i2\pi/3} \quad \text{oder} \quad 1^{1/3} = e^{i4\pi/3}$$

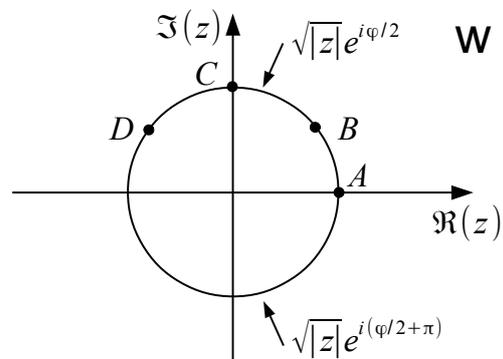
Wir betrachten speziell eine komplexe Zahl vom Betrag eins, $|z| = 1$; die n -te Einheitswurzel teilt den Einheitskreis in n gleiche Abschnitte:

$$\sqrt[n]{e^{i\varphi}} = e^{\frac{i\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi i}{n}}, \quad k = 0, 2, \dots, n - 1$$

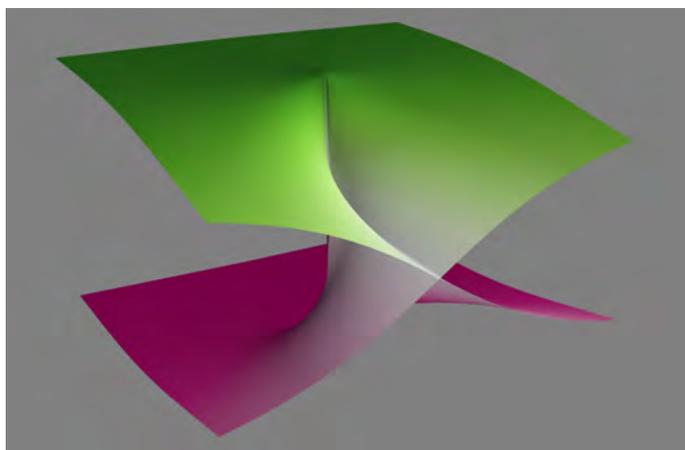
Jeder dieser Abschnitte wird für sich alleingenommen durch die n -te Potenz auf den gesamten Einheitskreis abgebildet. Mithilfe Riemann'scher Blätter kann jedoch eine eindeutige Abbildung konstruiert werden. Wir betrachten dazu den Fall $n = 2$, d. h. die Wurzelfunktion.



Urbildebene der komplexen Wurzelfunktion. Der äußere Kreis mit den Punkten A, B, C, D liegt auf dem ersten Blatt, der innere (blaue) auf dem zweiten Blatt. Die rote Linie, die von $z = 0$ ausgehend entlang der reellen Achse bis nach ∞ verläuft, deutet den Verzweigungsschnitt an.



Bildebene der komplexen Wurzelfunktion. Wenn man die Wurzel aus den Punkten B, C, D zieht, liegen die Ergebnisse in der oberen Halbebene.



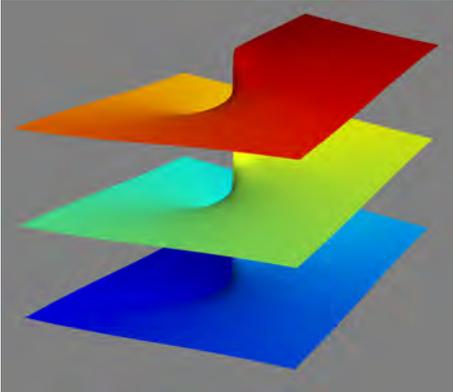
Urbildebene der komplexen Wurzelfunktion, 3D-Darstellung. Bei $z = 0$ liegt ein Verzweigungspunkt, die Funktion ist dort nicht analytisch.

Anmerkung: Die oben diskutierte Wahl des Verzweigungsschnitts bei der Wurzelfunktion entspricht der Festlegung, dass die Wurzel so zu ziehen ist, dass $\Im\sqrt{z} \geq 0$. Betrachten wir zum Beispiel $z = x + iy$ im Grenzfall $y \rightarrow 0$ ($y > 0$). Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sqrt{x + iy} &= +\sqrt{x} \quad \text{für } x > 0 \\ \sqrt{x - iy} &= -\sqrt{x} \quad \text{für } x > 0 \\ \sqrt{x \pm iy} &= +i\sqrt{|x|} \quad \text{für } x < 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Somit hat $\sqrt{x + iy}$ für $x > 0$ einen Sprung, wenn man über den Verzweigungsschnitt geht (und dabei von einem Blatt auf das andere ‘springt’).

4. Logarithmus:

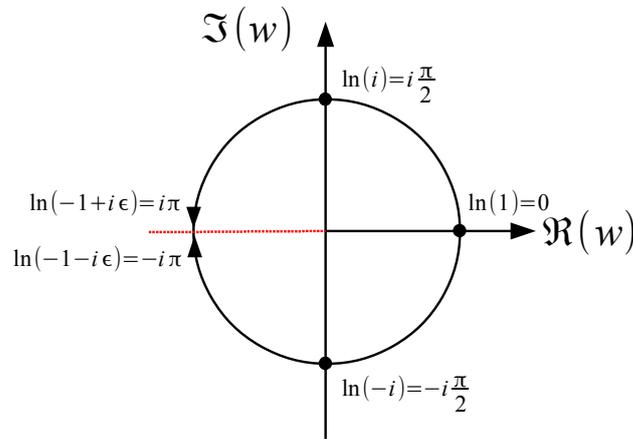


$$z = |z| e^{i\varphi}$$

$$\ln z = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.27)$$

→ Es gibt unendlich viele Blätter. Der Logarithmus wird eindeutig bei Beschränkung auf den Hauptzweig:

$$\ln z = \ln |z| + i\varphi \quad -\pi < \varphi < \pi, \text{ Sprung bei } \pm \pi \quad (2.28)$$



Abgesehen vom Schnitt auf der negativen reellen Achse einschließlich $z = 0$ ist der Hauptzweig des Logarithmus analytisch.

Taylorreihen im Komplexen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (2.29)$$

Die Konvergenz ist durch die dem Entwicklungspunkt z_0 nächstgelegene Singularität bestimmt.

Beispiele:

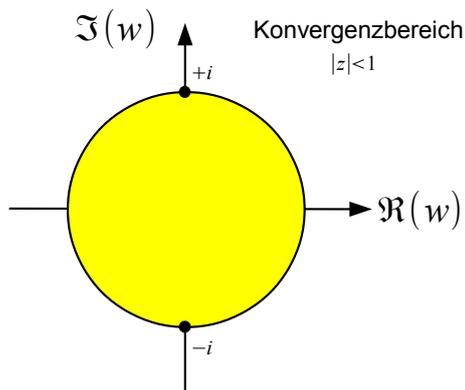
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \dots, \quad z_0 = 0$$

(Singularitäten bei $z = \pm i$)

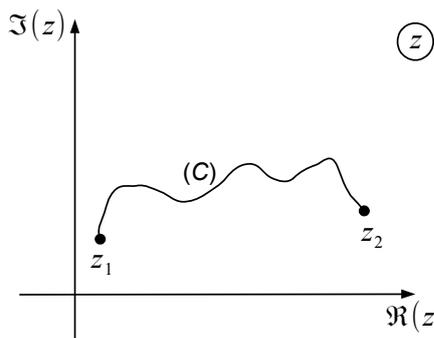
$$f(z) = \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots, \quad z_0 = 0$$

(Singularität bei $z = -1$)

Der Konvergenzradius ist in beiden Fällen gleich 1, d. h. die Reihen konvergieren für $|z| < 1$.



2.4 Integration in der komplexen Ebene



Wir betrachten eine beliebige Kurve ('Weg') C , die von z_1 nach z_2 führt, und das Kurvenintegral:

$$\int_C w(z) dz \quad (2.30)$$

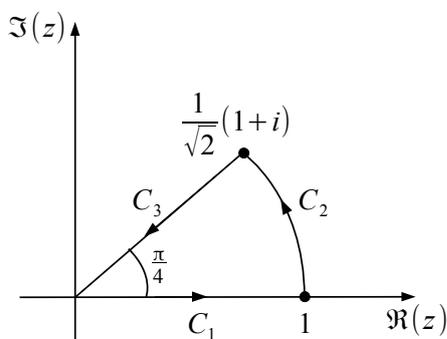
$$w(z) = u(z) + iv(z), \quad dz = dx + idy \quad (2.31)$$

Aufteilung in Real- und Imaginärteil:

$$\int_C w dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

Parametrisierung des Weges: $z(t) = x(t) + iy(t)$, $z_1 = z(t_1)$, $z_2 = z(t_2)$

$$\rightarrow \int_C w dz = \int_{t_1}^{t_2} \left(u \frac{dx}{dt} - v \frac{dy}{dt} \right) dt + i \int_{t_1}^{t_2} \left(v \frac{dx}{dt} + u \frac{dy}{dt} \right) dt \quad (2.32)$$



Beispiel 1:

$$w(z) = z^2 \rightarrow u = x^2 - y^2, v = 2xy$$

Teilstück C_1 :

$$x(t) = t, \quad y(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= t^2, \quad v(t) = 0 \\
\rightarrow \int_{C_1} z^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Teilstück C_2 :

$$\begin{aligned}
x(t) &= \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \\
u(t) &= \cos^2 t - \sin^2 t, \quad v(t) = 2 \cos t \sin t \\
\rightarrow \int_{C_2} z^2 dz &= \int_0^{\pi/4} dt [(\cos^2 t - \sin^2 t)(-\sin t) - (2 \cos t \sin t)(\cos t)] \\
&+ i \int_0^{\pi/4} dt [2 \cos t \sin t(-\sin t) + (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos t)] \\
&= \int_0^{\pi/4} dt (1 - 4 \cos^2 t) \sin t + i \int_0^{\pi/4} dt (1 - 4 \sin^2 t) \cos t
\end{aligned}$$

Hier kann man die beiden Stammfunktionen direkt ablesen und die Integrale berechnen. Alternativ bietet sich im ersten Term die Substitution $s = \cos t$ und im zweiten Term die Substitution $s = \sin t$ an. Mit $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ erhält man:

$$\int_{C_2} z^2 dz = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} + i \frac{\sqrt{2}}{6} \tag{2.34}$$

Teilstück C_3 :

$$\begin{aligned}
x(t) &= t, \quad y(t) = t, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 0 \\
u(t) &= 0, \quad v(t) = 2t^2 \\
\int_{C_3} z^2 dz &= - \int_{\sqrt{2}/2}^0 dt 2t^2 + i \int_{\sqrt{2}/2}^0 dt 2t^2 = \frac{2}{3}(\sqrt{2}/2)^3 - i \frac{2}{3}(\sqrt{2}/2)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6} - i \frac{\sqrt{2}}{6}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Somit ergibt sich für die gesamte Kurve, $C_1 + C_2 + C_3$:

$$\oint_{C_1+C_2+C_3} z^2 dz = 0$$

Für zwei Punkte auf der Kurve (Kontur) hängt dieses Integral nicht vom Weg ab, der auf der Kontur zwischen den beiden Punkten gewählt wird, zum Beispiel:

$$\boxed{\int_{C_1+C_2} z^2 dz = \int_{\bar{C}_3} z^2 dz}$$

\bar{C}_3 bezeichnet den Weg C_3 , der aber in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

Beispiel 2: $w = 1/z$

Wir integrieren diese Funktion über einen Kreis mit Radius r um $z = 0$ im mathematisch positiven Sinn, d. h. gegen den Uhrzeigersinn. Parametrisierung des Kreises wie üblich: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, oder $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$$dz = r i e^{i\varphi} d\varphi, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \quad (2.36)$$

$$\rightarrow \oint dz \frac{1}{z} = \int_0^{2\pi} d\varphi i r e^{i\varphi} \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i \neq 0 \quad (2.37)$$

Dies ist ungleich null, denn der Weg schließt eine Singularität bei $z = 0$ ein. Die Funktion ist also nicht im gesamten Integrationsgebiet analytisch, sondern nur für $z \neq 0$.

Allgemein gilt (Satz von Cauchy-Goursat, ohne Beweis): Ist der Integrand auf der geschlossenen Kontur C und in dem durch sie begrenzten, einfach zusammenhängenden Gebiet analytisch, so ist

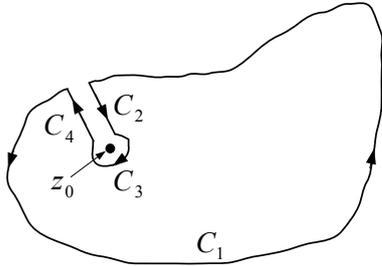
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Äquivalent dazu ist die Aussage:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$$

hängt nicht vom Integrationsweg ab.

Cauchy'sche Integralformel:



Ist $f(z)$ innerhalb und auf einer geschlossenen Kontur analytisch, so gilt für einen Punkt z_0 im Innern der Kontur:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{z - z_0} \quad (2.38)$$

Satz von Cauchy-Goursat

$$\rightarrow I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$$

$$\rightarrow I_1 = -I_3 \quad (I_2 = -I_4)$$

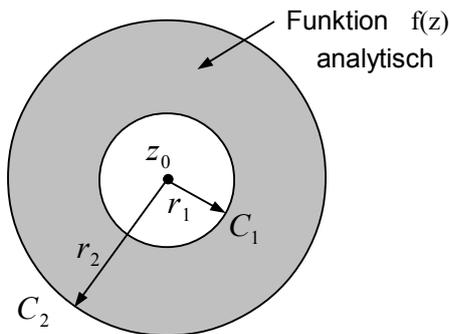
Für infinitesimal kleinen Radius des Kreises C_3 : $I_3 = -2\pi i f(z_0)$ (Durchlauf im Uhrzeigersinn)

$$\rightarrow I_1 = 2\pi i f(z_0)$$

Für die Ableitungen erhält man entsprechend:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}, \quad \dots, \quad f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint dz \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (2.39)$$

Erweiterung der Taylorreihe zur *Laurent-Reihe*:



Im Ringgebiet, das durch C_1 und C_2 begrenzt ist, sei $f(z)$ analytisch. Dann lässt sich die Funktion durch eine Laurent-Reihe darstellen:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z - z_0)^n \quad (2.40)$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (2.41)$$

wobei die Kontur C zwischen C_1 und C_2 liegt und das Ringgebiet einmal im mathematisch positiven Sinn durchläuft. Die Taylorreihe, $A_n = 0$ für $n < 0$, ist ein Spezialfall.

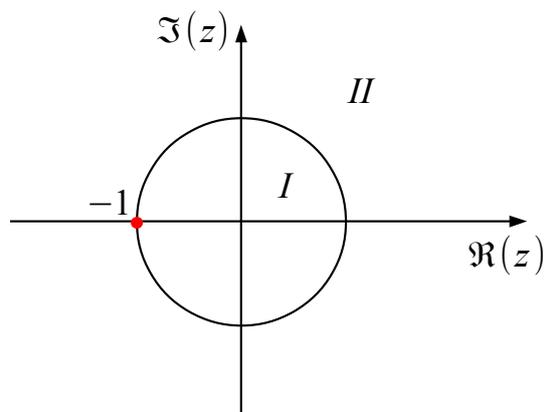
Beispiel:

$$f(z) = 1/(z + 1),$$

Entwicklung um $z_0 = 0$

I: $|z| < 1, f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots$

II: $1 < |z|, f(z) = 1/z - 1/z^2 + 1/z^3 - \dots$



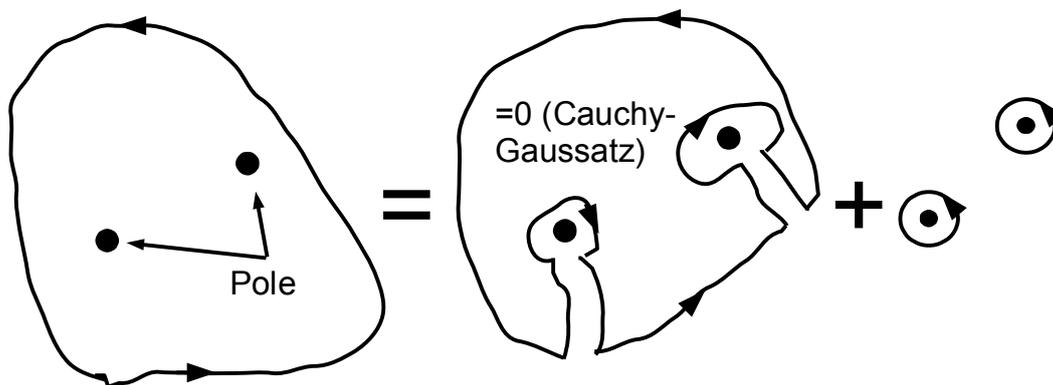
Weiteres Beispiel:

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{z^2}\right) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{2n}}$$

Diese Funktion hat im Punkt $z_0 = 0$ eine sogenannte *wesentliche* Singularität, was mit dem ungewöhnlichen Verhalten für $|z| \rightarrow 0$ zu tun hat. Betrachten Sie dazu $x = 0, y \rightarrow 0$ im Vergleich zu $y = 0, x \rightarrow 0$: Offensichtlich ist die Funktion nicht differenzierbar. Entsprechend treten in der Laurent-Reihe nur negative Potenzen auf.

2.5 Residuensatz

Integration über eine Funktion, die abgesehen von isolierten Singularitäten analytisch ist.



Wir betrachten den Beitrag eines Pols bei z_0 und verwenden die Laurent-Reihe um diesen Punkt:

Kontur C :

$$z = z_0 + re^{i\varphi}, dz = ire^{i\varphi} d\varphi \quad (2.42)$$

$$\oint_C dz f(z) = \oint_C dz A_n (z - z_0)^n \quad (2.43)$$

$$\oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} d\varphi ire^{i\varphi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n r^n e^{in\varphi} = i \int_0^{2\pi} d\varphi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n r^{n+1} e^{i(n+1)\varphi} \quad (2.44)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n+1)\varphi} = 2\pi \delta_{n,-1} \quad (2.45)$$

$$\oint_C dz f(z) = 2\pi i A_{-1} \quad (2.46)$$

A_{-1} : Residuum der Funktion $f(z)$ an der Stelle z_0 , $\text{Res}[f(z), z_0]$

Residuensatz allgemein (für mathematisch positiven Umlaufsinn):

$$\boxed{\oint_C dz f(z) = 2\pi i \sum_{\substack{\text{Pole } k \text{ im} \\ \text{Innern von } C}} \text{Res}[f(z), z_k] \quad (\text{Residuensatz})}$$

Anwendung:

Bestimme das Residuum einer Funktion $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$ bei z_0 , wobei $g(z)$ analytisch in z_0 ist.

Entwickle $g(z)$ um z_0 in eine Taylorreihe:

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + \dots \quad (2.47)$$

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^n} + \frac{g'(z_0)}{(z - z_0)^{(n-1)}} + \dots + \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} \frac{1}{z - z_0} + \dots \quad (2.48)$$

$$\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = A_{-1} \quad (2.49)$$

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \quad (2.50)$$

alternativ:

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z) \quad (2.51)$$

Beispiel 1:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{5 + 4 \cos \varphi} \quad (2.52)$$

Strategie: Integration über den Einheitskreis C , $z = e^{i\varphi}$, $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$

$$\rightarrow \oint_C dz f(z) = \int_0^{2\pi} ie^{i\varphi} d\varphi f(e^{i\varphi}) \quad (2.53)$$

$$ie^{i\varphi} f(e^{i\varphi}) = \frac{1}{5 + 4 \cos \varphi} = \frac{1}{5 + 2e^{i\varphi} + 2e^{-i\varphi}} \quad (2.54)$$

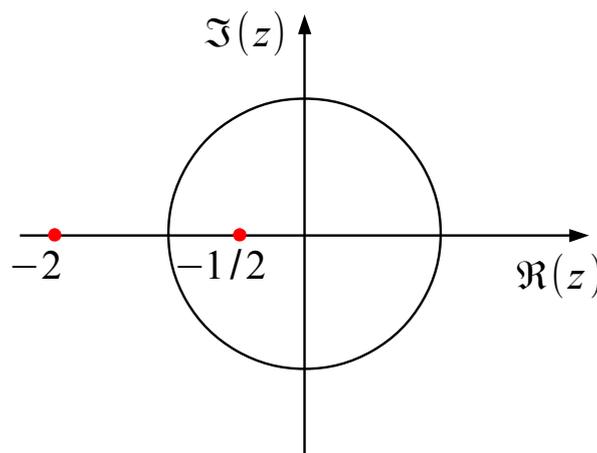
$$f(z) = -i \frac{1}{z(5 + 2z + 2/z)} = -i \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} \quad (2.55)$$

$$I = -i \oint_C dz \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} \quad (2.56)$$

Pole:

$$z^2 + \frac{5}{2}z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = -\frac{5}{4} \pm \frac{3}{4} \Rightarrow z_1 = -\frac{1}{2}, z_2 = -2 \quad (2.57)$$

Der Pol bei z_2 liegt außerhalb der Kontur und liefert keinen Beitrag.



Bestimmung des Residuums:

$$\text{Res} \left[\frac{1}{2z^2 + 5z + 2}, -\frac{1}{2} \right] = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{z + 1/2}{2z^2 + 5z + 2} = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{z + 1/2}{2(z + 1/2)(z + 2)} = \frac{1}{3} \quad (2.58)$$

$$I = 2\pi \operatorname{Res} \left[\frac{1}{2z^2 + 5z + 2}, -\frac{1}{2} \right] = \frac{2\pi}{3} \quad (2.59)$$

Beispiel 2:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos kx}{x^2 + \alpha^2} \quad (2.60)$$

Strategie:

- Erweitere den Integrationsweg zu einer geschlossenen Kontur im Komplexen.
- Die Integrale über die zusätzlichen Wegstücke sollten leicht zu berechnen sein.
- Auswertung des Integrals mit Hilfe des Residuensatzes.

Problem: $\cos(kz)$ divergiert auf der imaginären Achse im Unendlichen, da

$$\cos(ikz) = \cosh(kz)$$

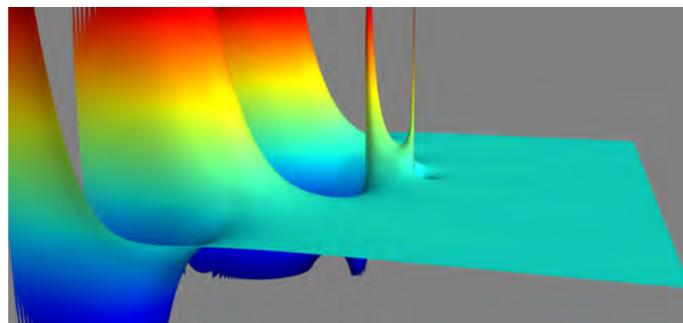
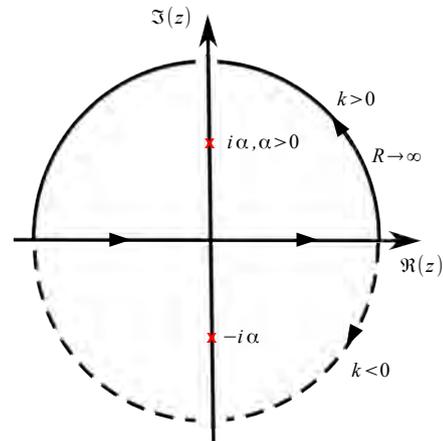
Es bietet sich folgende Umschreibung an:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos kx}{x^2 + \alpha^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + \alpha^2} \quad (2.61)$$

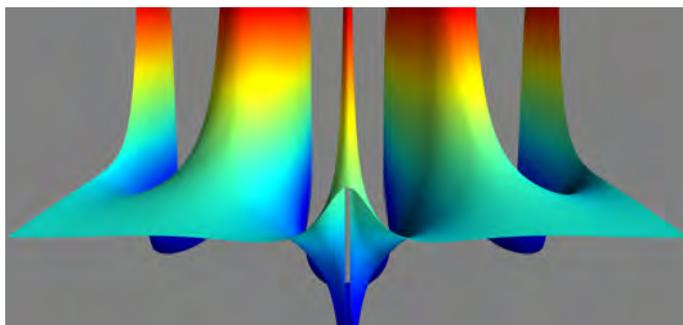
da $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ und

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin kx}{x^2 + \alpha^2} = 0 \quad (2.62)$$

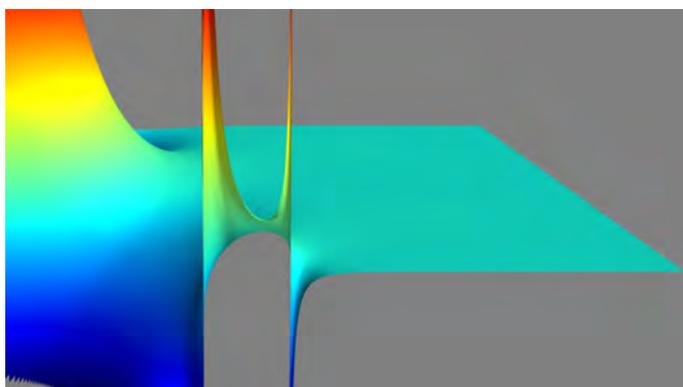
da der Integrand ungerade unter $x \rightarrow -x$ ist.



Darstellung des Realteils von $e^{iz}/(z^2 + 1)$, der explizit gegeben ist durch $e^{-y}[(x^2 - y^2 + 1) \cos x + 2y \sin x]/[(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 - y^2) + 1]$.



Dito, jedoch ist die komplexe Ebene entlang der reellen Achse durchgeschnitten.



Dito, jedoch ist die komplexe Ebene entlang der imaginären Achse durchgeschnitten.

$$\begin{aligned}
 \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\cap} dz \frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2} &\stackrel{z=Re^{i\varphi}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} d\varphi iR e^{i\varphi} \frac{e^{ikR(\cos \varphi + i \sin \varphi)}}{R^2 e^{2i\varphi} + \alpha^2} \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} d\varphi i e^{i\varphi} \frac{R}{R^2 e^{2i\varphi} + \alpha^2} e^{(ikR \cos \varphi - kR \sin \varphi)}
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Damit das Integral verschwindet, muss der Integrand im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwinden. Grenzwertbetrachtung:

$$\frac{R}{R^2 e^{2i\varphi} + \alpha^2} \propto \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad |e^{i\varphi}| = 1 \text{ beschränkt.} \tag{2.64}$$

Problematisch ist das Argument der reellen e-Funktion, $e^{-kR \sin \varphi}$. Wähle also abhängig von k den Integrationsweg so, dass $k \sin \varphi \geq 0$, und somit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-kR \sin \varphi} = 0$$

Dann folgt:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\cap} dz \frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2} = 0 \tag{2.65}$$

Eine genauere Abschätzung zeigt, dass für einen Integranden von der Form $f(z)e^{ikz}$ die Bedingung $f(z) = O(|z|^{-\epsilon})$, $\epsilon > 0$ genügt.

- Für $k > 0$ verschwindet die im Unendlichen schließende Kontur in der oberen Halbebene:
 $\sin \varphi \geq 0$ für $\varphi = 0 \dots \pi$
- Für $k < 0$ muss die Kontur in der unteren Halbebene geschlossen werden:
 $\sin \varphi \leq 0$ für $\varphi = 0 \dots -\pi$

Nun erfolgt die Auswertung mit Hilfe des Residuensatzes, zunächst für $k > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + \alpha^2} = \oint_{\cap} dz \frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2} = 2\pi i \cdot \text{Res} \left[\frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2}, i\alpha \right] \quad (2.66)$$

Bestimmung des Residuums:

$$\frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2} = \frac{1}{z - i\alpha} \frac{e^{ikz}}{z + \alpha} \quad (2.67)$$

$$A_{-1} = \lim_{z \rightarrow i\alpha} \frac{e^{ikz}}{z + i\alpha} = \frac{e^{-k\alpha}}{2i\alpha} \quad (2.68)$$

Also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-k\alpha} \text{ für } k > 0 \quad (2.69)$$

Nun für $k < 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + \alpha^2} = \oint_{\cup} dz \frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2} = -2\pi i \cdot \text{Res} \left[\frac{e^{ikz}}{z^2 + \alpha^2}, -i\alpha \right] \quad (2.70)$$

(Umlauf im mathematisch negativen Sinn)

$$A_{-1} = \lim_{z \rightarrow -i\alpha} \frac{e^{ikz}}{z - i\alpha} = -\frac{e^{k\alpha}}{2i\alpha} = -\frac{e^{-|k|\alpha}}{2i\alpha} \quad (2.71)$$

Zusammenfassung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^2 + \alpha^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos kx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{\pi}{\alpha} e^{-|k|\alpha} \text{ für alle } k \quad (2.72)$$

Anmerkung: Was passiert, wenn Pole auf der Kontur liegen?

Beispiel: Das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x}$$

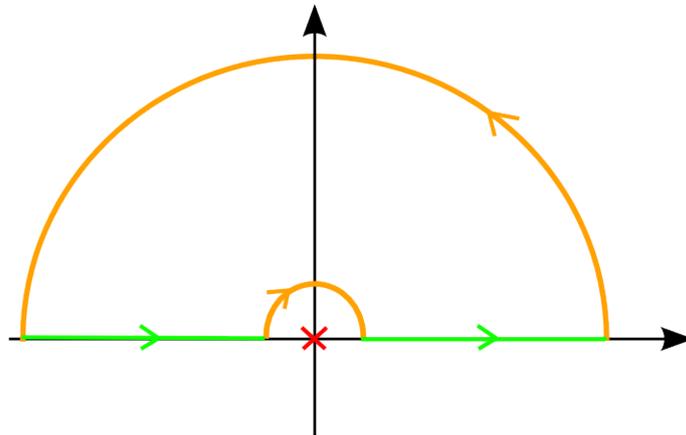
existiert nicht ohne Weiteres, da

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^0 dx \frac{e^{ikx}}{x}$$

nicht existieren. Es existiert jedoch das Hauptwertintegral (*principal value integral*):

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_r^R dx \frac{e^{ikx}}{x} + \int_{-R}^{-r} dx \frac{e^{ikx}}{x} \right] = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x} \quad (2.73)$$

Beachten Sie, dass in diesem Hauptwertintegral sowohl die Grenzen in der Nähe der Singularität als auch im Unendlichen symmetrisch zu wählen sind.



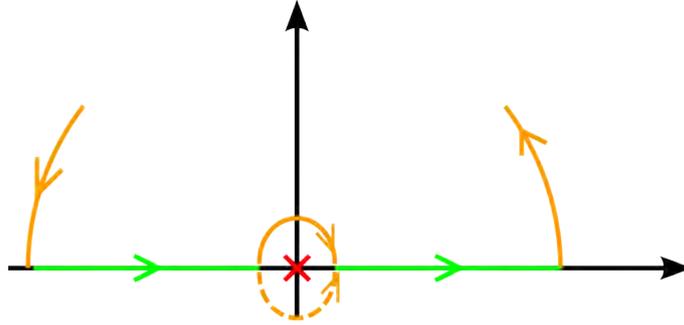
$$\oint dz \frac{e^{ikz}}{z} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x} - i\pi = 0 \quad (2.74)$$

Dieses Integral ergibt null, da keine Pole innerhalb der Kontur liegen.

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x} = i\pi \quad (2.75)$$

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos kx}{x} = 0, \quad \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin kx}{x} = \pi \quad (2.76)$$

Alternativ:



$$C_1 : \int f(z) dz - i\pi \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (2.77)$$

$$C_2 : \int f(z) dz + i\pi \text{Res}[f(z), 0] = 2\pi i \text{Res}[f(z), 0]$$

$$\rightarrow 2 \int f(z) dz = 2\pi i \text{Res}[f(z), 0] \Rightarrow \int f(z) dz = \pi i \text{Res}[f(z), 0]$$

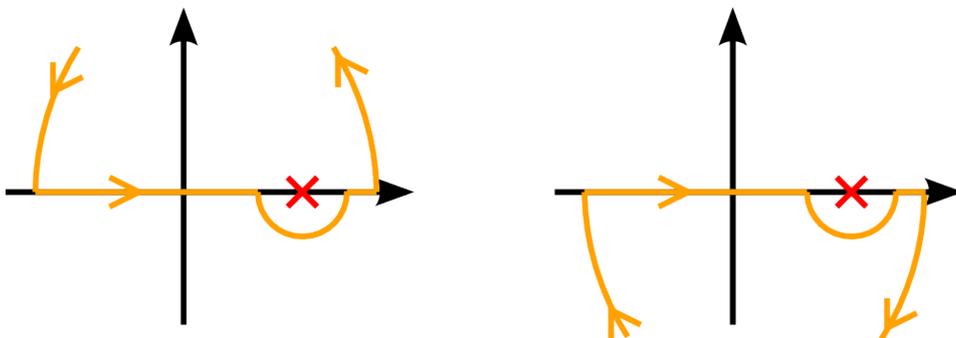
Zusätzliche Pole im Inneren der Kontur müssen gegebenenfalls natürlich wie üblich berücksichtigt werden.

Anmerkung: Häufig bestimmt die physikalische Problemstellung, wie ein Pol auf der reellen Achse bei der Integration zu umlaufen ist.

Beispiel 1:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega - \omega_0} \quad (2.78)$$

Kausalitätsforderung: $f(t) = 0$ für $t < 0$, vergleiche die Diskussion der Green'sche Funktion in Math. Konz. I, Kapitel 4.5. Äquivalent dazu ist: Der Pol bei $\omega = \omega_0$ darf nur für $t > 0$ beitragen.



Aus der Kausalitätsbedingung folgt, dass der Pol bei ω_0 wie gezeigt umlaufen werden muss.

Nur bei dieser Wahl der jeweiligen Kontur verschwindet der Beitrag des Halbkreises im Unendlichen (linke Abbildung: $t > 0$, rechte Abbildung: $t < 0$). Statt den Pol unten zu umlaufen, kann man den

Pol alternativ in die obere Halbebene verschieben: $\omega_0 \rightarrow \omega_0 + i\epsilon$. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 t > 0 : \quad \oint_{\cap} dz \frac{e^{izt}}{z - \omega_0 - i\epsilon} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{e^{izt}}{z - \omega_0 - i\epsilon}, \omega_0 + i\epsilon \right] \\
 &= 2\pi i e^{+i\omega_0 t} e^{-\epsilon t} = 2\pi i e^{+i\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$. Zusammengefasst:

$$f(t) = 2\pi i e^{+i\omega_0 t} \Theta(t) \tag{2.80}$$

mit $\Theta(t)$ der Stufenfunktion.

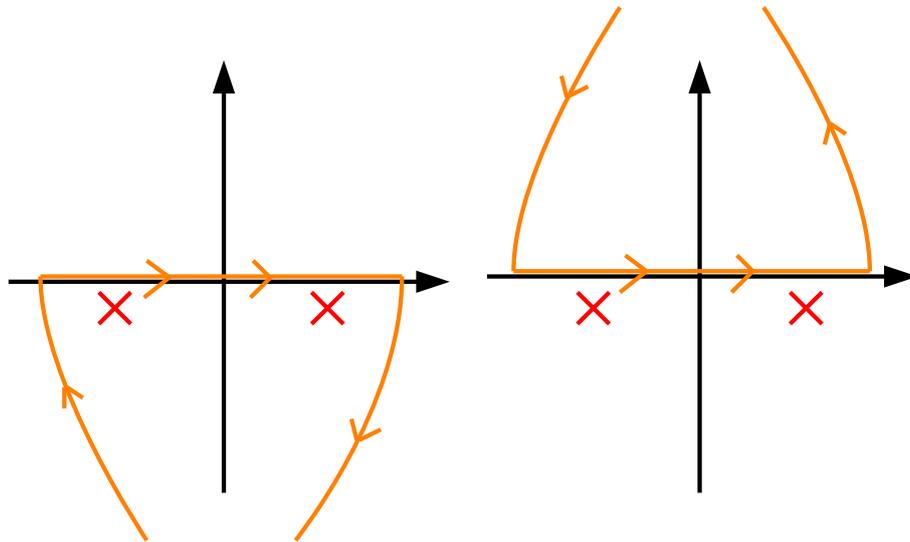
Beispiel 2 (harmonischer Oszillator, vgl. Math. Konz. I, Kapitel 4):

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{2.81}$$

Beachten Sie, dass hier ein Minus-Zeichen im Exponenten gewählt wurde – dies ist in der Physik Konvention. Daher ist nun die korrekte Vorschrift, den Pol in die *untere* Halbebene zu verschieben, d. h. wir ersetzen den Nenner im Integral wie folgt:

$$\omega^2 - \omega_0^2 \quad \rightarrow \quad (\omega + i\epsilon)^2 - \omega_0^2$$

Damit liegen die Pole bei $\omega = \pm\omega_0 - i\epsilon$ ($\epsilon > 0$ vorausgesetzt).



Im Beispiel 2 müssen die Pole in der *unteren* Halbebene liegen: Genau dann ist $g(t) = 0$ für $t < 0$ (Kausalität), siehe rechtes Bild, da dann kein Pol innerhalb der geschlossenen Kontur liegt.

Für $t < 0$ kann man nun den Halbkreis in der oberen Halbebene hinzufügen und erhält $g(t) = 0$. Für $t > 0$ fügt man den Halbkreis in der unteren Halbebene hinzu und wertet das Integral mithilfe des

Residuensatzes aus:

$$\begin{aligned}
t > 0: \quad \oint_{\cup} dz \frac{e^{-izt}}{(z+i\epsilon)^2 - \omega_0^2} &= -2\pi i \sum_{\pm} \text{Res} \left[\frac{e^{-izt}}{(z+i\epsilon)^2 - \omega_0^2}, \pm\omega_0 - i\epsilon \right] \\
&= -2\pi i \left[\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0} + \frac{e^{i\omega_0 t}}{-2\omega_0} \right] \cdot e^{-\epsilon t} \\
&= -2\pi i \left[\frac{-i \sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \right] \\
&= -\frac{2\pi}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Hier haben wir wieder $\epsilon \rightarrow 0$ verwendet. Zusammengefasst:

$$g(t) = -\frac{2\pi}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \Theta(t) \tag{2.83}$$

Alternativ betrachten wir:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} - \omega_0^2 \right] g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\left[-\frac{d^2}{dt^2} - \omega_0^2 \right] e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2} = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tag{2.84}$$

Hier haben wir zur Sicherheit das letzte Integral zum Hauptwertintegral erklärt, das wir wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} d\omega e^{-i\omega t} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{-it} [e^{-i\Omega t} - e^{+i\Omega t}] \\
&= 2 \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Omega t)}{t}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Die Funktion $\sin(\Omega t)/t$ ist eine gerade Funktion unter $t \rightarrow -t$; sie ist gleich Ω für $t = 0$, wird also unendlich groß. Die erste Nullstelle liegt bei $t = 2\pi/\Omega$; damit können wir die Fläche unter der Kurve abschätzen zu $\approx \Omega \cdot 2\pi/\Omega = 2\pi$. Die exakte Rechnung liefert:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt 2 \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Omega t)}{t} = 2 \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\sin(\Omega t)}{t} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(x)}{x} = 2\pi \tag{2.86}$$

in Übereinstimmung mit der Abschätzung. (Es wurde die Substitution $x = \Omega t$ benutzt.) Somit können wir diese Funktion mit der δ -Funktion identifizieren:

$$2 \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{\sin(\Omega t)}{t} \sim 2\pi \delta(t) \tag{2.87}$$

Schließlich finden wir, vergleiche Math. Konz. I, Kapitel 4.5, folgende ‘Bewegungsgleichung’:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} - \omega_0^2 \right] g(t) = 2\pi \delta(t) \tag{2.88}$$

Das ϵ , das wir im Zusammenhang mit der Kausalitätsbedingung eingeführt haben, hat Ähnlichkeit mit einem Dämpfungsterm:

$$\left[-\frac{d^2}{dt^2} - 2\epsilon \frac{d}{dt} - \omega_0^2 \right] g(t) = 2\pi\delta(t) \quad (2.89)$$

wobei wir den Term $\propto \epsilon^2$ weggelassen haben. Umgekehrt kann man feststellen, dass die Dämpfung (Reibung) die zeitliche Kausalität garantiert – denn durch Dämpfung wird eine Zeitrichtung ausgezeichnet. Die hier diskutierte Funktion, $g(t)$, entspricht der Green'schen Funktion, $G(t)$, die wir in Math. Konz. I, Kapitel 4.5.1 eingeführt haben: $g(t) = -2\pi \cdot m \cdot G(t)$.

2.6 Zusammenfassung

- Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$
- Notwendige Bedingung für die Differenzierbarkeit komplexer Funktionen, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$: Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.90)$$

- Residuensatz: Für eine bis auf endlich viele isolierte Singularitäten innerhalb einer geschlossenen Kontur C analytischen Funktion $f(z)$ ist das Integral $\oint_C dz f(z)$ durch $2\pi i$ mal die Summe der Residuen der eingeschlossenen Singularitäten gegeben.
- Laurent-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n (z - z_0)^n, \quad A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{f(z')}{(z' - z_0)^{n+1}} \quad (2.91)$$

- Delta-Funktion:

$$\delta(t) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \quad (2.92)$$

- Theta-Funktion [$\dot{\Theta}(t) = \delta(t)$]:

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t dt' \delta(t') = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega + \epsilon} \quad (2.93)$$

- Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators:

$$G(t) = -\frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 + i\omega\gamma - \omega_0^2} \quad (2.94)$$

Kapitel 3

Zerlegung nach orthogonalen Funktionensystemen

3.1 Motivation

Als ‘mathematische’ Motivation sei zunächst an Math. Konz. I, Kapitel 1.2 und 5.1, erinnert. Dort hatten wir Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots$ betrachtet, die sich mithilfe einer Orthonormalbasis $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}, \dots$ wie folgt darstellen lassen:

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}^{(i)}, \quad a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{(i)}, \quad \mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^{(j)} = \delta_{ij}$$

Das heißt, die Komponente a_i ergibt sich als Projektion des Vektors \mathbf{a} auf den Basisvektor $\mathbf{e}^{(i)}$. Hier wird auch die Vollständigkeit der Basis angenommen:

$$\sum_i \mathbf{e}^{(i)} (\mathbf{e}^{(i)})^T = \mathbf{1}$$

Dies alles setzt offensichtlich die Existenz eines geeigneten Skalarprodukts voraus. Die wesentlichen Eigenschaften des Skalarprodukts, das wir allgemeiner mit (\cdot, \cdot) bezeichnen, sind:

- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \text{reell}, \geq 0$
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ genau für $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
- $(\alpha \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (α reell)
- $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$
- $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^* = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (für komplexwertige Vektoren)

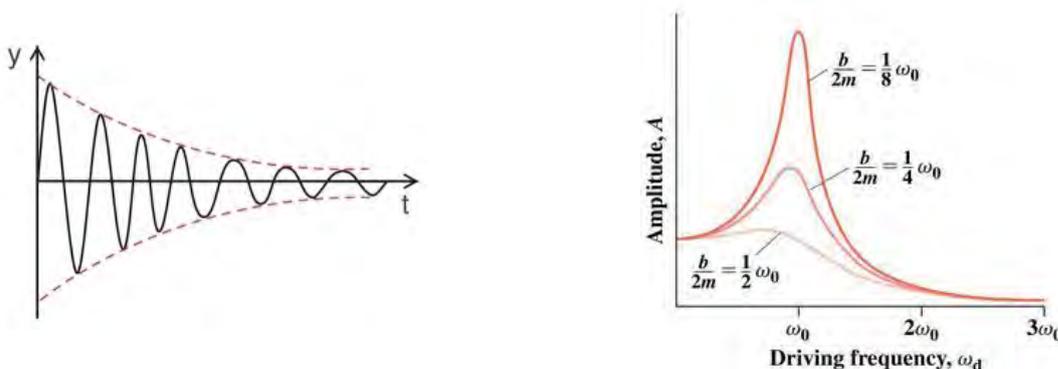
Mithilfe eines derartigen Skalarprodukt lässt sich der Betrag (allgemeiner: die Norm) eines Vektors definieren:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

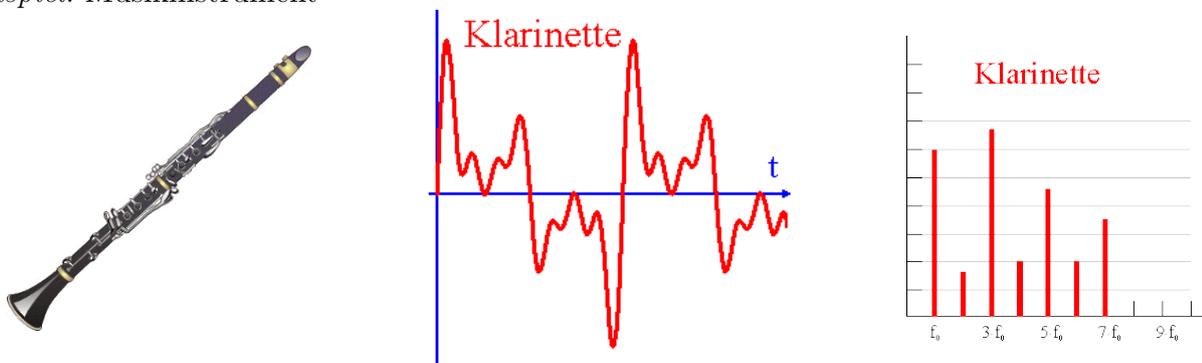
wobei die Dreiecksungleichung $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ erfüllt ist. In diesem Kapitel wollen wir die Frage, ob es etwas Ähnliches auch für Funktionen gibt, stellen (und beantworten). Allerdings werden die für Funktionen passenden Basissysteme in der Regel unendlich-dimensional sein.

Eine wichtige Anwendung in der Physik ist die Analyse zeitlich periodischer Signale, zum Beispiel die Schwingung einer Saite eines Musikinstruments. In diesem Fall findet man in der Regel eine Grundschiwingung (Grundton) sowie bestimmte Oberschwingungen (Obertöne), die den Klang ausmachen. Daher ist es angemessen, den zeitlichen Prozess nach Frequenzen zu ‘zerlegen’. Wir werden sehen, dass der Übergang vom Zeit- in den Frequenzbereich einem Basiswechsel entspricht. In diesem Beispiel spricht man auch von ‘Fourier-Analyse’.

Beispiel: gedämpfter harmonischer Oszillator



Beispiel: Musikinstrument



3.2 Fourierreihe

Wir betrachten periodische Funktionen mit Periode L :

$$f(x + L) = f(x)$$

und definieren ein Skalarprodukt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$(f, g) = \int_0^L dx f(x) g(x) \quad (f, g \text{ reellwertig}) \tag{3.1}$$

$$(f, g) = \int_0^L dx f^*(x) g(x) \quad (f, g \text{ komplexwertig}) \quad (3.2)$$

Man überzeugt sich leicht, dass diese Skalarprodukte die geforderten Eigenschaften haben, insbesondere ist

$$(f, f) = \int_0^L dx |f(x)|^2 \geq 0$$

Als Basissystem bieten sich die L -periodischen trigonometrische Funktionen, Sinus und Kosinus, an (für den Fall reellwertiger Funktionen):

$$1, \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right), \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Diese sind jedoch noch nicht normiert, und wir müssen uns auch überzeugen, dass die Basisfunktionen senkrecht aufeinander stehen.

Normierung der Basisfunktionen: N bezeichnet den zu bestimmenden Normierungsfaktor, und wir führen für die normierten Funktionen die Abkürzungen $c_0, s_k(x), c_k(x)$ ein.

$$f(x) = N \rightarrow (f, f) = N^2 \int_0^L dk = N^2 L = 1 \rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{L}} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (3.4)$$

$$f(x) = N \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \rightarrow (f, f) = N^2 \int_0^L dx \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) = N^2 \frac{L}{2} = 1 \rightarrow N = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (3.5)$$

$$s_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \quad (3.6)$$

Analog ergibt sich:

$$c_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \quad (3.7)$$

Die Orthonormalität der Basisfunktionen zeigt man wie folgt ($k \neq m$):

$$\begin{aligned} \int_0^L dx c_0 s_k(x) &= 0, \quad \int_0^L dx c_0 c_k(x) = 0 \\ \int_0^L dx s_k(x) c_m(x) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}(k-m)x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{L}(k+m)x\right) \right] = 0 \\ \int_0^L dx s_k(x) s_m(x) &= \frac{2}{L} \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}(k-m)x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{L}(k+m)x\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^L dx c_k(x)c_m(x) = \frac{2}{L} \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{2\pi}{L}(k-m)x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{L}(k+m)x\right) \right] = 0$$

Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

bilden somit ein Orthonormalsystem. Wir werden später noch sehen, dass das Funktionensystem auch vollständig ist. Damit erhält man die Fourierreihe einer reellen Funktion $f(x) = f(x+L)$:

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{L}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) + b_k \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \right]$$

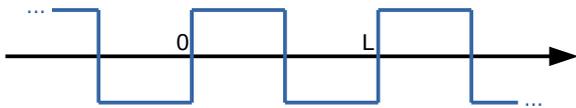
Durch geeignete Skalarproduktbildung lassen sich die Koeffizienten a_k und b_k bestimmen:

$$a_0 = (f, c_0) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx f(x) \quad (3.8)$$

Entsprechend:

$$\begin{aligned} a_k &= (f, c_k(x)) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \\ b_k &= (f, s_k(x)) = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Beispiel 1:



$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq L/2 \\ -1, & L/2 \leq x \leq L \\ \text{(periodisch!)} \end{cases} \quad (3.10)$$

Diese Funktion $f(x)$ ist antisymmetrisch bezüglich des Ursprungs, $f(x) = f(-x)$, daher folgt sofort $a_0 = 0, a_k = 0$:

$$\begin{aligned} a_0 &\propto \int_0^L dx f(x) = 0 \\ a_k &\propto \int_0^L dx f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für die b_k ergibt sich:

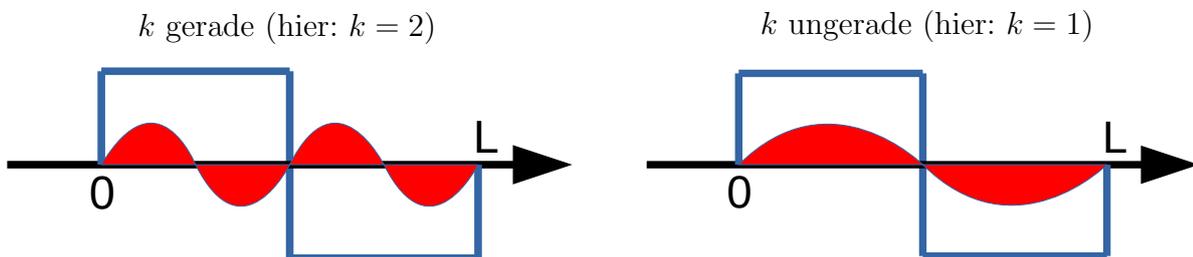
$$\begin{aligned}
 b_k &= \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L dx f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \\
 &= \sqrt{\frac{2}{L}} \left[\int_0^{L/2} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) - \int_{L/2}^L dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \right] \\
 \int_{L/2}^L dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) &= \int_0^{L/2} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} k\left(x + \frac{L}{2}\right)\right) \\
 &= \int_0^{L/2} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx + \pi k\right) = (-1)^k \int_0^{L/2} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Somit ist für k gerade der entsprechende Koeffizient gleich null, $b_k = 0$, während für k ungerade:

$$b_k = 2\sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^{L/2} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{2L}{k\pi} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right)}{k} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L} (2n-1)x\right)}{2n-1} \\
 &= \frac{4}{\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{6\pi}{L} x\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{10\pi}{L} x\right) + \dots \right] \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

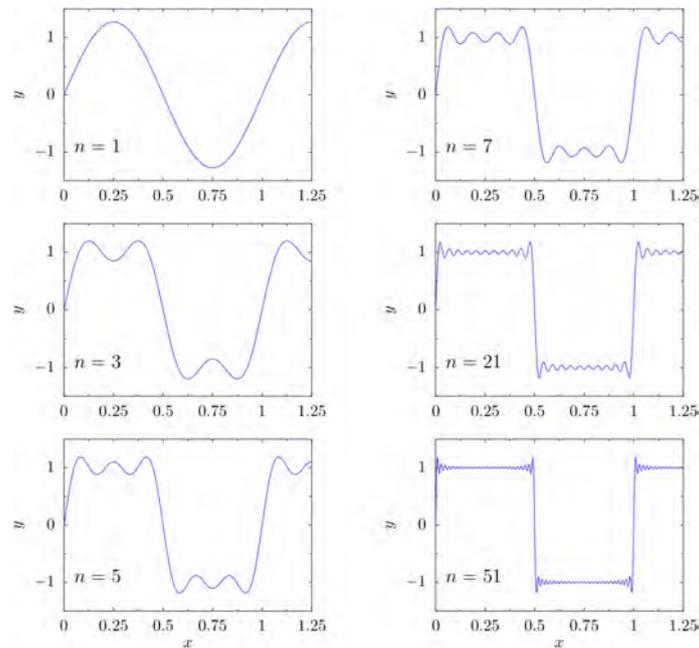
Hätte man auch direkt sehen können, dass b_k für gerade k verschwindet? Ja, denn für gerade k liegt in jedem Teilintervall, in dem die Funktion $f(x)$ konstant ist, genau ein Vielfaches der Periode der Basisfunktion.



Bei dieser Fourierreihe findet man übrigens $f(L/2) = 0$. Allgemein gilt für den Wert der Fourierreihe an Sprungstellen x_0 :

$$f(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)], \quad x_0^\pm = x_0 \pm 0 \quad (3.15)$$

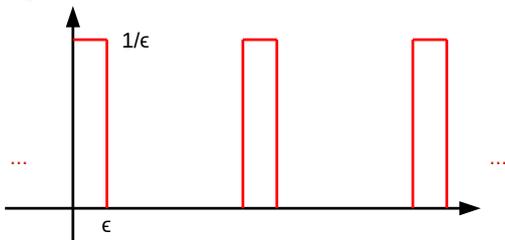
Gibbs'sches Phänomen: Wenn man die Fourier-Reihe durch endlich viele Terme approximiert, treten an Sprungstellen charakteristische Überschwingungen auf, egal wie viele Terme man mitnimmt. Die



Beispiel 1, siehe Gleichung 3.10. Die Approximation wird offensichtlich immer besser, je mehr Terme (n) man in der Fourier-Summe mitnimmt.

Auslenkung dieser Überschwingung nimmt *nicht* ab, auch wenn man die Anzahl der mitgenommenen Terme erhöht.

Beispiel 2:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 \leq x < \epsilon \\ 0, & \epsilon \leq x < L \end{cases} \quad (3.16)$$

Damit finden wir folgende Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (3.17)$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} dx \cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\epsilon} \frac{L}{2k\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \Big|_0^{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{L} k\epsilon\right)}{\frac{2\pi}{L} k\epsilon}$$

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon} dx \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{\epsilon} \frac{L}{2k\pi} \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right)\right) \Big|_0^{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} k\epsilon\right)}{\frac{2\pi}{L} k\epsilon}$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$:

$$a_k \rightarrow \sqrt{\frac{2}{L}}, \quad b_k \rightarrow \sqrt{\frac{2}{L} \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{L} k \epsilon\right)^2} \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

$$\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x) =: \delta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - nL) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \quad (3.19)$$

In diesem Beispiel nimmt die Amplitude der Oberschwingungen nicht ab! Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erkennen wir die Delta-Funktion, $\delta(x)$, auf die wir noch genauer eingehen, und ihre periodisch fortgesetzte Variante, $: \delta(x) :$.

Ist das Basissystem

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L} kx\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L} kx\right) \right\} \quad (3.20)$$

vollständig? Wir erinnern an den Begriff der Vollständigkeit in endlich dimensionalen Vektorräumen, den wir bereits in Kapitel 5 von Math. Konz. I diskutiert hatten. Mithilfe des dyadischen Produkts konnten Projektionsmatrizen $P_k = \mathbf{e}^{(k)}(\mathbf{e}^{(k)})^T$ definiert werden; und die Vollständigkeit der Basis ließ sich als $\sum_k P_k = \mathbf{1}$ ausdrücken, bzw. in Komponenten:

$$\sum_k (P_k)_{\alpha\beta} = \sum_k (\mathbf{e}^{(k)})_{\alpha} (\mathbf{e}^{(k)})_{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.21)$$

Jetzt haben wir stattdessen Basisfunktionen $f^{(k)}(x)$, das heißt k nummeriert die Funktionen durch und x entspricht dem Index, der bei den Vektoren die Komponenten bezeichnet. Daher hat die Vollständigkeitsbedingung jetzt folgende Form:

$$\sum_k f^{(k)}(x) [f^{(k)}]^*(x') =: \delta(x - x') : \quad (3.22)$$

Hier steht auf der rechten Seite sozusagen die – periodisch fortgesetzte – kontinuierliche Variante des Kronecker-Deltas, da x eine kontinuierliche Variable ist. In dieser Gleichung kann man übrigens x und x' problemlos vertauschen.

<i>Vektoren</i>	<i>periodische Funktionen</i>
$\mathbf{a} = \sum_k a_k \mathbf{e}^{(k)}$	$g(x) = \sum_k c_k f^{(k)}(x)$
$\mathbf{e}^{(k)} \cdot \mathbf{e}^{(l)} = \delta_{kl}$	$(f^{(k)}, f^{(l)}) = \delta_{kl}$
$a_k = \mathbf{e}^{(k)} \cdot \mathbf{a} = \sum_{\alpha} e_{\alpha}^{(k)} a_{\alpha}$	$c_k = (f^{(k)}, g) = \int_0^L dx' [f^{(k)}]^*(x') g(x')$
$\mathbf{a} = \sum_k \mathbf{e}^{(k)} (\mathbf{e}^{(k)})^T \mathbf{a}$	$g(x) = \int_0^L dx' \sum_k f^{(k)}(x) [f^{(k)}]^*(x') g(x')$
$\rightarrow \sum_k (\mathbf{e}^{(k)})_{\alpha} (\mathbf{e}^{(k)})_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$	$\rightarrow \sum_k f^{(k)}(x) [f^{(k)}]^*(x') = \delta(x - x') \quad (0 \leq x, x' \leq L)$

Überprüfung der Vollständigkeit:

$$\sum_k f^{(k)}(x)[f^{(k)}]^*(x') = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx'\right) \right. \\ &+ \left. \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx'\right) \right] \\ &= \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{L}k(x-x')\right) =: \delta(x-x'): \end{aligned} \quad (3.24)$$

Zusammenfassend halten wir fest: Die Funktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}kx\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}kx\right) \right\} \quad (3.25)$$

bilden eine vollständige Orthonormalbasis im Raum der Funktionen mit Periode L . Ein äquivalentes (aber trotzdem oft bequemer) Basissystem ist durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi}{L}kx}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

gegeben. Hier haben die Basisfunktionen alle den gleichen Vorfaktor, und es gilt:

Orthonormiertheit:

$$(f^{(n)}, f^{(n)}) = \frac{1}{L} \int_0^L dx \left(e^{i\frac{2\pi}{L}nx} \right)^* e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = 1$$

$$(f^{(m)}, f^{(n)}) = \frac{1}{L} \int_0^L dx \left(e^{i\frac{2\pi}{L}mx} \right)^* e^{i\frac{2\pi}{L}nx} = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{i\frac{2\pi}{L}(n-m)x} = 0 \quad (n \neq m)$$

Vollständigkeit:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)[f^{(k)}]^*(x') &= \frac{1}{L} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(e^{i\frac{2\pi}{L}k(x-x')} + e^{-i\frac{2\pi}{L}k(x-x')} \right) \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{L}k(x-x')\right) \right] =: \delta(x-x'): \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3 Fouriertransformation

Mit Hilfe der Fourierreihe kann man periodische Funktionen darstellen. Lässt sich dieses Konzept auch auf nicht-periodische Funktionen erweitern? *Idee*: Eine nicht-periodische Funktion lässt sich als periodische Funktion im Grenzfall unendlicher Periode verstehen.

Betrachte konkret eine Funktion $f(x)$ mit Periode $2L$, also $f(x+2L) = f(x)$, auf dem symmetrischen Intervall $-L \leq x \leq L$. (Dies ist bequem, da wir den Grenfall $L \rightarrow \infty$ betrachten wollen.)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{i\frac{\pi}{L}nx}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{+L} dx f(x) e^{-i\frac{\pi}{L}nx} \quad (3.27)$$

Je größer die Periode L ist, desto enger liegen die Werte $\pi n/L$. Im Grenfall $L \rightarrow \infty$ wird die Summe in der Gleichung zum Integral. Verwende folgende Ersetzungen:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{L}}x = y, \quad \sqrt{\frac{\pi}{L}}n = k_n, \quad \Delta k_n = k_{n+1} - k_n = \sqrt{\frac{\pi}{L}}, \quad c_n = f_{k_n} \\ \rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{k_n} e^{ik_n y} \Delta k_n, \quad \tilde{f}_{k_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\pi L}}^{+\sqrt{\pi L}} dy f(y) e^{-ik_n y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Für $L \rightarrow \infty$ kann die Summe als Riemann-Integral interpretiert werden, sofern die notwendigen Konvergenzeigenschaften erfüllt sind.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{iky}, \quad \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) e^{-iky}$$

Die Funktion $\tilde{f}(k)$ nennt man die Fouriertransformierte von $f(y)$.

Die Verteilung der $1/\sqrt{2\pi}$ -Faktoren ist im Prinzip willkürlich. In der Physik wird in der Regel eine Definition verwendet, in der vor einem Integral der Faktor $1/2\pi$ und vor dem anderen Integral der Faktor eins steht.

Verallgemeinerung auf drei Dimensionen (3-D):

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad \tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3r f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

1-D Beispiel: $f(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$

Anmerkung: Da in der Physik t die Zeit bezeichnet, schreibt man in diesem Fall ω statt k für die 'konjugierte' Variable.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-\alpha|t| - i\omega t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt e^{-\alpha t} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{e^{-(\alpha+i\omega)t}}{\alpha+i\omega} - \frac{e^{-(\alpha-i\omega)t}}{\alpha-i\omega} \right) \Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\alpha+i\omega} + \frac{1}{\alpha-i\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Je schneller die Exponentialfunktion abfällt, je lokalisierter $f(t)$ also ist, desto breiter ist die Fourier-Transformierte, die Lorentz-Kurve $\tilde{f}(\omega)$. Genauer gesagt: Wenn man mit Δt die Breite von $f(t)$ und mit $\Delta\omega$ die Breite von $\tilde{f}(\omega)$ bezeichnet, ergibt sich $\Delta t \simeq 1/\alpha$ und $\Delta\omega \simeq \alpha$, das heißt $\Delta t \cdot \Delta\omega \simeq 1$.

Physikalische Relevanz: Ein exponentieller Zerfall führt zu einer Lorentz-förmigen Spektrallinie.

Anmerkung: $\tilde{f}(\omega)$ ist im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion, im obigen Beispiel ergab sich jedoch eine reelle Fouriertransformierte. Hintergrund: Die Fourier-Transformierte einer reellen geraden Funktion ist reell, da aus $f(t) = f(-t)$ folgt:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} \\
&\stackrel{t=-t}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(-t) e^{i\omega t} \\
&\stackrel{f(t)=f(-t)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{i\omega t} = [\tilde{f}(\omega)]^* \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt (f(t) e^{-i\omega t} + f(-t) e^{i\omega t}) \\
&\stackrel{f(t)=f(-t)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt f(t) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dt f(t) \cos(\omega t) \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Das heißt, die Fourierkosinus-Transformierte ist rein reell für reelle $f(t)$. Andererseits gilt für ungerade

Funktionen, $f(t) = -f(-t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt (f(t) e^{-i\omega t} + f(-t) e^{i\omega t}) \\ f(-t) &\stackrel{=}{=} -f(t) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dt f(t) (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} dt f(t) \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (3.32)$$

Das heißt, die Fouriersinus-Transformierte ist rein imaginär für reelle $f(t)$. Weitere Eigenschaften:

$$\tilde{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t), \quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{f}(\omega)$$

Faltungssatz

Die Faltung zweier Funktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$, $f_1 * f_2(t)$, ist wie folgt definiert:

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds f_1(s) f_2(t-s) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds f_1(t-s) f_2(s)\quad (3.33)$$

Anwendungsbeispiel: Green'sche Funktion, vergleiche Math. Konz. I, Kapitel 4.5

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t') = G * f(t)\quad (3.34)$$

Wir setzen $F(t) = f_1 * f_2(t)$ und betrachten die Fourier-Transformierte dieser Funktion:

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt F(t) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds f_1(t-s) f_2(s) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} ds f_1(t-s) e^{-i\omega(t-s)} f_2(s) e^{-i\omega s}\end{aligned}\quad (3.35)$$

Anstelle von t führen wir die neue Variable u ein, $u = t-s$ bzw. $t = u+s$. Zur Umrechnung von $dt ds$ benötigen wir die Funktionaldeterminante, die durch den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix gegeben ist, vergleiche Math. Konz. I, Kapitel 2.8. Diese berechnet sich gemäß:

$$\left| \frac{\partial(t, s)}{\partial(u, s)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial s} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial s} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1\quad (3.36)$$

$$\rightarrow \tilde{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} ds f_1(u) e^{-i\omega u} f_2(s) e^{-i\omega s} = \sqrt{2\pi} \tilde{f}_1(\omega) \tilde{f}_2(\omega)\quad (3.37)$$

wobei der Faktor $\sqrt{2\pi}$ von der Definition der Fouriertransformation abhängt. Im Wesentlichen gilt: Die Fouriertransformierte einer Faltung ist das Produkt der Fouriertransformierten der beiden Funktionen.

3.4 Delta-Funktion

In Math. Konz. I, Kapitel 4.5, hatten wir die Green'sche Funktion als Antwort eines Systems auf einen beliebig kurzen Einheitskraftstoß eingeführt. Dies wird mathematisch durch eine Delta-Funktion beschrieben, die keine eigentliche Funktion ist, sondern eine sogenannte Distribution. Für unsere Zwecke ist es ausreichend, die Delta-Funktion, $\delta(x - x_0)$, als Grenzfall einer am Ort x_0 lokalisierten Funktion zu definieren, deren Breite gegen null geht, die aber integriert eins ergibt. Daraus folgt:

$$\int_a^b dx f(x)\delta(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } a < x_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.38)$$

Insbesondere gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) = 1$$

Die Delta-Funktion ist immer in diesen Sinne unter einem Integral zu verstehen.

Beispiele für Darstellungen der Delta-Funktion:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \\ \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\epsilon} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}} \\ \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\epsilon)}{x} \end{aligned}$$

Fourier-Darstellung der Delta-Funktion:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x - x_0) e^{-ikx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \quad (3.39)$$

Die Fourier-Transformierte fällt nicht ab als Funktion von k , vergleiche die Fourier-Reihe der periodischen Delta-Funktion. Für die Rücktransformation folgt:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x_0)}$$

Anwendung 1: Vollständigkeit der Fourierbasis

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \tilde{f}(k) e^{ikx} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') e^{-ikx'} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x-x')} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \delta(x-x') = f(x)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Anwendung 2:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dk [\tilde{f}(k)]^* e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \tilde{f}(k') e^{ik'x} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} dk' [\tilde{f}(k)]^* \tilde{f}(k') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k'-k)x}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(k'-k)x} = \delta(k' - k)$$

folgt das Parseval-Theorem:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\tilde{f}(k)|^2}$$

Eigenschaften der Delta-Funktion:

1. Skalierung

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x) \rightarrow \delta(-x) = \delta(x) \tag{3.42}$$

Denn es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(\lambda x) \stackrel{\lambda x=y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{|\lambda|} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \delta(y) = \frac{1}{|\lambda|} f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \frac{1}{|\lambda|} \delta(x) \tag{3.43}$$

Für $\lambda < 0$ wird der Faktor -1 verwendet, um die Integrationsgrenzen zu vertauschen.

2.

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) \quad (3.44)$$

Dabei wird angenommen, dass $g(x_n) = 0$ und $g'(x_n) \neq 0$; es ist über alle Nullstellen von $g(x)$ zu summieren. Beispiel:

$$\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{\delta(x - \alpha) + \delta(x + \alpha)}{2|\alpha|} \quad (3.45)$$

3. Ableitungen der Delta-Funktion

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta'(x - x_0) &= -f'(x_0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) &= (-1)^n f^{(n)}(x_0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dies ergibt sich sofort, wenn man die Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_0 einsetzt. Es wird vorausgesetzt, dass $f(x)$ in x_0 unendlich oft differenzierbar ist.

3.5 Lösung linearer Differentialgleichungen durch Fouriertransformation

Als Beispiel betrachten wir wieder den gedämpften harmonischen Oszillator mit Antrieb. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = F(t)$$

Hier setzen wir die Fourier-Darstellung von $x(t)$ und $F(t)$ ein. Insbesondere verwenden wir:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (i\omega) \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \\ \ddot{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (-\omega^2) \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

da jede Ableitung nach t einen Faktor $i\omega$ liefert.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} \quad (3.48)$$

Aufgrund der Orthogonalität der Basisfunktionen muss der Integrand der linken Seite gleich dem Integranden der rechten Seite sein:

$$\rightarrow m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = \tilde{F}(\omega) \quad (3.49)$$

Jetzt haben wir eine algebraische Gleichung, die leicht zu lösen ist:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{\tilde{F}(\omega)}{m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} = \sqrt{2\pi} \tilde{G}(\omega) \tilde{F}(\omega)$$

mit

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1/\sqrt{2\pi}}{m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \quad (3.50)$$

Für die Rücktransformation verwenden wir den Faltungssatz und erhalten:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') F(t')$$

wobei, vergleiche Kapitel 2.5 und 2.6, die Green'sche Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega(t-t')}}{m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} \quad (3.51)$$

Die Green'sche Funktion ist die Lösung der Bewegungsgleichung, bei der die Kraft durch einen idealisierten Kraftstoß $\delta(t)$ gegeben ist:

$$\begin{aligned} m\ddot{G}(t) + m\gamma\dot{G}(t) + m\omega_0^2 G(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{m(-\omega^2 + \gamma i\omega + \omega_0^2)}{m(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)} e^{i\omega t} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} = \delta(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Somit ist $G(t)$ für $t \neq 0$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Wie ergibt sich die in Math. Konz. I, Kapitel 4.5 hergeleitete Sprungbedingung für die Ableitung der Green'schen Funktion? Dazu integrieren wir die Bewegungsgleichung für $G(t)$ über ein beliebig kleines Intervall, $-\epsilon \dots \epsilon$:

$$\rightarrow m \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dt \left[\ddot{G}(t) + \gamma\dot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) \right] = \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dt \delta(t) = 1 \quad (3.53)$$

Und verwenden dann, dass die Stammfunktionen von G und \dot{G} stetig sind:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dt G(t) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} dt \dot{G}(t) = 0$$

Somit hat \dot{G} einen Sprung bei $t = 0$:

$$m \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \dot{G}(t) \Big|_{-\epsilon}^{+\epsilon} = 1 \quad \rightarrow \quad G(0^+) - G(0^-) = \frac{1}{m}$$

Aufgrund der Kausalität ist außerdem $G(0^-) = 0$. Allgemein, das heißt bei linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung, vergleiche Math. Konz. I, Kapitel 4.5.2, hat die $(n - 1)$ -te Ableitung der Green'schen Funktion $G(t)$ bei $t = 0$ einen Sprung, der durch $1/a_n$ gegeben ist, wobei a_n der Koeffizient der n -ten Ableitung ist.

Anwendung in der Elektrostatik: das Coulomb'sche Gesetz

Wir betrachten die erste Maxwell-Gleichung,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \rightarrow \quad \nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.54)$$

wobei $\rho(\mathbf{r})$ die Ladungsdichte bezeichnet. Die letztere Gleichung nennt man Poisson-Gleichung, während die homogene Gleichung, $\nabla^2\phi = 0$, als Laplace-Gleichung bezeichnet wird. Wir führen Fourier-transformierte Funktionen ein:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \tilde{\rho}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

Damit ergibt sich:

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (-k^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (3.55)$$

Die Fourier-transformierte Maxwell-Gleichung lässt sich leicht lösen:

$$(-k^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) = -\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \quad \tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{\epsilon_0 k^2} \quad (3.56)$$

Die inverse Fouriertransformation (Faltungssatz!) liefert dann:

$$\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{k^2} \quad (3.57)$$

Zur Auswertung des Integrals wählen wir Kugelkoordinaten im \mathbf{k} -Raum, wobei die z -Achse in Richtung von \mathbf{r} zeigt:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int_0^\infty dk k^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{ikr \cos\theta}}{k^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{ikr \cos\theta} \\ \xrightarrow{u=\cos\theta} G(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{+1} du e^{ikru} = \frac{1}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^\infty dk \frac{1}{ikr} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0 r} \int_0^\infty dk \frac{\sin kr}{k} = \frac{1}{2\pi^2 \epsilon_0 r} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Damit finden wir für das elektrische Potential:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

Das Potential einer Punktladung nennt man Coulomb-Potential:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad \int d^3r\rho(\mathbf{r}) = q \quad (3.59)$$

wobei $\delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ die dreidimensionale Delta-Funktion bezeichnet. Für eine Punktladung am Ort \mathbf{r}_0 folgt sofort: $\phi(\mathbf{r}) = 1/4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.

Die gerade diskutierte Lösung der Poisson-Gleichung ist die Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung, wobei die Inhomogenität durch die Ladungsdichte gegeben ist. Zu dieser können wir noch eine Lösung der *homogenen* Differentialgleichung, $\nabla^2\phi_{\text{hom}} = 0$, addieren, so dass die allgemeine Lösung die folgende Form hat:

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}) = \phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) + \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}$$

Der Anteil $\phi_{\text{hom}}(\mathbf{r})$ kann verwendet werden, um die Randbedingungen zu erfüllen.

Ein Beispiel dafür sind geerdete Metallplatten, bei denen sich in einigen Fällen die Methode der Bildladung erfolgreich anwenden lässt. Wir betrachten eine einfache Geometrie: Eine Metallplatte liegt in der y - z -Ebene (bei $x = 0$). Rechts davon, am Ort $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{e}_x$, befindet sich eine Punktladung der Stärke q . Gesucht ist das elektrische Potential im rechten Halbraum. Wir gehen somit aus von

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^{(3)}(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x) = q\delta(x - a)\delta(y)\delta(z) \quad (3.60)$$

und bestimmen zuerst das Potential *ohne* Metallplatte:

$$\phi_{\text{inhom}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|} \quad (3.61)$$

wobei $\phi_{\text{inhom}}(\mathbf{r})$ die Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung bezeichnet:

$$\nabla^2\phi_{\text{inhom}} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x) \quad (3.62)$$

Wir können dazu noch eine homogene Lösung addieren, derart dass $\nabla^2\phi_{\text{hom}} = 0$ im rechten Halbraum, die wir so wählen, dass das Potential bei $x = 0$ – das heißt auf der Metallplatte – verschwindet:

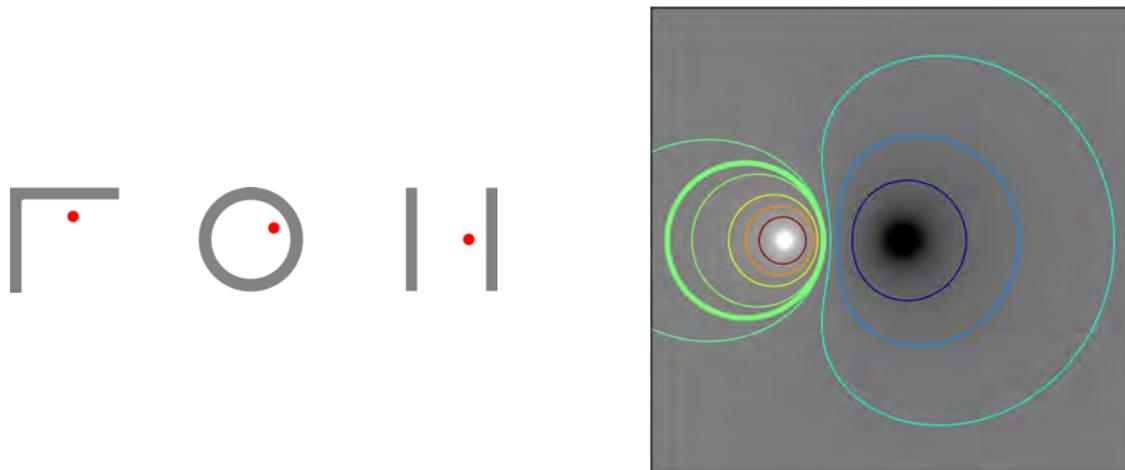
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|} \right) \rightarrow \phi(x = 0, y, z) = 0 \quad (3.63)$$

Die Funktion $-q/4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|$ ist in der Tat eine Lösung der *homogenen Gleichung im rechten Halbraum*, denn:

$$\nabla^2 \left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|} \right) = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x) = 0 \quad (x > 0) \quad (3.64)$$

Anders ausgedrückt, dieser Anteil wird von einer ‘Bildladung’ im linken Halbraum ‘erzeugt’. Die Bedingung, dass das Potential bei $x = 0$ verschwindet (bzw. konstant ist), ist charakteristisch für eine Metallplatte. Es folgt auch sofort, siehe Kapitel 1, dass das elektrische Feld senkrecht auf der Platte steht.

Die Methode der Bildladung ist zwar nicht für beliebige Geometrien durchführbar, führt jedoch in einigen einfachen Fällen zum Ziel, zum Beispiel:



Im rechten Teil der Abbildung ist das Potential für die links gezeigte Ringgeometrie dargestellt. Der Ring ist hellgrün eingezeichnet, die Ladung sitzt in dem weißen Punkt.

3.6 Legendre-Polynome

370 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
R E C H E R C H E S
 SUR LA FIGURE DES PLANÈTES.
 Par M. LE GENDRE.
 Le 7 Juillet 1784.
 DEPUIS que Maclaurin a démontré synthétiquement & d'une manière très-élégante, que le sphéroïde elliptique satisfait rigoureusement à l'équilibre des Planètes dans les hypothèses reçues, plusieurs grands Géomètres se sont proposé de déterminer directement toutes les figures d'équilibre possibles. Ils ont trouvé que l'ellipsoïde aplati satisfaitoit de deux manières différentes. &c. etc.

Théorèmes sur une espèce particulière de fonctions rationnelles.
 1. Les fonctions rationnelles dont il s'agit, sont formées suivant cette loi, qu'il est facile de saisir:
 $X' = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}$,
 $X'' = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cdot x^4 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$,
 $X''' = \frac{7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot x^6 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3x^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot 3x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$,
 $X^{IV} = \frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot x^8 - \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 4x^6 + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 6x^4 - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot 4x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$
 &c.

Legendre-Polynome treten zum Beispiel auf, wenn man den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten betrachtet und sich auf die Variable $\xi = \cos \theta$ konzentriert – wobei ξ offensichtlich im Bereich $-1 \dots +1$ liegt. Im Folgenden nennen wir die Variable wieder x ; und wir betrachten reellwertige Funktionen.

Wir betrachten somit das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ und definieren das Skalarprodukt wie folgt:

$$(f, g) = \int_{-1}^{+1} dx f(x)g(x) \tag{3.65}$$

Ziel ist es, eine Menge von Polynomen zu finden, die bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind. Wir starten mit einem Polynom nullten Grades, also einer Konstanten; und wir verwenden die Konvention, dass für alle n gilt: $P_n(1) = 1$: Das hat zur Konsequenz, dass die Polynome *nicht* normiert sind. Der Index n gibt den Grad des Polynoms an.

Im nächsten Schritt wählen wir das einfachste Polynom ersten Grades, $P_1(x) \propto x$.

$$\rightarrow P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad (3.66)$$

Aus Symmetriegründen stehen $P_0(x)$ und $P_1(x)$ senkrecht aufeinander, $(P_0, P_1) = 0$. Zur Bestimmung der höheren Polynome verwenden wir das Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren, das wir für $n = 2$ genauer erläutern. Wir betrachten das einfachste Polynom zweiten Grades, x^2 . Von diesem ziehen wir die Beiträge in 'Richtung' von P_0 und P_1 ab, derart dass x^2 senkrecht auf diesen steht. Der Ausdruck

$$x^2 - \frac{(P_0, x^2)}{(P_0, P_0)} P_0 - \frac{(P_1, x^2)}{(P_1, P_1)} P_1 \quad (3.67)$$

ist orthogonal auf P_0 und P_1 , denn zum Beispiel:

$$\left(P_0, x^2 - \frac{(P_0, x^2)}{(P_0, P_0)} P_0 - \frac{(P_1, x^2)}{(P_1, P_1)} P_1 \right) = (P_0, x^2) - \frac{(P_0, x^2)}{(P_0, P_0)} (P_0, P_0) - \frac{(P_1, x^2)}{(P_1, P_1)} (P_0, P_1) = 0 \quad (3.68)$$

Konkret finden wir für die verschiedenen Skalarprodukte:

$$(P_0, P_0) = 2, \quad (P_1, P_1) = (P_0, x^2) = \int_{-1}^{+1} dx x^2 = \frac{2}{3}$$

Außerdem ist $(P_1, x^2) = 0$ aus Symmetriegründen. Damit erhalten wir:

$$P_2 \propto x^2 - \frac{1}{3} \rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

Im letzten Schritt wurde mit einem geeigneten Faktor multipliziert, um die Bedingung $P_2(1) = 1$ zu erfüllen. Weitere Ergebnisse:

$$\begin{aligned} (P_2, P_2) &= \frac{2}{5}, \quad (P_0, x^3) = 0, \quad (P_1, x^3) = \frac{2}{5}, \quad (P_2, x^3) = 0 \\ \rightarrow P_3 &\propto x^3 - \frac{3}{5}x, \quad P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \end{aligned} \quad (3.70)$$

Aufgrund des Konstruktionsverfahrens ist klar, dass $P_n(x)$ für gerade n nur gerade Potenzen von x enthält, und für ungerade n nur ungerade Potenzen, also sind die $P_n(x)$ abwechselnd gerade und ungerade Funktionen. Was die Normierung betrifft, kann man allgemein zeigen:

$$(P_n, P_n) = \int_{-1}^{+1} dx P_n^2(x) = \frac{2}{2n+1} \quad (3.71)$$

Per Konstruktion gilt: $(P_n, P_m) = 0$ für $n \neq m$. Zusammengefasst:

$$(P_n, P_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (3.72)$$

Entwicklung in eine Legendre-Reihe:

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, die auf dem Intervall $-1 \cdots +1$ definiert ist:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad \rightarrow \quad (P_m, f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (P_m, P_n) = \frac{2}{2m+1} c_m \quad (3.73)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} (P_n, f) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_n(x) f(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (3.74)$$

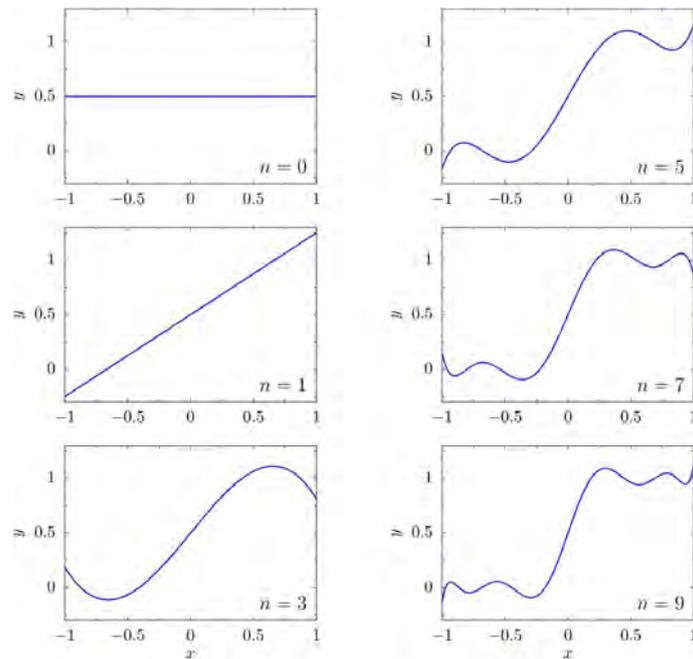
$$\begin{aligned} \rightarrow c_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx P_0(x) = \frac{1}{2} \\ c_1 &= \frac{3}{2} \int_0^1 dx P_1(x) = \frac{3}{2} \int_0^1 dx x = \frac{3}{4} \\ c_2 &= \frac{5}{2} \int_0^1 dx P_2(x) = \frac{5}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) = 0 \\ c_3 &= \frac{7}{2} \int_0^1 dx P_3(x) = \frac{7}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right) = -\frac{7}{16} \end{aligned}$$

Damit finden wir folgende Reihendarstellung:

$$f(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) + \frac{11}{32} P_5(x) - \frac{75}{256} P_7(x) + \frac{133}{512} P_9(x) - \dots \quad (3.75)$$

Bei einem gegebenen Polynomgrad ergibt die Entwicklung nach Legendre-Polynomen die optimale Näherung einer Funktion $f(x)$ im Sinne des kleinsten Fehlerquadrats:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} dx \left[f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x) \right]^2 \\ &= (f, f) - 2 \sum_{n=0}^{\infty} b_n (f, P_n) + \sum_{n,m=0}^{\infty} b_n b_m (P_n, P_m) \\ &= (f, f) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{2n+1} b_n^2 - 2b_n (f, P_n) \right) \end{aligned} \quad (3.76)$$



Entwicklung der Rechteckfunktion, Gleichung 3.74, nach Legendre-Polynomen. Die Approximation wird offensichtlich immer besser, je mehr Terme man mitnimmt. Abgesehen von $n = 0$ treten gerade Potenzen in dieser Entwicklung nicht auf, siehe Haupttext.

Die Minimierung dieses Ausdrucks bezüglich eines bestimmten (aber beliebigen) b_m liefert:

$$\frac{dI}{db_m} = 2 \left(\frac{2}{2m+1} b_m - (f, P_m) \right) = 0 \quad (3.77)$$

$$\rightarrow \boxed{b_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx f(x) P_n = c_n}$$

In unseren Beispiel ist das in diesem Sinne optimale Polynom dritten Grades gleich

$$f_3(x) = \frac{1}{2} P_0(x) + \frac{3}{4} P_1(x) - \frac{7}{16} P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{45}{32} x - \frac{35}{32} x^3 \quad (3.78)$$

Es ist aber leicht zu sehen, dass in dieser Entwicklung, abgesehen von einer Konstanten ($= 1/2$), nur ungerade Potenzen von x auftreten: Denn $f(x) = 1/2 + f_u(x)$, wobei $f_u(x)$ eine ungerade Funktion ist. Im Gegensatz zu einer Taylorreihe ändern sich jedoch im Allgemeinen die Koeffizienten des Polynoms, wenn der Grad erhöht und damit die Näherung verbessert wird.

Legendre-Polynome sind vor allem bei der Lösung kugelsymmetrischer Probleme von Bedeutung. Dazu betrachten wir den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten, vergleiche Kapitel 1.8:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}$$

Wir beschränken uns zunächst auf den θ -abhängigen Anteil und diskutieren später die volle dreidimensionale Behandlung.

Wir betrachten dazu folgendes *Eigenwertproblem*:

$$-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = \lambda U \quad (3.79)$$

Man nennt das in dieser Gleichung auftretende λ Eigenwert und U die zugehörige Eigenfunktion. Wir führen $x = \cos \theta$ als neue Variable ein:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{dx}{d\theta} \frac{d}{dx} = -\sin \theta \frac{d}{dx} = -\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dU}{dx} \right) = -\lambda U \quad (3.80)$$

Nach einer kleinen Umformung ergibt sich die Legendre'sche Differentialgleichung:

$$\boxed{(1-x^2) \frac{d^2 U}{dx^2} - 2x \frac{dU}{dx} + \lambda U = 0}$$

Wir fragen uns nun, für welche Werte von λ Lösungen in Form von endlichen Polynomen existieren. Dazu setzen wir die Lösung in Form einer Potenzreihe an, setzen diese in die Differentialgleichung ein und bestimmen die λ -Werte, bei denen die Potenzreihe abbricht.

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \frac{dU}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \lambda a_n] x^n &= 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

Beachten Sie, dass in der letzten Zeile die Summe wieder von $0 \dots \infty$ läuft. Damit erhalten wir eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n :

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n}$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind frei wählbar. Daraus berechnet man:

$$a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow \dots, \quad a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow \dots$$

Für große n finden wir $a_{n+2} \sim a_n$, also nimmt a_n nicht ab mit zunehmendem n ; das heißt, die resultierende Reihe ist im Allgemeinen nicht konvergent.

Ein Polynom vom Grad l liegt aber genau dann vor, wenn die Rekursion nach dem l -ten Term abbricht, das heißt wenn alle a_n mit $n > l$ gleich null sind. Das ist genau für $\lambda = l(l+1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ der Fall. Diese Polynome nennen wir $P_l(x)$, wobei wir fordern, dass $P_l(1) = 1$.

- $l = 0, \lambda = 0 : a_0 \neq 0, a_2 = a_4 = \dots = 0 \rightarrow P_0 = 1$

- $l = 1, \lambda = -2 : a_1 \neq 0, a_3 = a_5 = \dots = 0 \rightarrow P_1 = x$

- $l = 2, \lambda = -6 : a_2 = -3a_0$

$$\rightarrow P_2(x) = a_0(-3x^2 + 1) \rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

- $l = 3 : \lambda = -12 : a_3 = -\frac{5}{3}a_1$

$$\rightarrow P_3(x) = a_1 \left(-\frac{5}{3}x^3 + x \right) \rightarrow P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad (3.84)$$

Und so weiter. Unter Verwendung der binomischen Formel kann man weiterhin zeigen:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^2 - 1]^n \quad (3.85)$$

Wie lässt sich mithilfe der Eigenwertgleichung die Orthogonalität der Legendre-Polynome zeigen? Wir erinnern dazu an die Argumentation im Zusammenhang mit reellen symmetrischen Matrizen, deren Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenvektoren bekanntermaßen orthogonal stehen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_2 \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Für symmetrische Matrizen gilt: $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_2$

$$\rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \quad (3.86)$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt sofort $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$.

Für Legendre-Polynome argumentieren wir entsprechend.

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right) = -n(n+1)P_n \quad (3.87)$$

Wir betrachten im ersten Schritt das Skalarprodukt der linken Seite dieser Gleichung mit P_m :

$$\int_{-1}^{+1} dx P_m \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right) = P_m(1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} dx (1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dx} \quad (3.88)$$

Der Beitrag von den Integrationsgrenzen ist offensichtlich gleich null, während der letzte Term symmetrisch unter $n \leftrightarrow m$ ist. Daher folgt:

$$\int_{-1}^{+1} dx P_m \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_n}{dx} \right) = \int_{-1}^{+1} dx P_n \frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dP_m}{dx} \right) \quad (3.89)$$

Jetzt verwenden wir die Eigenwertgleichung:

$$\rightarrow [m(m+1) - n(n+1)](P_m, P_n) = 0 \quad (3.90)$$

Für $m \neq n$ folgt die Orthogonalität.

Anmerkung (1)

Allgemeiner für sogenannte Sturm-Liouville-Gleichungen auf einem Intervall $a \leq x \leq b$:

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad \hat{L} = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + q(x) \quad (3.91)$$

Hier ist $y(x)$ die gesuchte Funktion, und es sollte $w(x) > 0$ sein. Wir führen die zu oben analoge Betrachtung durch, wobei y_1 und y_2 die beiden Lösungen mit den Eigenwerten λ_1 und λ_2 bezeichnen:

$$\begin{aligned} \int_a^b dx y_1(\hat{L}y_2) &= \int_a^b dx \left[-y_1 \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_2}{dx} \right) + q(x)y_1y_2 \right] \\ &= -p(x)y_1 \frac{dy_2}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b dx \left[\frac{dy_1}{dx} p(x) \frac{dy_2}{dx} + q(x)y_1y_2 \right] \\ &= p(x) \left(y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} \right) \Big|_a^b + \int_a^b dx \left[-y_2 \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy_1}{dx} \right) + q(x)y_1y_2 \right] \\ &= p(x) \left(y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx} \right) \Big|_a^b + \int_a^b dx y_2(\hat{L}y_1) \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass die Randterme verschwinden, was zum Beispiel für $p(a) = p(b) = 0$ gewährleistet ist, oder wenn wir als Randbedingung für $y(x)$ fordern, dass entweder die Funktion oder ihre Ableitung auf dem Rand verschwindet (Dirichlet-Randbedingung: $y(a) = y(b) = 0$, von Neumann-Randbedingung: $y'(a) = y'(b) = 0$). Dann folgt:

$$\begin{aligned} \hat{L}y_1 &= \lambda_1 \omega(x)y_1 \rightarrow \int_a^b dx y_2(\hat{L}y_1) = \lambda_1 \int_a^b dx \omega y_2 y_1 \\ \hat{L}y_2 &= \lambda_2 \omega(x)y_2 \rightarrow \int_a^b dx y_1(\hat{L}y_2) = \lambda_2 \int_a^b dx \omega y_1 y_2 \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt weiter:

$$\int_a^b dx w(x) y_2(x) y_1(x) = 0 \quad (3.92)$$

In diesem Fall sind die beiden Funktionen orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts, das die Gewichtsfunktion $w(x)$ enthält.

Anmerkung (2)

Als ‘Erzeugende’ für die Legendre-Polynome bezeichnet man die Funktion

$$\Phi(z, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \quad (3.93)$$

denn es gilt für deren Entwicklung nach z :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (3.94)$$

Aus dieser Beziehung folgt sofort:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \Big|_{z=0} \quad (3.95)$$

Es ist offensichtlich, dass diese Vorschrift für $n = 0$ korrekt ist. Für $n = 1$ findet man:

$$P_1(x) = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2} \frac{-2(x - z)}{(1 - 2xz + z^2)^{3/2}} \Big|_{z=0} = x \quad (3.96)$$

Und so weiter. Für $x = 1$ ergibt sich die bekannte Festlegung der Normierung:

$$x = 1 : \quad \frac{1}{\sqrt{1 - 2z + z^2}} = \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \rightarrow \quad P_n(1) = 1 \quad (3.97)$$

Die erzeugende Funktion genügt der folgenden partiellen Differentialgleichung:

$$\boxed{(1 - x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + z \frac{\partial^2 (z\Phi)}{\partial z^2} = 0}$$

was man unter Verwendung von

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{z}{(1 - 2xz + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{3z^2}{(1 - 2xz + z^2)^{5/2}}, \quad \frac{\partial^2 (z\Phi)}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (3.98)$$

nachrechnen kann. Andererseits können wir auch die Form $\Phi(z, x) = \sum_n P_n(x)z^n$ verwenden und die bekannte Eigenwertgleichung für die Legendre-Polynome einsetzen:

$$\begin{aligned} z \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) P_n(x) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(1-x^2) \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial P_n}{\partial x} \right] z^n \\ &= -(1-x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Anmerkung (3): Multipolentwicklung

Wir betrachten nochmals das elektrische Potential, das wir in Kapitel 3.5 bestimmt hatten:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (3.100)$$

Mithilfe von

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2} \quad (3.101)$$

finden wir:

- $r < r'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r' \sqrt{1 - 2\frac{r}{r'} \cos \theta + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r^n}{r'^{n+1}} \quad (3.102)$$

- $r > r'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r \sqrt{1 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r'^n}{r^{n+1}} \quad (3.103)$$

Zusammengefasst:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r_{<}^n}{r_{>}^{n+1}}, \quad \text{mit } r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (3.104)$$

Häufig interessiert man sich für das Potential in großer Entfernung von der Ladungsverteilung:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \frac{r'^n}{r^{n+1}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int d^3r' r'^n P_n(\cos \theta) \rho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^2} \int d^3r' r' \cos \theta \rho(\mathbf{r}') + \frac{1}{r^3} \int d^3r' r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') + \dots \right] \end{aligned}$$

- $n = 0$, Monopolfeld: In einem sehr großen Abstand von der Ladungsverteilung findet man ein der Gesamtladung $q = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}')$ entsprechendes Coulomb-Potential.
- $n = 1$, Dipolfeld: Im zweiten Term benutzen wir, dass $\cos \theta = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / rr'$. Der resultierende Beitrag hat folgende Form:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}, \quad \mathbf{p} = \int d^3r' \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \quad (3.105)$$

Die Größe \mathbf{p} bezeichnet man als Dipolmoment.

- $n = 2$, Quadrupolfeld, dritter Term:

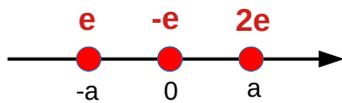
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int d^3r' \frac{1}{2} \left(3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2} - r'^2 \right) \rho(\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}}{2r^5} \quad (3.106)$$

Hier ist \mathbf{Q} der Quadrupoltensor, dessen Komponenten durch

$$Q_{ij} = \int d^3r' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') \quad (3.107)$$

gegeben sind.

Beispiel:



$$\leftrightarrow \rho(\mathbf{r}) = e [\delta(x+a) - \delta(x) + 2\delta(x-a)] \delta(y) \delta(z)$$

Dann folgt sofort, dass $q = 2e$, sowie $p_x = ae$ (und $p_y = p_z = 0$). Für den Quadrupoltensor findet man:

$$Q_{xx} = 6a^2e, \quad Q_{yy} = -3a^2e, \quad Q_{zz} = -3a^2e \quad (3.108)$$

Alle anderen Elemente des Quadrupoltensors in diesem Beispiel verschwinden aus Symmetriegründen.

Allgemein verschwindet die Spur des Quadrupoltensors, denn

$$\sum_{i=1}^3 Q_{ii} = \int d^3r' \left(3 \sum_{i=1}^3 x'_i x'_i - r'^2 \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} \right) = 0 \quad (3.109)$$

Die in diesem Kapitel diskutierten Legendre-Polynome sind nur ein Beispiel für sogenannte orthogonale Polynome. Weitere Polynome, die in der Physik relevant sind, siehe auch nächstes Kapitel, sind:

1. Assoziierte Legendre-Polynome

- Definition:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (3.110)$$

mit $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, l$.

- Skalarprodukt

$$(P_l^m, P_k^m) = \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_k^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk} \quad (3.111)$$

- Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0 \quad (3.112)$$

2. Kugelflächenfunktionen (\rightarrow Winkelanteil des Wasserstoffproblems in der Quantenmechanik)

- Definition:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) \quad (3.113)$$

mit $l = 0, 1, 2, \dots$, $m = -l \dots + l$.

- Skalarprodukt:

$$(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi [Y_{lm}]^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.114)$$

Die Definition der Y_{lm} variiert gelegentlich, was Vorfaktoren – und i betrifft.

3. Hermite-Polynome (\rightarrow harmonischer Oszillator in der Quantenmechanik)

- Definition:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = e^{x^2/2} \left(x - \frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2/2} \quad (3.115)$$

- Skalarprodukt:

$$(H_n, H_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (3.116)$$

- Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0 \quad (3.117)$$

4. Laguerre-Polynome (\rightarrow Radialanteil des Wasserstoffproblems in der Quantenmechanik)

- Definition:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (3.118)$$

- Skalarprodukt:

$$(L_n, L_m) = \int_0^{+\infty} dx e^{-x} L_n(x) L_m(x) = \delta_{nm} \quad (3.119)$$

- Differentialgleichung:

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n = 0 \quad (3.120)$$

3.7 Zusammenfassung

- Allgemeines Skalarprodukt:

$$(f, g) = \int_a^b dx w(x) f^*(x) g(x), \quad w(x) : \text{Gewichtsfunktion} \quad (3.121)$$

- Orthonormalität: $(f_n, f_m) = \delta_{nm}$
- Vollständigkeit: $\sum_n f_n(x) f_n^*(x) = \delta(x - x')$
- Fourier-Basis: periodische Funktionen, Periode L

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L} nx\right), \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L} nx\right) \right\}_{n=1,2,3,\dots}, \text{ oder: } \left\{ \sqrt{\frac{1}{L}} e^{i\frac{2\pi}{L} nx} \right\}_{n=0,1,2,\dots} \quad (3.122)$$

- Fourier-Basis bzw. -Transformation: $L \rightarrow \infty$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k=-\infty \dots +\infty} \quad (3.123)$$

- Delta-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0), \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \quad (3.124)$$

- Legendre-Polynome

– Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} (P_n, P_m) &= \int_{-1}^{+1} dx P_n(x) P_m(x) \\ &= \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \end{aligned} \quad (3.125)$$

– Erzeugende Funktion:

$$\Phi(z, x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n \quad (3.126)$$

Kapitel 4

Partielle Differentialgleichungen

4.1 Beispiele, Klassifikation

Die meisten in der Physik auftretenden Differentialgleichungen sind von zweiter Ordnung, das heißt es treten zweite, aber keine höheren Ableitungen, auf. Eine Reihe wichtiger Differentialgleichungen ist linear, das heißt die gesuchte Funktion tritt nur linear auf.

Beispiele:

- Die Laplace-Gleichung, $\Delta u = 0$, und die Poisson-Gleichung, $\Delta u = f(\mathbf{r})$, sind elliptische Differentialgleichungen, da im Laplace-Operator ein einheitliches Vorzeichen auftritt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.1)$$

Vergleiche Vorzeichen der Ellipsengleichung, $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

- Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \Delta u = 0 \quad (4.2)$$

ist eine hyperbolische Differentialgleichung, vergleiche Hyperbelgleichung, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

- Die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \quad (n(\mathbf{r}, t) : \text{z. B. Teilchendichte}) \quad (4.3)$$

- und die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) \right] \Psi \quad (\Psi(\mathbf{r}, t) : \text{Wellenfunktion}) \quad (4.4)$$

sind parabolische Differentialgleichungen, vergleiche Parabelgleichung, $y \propto x^2$.

Bei nicht konstanten, das heißt ortsabhängigen Koeffizienten kann der Typ der Differentialgleichung vom Ort abhängen.

Es gibt aber auch wichtige *nichtlineare* partielle Differentialgleichungen, zum Beispiel die Sine-Gordon-Gleichung (eigentlich ‘semilinear’):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0 \quad (4.5)$$

Außerdem müssen Randbedingungen festgelegt werden. Bei partiellen Differentialgleichungen unterscheidet man:

- Dirichlet-Randbedingungen: Die gesuchte Funktion wird auf dem Rand des untersuchten Gebiets vorgeschrieben. (Der ‘Rand’ eines dreidimensionalen Gebiets, zum Beispiel, ist seine Oberfläche.)
- Von Neumann-Randbedingungen: Die Normalenableitung der gesuchten Funktion wird auf dem Rand vorgeschrieben.
- Cauchy-Randbedingungen: Es wird eine Linearkombination aus Funktion und Normalenableitung vorgeschrieben.

4.2 Lösung durch Separationsansatz

4.2.1 Kartesische Koordinaten

Wir betrachten speziell die Laplacegleichung

$$\Delta \phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi(x, y, z) = 0 \quad (4.6)$$

die das elektrische Potential im ladungsfreien Raum bestimmt. *Idee:* Wir setzen die Lösung in der Form

$$\phi(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (4.7)$$

an, was man als Separationsansatz bezeichnet. Nach Einsetzen folgt:

$$Y(y)Z(z) \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X(x)Z(z) \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + X(x)Y(y) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (4.8)$$

Und weiter:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \quad (4.9)$$

Jeder Term in dieser Gleichung muss für sich konstant sein, damit die Gleichung für alle x, y, z erfüllt werden kann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} &= -k_x^2, & X'' + k_x^2 X &= 0, & X(x) &= A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x} \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2, & Y'' + k_y^2 Y &= 0, & Y(y) &= A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y} \\ \frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -k_z^2, & Z'' + k_z^2 Z &= 0, & Z(z) &= A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Somit muss die Lösung der Laplace-Gleichung die Bedingung $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$ erfüllen, das heißt mindestens eines der k_i muss imaginär sein (aber nicht alle drei!). Wir setzen $k_x = i\kappa$ und erhalten: $\kappa^2 = k_y^2 + k_z^2$. Die Funktion $X(x)$ nimmt für $x \rightarrow \pm\infty$ exponentiell ab, wenn wir B_x bzw. A_x gleich 0 setzen. Die beschränkten Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beispiel: Ladung vor einer geerdeten Metallwand. In diesem Fall, siehe vorheriges Kapitel, ist die Randbedingung, dass das Potential auf der Metallwand verschwindet. Die Wand liegt wieder in der y - z -Ebene bei $x = 0$, der Abstand der Ladung von der Wand ist a . Wir kennen bereits die Lösung *ohne* Metallplatte:

$$\begin{aligned}\phi_{\text{inhom}} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|} = \frac{q}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int d^3 k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x)}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \\ &= \frac{q}{(2\pi)^3 \epsilon_0} \int d^3 k \frac{e^{ik_x(x-a) + ik_y y + ik_z z}}{k_x^2 + \kappa^2} \\ &= \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{-\kappa|x-a| + ik_y y + ik_z z}}{\kappa}\end{aligned}\quad (4.11)$$

mit $\kappa = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$. Im letzten Schritt haben wir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \frac{e^{ik_x(x-a)}}{k_x^2 + \kappa^2} = \frac{\pi}{\kappa} e^{-\kappa|x-a|}\quad (4.12)$$

benutzt. Diese Lösung erfüllt aber nicht die Randbedingung bei $x = 0$. Strategie: Addiere eine geeignete homogene Lösung (= Lösung der Laplace-Gleichung) hinzu. Auf der Metallplatte ($x = 0$) gilt:

$$\phi_{\text{inhom}}(0, y, z) = \frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{-\kappa a + ik_y y + ik_z z}}{\kappa}\quad (4.13)$$

Um die Randbedingung zu erfüllen, muss die gesuchte Lösung der homogenen Gleichung für $x = 0$ gerade das Negative dieses Ausdrucks sein:

$$\phi_{\text{hom}}(0, y, z) = -\phi_{\text{inhom}}(0, y, z) = -\frac{q}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{-\kappa a + ik_y y + ik_z z}}{\kappa}\quad (4.14)$$

Um eine Lösung der Laplace-Gleichung im dreidimensionalen Raum mit dieser Randbedingung zu erhalten, muss man im Exponenten $ik_y y + ik_z z$ durch $\pm\sqrt{k_y^2 + k_z^2}x + ik_y y + ik_z z$ ersetzen. Für $x > 0$ muss außerdem das negative Vorzeichen gewählt werden, um die Konvergenz der Lösung für $x \rightarrow \infty$ zu gewährleisten.

$$\begin{aligned}\phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) &= -\frac{q}{8\pi^2\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \frac{e^{-\kappa(x+a)+ik_y y+ik_z z}}{\kappa} \\ &= -\frac{q}{(2\pi)^3\epsilon_0} \int d^3k \frac{e^{ik_x(x+a)+ik_y y+ik_z z}}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Diese Lösung der homogenen Gleichung besteht ebenfalls aus einer geeigneten Überlagerung von Lösungen der Form $X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$. Resultat:

$$\phi_{\text{hom}}(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|}\quad (4.16)$$

Gesamtlösung:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - a\mathbf{e}_x|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + a\mathbf{e}_x|} \right)\quad (4.17)$$

Dies stimmt natürlich mit der Lösung, die wir in Kapitel 3.5 mithilfe der Bildladungsmethode gewonnen haben, überein.

Anwendung: Quantenmechanik eines freien Teilchens

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung erhält man aus der zeitabhängigen Gleichung, siehe Kapitel 4.1, indem man – etwas vereinfacht, siehe unten – die Zeitableitung auf der linken Seite durch $-iE/\hbar$ ersetzt. Außerdem vertauschen wir rechte und linke Seite, und wir nennen die gesuchte Funktion, wie in der Quantenmechanik üblich, ψ (welches dann nur noch von \mathbf{r} abhängt). Die potentielle Energie, $V(\mathbf{r})$, sei identisch null. Damit erhalten wir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = E\psi\quad (4.18)$$

Dies ist ein Eigenwertproblem, und E bezeichnet den (Energie-)Eigenwert. Wir versuchen wieder den gleichen Ansatz wie bei der Laplace- bzw. Poisson-Gleichung:

$$\psi(\mathbf{r}) \propto e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\quad (4.19)$$

Eine derartige Funktion nennt man ebene Welle; $\mathbf{k} = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y + k_z\mathbf{e}_z$ ist der Wellenvektor, und $k = |\mathbf{k}|$ dessen Betrag. Es folgt sofort:

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\quad (4.20)$$

Somit haben wir eine Eigenfunktion gefunden, wobei der Wellenvektor \mathbf{k} beliebig ist; der zugehörige Eigenwert ist $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. Da das Vorzeichen der k_i wegen der zweiten Ableitung keine Rolle spielt, ergibt sich die allgemeine Lösung bei vorgegebenem \mathbf{k} zu:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = (A_x e^{ik_x x} + B_x e^{-ik_x x}) \cdot (A_y e^{ik_y y} + B_y e^{-ik_y y}) \cdot (A_z e^{ik_z z} + B_z e^{-ik_z z}) \quad (4.21)$$

Auch hier sind im Prinzip Randbedingungen von Bedeutung, zum Beispiel, wenn das Teilchen in einem Kasten eingeschlossen ist. Das führt zu bestimmten Bedingungen an den Wellenvektor \mathbf{k} und hat zur Konsequenz, dass nur diskrete Energiewerte erlaubt sind. Dieser Effekt ist in der Quantenmechanik als ‘Quantisierung’ der Energie bekannt.

Anmerkung: Wenn noch $\hbar\mathbf{k}$ mit dem Impuls \mathbf{p} identifizieren, erhalten wir die klassische Energie-Impuls-Relation eines freien Teilchens, $E = \mathbf{p}^2 / 2m$.

4.2.2 Kugelkoordinaten

Wir betrachten erneut die zeitunabhängige Schrödingergleichung, nehmen jetzt aber ein radialsymmetrisches Potential, $V(\mathbf{r}) = V(r)$, hinzu. Mit $V(r) \propto 1/r$ entspricht dies dem Wasserstoffatom (ein Proton plus ein Elektron).

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right] \psi = E\psi \quad (4.22)$$

Es ist naheliegend, aufgrund der Rotationssymmetrie in diesem Fall mit Kugelkoordinaten zu arbeiten. Wir verwenden für den Laplace-Operator den Ausdruck, den wir bereits in Kapitel 1.8 angegeben haben, und erhalten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + V(r)\psi = E\psi \quad (4.23)$$

Wir versuchen wieder einen Separationsansatz: $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, dividieren dann durch $R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ und benutzen erneut, dass die r - und winkelabhängigen Terme jeweils konstant sein müssen. Die Funktion Y_{lm} hat zwei Indizes, was sich aus den folgenden Überlegungen ergeben wird. Wir konzentrieren uns zunächst auf den winkelabhängigen Teil:

$$\frac{1}{Y_{lm}} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} \right] = \text{konstant} = -\lambda = -l(l+1) \quad (4.24)$$

Auch für die Winkelanteile machen wir einen Separationsansatz. Anders ausgedrückt, setzen wir an:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \propto P_l^m(\theta) e^{im\varphi} \quad (4.25)$$

Dabei kann m wegen der Eindeutigkeit $-\varphi$ und $\varphi + 2\pi$ beschreiben sozusagen den gleichen Punkt – nur die Werte $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ annehmen. Setzen wir dies in die Gleichung für den winkelabhängigen Teil ein, erhalten wir:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_l^m = -\lambda P_l^m \quad (4.26)$$

Mit $x = \cos \theta$, vergleiche die Diskussion im Zusammenhang mit der Legendre'schen Differentialgleichung, folgt:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_l^m}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} P_l^m = -\lambda P_l^m \quad (\lambda = l(l+1)) \quad (4.27)$$

Die Lösungen dieser Gleichung hängen offensichtlich von l und m ab, daher die Bezeichnung P_l^m . Die $P_l^m(x)$ heißen assoziierte Legendre-Polynome. (Für $m = 0$ ergibt sich die Legendre'sche Differentialgleichung, das heißt $P_l^0(x) = P_l(x)$.) Man findet, siehe 'Nebenrechnung':

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (m \geq 0) \quad (4.28)$$

Der Faktor $(-1)^m$ ist Konvention (wird aber in manchen Lehrbüchern weggelassen).

Nebenrechnung (SoSe 2019: -)

Wir wollen explizit zeigen, dass die $P_l^m(x)$ Lösungen der Differentialgleichung (4.27) sind. Dazu gehen wir aus von der Definition (4.28) – ohne den Faktor $(-1)^m$ – und formen folgenden Ausdruck etwas um:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l \right) \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^{m/2+1} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l - mx(1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l \right] \\ &= (1-x^2)^{m/2+1} \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2(m+1)x(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l \\ &\quad - m(1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l + m^2 x^2 (1-x^2)^{m/2-1} \frac{d^m}{dx^m} P_l \\ &= (1-x^2)^{m/2} \left[(1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2(m+1)x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l + \left(\frac{m^2}{1-x^2} - m(m+1) \frac{d^m}{dx^m} P_l \right) \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Auch bei den beiden anderen Termen kan man $(1-x^2)^{m/2}$ herausziehen, und wir erhalten folgendes Zwischenergebnis:

$$(1-x^2) \frac{d^{m+2}}{dx^{m+2}} P_l - 2(m+1)x \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} P_l - m(m+1) \frac{d^m}{dx^m} P_l = -\lambda \frac{d^m}{dx^m} P_l \quad (4.30)$$

Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass sich diese Gleichung auch direkt aus der Legendre'schen Differentialgleichung (4.27) ergibt. Dazu benutzen wir folgende Beziehung für die m -te Ableitung eines Produkts zweier Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} [f(x)g(x)] &= \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{d^k f}{dx^k} \frac{d^{m-k} g}{dx^{m-k}} \\ &= f \frac{d^m g}{dx^m} + m f' \frac{d^{m-1} g}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2} f'' \frac{d^{m-2} g}{dx^{m-2}} + \dots \end{aligned} \quad (4.31)$$

Damit folgt

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_l}{dx^2} \right] = (1-x^2) \frac{d^{m+2} P_l}{dx^{m+2}} - 2mx \frac{d^{m+1} P_l}{dx^{m+1}} - m(m-1) \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (4.32)$$

sowie

$$-2 \frac{d^m}{dx^m} \left(x \frac{d P_l}{dx} \right) = -2x \frac{d^{m+1} P_l}{dx^{m+1}} - 2m \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (4.33)$$

Unter Verwendung der Legendre'schen Differentialgleichung ergibt sich andererseits:

$$\frac{d^m}{dx^m} \left[(1-x^2) \frac{d^2 P_l}{dx^2} - 2x \frac{d P_l}{dx} \right] = -\lambda \frac{d^m P_l}{dx^m} \quad (4.34)$$

Wenn wir in diese Gleichung (4.32) und (4.33) einsetzen, finden wir Übereinstimmung mit dem Zwischenergebnis (4.30).

Zusammengefasst: Die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (4.35)$$

sind die 'Eigenlösungen' der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \varphi^2} = -l(l+1) Y_{lm} \quad (4.36)$$

wobei die P_l^m die assoziierten Legendre-Polynomen bezeichnen.

- $l = 0$:

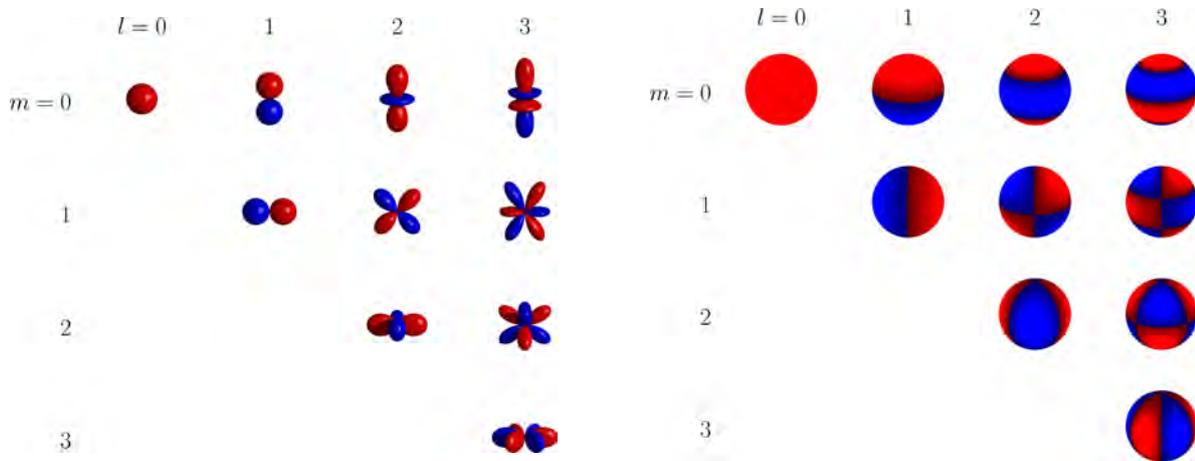
$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad (4.37)$$

- $l = 1$:

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \quad (4.38)$$

- $l = 2$:

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right), \quad Y_{2,1} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{2,2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi} \quad (4.39)$$



Die Kugelflächenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Kugel:

- Orthogonalität:

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (4.40)$$

- Vollständigkeit:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (4.41)$$

Anwendung: Multipolentwicklung (SoSe 2019: –)

Die Kugelflächenfunktionen erlauben die vollständige Faktorisierung der Beiträge zur Multipolentwicklung von $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, vergleiche *Anmerkung (3): Multipolentwicklung* in Kapitel 3. Wir benutzen folgende Beziehung:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \quad (4.42)$$

wobei γ den Winkel zwischen den beiden durch (θ, φ) und (θ', φ') definierten Einheitsvektoren darstellt, und finden damit für $r > r'$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) r'^l Y_{lm}(\theta', \varphi') \quad (4.43)$$

Damit folgt für das Potential $\phi(\mathbf{r})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\mathbf{r}')$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) A_{lm} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A_{lm} &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \\ A_{00} &= \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') = q \quad (= \text{Gesamtladung}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$A_{10} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \cos \theta' = p_z \quad (4.46)$$

$$A_{1,\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r' \sin \theta' (\cos \theta' \mp i \sin \theta') = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp p_x + i p_y) \quad (4.47)$$

Die Größen A_{10} , $A_{1,\pm 1}$ hängen direkt mit den Dipolmomenten zusammen.

$$A_{20} = \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (3z'^2 - r'^2) \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} A_{2,\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{2}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin \theta' \cos \theta' (\cos \varphi' \mp i \sin \varphi') \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') z' (\mp x' + i y') \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} A_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{3}{8}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') r'^2 \sin^2 \theta' (\cos 2\varphi' \mp i \sin 2\varphi') \\ &= \sqrt{\frac{3}{8}} \int d^3r' \rho(\mathbf{r}') (x'^2 - y'^2 \mp 2ix'y') \end{aligned} \quad (4.50)$$

Der Zusammenhang der Größen A_{20} , $A_{2,\pm 1}$, $A_{2,\pm 2}$ mit den Quadrupolmomenten in kartesischen Koordinaten ergibt sich wie folgt:

$$Q_{xx} = -A_{20} + \sqrt{\frac{3}{2}} (A_{22} + A_{2,-2}), \quad Q_{yy} = -A_{20} - \sqrt{\frac{3}{2}} (A_{22} + A_{2,-2}), \quad Q_{zz} = 2A_{20} \quad (4.51)$$

$$Q_{xy} = \sqrt{\frac{3}{2}} i (A_{22} - A_{2,-2}), \quad Q_{xz} = -\sqrt{\frac{3}{2}} (A_{21} - A_{2,-1}), \quad Q_{yz} = -\sqrt{\frac{3}{2}} i (A_{21} + A_{2,-1}) \quad (4.52)$$

Anwendung: Quantenmechanik im Zentralpotential

Wir betrachten nochmals die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung, wobei $V(r)$ ein beliebiges Zentralpotential bezeichnet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V(r) \psi = E \psi \quad (4.53)$$

mit

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) \quad (4.54)$$

Mit dem Separationsansatz $\psi(\mathbf{r}) = R_{El}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ folgt:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{El}}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} R_{El} \right] + V(r) R_{El} = E R_{El} \quad (4.55)$$

Mit der Notation R_{El} tragen wir der Tatsache Rechnung, dass die Lösung sowohl von E als auch von l abhängt. Damit können wir in der radialen Gleichung,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{El}}{dr} \right) + \left(V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_{El} = ER_{El} \quad (4.56)$$

offensichtlich ein l -abhängiges, effektives Potential identifizieren:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (4.57)$$

Dieses enthält einen abstoßenden Zentrifugalanteil; siehe auch folgende Vorlesungen zur theoretischen Physik. Auf die Lösung der Radialgleichung wollen wir hier aber nicht eingehen.

Anwendung: Laplace- bzw. Poisson-Gleichung in Kugelkoordinaten (SoSe 2019: –)

Stattdessen untersuchen genauer wir die Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\Delta\phi = 0, \quad \phi(r, \theta, \varphi) = R_l(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (4.58)$$

Für den Radialanteil erhalten wir in diesem Fall:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) - l(l+1)R_l = 0 \quad (4.59)$$

Ansatz: $R_l(r) \propto r^\alpha$

$$\frac{dR_l}{dr} \propto \alpha r^{\alpha-1}, \quad \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_l}{dr} \right) \propto \frac{d}{dr} (\alpha r^{\alpha+1}) = \alpha(\alpha+1)r^\alpha \quad (4.60)$$

$\rightarrow \alpha(\alpha+1) = l(l+1) \rightarrow \alpha = l$ oder $\alpha = -(l+1)$. Daher ist die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[\alpha_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) + \beta_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) \right] \quad (4.61)$$

Beispiel 1: Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

Wir nehmen an, dass die Ladungsdichte nicht von der Richtung des Ortsvektors, sondern nur vom Abstand r abhängt, das heißt $\rho(\mathbf{r}) \rightarrow \rho(r)$. Entsprechend können wir $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi(r)$ ansetzen und erhalten aus der Poisson-Gleichung:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\rho(r)/\epsilon_0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -r^2 \rho(r)/\epsilon_0 \quad (4.62)$$

Nach einmaliger Integration ergibt sich:

$$r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r dr' (r')^2 \rho(r') \quad (4.63)$$

Speziell untersuchen wir eine homogen geladene Kugel mit Radius R :

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 < r < R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (4.64)$$

Somit ist die Gesamtladung Q durch $(4\pi R^3/3)\rho_0$ gegeben. Im ersten Schritt finden wir:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \begin{cases} r^3/3 & \text{für } 0 < r < R \\ R^3/3 & \text{für } r \geq R \end{cases} \\ \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial r} &= -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \begin{cases} r & \text{für } 0 < r < R \\ R^3/r^2 & \text{für } r \geq R \end{cases} \end{aligned} \quad (4.65)$$

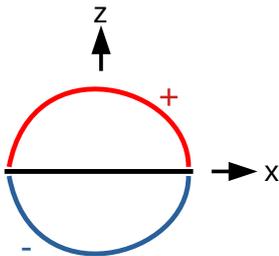
Bereits an dieser Stelle erkennen wir, dass das Potential im ‘Innenraum’ quadratisch variiert und im ‘Außenraum’ proportional zu $1/r$ abnimmt. Nach nochmaliger Integration:

$$\rightarrow \phi(r) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \begin{cases} r^2/2 + \mathcal{C} & \text{für } 0 < r < R \\ -R^3/r + \mathcal{D} & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (4.66)$$

Dann verlangen wir noch, dass $\phi(r)$ für $r \rightarrow \infty$ verschwindet sowie bei $r = R$ stetig ist, was die beiden Konstanten \mathcal{C} und \mathcal{D} festlegt: $\mathcal{C} = -3R^2/2$, $\mathcal{D} = 0$. Im Endergebnis drücken wir den Vorfaktor noch durch Q aus:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \begin{cases} 3/2 - r^2/2R^2 & 0 < r \leq R \\ R/r & r \geq R \end{cases} \quad (4.67)$$

Beispiel 2: Kugelkondensator (SoSe 2019: –)



Wir betrachten eine Kugel mit Radius a . Randbedingung: Es sei $\phi = +\phi_0$ auf der oberen und $\phi = -\phi_0$ auf der unteren Halbkugel vorgegeben. Wir stellen uns vor, dass die obere Halbkugel von der unteren durch einen dünnen isolierenden Ring voneinander getrennt sind. Gesucht ist das Potential inner- und außerhalb der Kugel. (Abbildung: Seitenansicht)

Da für $r > a$ und $r < a$ keine Ladungen vorliegen, muss das Potential überall endlich sein, das heißt für $r < a$ müssen wir $\beta_{lm} = 0$ setzen, und $\alpha_{lm} = 0$ für $r > a$. Andernfalls würde das Potential für $r \rightarrow 0$ bzw. $r \rightarrow \infty$ divergieren. Das führt zu folgendem Ansatz:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \alpha_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r < a \quad (4.68)$$

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \beta_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r > a \quad (4.69)$$

Die Koeffizienten α_{lm} und β_{lm} lassen sich aus der Randbedingung bei $r = a$ bestimmen. Da die Kugelflächenfunktionen ein vollständiges Orthonormalsystem bilden, erhält man α_{lm} und β_{lm} durch Bildung des Skalarprodukts mit Y_{lm}^* .

$$\begin{aligned}
r \rightarrow a \ (r < a) : & \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \phi(a, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \\
&= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \alpha_{l'm'} a^{l'} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \\
&= \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \alpha_{l'm'} a^{l'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} = \alpha_{lm} a^l
\end{aligned} \tag{4.70}$$

mit

$$\alpha_{lm} = \frac{1}{a^l} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \phi(a, \theta, \varphi) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{-im\varphi} \tag{4.71}$$

Im untersuchten Beispiel hängt $\phi(r = a, \theta, \varphi)$ nur von θ ab, somit ist $\alpha_{lm} = 0$ für $m \neq 0$. Wir setzen

$$\phi(r = a, \theta, \varphi) = g(\theta) = \phi_0 \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \alpha_{lm} &= \frac{2\pi \delta_{m0}}{a^l} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta) g(\theta) \\
&= \frac{\delta_{m0}}{a^l} \sqrt{\pi(2l+1)} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta P_l(\cos \theta) g(\theta) \\
&= \frac{\delta_{m0}}{a^l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \cdot \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) g(x)
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Zur Erinnerung: $P_l^0(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$. Hier können wir die Koeffizienten c_l ,

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) g(x) \tag{4.74}$$

der Legendre-Reihe von $g(x)$ identifizieren:

$$g(x) = \phi_0 \begin{cases} -1 & \text{für } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.75}$$

Die Funktion $g(x)$ hängt aber direkt mit der Funktion $f(x)$ zusammen, deren Legendre-Entwicklung wir bereits in Kapitel 3.6 diskutiert haben. Damit folgt:

$$g(x) = 2\phi_0 \left(f(x) - \frac{1}{2} \right) = \phi_0 \left[\frac{3}{2}P_1(x) - \frac{7}{8}P_3(x) + \frac{11}{16}P_5(x) - \dots \right] \quad (4.76)$$

Die Koeffizienten c_l sind nur für ungerade l von null verschieden, da $g(x)$ eine ungerade Funktion ist. Allgemein ergibt sich:

$$c_l = \phi_0 (2l + 1) \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} (l-1)!}{2^l \left(\frac{l-1}{2}\right)! \left(\frac{l+1}{2}\right)!} \quad (l \text{ ungerade}) \quad (4.77)$$

Zusammengefasst finden wir für $r < a$:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} c_l \left(\frac{r}{a}\right)^l Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_l \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos \theta) \\ &= \phi_0 \left[\frac{3r}{2a} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{a}\right)^5 P_5(\cos \theta) - \dots \right] \end{aligned} \quad (4.78)$$

Entsprechend findet man für $r > a$:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) \\ &= \phi_0 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^6 P_5(\cos \theta) - \dots \right] \end{aligned} \quad (4.79)$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems hängt $\phi(r, \theta, \varphi)$ nicht vom Azimutwinkel φ ab. Wir berechnen das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r + E_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta \frac{\partial \phi}{r \partial \theta}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} E_r &= - \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} l c_l \frac{r^{l-1}}{a^l} P_l(\cos \theta) \quad (r < a) \\ &\approx -\frac{c_1}{a} \cos \theta \quad (r \ll a) \\ E_r &= + \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} (l+1) c_l \frac{a^{l+1}}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) \quad (r > a) \\ &\approx 2c_1 a^2 \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (r \gg a) \end{aligned} \quad (4.80)$$

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{\sin \theta}{r} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_l \frac{r^l}{a^l} \frac{d}{dx} P_l(x) \Big|_{x=\cos \theta} & (r < a) \\
&\approx \frac{c_1}{a} \sin \theta & (r \ll a) \\
E_\theta &= \frac{\sin \theta}{r} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_l \frac{a^{l+1}}{r^{l+1}} \frac{d}{dx} P_l(x) \Big|_{x=\cos \theta} & (r > a) \\
&\approx c_1 a^2 \frac{\sin \theta}{r^3} & (r \gg a)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Hier haben wir $P_1(x) = x$ benutzt, außerdem ist $c_1 = 3\phi_0/2$. Die Radialkomponente des Feldes, E_r , hat bei $r = a$ einen Sprung:

$$\Delta E_r(\theta) = E_r(a+0) - E_r(a-0) = \frac{1}{a} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} (2l+1)c_l P_l(\cos \theta) \tag{4.82}$$

Da das elektrische Feld senkrecht auf Äquipotentialflächen steht, finden wir, abgesehen von dem singulären Punkt $\theta = \pi/2$, das heißt auf dem Äquator, dass die Polarkomponente gleich null ist:

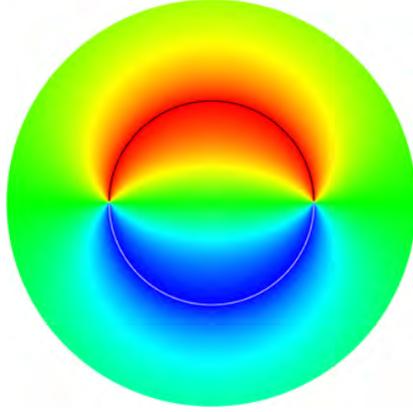
$$\begin{aligned}
E_\theta(r=a) &= \frac{\sin \theta}{a} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} c_l \frac{d}{dx} P_l(x) \\
&= \frac{\sin \theta}{a} \frac{d}{dx} g(x) = 2\phi_0 \frac{\sin \theta}{a} \delta(x) = \frac{2\phi_0}{a} \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.83}$$

Auf dieser singulären Linie verschwindet der Sprung in der Radialkomponente, ΔE_r , denn in der Summe treten nur ungerade Legendre-Polynome auf, und $P_l(0) = 0$ für ungerade l . Entlang der z -Richtung ergibt sich wegen $P_l(1) = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta E_r(\theta=0) &= \frac{1}{a} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} (2l+1)c_l = \frac{\phi_0}{a} \sum_{l=1,3,\dots}^{\infty} (2l+1)^2 \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} (l-1)!}{2^l \left(\frac{l-1}{2}\right)! \left(\frac{l+1}{2}\right)!} \\
&= \frac{\phi_0}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+3)^2 \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \\
&= \frac{\phi_0}{a} (2\sqrt{2} - 1)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Anmerkung: Das Endergebnis lässt sich *nicht* durch eine direkte Auswertung der Summe gewinnen, da diese nicht konvergent ist. Eine genauere Analyse zeigt, dass die Kombination aus Vertauschen von Differentiation nach r und Summation sowie Grenzwertbildung ($r \rightarrow a$, $\theta \rightarrow 0$) scheinbar ein unphysikalisches Ergebnis liefert. Ein Umweg unter Verwendung der erzeugenden Funktion führt jedoch zum Ziel, nämlich dem angegebenen, endlichen Resultat.

Aus Symmetriegründen – oder unter Benutzung von $P_l(-1) = -1$ für ungerade l – folgt, dass $\Delta E_r(\theta=0) = -\Delta E_r(\theta=\pi/2)$.



Potentialverlauf beim Kugelkondensator: Lösung der Laplace-Gleichung für die Kugelgeometrie mit der Randbedingung, dass $\phi = +\phi_0$ auf der oberen und $\phi = -\phi_0$ auf der unteren Halbkugel.

Für große Abstände, $r \gg a$, entspricht der Feldverlauf dem eines Dipolfeldes:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left(3 \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right) = \frac{p_z}{r^3} (2 \cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \quad (4.85)$$

mit $\mathbf{p} = p_z \mathbf{e}_z$, $p_z = c_1 a^2 = 3\phi_0 a^2 / 2$.

4.3 Diffusionsgleichung, Wellengleichung

Diffusion

Wir betrachten zuerst die Diffusionsgleichung,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \quad (4.86)$$

wobei $n(\mathbf{r}, t)$ zum Beispiel die Teilchendichte zur Zeit t am Ort \mathbf{r} beschreibt. Wir versuchen wieder einen Separationsansatz, dieses Mal in Raum und Zeit:

$$n(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.87)$$

Es folgt sofort, dass dieser Ansatz die Differentialgleichung für beliebige \mathbf{k} löst, vorausgesetzt die Frequenz ist gegeben durch $\omega = -iDk^2$. Da die Gleichung linear ist, können wir verschiedene \mathbf{k} 's überlagern, und finden allgemein ($t > 0$):

$$n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{n}_0(\mathbf{k}) e^{-Dk^2 t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.88)$$

Die Funktion $\tilde{n}_0(\mathbf{k})$, die beliebig gewählt werden kann, ist die Fourier-Transformierte der Anfangsbedingung, denn:

$$n_0(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}, t = 0) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{n}_0(\mathbf{k}) e^{+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.89)$$

Die $\sqrt{2\pi}$ -Faktoren wurden hier so gewählt, wie in der Physik üblich, das heißt:

$$\tilde{n}_0(\mathbf{k}) = \int d^3r \tilde{n}_0(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.90)$$

Die Gesamtteilchenzahl ändert sich nicht als Funktion von t (Teilchenzahlerhaltung):

$$\begin{aligned} N = \int d^3r n(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{n}_0(\mathbf{k}) e^{-Dk^2t} \int d^3r e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{n}_0(\mathbf{k}) e^{-Dk^2t} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \\ &= \tilde{n}_0(\mathbf{k} = \mathbf{0}) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Anfangsbedingung $n_0(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r})$, das heißt $\tilde{n}_0(\mathbf{k}) = 1$:

$$\rightarrow n(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-Dk^2t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.92)$$

Wegen $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ zerfällt dieses Integral in ein Produkt von drei identischen Funktionen:

$$\rightarrow n(\mathbf{r}, t) = \mathcal{G}(x, t) \cdot \mathcal{G}(y, t) \cdot \mathcal{G}(z, t) \quad (4.93)$$

mit

$$\mathcal{G}(x, t) = \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-Dtk_x^2 + ik_x x} \quad (4.94)$$

Hier steht die Fourier-Transformierte einer Gauß-Kurve, die bekanntermaßen ebenfalls eine Gauß-Kurve ist. Wir setzen $\sigma_t^2 = 2Dt$ und erhalten:

$$\mathcal{G}(x, t) = \int \frac{dk_x}{2\pi} e^{-\sigma_t^2 k_x^2 / 2 + ik_x x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} e^{-x^2 / 2\sigma_t^2} \quad (4.95)$$

Insbesondere wird die zum Zeitpunkt $t = 0$ extrem lokalisierte Teilchendichte immer breiter, wobei die Breite wurzelförmig mit t zunimmt, $\sigma_t \propto \sqrt{t}$: Dies ist charakteristisch für Diffusionsprozesse.

Wellenausbreitung

Wir verfahren analog bei der Wellengleichung, betrachten aber zur Vereinfachung nur den eindimensionalen Fall.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \Delta u = 0 \quad \xrightarrow{1-D} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad (4.96)$$

Der Ansatz

$$u(x, t) \propto e^{-i\omega t + ikx} \quad (4.97)$$

liefert $\omega^2 = c^2 k^2$ bzw. $\omega = \pm ck$. Somit ist die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} n(x, t) &= \int \frac{dk}{2\pi} [A(k) e^{-ickt + ikx} + B(k) e^{+ickt + ikx}] \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} [A(k) e^{ik(x-ct)} + B(k) e^{ik(x+ct)}] \\ &= f(x - ct) + g(x + ct) \end{aligned} \quad (4.98)$$

Zur Illustration nehmen wir an, dass $f(x)$ und $g(x)$ zwei lokalisierte Funktionen sind, zum Beispiel wieder Gauß-Kurven. Dann bedeutet die letzte Relation, dass $f(x - ct)$ ein nach rechts laufendes und $g(x + ct)$ ein nach links laufendes Gauß-Paket ist. Wichtig: Die Breite dieser ‘Wellenpakete’ verändert sich *nicht* als Funktion der Zeit – im Gegensatz zur Diffusionsgleichung. Ursache ist die hier lineare Dispersionsrelation, $\omega = \pm ck$.

Anmerkung: Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung eines freien Teilchens,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi \quad (4.99)$$

hat, abgesehen vom i auf der linken Seite, große Ähnlichkeit mit der Diffusionsgleichung, das heißt der Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \propto e^{-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.100)$$

führt wieder zum Ziel. Allerdings findet man hier $\omega = \hbar k^2 / 2m$ (= reell). Aus diesen Lösungen lassen sich ebenfalls Wellenpakete bilden, die aber erstens im Allgemeinen komplex sind, und die zweitens als Funktion der Zeit auseinander laufen (‘Materiewellen’).

4.4 Sine-Gordon-Gleichung

Wir diskutieren abschließend noch spezielle Lösungen der Sine-Gordon-Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0 \quad (4.101)$$

Insbesondere wollen wir untersuchen, ob es auch hier, wie in der linearisierten Gleichung, ‘Wellenpakete’ gibt, die mit einer bestimmten Geschwindigkeit laufen, aber ihre Form nicht ändern. Dazu machen wir den Ansatz

$$u(x, t) = u(x - vt) \quad (4.102)$$

wobei wir annehmen, dass $v < c$. Es folgt sofort:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad \rightarrow \quad (c^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \omega_0^2 \sin u \quad (4.103)$$

Die rechte Seite sieht so aus wie die Kraft, die auf ein Pendel im Schwerfeld wirkt, allerdings mit einem anderen Vorzeichen. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir

$$\tau = x \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2 - v^2}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \sin u \quad (4.104)$$

Dies sieht aus wie die klassische Pendelgleichung, jedoch mit dem ‘falschen’ Vorzeichen auf der rechten Seite. Trotzdem können wir sofort ein ‘erstes Integral der Bewegung’ angeben:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 + \cos u = \mathcal{E} = \text{konstant} \quad (4.105)$$

Diese Gleichung beschreibt somit die Bewegung eines Teilchens der Masse eins im Potential $V(u) = \cos u$, wobei τ formal die Rolle der Zeit spielt. Natürlich hängt die Form der Lösungen entscheidend vom Wert der ‘Energie’ \mathcal{E} ab. Diese sind beschränkt für $-1 \leq \mathcal{E} < 1$ und unbeschränkt für $1 < \mathcal{E}$. Von besonderem Interesse ist der Fall $\mathcal{E} = 1$:

$$\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 = 1 - \cos u = 2 \sin^2 \left(\frac{u}{2} \right) \quad (4.106)$$

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht:

$$\tan \frac{u}{4} = e^{\pm(\tau - \tau_0)} = e^{\pm\gamma(x - vt - x_0)} \quad (4.107)$$

mit $\gamma = \omega_0 / \sqrt{c^2 - v^2}$. Endergebnis:

$$u(x - vt) = 4 \arctan \left[e^{\pm\gamma(x - vt - x_0)} \right] \quad (4.108)$$

Für die Ableitung nach der Ortskoordinate – zur Vereinfachung setzen wir $t = 0$, $x_0 = 0$ – folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x} &= \pm 4\gamma \cos^2 \frac{u}{4} e^{\pm\gamma x} = \pm 4\gamma \frac{e^{\pm\gamma x}}{1 + \tan^2 \frac{u}{4}} \\ &= \pm 4\gamma \frac{e^{\pm\gamma x}}{1 + e^{\pm 2\gamma x}} = \pm \frac{2\gamma}{\cosh(\gamma x)} \end{aligned} \quad (4.109)$$

Wenn wir uns auf den Hauptzweig des Arkustangens konzentrieren und das positive Vorzeichen im Exponenten betrachten, variiert $u(x)$ von 0 bis 2π für $x = -\infty \dots \infty$, mit $u(0) = \pi$. Für das negative Vorzeichen im Exponenten variiert $u(x)$ von 2π nach 0. Diese beiden Lösungen nennt man auch ‘Soliton’ bzw. ‘Anti-Soliton’. Sie können mit der Geschwindigkeit v propagieren, ohne ihre Form zu ändern. Die Ableitung dieser Funktionen ist exponentiell lokalisiert, wobei die Breite von der Geschwindigkeit anhängt, $\approx 1/\gamma$. Die Breite geht gegen null für $v \rightarrow c$; vergleiche Spezielle Relativitätstheorie.

Für andere Werte von \mathcal{E} sind die Lösungen explizit zeitabhängig. Unter anderem gibt es auch Mehr-Soliton-Lösungen, die zum Beispiel die Streuung eines Solitons an einem Anti-Soliton beschreiben. Da sich die Gesamtheit der Lösungen der Sine-Gordon-Gleichung explizit angeben oder zumindest klassifizieren lässt, spricht man auch von einem *integrablen* System.

4.5 Zusammenfassung

- Bei einigen in der Physik wichtigen partiellen Differentialgleichungen führt ein Separationsansatz zum Ziel, bei dem die Lösung aus einem Produkt von Funktionen der einzelnen Variablen besteht.
- Laplaceoperator in kartesischen Koordinaten \rightarrow Entwicklung in Fourierbasis
- Laplaceoperator in Kugelkoordinaten \rightarrow Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen
- Diffusionsgleichung, Wellengleichung: Lösung mit Separationsansatz kann als ‘Lösung durch Fourier-Transformation’ interpretiert werden.
- Manche *nichtlineare* partielle Differentialgleichungen – wie die Sine-Gordon-Gleichung – zeigen spezielle lokalisierte Lösungen.