

Mathematische Konzepte I^a

G.-L. Ingold, L. Chioncel, U. Eckern
Institut für Physik
Universität Augsburg

26. April 2019

^aDas Modul “Mathematische Konzepte I” wurde von Gert-Ludwig Ingold entwickelt. Aktuelle T_EX-Version von Liviu Chioncel, mit verschiedenen Ergänzungen von Ulrich Eckern.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorrechnung	1
1.1	Warum Vektoren?	1
1.2	Rechenoperationen mit Vektoren	3
1.2.1	Komponentendarstellung (kartesische Koordinaten)	4
1.2.2	Einfache Vektoralgebra	5
1.3	Drehung des Koordinatensystems	7
1.3.1	Passive Transformation	8
1.3.2	Matrizen, Rechentechnik	8
1.4	Einstein'sche Summenkonvention	14
1.5	Kreuzprodukt	15
1.6	Anwendungen	18
1.6.1	Mehrfachprodukte	18
1.6.2	Drehvektor	18
1.7	Zusammenfassung	20
2	Differential- und Integralrechnung	21
2.1	Wozu Differentiation und Integration?	21
2.2	Grundlegende Techniken	22
2.2.1	Differentiation	22
2.2.2	Stammfunktion	24
2.2.3	Bestimmtes Integral	25
2.3	Taylorreihe	29
2.4	Differentiation von Vektoren	32
2.5	Transformation der Basisvektoren	37
2.6	Gradient	39
2.7	Linienintegral	44
2.8	Mehrdimensionale Integrale	48
2.9	Zusammenfassung	56
3	Komplexe Zahlen	57
3.1	Die komplexe Zahlenebene	57
3.2	Eigenschaften	59

3.3	Komplexwertige Funktionen	59
4	Differentialgleichungen	61
4.1	Typologie der Differentialgleichungen	61
4.2	Homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung	62
4.3	Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung	64
4.3.1	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	64
4.3.2	Erstes Integral	67
4.4	Inhomogene lineare Differentialgleichungen	69
4.4.1	1. Ordnung: Variation der Konstanten	69
4.4.2	2. Ordnung: Lösung durch Raten	71
4.5	Methode der Green'schen Funktion	73
4.5.1	Green'sche Funktion und der Wronskian	74
4.5.2	Allgemeine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung	76
4.6	Zusammenfassung	78
5	Lineare Algebra	79
5.1	Dyadisches Produkt	79
5.2	Determinanten	82
5.3	Lineare Gleichungssysteme	86
5.4	Eigenwertprobleme	89
5.5	Lineare Differentialgleichungssysteme	94
5.5.1	Beispiel: gekoppelte harmonische Oszillatoren	95
5.5.2	Beispiel: zwei gekoppelte Massen	97
5.6	Zusammenfassung	99

Zielgruppe: Das Modul ‘Mathematische Konzepte I’ (PHM-0033) richtet sich an Studierende im ersten Semester der Studiengänge Bachelor Physik, Bachelor Materialwissenschaften und Lehramt Gymnasium (falls Mathematik nicht zweites Fach ist).

Zeitaufwand (in Vorlesungs-Doppelstunden):

- Kapitel 1, Vektorrechnung: ca. 5
- Kapitel 2, Differential- und Integralrechnung: ca. 10
- Kapitel 3, Komplexe Zahlen: ca. 1
- Kapitel 4, Differentialgleichungen: ca. 6
- Kapitel 5, Lineare Algebra: ca. 6

Empfohlene Literatur

- Lehrbücher
 - S. Großmann, Mathematischer Einführungskurs für die Physik (Teubner)
 - W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik, I: Klassische Mechanik (Springer)
 - R. Shankar, Basic Training in Mathematics (Plenum Press)
 - M. Scherfner, T. Volland, Mathematik für das erste Semester (Spektrum/Springer)
 - C. B. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik (Elsevier/Spektrum)
 - M. L. Boas, Mathematical methods in the physical sciences (Wiley)
 - G. B. Arfken, H. J. Weber, Mathematical methods for physicists (Academic)
 - F. Ehlotzky, Angewandte Mathematik für Physiker (Springer)
 - Chun Wa Wong, Introduction to Mathematical Physics: Methods and Concepts (Oxford)
- Formelsammlungen
 - I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik (Harri Deutsch)
 - I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Tables of integrals, series, and products (Academic)
- Sonstige Skripten ...
 - ... finden sich im Web: einfach nach ‘Mathematische Methoden’ suchen!

Kapitel 1

Vektorrechnung

1.1 Warum Vektoren?

Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Es wird durch eine Richtung und eine Länge ('Betrag') charakterisiert. Es gibt vielen physikalische Größen, die einen Betrag und eine Richtung haben. Ein Beispiel ist die Kraft:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Eine Methode zur Darstellung eines Vektors ist ein *kartesisches Koordinatensystem*. Darunter verstehen wir ein System, in dem mehrere Achsen reeller Zahlen in ihrem gemeinsamen Nullpunkt aufeinander senkrecht stehen.

Physikalische Gesetze müssen sich unabhängig vom Bezugssystem formulieren lassen. Beispiel: Bewegung unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung. Bewegungsgleichungen (im x-y-Koordinatensystem):

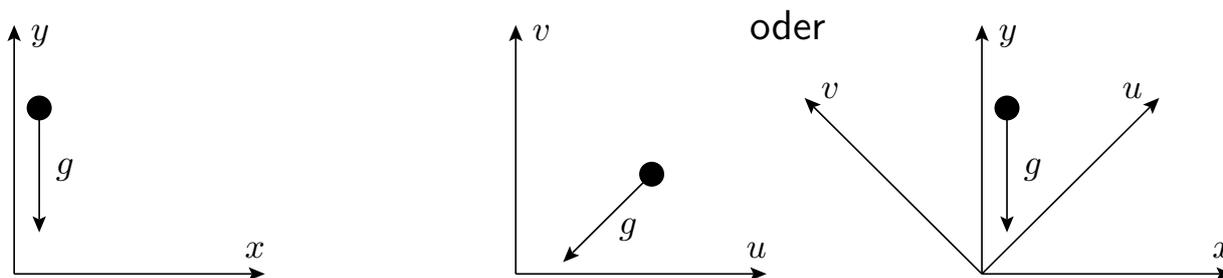


Abbildung 1.1: Masse im Schwerfeld, im x-y- und im u-v-Koordinatensystem

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1.2)$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \quad (1.3)$$

Ein alternativer Satz von Bewegungsgleichungen (im u-v-Koordinatensystem) ist:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \quad (1.4)$$

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

Interpretation: Die beiden Sätze von Bewegungsgleichungen beschreiben die gleiche physikalische Situation in verschiedenen Bezugssystemen.

Die Newton'sche Bewegungsgleichung, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, wobei \mathbf{r} eine Funktion der Zeit t ist und die beiden Punkte die zweite Ableitung nach der Zeit beschreiben, gilt unabhängig vom Bezugssystem. Im x-y-Koordinatensystem:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Der Vektor \mathbf{r} wird dargestellt mit einer Komponente r_x (oder einfach x) entlang der x-Achse und einer Komponente r_y (oder einfach y) entlang der y-Achse.

Im u-v-Koordinatensystem:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{\sqrt{2}} \\ -\frac{mg}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Dreht man das Koordinatensystem, so ändern sich die Komponenten eines Vektors.

Im Gegensatz dazu ändern sich Skalare bei Drehung des Koordinatensystems nicht, zum Beispiel die Temperatur an einem vorgegebenen Ort. Skalare und Vektoren sind Spezialfälle so genannter

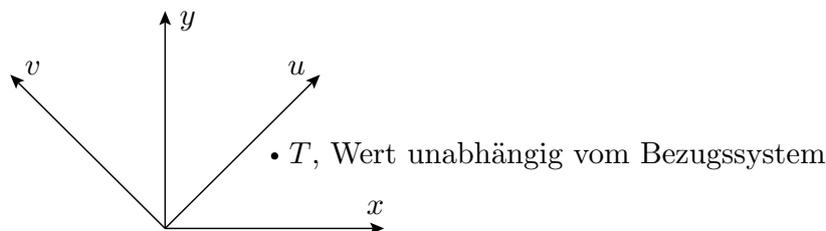


Abbildung 1.2: Der Wert eines Skalars hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Tensoren:

Skalar	Tensor 0. Stufe	
Vektor	Tensor 1. Stufe	
Tensor 2. Stufe	Beispiel: Trägheitstensor (siehe Kap. 2)	
	⋮	
Tensor 4. Stufe	Beispiel: Elastizitätstensor,	
	⋮	
	Riemann'scher Krümmungstensor	

1.2 Rechenoperationen mit Vektoren

Addition von Vektoren	$\mathbf{a} + \mathbf{b}$	komponentenweise Addition Beispiel: Addition zweier Kräfte, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$
Multiplikation mit einem Skalar	$\alpha \mathbf{a}$	komponentenweise Multiplikation Beispiel: Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$
Skalarprodukt	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	liefert einen Skalar Beispiel: kinetische Energie $\frac{m}{2}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{m}{2}v^2$
Vektorprodukt, Kreuzprodukt	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	liefert einen axialen Vektor Beispiel: Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, \mathbf{r}, \mathbf{p} : polare Vektoren, \mathbf{L} : axialer Vektor
Dyadisches Produkt, Tensorprodukt	$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	liefert einen Tensor 2. Stufe

Skalarprodukt

Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist die Zahl

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \phi; \quad (1.8)$$

darin sind $|\mathbf{a}|$ und $|\mathbf{b}|$ die Beträge der Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ; ϕ ist der von ihnen eingeschlossene Winkel.

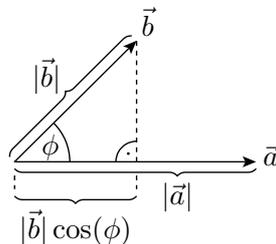


Abbildung 1.3: Illustration zum Skalarprodukt

Insbesondere gilt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2 \quad (1.9)$$

mit $|\mathbf{a}|$ = Betrag des Vektors \mathbf{a} . Für den zweidimensionalen Fall $\mathbf{a} = (a_x, a_y)$ können wir den Betrag mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ausrechnen (siehe auch Gleichung (1.27)). Das Skalarprodukt ermöglicht die Messung von Längen und Winkeln, wobei diese Größen nicht vom verwendeten Koordinatensystem abhängen.

Eigenschaften des Skalarprodukts

- kommutativ: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- bilinear: $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b})$

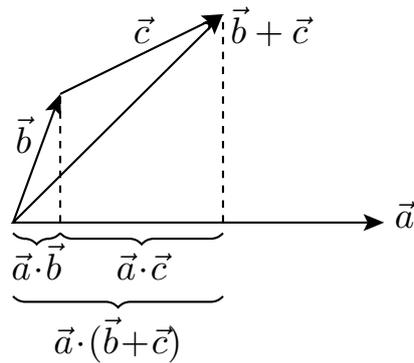


Abbildung 1.4: Illustration zum Distributivgesetz

- distributiv: $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- nicht assoziativ: $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
- Schwarz'sche Ungleichung: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ (da $0 \leq |\cos \phi| \leq 1$)
Aus $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ folgt $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, d. h. \mathbf{a} steht senkrecht auf \mathbf{b} (oder trivialerweise $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{0}$).

1.2.1 Komponentendarstellung (kartesische Koordinaten)

Einheitsvektor, Basisvektor

In einem kartesischen Koordinatensystem haben die Basisvektoren die Länge 1 ('Einheitsvektoren') und stehen paarweise senkrecht aufeinander. Basisvektoren (Einheitsvektoren) sind zur Darstellung

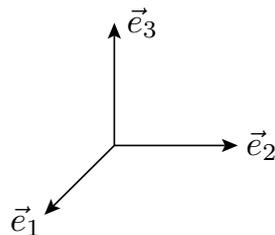


Abbildung 1.5: Rechtssystem, kartesische Darstellung. Die Vektoren \vec{e}_j , $j = 1, 2, 3$, entsprechen den \mathbf{e}_j , welche im Text verwendet werden.

eines kartesischen Koordinatensystems unerlässlich. So ist jeder der Achsen des kartesischen Koordinatensystems ein Basisvektor zugeordnet, siehe Abbildung 1.5; die Basisvektoren haben folgende Eigenschaft:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \leftrightarrow \text{Normierung} \\ 0 & \text{für } i \neq j \leftrightarrow \text{Orthogonalität} \end{cases} \quad (1.10)$$

Die Größe δ_{ij} heißt Kronecker-Symbol oder einfach ‘Kronecker-Delta’.

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

mit $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$.

Vektorkomponenten. Gegeben sei ein Vektor \mathbf{a} , wie bestimmt man seine Vektorkomponenten a_i ?

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \quad (1.12)$$

Multipliziere nun mit einem Vektor, der senkrecht auf \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 steht, um a_1 zu erhalten:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = a_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + a_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1) = a_1 \quad (1.13)$$

(da $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0, \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$). Allgemein gilt somit für eine Orthonormalbasis:

$$\boxed{a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{a} = \sum_i (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \quad (1.15)$$

1.2.2 Einfache Vektoralgebra

- Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} heißen gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \wedge \mathbf{e}_\mathbf{a} = \mathbf{e}_\mathbf{b} \quad (1.16)$$

Hier bezeichnen $\mathbf{e}_\mathbf{a}$ und $\mathbf{e}_\mathbf{b}$ die Einheitsvektoren in Richtung von \mathbf{a} und \mathbf{b} . In kartesischen Koordinaten sind zwei Vektoren gleich, wenn sie in allen ihren Komponenten übereinstimmen:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall i : a_i = b_i \quad (1.17)$$

Die mathematischen Symbole \wedge und \forall bedeuten ‘und’ und ‘für alle’.

- Zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} heißen parallel $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, wenn sie die gleiche Richtung haben:

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{e}_\mathbf{a} = \pm \mathbf{e}_\mathbf{b} \quad (1.18)$$

Sie werden gelegentlich unterschieden in gleichsinnig parallel $\mathbf{e}_\mathbf{a} = \mathbf{e}_\mathbf{b}$ und gegensinnig parallel $\mathbf{e}_\mathbf{a} = -\mathbf{e}_\mathbf{b}$.

- Für den Gegenvektor \mathbf{a}_{inv} des Vektors \mathbf{a} gilt:

$$\mathbf{a}_{\text{inv}} = -\mathbf{a} \Leftrightarrow |\mathbf{a}_{\text{inv}}| = |\mathbf{a}| \wedge \mathbf{e}_{\mathbf{a}_{\text{inv}}} = -\mathbf{e}_\mathbf{a} \quad (1.19)$$

Die Addition eines Vektors mit seinem Gegenvektor liefert ‘Nullvektor’ (das sogenannte ‘neutrale Element’):

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{0}| = 0 \quad (1.20)$$

- Vektoraddition:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i + \sum_i b_i \mathbf{e}_i = \sum_i (a_i + b_i) \mathbf{e}_i \quad (1.21)$$

Komponentenweise Addition:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Mithilfe der Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{a} + \mathbf{b} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 + b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3 \\ &= (a_1 + b_1) \mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2) \mathbf{e}_2 + (a_3 + b_3) \mathbf{e}_3 \\ &= c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + c_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.23)$$

Die Subtraktion von Vektoren kann als die Addition des inversen Vektors aufgefasst werden:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (-b_1) \\ a_2 + (-b_2) \\ a_3 + (-b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

- Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \left(\sum_i a_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j b_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j a_i b_j \delta_{ij} \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i \quad (1.26)$$

Beim Skalarprodukt werden die Vektoren komponentenweise miteinander multipliziert.

Anmerkung: Oft wird eine abgekürzte Schreibweise verwendet, $\sum_i \sum_j = \sum_{i,j}$ (wobei es auf die Reihenfolge, erst Summe über i und dann Summe über j oder umgekehrt, natürlich nicht ankommt).

- Betrag eines Vektors (vgl. Satz des Pythagoras):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\sum_i a_i^2} \quad (1.27)$$

$$|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 \quad (1.28)$$

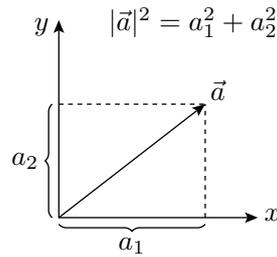


Abbildung 1.6: Betrag eines (zweidimensionalen) Vektors

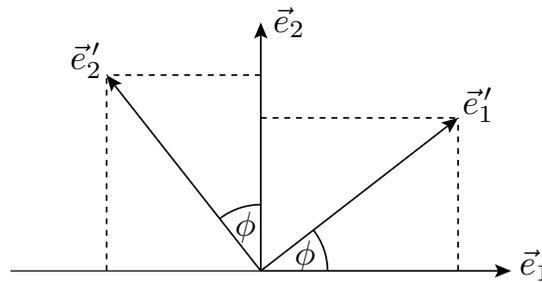


Abbildung 1.7: Drehung um die z-Achse um den Winkel ϕ

1.3 Drehung des Koordinatensystems

Zunächst betrachten wir Drehungen des Koordinatensystems um die z-Achse.

- Drehung des Koordinatensystems = passive Transformation
- Im Gegensatz dazu: Drehung des Vektors = aktive Transformation

Die Beziehungen zwischen den Einheitsvektoren des Ausgangs-Koordinatensystems (K) und den Einheitsvektoren des 'gestrichenen' Koordinatensystems (K'), das gegenüber K um den Winkel ϕ gedreht ist, siehe Abbildung 1.7, ergeben sich wie folgt:

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \cos \phi + \mathbf{e}_2 \sin \phi \quad (1.29)$$

$$\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \phi + \mathbf{e}_2 \cos \phi \quad (1.30)$$

Test: $\phi = 0 \rightarrow \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2$. Die Umkehrtransformation ergibt sich, indem man $\phi \rightarrow -\phi$ ersetzt (und $\sin(-\phi) = -\sin \phi, \cos(-\phi) = \cos \phi$ benutzt):

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 \cos \phi - \mathbf{e}'_2 \sin \phi \quad (1.31)$$

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 \sin \phi + \mathbf{e}'_2 \cos \phi \quad (1.32)$$

Außerdem (immer wieder) nützlich: $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$.

1.3.1 Passive Transformation

Der Vektor selbst bleibt unverändert, seine Komponenten ändern sich jedoch.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 = a'_1 \mathbf{e}'_1 + a'_2 \mathbf{e}'_2 \quad (1.33)$$

Multiplikation mit \mathbf{e}'_1 :

$$\Rightarrow a'_1 = a_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) + a_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) \quad (1.34)$$

Multiplikation mit \mathbf{e}'_2 :

$$\Rightarrow a'_2 = a_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2) + a_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2) \quad (1.35)$$

$$a'_1 = a_1 \cos \phi + a_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = a_1 \cos \phi + a_2 \sin \phi \quad (1.36)$$

$$a'_2 = a_1 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + a_2 \cos \phi = -a_1 \sin \phi + a_2 \cos \phi \quad (1.37)$$

Der Umgang mit solchen Gleichungen vereinfacht sich erheblich, wenn man die Matrix-Schreibweise verwendet.

1.3.2 Matrizen, Rechentchnik

Eine Matrix \mathbf{A} vom Typ (M, N) ist eine aus $M \times N$ Zahlen bestehende rechteckige Tabelle mit M Zeilen und N Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Die A_{ij} werden als Matrixelemente bezeichnet; sie können reell oder komplex sein. Matrixelement: A_{ij} , i bezeichnet die Zeile, j die Spalte.

- $M = N$: quadratische Matrix, mit N Spalten und N Zeilen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

- $M = 1$ liefert die $1 \times N$ 'Zeilenmatrix':

$$\mathbf{A} = (A_{11} \quad A_{12} \quad \cdots \quad A_{1N}) \quad (1.40)$$

- $N = 1$ liefert die $N \times 1$ ‘Spaltenmatrix’:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ \dots \\ A_{N1} \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

Matrixmultiplikation

Matrixmultiplikation einer $L \times M$ -Matrix \mathbf{A} mit einer $M \times N$ -Matrix \mathbf{B} (‘Zeile mal Spalte’):

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & \dots & A_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{i1} & \dots & \dots & A_{iM} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{L1} & \dots & \dots & A_{LM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1j} & \dots & B_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{M1} & \dots & B_{Mj} & \dots & B_{MN} \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{iM}B_{Mj} \quad (1.43)$$

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj} \quad (1.44)$$

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 14 & 20 - 14 \\ -3 + 18 & 12 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & -6 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Achtung: Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ! Zum Beispiel:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 12 & -7 + 36 \\ 10 - 6 & 14 - 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 29 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \neq \mathbf{C} \quad (1.47)$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Ein Vektor kann als eine $N \times 1$ -Matrix aufgefasst werden, damit ist auch die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor definiert. Beispiel:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

$$\Rightarrow \mathbf{Da} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cos \phi + a_2 \sin \phi \\ -a_1 \sin \phi + a_2 \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Dies ist genau der vorher hergeleitete Zusammenhang zwischen den Komponenten eines Vektors in den gegeneinander verdrehten Koordinatensystemen. Für die Drehung gilt also:

$$a'_i = \sum_j D_{ij} a_j, \quad a'_i = D_{i1} a_1 + D_{i2} a_2 \quad (i = 1, 2) \quad (1.50)$$

mit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Anmerkung zur Notation: Oft wird statt \mathbf{a} oder \vec{a} auch \underline{a} für Vektoren verwendet, und gelegentlich (zum Beispiel in der Vorlesung) $\overleftrightarrow{\mathbf{A}}$ statt \mathbf{A} für Matrizen.

Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix, bei der alle außerhalb der Hauptdiagonalen liegenden Elemente verschwinden: $A_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Eine spezielle Diagonalmatrix ist die Einheitsmatrix (mit $\mathbf{1}$ oder mit \mathbf{E} bezeichnet) mit $A_{ii} = 1$:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.52)$$

$$\mathbf{1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A} \quad (1.53)$$

Für unsere Drehmatrix gilt: $\mathbf{D}(\phi = 0) = -\mathbf{D}(\phi = \pi) = \mathbf{D}(\phi = 2\pi) = \mathbf{1}$.

Die Spur einer Matrix

Die Spur (im Englischen: 'trace') einer quadratischen $N \times N$ Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalelemente:

$$\text{Tr}\mathbf{A} = \text{Sp}\mathbf{A} = \sum_i A_{ii} = A_{11} + A_{22} + \cdots + A_{NN} \quad (1.54)$$

Inverse Matrix

Die Division durch eine Matrix ist nicht definiert, stattdessen ist die Umkehroperation zur Multiplikation mit einer Matrix \mathbf{A} die Multiplikation mit ihrem Inversen \mathbf{A}^{-1} . Die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1} ist definiert über die Relationen $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$. Zum Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -3+3 \\ 10-10 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (1.56)$$

Inverses eines Produkts

Das Inverse eines Produkts zweier Matrizen ist das umgekehrte Produkt der inversen Matrizen:

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (1.57)$$

denn $\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{ABB}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{1}$.

Für unsere Drehmatrix gilt $\mathbf{D}^{-1}(\phi) = \mathbf{D}(-\phi)$, denn

$$\begin{pmatrix} \cos(-\phi) & \sin(-\phi) \\ -\sin(-\phi) & \cos(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \phi + \sin^2 \phi & \cos \phi \sin \phi - \sin \phi \cos \phi \\ \sin \phi \cos \phi - \cos \phi \sin \phi & \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (1.59)$$

Transponierte Matrix: \mathbf{A}^T

Die Transponierte \mathbf{A}^T der Matrix \mathbf{A} erhält man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{M1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{M2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

Transponieren = Matricelemente an der Diagonalen spiegeln. Zum Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = (2 \ 1) \quad (1.62)$$

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} = A_{ji} \quad (1.63)$$

Die Transponierte des Produkts zweier Matrizen ist das umgekehrte Produkt der Transponierten, denn

$$(\mathbf{AB})_{ij}^T = (\mathbf{AB})_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki} = \sum_k A_{kj}^T B_{ik}^T = \sum_k B_{ik}^T A_{kj}^T = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T)_{ij} \quad (1.64)$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (1.65)$$

Für unsere Drehmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

gilt $\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^T$. Dieses gilt für jede Drehung (auch mit Spiegelung), denn

$$D_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j .$$

Bei der inversen Transformation sind gestrichene und ungestrichene Basisvektoren vertauscht:

$$(\mathbf{D}^{-1})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j = \mathbf{e}'_j \cdot \mathbf{e}_i = D_{ji} \quad (1.67)$$

Orthogonale Transformation

Eine quadratische Matrix \mathbf{A} heißt orthogonal, wenn das Matrixprodukt aus \mathbf{A} und ihrer Transponierten \mathbf{A}^T die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ ergibt. Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

Orthogonale Transformationen lassen das Skalarprodukt unverändert, sie sind also längen- und winkeltreu:

$$a'_i = \sum_j D_{ij} a_j, \quad b'_i = \sum_k D_{ik} b_k \quad (1.68)$$

Daraus folgt:

$$\sum_i a'_i b'_i = \sum_i \sum_j \sum_k D_{ij} D_{ik} a_j b_k = \sum_i \sum_j \sum_k D_{ji}^T D_{ik} a_j b_k \quad (1.69)$$

$$= \sum_j \sum_k \left(\sum_i D_{ji}^{-1} D_{ik} \right) a_j b_k = \sum_j \sum_k \delta_{jk} a_j b_k = \sum_j a_j b_j, \quad (1.70)$$

unter Verwendung von

$$\sum_i D_{ji}^{-1} D_{ik} = \delta_{jk} \quad (1.71)$$

Skalarprodukt als Matrixprodukt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.72)$$

Beispiel:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = (1)(-1) + (3)(2) + (5)(-4) = -15 \quad (1.73)$$

Unter Verwendung der Matrix-Multiplikationsregel kann das Skalarprodukt als Matrixprodukt des Zeilenvektors \mathbf{a} mit dem Spaltenvektor \mathbf{b} aufgefasst werden:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = (1 \ 3 \ 5) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (1.74)$$

Verallgemeinert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_i a_i b_i = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (1.75)$$

Der transponierte Vektor muss beim Skalarprodukt vorne stehen:

$$(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \text{Skalarprodukt} \quad (1.76)$$

Orthogonale Transformationen (siehe oben) lassen das Skalarprodukt unverändert. Der Beweis zur Invarianz des Skalarprodukt lässt sich nun auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{D}\mathbf{a} \ , \quad \mathbf{b}' = \mathbf{D}\mathbf{b} \quad (1.77)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}'^T \mathbf{b}' = \mathbf{a}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{wegen } \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{1}) \quad (1.78)$$

Dyadisches Produkt

Die beiden Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b}

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \ , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

können auch in umgekehrter Reihenfolge ‘multipliziert’ werden, das Ergebnis heißt ‘dyadisches Produkt’ und ist eine Matrix, siehe auch Kapitel 5:

$$\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ b_3) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} (-1 \ 2 \ -4) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & -12 \\ -5 & 10 & -20 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

Andere Notation: $\mathbf{a}\mathbf{b}^T = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$.

Drehwinkel

Wieviele Drehwinkel (= unabhängige Matrixelemente in der Drehmatrix) gibt es maximal in N Dimensionen? Für $N = 2$ wissen wir bereits, dass es genau einen Drehwinkel (ϕ , siehe oben) gibt. Für $N = 3$ gibt es eine Drehachse und einen Drehwinkel, wobei eine Drehachse durch einen Einheitsvektor (2 Parameter!) charakterisiert wird; d. h. für $N = 3$ haben wir drei Parameter. Für beliebige N kann man wie folgt argumentieren:

- Eine $N \times N$ -Matrix hat N^2 Elemente.
- Da \mathbf{D} eine orthogonale Matrix ist, gilt: $\sum_j D_{ij}D_{jk} = \delta_{ik}$, d. h. es gibt Bedingungen an die D_{ij} und nicht alle N^2 Matrixelemente sind unabhängig voneinander. Wieviele Bedingungen sind dies?
- Da die Gleichungen $\sum_j D_{ij}D_{jk} = \delta_{ik}$ symmetrisch in i und k sind, erhalten wir $N(N+1)/2$ Bedingungen (= Zahl der Matrixelemente auf der Diagonalen plus die Zahl der Matrixelemente oberhalb (oder unterhalb) der Diagonalen, d. h. $N + (N^2 - N)/2$)
- $\Rightarrow N(N-1)/2$ freie Parameter ('Drehwinkel')
- $N = 2$: ein Drehwinkel, siehe oben
- $N = 3$: drei Drehwinkel (zum Beispiel Euler-Winkel, die üblicherweise mit α, β, γ oder mit φ, θ, ψ bezeichnet werden; siehe Vorlesung 'Theoretische Physik I')

1.4 Einstein'sche Summenkonvention

Konvention: Tritt auf einer Seite einer Gleichung ein Index doppelt auf, so wird über ihn summiert.

- In diesen Fällen wird das Summenzeichen weggelassen, zum Beispiel:

$$\sum_k D_{ik}D_{jk} \rightarrow D_{ik}D_{jk}$$

- Doppelt vorkommende Indizes dürfen unbenannt werden, da es sich nur um einen Summationsindex handelt; zum Beispiel:

$$D_{ik}D_{jk} = D_{im}D_{jm}$$

- Indizes dürfen aber nicht mehr als zweimal vorkommen.
- Einzelne Indizes müssen auf beiden Seiten der Gleichung vorkommen.

Beispiel:

$$a'_i = D_{ij}a_j, \quad b'_i = D_{ij}b_j \quad (1.81)$$

$$\Rightarrow a'_i b'_i = D_{ij}a_j D_{ik}b_k = D_{ji}^T D_{ik} a_j b_k = D_{ji}^{-1} D_{ik} a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k = a_j b_j \quad (1.82)$$

Tipp: Benutzen Sie die Einstein'sche Summenkonvention erst dann, wenn Sie etwas mehr Erfahrung gewonnen haben!

1.5 Kreuzprodukt

Definition in Worten: Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt, äußeres Produkt) aus zwei Vektoren ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Ausgangsvektoren aufgespannten Ebene steht und dessen Betrag den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Parallelogramms angibt.

Beispiel: Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

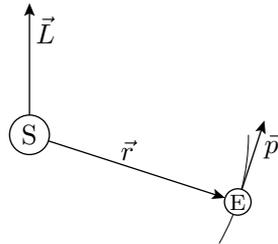


Abbildung 1.8: Illustration zum Kreuzprodukt

Definition in Formeln: Das äußere Produkt (Kreuzprodukt, Vektorprodukt) aus zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} ist ein Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mit:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0, \quad |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \phi = ab \sin \phi \quad (1.83)$$

wobei ϕ den von den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Die drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , und \mathbf{c} bilden ein Rechtssystem:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = 0 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = 0 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = 0 \end{array}$$

Ein positives Vorzeichen ergibt sich für $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = +\mathbf{e}_3$ und allen Produkten, in denen die Indizes demgegenüber zyklisch vertauscht sind. Dies lässt sich wie folgt zusammenfassen:

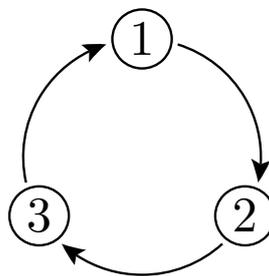


Abbildung 1.9: Zyklisches Vertauschen

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad (1.84)$$

Hier haben wir das Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} definiert:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) = (123), (231), (312) \text{ 'gerade' Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (ijk) = (132), (213), (321) \text{ 'ungerade' Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.85)$$

Die Größe ϵ wird auch als total antisymmetrischer Einheitstensor 3. Stufe bezeichnet: Zyklisches Vertauschen der Indizes ändert den Wert nicht, aber beim Vertauschen zweier Indizes ändert sich das Vorzeichen. Zum Beispiel: $\epsilon_{123} = \epsilon_{312}$; $\epsilon_{123} = -\epsilon_{132}$. Ohne auf diesen Punkt genauer einzugehen: ϵ ist ein Pseudotensor 3. Stufe (wobei sich 'pseudo', wie auch bei Vektoren, auf das Transformationsverhalten bezieht).

Wir betrachten nun nochmals das Kreuzprodukt, stellen aber die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} mithilfe ihrer Komponenten dar:

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \quad (1.86)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3 \quad (1.87)$$

Damit ergibt sich für die Komponenten von \mathbf{c} :

$$\begin{aligned} c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 &= a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned} \quad (1.88)$$

Dies kann mithilfe des ϵ -Tensors zusammengefasst werden:

$$c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1.89)$$

Zum Beispiel $i = 1 \rightarrow j, k = 2, 3$ oder $j, k = 3, 2$

$$\Rightarrow c_1 = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad (1.90)$$

Eigenschaften des Kreuzprodukts

- Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ, da die beiden Multiplikatoren zusammen mit dem Produkt ein Rechtssystem bilden – bei Vertauschung der Multiplikatoren weist das Produkt in die entgegengesetzte Richtung. Daher gilt ein Anti-Kommutativgesetz:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (1.91)$$

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{a})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} b_j a_k = - \sum_{j,k} \epsilon_{ikj} a_k b_j = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i \quad (1.92)$$

- Bilinearität oder Homogenität (Assoziativgesetz bei Multiplikation mit einem Skalar):

$$(\alpha \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (1.93)$$

- Distributivgesetz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (1.94)$$

- Betrag:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \sum_i \left(\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k \right) \left(\sum_{l,m} \epsilon_{ilm} a_l b_m \right) \quad (1.95)$$

Verwende dann (siehe Übungen):

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (1.96)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \sum_{j,k,l,m} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k a_l b_m \quad (1.97)$$

$$= \sum_{j,k} (a_j^2 b_k^2 - a_j b_j a_k b_k) \quad (1.98)$$

$$= \sum_j a_j^2 \sum_k b_k^2 - \sum_j a_j b_j \sum_k a_k b_k \quad (1.99)$$

$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (1.100)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 (1 - \cos^2 \phi) \quad (1.101)$$

$$= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \phi \quad (1.102)$$

$$\Rightarrow |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \phi \quad (1.103)$$

Anmerkung: Im letzten Schritt wird angenommen, dass ϕ zwischen 0 und π liegt.

- Kein Assoziativgesetz:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (1.104)$$

- $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht senkrecht auf \mathbf{a} und \mathbf{b} , denn

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i a_j b_k = 0 \quad (1.105)$$

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \quad (1.106)$$

Das ergibt sich aus Folgendem: ϵ_{ijk} ist antisymmetrisch in i und j , $a_i a_j$ dagegen symmetrisch, d. h. es gibt immer den Partner mit vertauschten Indizes $i \leftrightarrow j$, der das umgekehrte Vorzeichen besitzt; somit ergibt sich aufaddiert null. Explizit:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = - \sum_{i,j,k} \epsilon_{jik} a_i a_j b_k = - \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} a_i a_j b_k \quad (1.107)$$

Im letzten Schritt wurden i und j umbenannt, $i \leftrightarrow j$. Somit ist diese Summe gleich ihrem Negativen, und damit ist sie null.

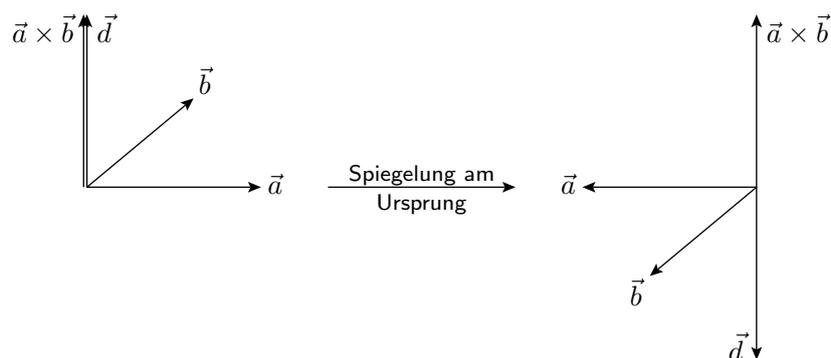


Abbildung 1.10: Polare versus axiale Vektoren

- Wie schon oben erwähnt, gibt ein *polarer* Vektor (\mathbf{d} , siehe Abbildung 1.10) eine Richtung an, zum Beispiel der Ortsvektor \mathbf{r} und die Geschwindigkeit \mathbf{v} . Im Gegensatz dazu ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ein *axialer* Vektor oder Pseudotensor 1. Stufe, der eine Drehrichtung angibt, wie zum Beispiel der Drehimpuls, $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

1.6 Anwendungen

1.6.1 Mehrfachprodukte

- Doppeltes Vektorprodukt (bac-cab-Regel):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (1.108)$$

- Vektorprodukt aus zwei Vektorprodukten:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{c}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) \quad (1.109)$$

$$= \mathbf{b}((\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}((\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{b}) \quad (1.110)$$

- Skalarprodukt aus zwei Vektorprodukten (Lagrange'sche Identität):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (1.111)$$

- Quadrat eines Vektorproduktes

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \quad (1.112)$$

1.6.2 Drehvektor

Die momentane Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Körpers ist definiert als die Änderung seines Ortes, $\Delta\mathbf{r}$, mit der Zeit Δt : Die so definierte Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \Delta\mathbf{r}/\Delta t$ (im Grenzfall $\Delta t \rightarrow 0$) liegt tangential an

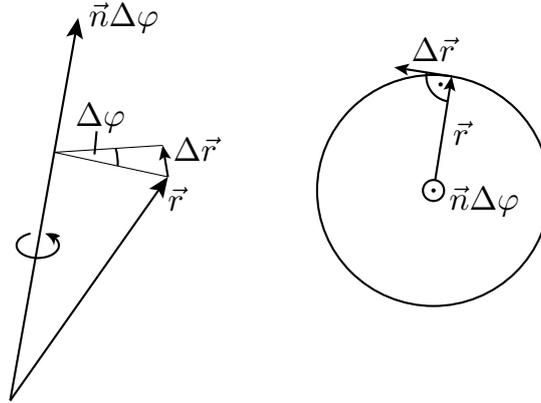


Abbildung 1.11: Kreisbahn

der Bahn des Körpers (siehe auch Kap. 2). Wir betrachten speziell eine Kreisbahn, siehe Abbildung 1.11, wobei die Drehachse durch den Einheitsvektor \mathbf{n} gegeben ist:

$$\Delta\mathbf{r} = \Delta\varphi \mathbf{n} \times \mathbf{r} \quad (1.113)$$

Nach Division durch das Zeitintervall Δt :

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \omega \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (1.114)$$

mit $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ (= Winkelgeschwindigkeit) und $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$.

Wir bezeichnen die Komponenten von $\boldsymbol{\omega}$ wie üblich mit ω_1 , ω_2 und ω_3 ; damit erhalten wir für die Komponenten der Geschwindigkeit:

$$v_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \omega_j r_k = \sum_k \Omega_{ik} r_k \leftrightarrow \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r} \quad (1.115)$$

wobei wir $\Omega_{ik} = \sum_j \epsilon_{ijk} \omega_j$ eingeführt haben. $\boldsymbol{\Omega}$ ist ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, explizit gegeben durch

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.116)$$

Aus der Antisymmetrie-Eigenschaft, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, folgt sofort, dass die Diagonalelemente Ω_{ii} gleich null sind.

1.7 Zusammenfassung

Tensoren erlauben eine vom Bezugssystem unabhängige Formulierung.

- Tensor 0. Stufe = Skalar
- Tensor 1. Stufe = Vektor
 - polarer Vektor – Richtung; axialer Vektor – Pseudotensor, Drehsinn
- Skalarprodukt zweier Vektoren = Skalar (Längen- und Winkelmessung)
- Kreuzprodukt zweier Vektoren = axialer Vektor
- Dyadisches Produkt zweier Vektoren: Tensor 2. Stufe

Matrizen. Zu einer gegebenen Matrix \mathbf{A} gehören:

- die inverse Matrix \mathbf{A}^{-1}

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad (1.117)$$

- die transponierte Matrix \mathbf{A}^T

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \quad (1.118)$$

- Eine orthogonale Matrix ist definiert durch:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (1.119)$$

Eine orthogonale Matrix beschreibt eine längen- und winkeltreue Transformation.

Einheitstensor 2. Stufe (Kronecker-Symbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad ; \quad \sum_j \delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \quad (1.120)$$

Total antisymmetrischer Einheitstensor 3. Stufe (ϵ -Tensor)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (ijk) = (123), (231), (312) \\ -1 & \text{falls } (ijk) = (132), (213), (321) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.121)$$

$$\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6; \quad \sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}; \quad \sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl} \quad (1.122)$$

Kreuzprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \leftrightarrow c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk}a_jb_k \quad (1.123)$$

Kapitel 2

Differential- und Integralrechnung

2.1 Wozu Differentiation und Integration?

Zeitliche Dynamik: Die Momentangeschwindigkeit \mathbf{v} ist definiert als die Änderung des Ortes $\mathbf{r}(t)$ mit der Zeit t : $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$. Entsprechend ist die Beschleunigung $\mathbf{a}(t)$ die Veränderung der Geschwindigkeit mit der Zeit oder $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ort} & \mathbf{r}(t) \\ \text{Differentiation} \left\downarrow & & \uparrow \text{Integration} \\ & \text{Geschw.} & \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \\ & & \uparrow \\ & \text{Beschl.} & \mathbf{a}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) \end{array} \quad (2.1)$$

Räumliche Variation: In der Mechanik wird oft ein Potential (= potentielle Energie) betrachtet, das nur von der Ortsvariablen, d. h. der Ortskoordinate des Teilchens, abhängt. Durch Ableiten des Potentials ergibt sich daraus die Kraft, die auf das Teilchen wirkt. In einer Dimension:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}U(x) \quad (2.2)$$

In drei Dimensionen:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\text{grad}U(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

Hier bezeichnet $\text{grad}U(\mathbf{r})$ (andere Notation: $\nabla U(\mathbf{r})$) den Vektor, der sich durch partielles Ableiten von $U(\mathbf{r})$ nach x , y und z ergibt (siehe unten).

Wenn die Kraft am Ort \mathbf{r} vorgegeben ist, erhält man die am System verrichtete Arbeit durch Summation bzw. Integration von "Kraft \times Weg" entsprechend der folgenden Formel:

$$W = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.4)$$

Bei mehrdimensionalen Integralen wird über eine bestimmte Fläche oder ein Volumen integriert. Zum Beispiel ergibt sich die Gesamtmasse eines Körpers durch räumliche Integration seiner Massendichte (= Masse pro Volumen). Oder, siehe Abbildung 2.1: Die Gesamtkraft, die auf einen Körper 'M' (Mond) wirkt, erhält man durch Integration der Einzelkräfte des Körpers 'E' (Erde).

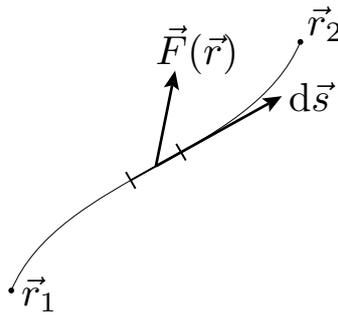


Abbildung 2.1: $dW = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$. Das Vorzeichen ist Konvention, im Hinblick auf Anwendungen in der Physik.

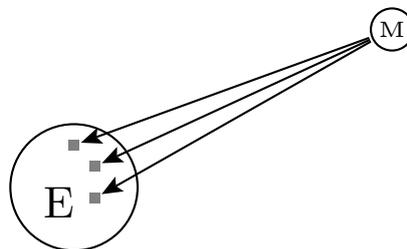


Abbildung 2.2: Illustration zum Volumenintegral ('M' = Mond, 'E' = Erde)

2.2 Grundlegende Techniken

2.2.1 Differentiation

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist wie folgt definiert:

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

Beispiel: $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \\ \frac{df}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x \end{aligned}$$

Eigenschaften

- Linearität:

$$\frac{d}{dx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{dg}{dx} \quad (2.6)$$

Ein typisches Anwendungsbeispiel aus der Physik ist das zweite Newton'sche Axiom im Falle einer konstanten Masse m :

$$F(x) = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = m\dot{v} = ma ; a = \ddot{x} \quad (2.7)$$

- Produktregel:

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x) + f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right) \quad (2.8)$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}(x \sin x) = \sin x + x \cos x \quad (2.9)$$

Anmerkung: Dabei wird $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ benutzt.

- Kettenregel:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx} \quad (2.10)$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} = e^{-x^2}(-2x) \quad (2.11)$$

Im Detail: $f(g) = e^g$, $g(x) = -x^2$, $f(g(x)) = e^{-x^2}$; außerdem: $(e^g)' = e^g$

- Aus Produktregel und Kettenregel ergibt sich die Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} \left(f(x) \frac{1}{g(x)} \right) \quad (2.12)$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{1}{g^2(x)} \frac{dg(x)}{dx} \quad (2.13)$$

$$= \frac{\frac{df(x)}{dx} g(x) - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)} \quad (2.14)$$

Beispiel:

$$\frac{d}{dx} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{-x^2 \sin x - 2x \cos x}{x^4} \quad (2.15)$$

$$= -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{2}{x^3} \cos x \quad (2.16)$$

Dabei wird $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ verwendet.

- Ableitung der Umkehrfunktion. Die Umkehrfunktion einer Funktion $y = f(x)$ ergibt sich durch Vertauschen von x und y , d. h. $x = f(y) \leftrightarrow y = f^{-1}(x)$. Für die Differentiale folgt aus $\frac{dy}{dx} \frac{dx}{dy} = 1$ sofort $\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}$. Zum Beispiel ergibt sich für den natürlichen Logarithmus (\ln , = Umkehrfunktion der Exponentialfunktion):

$$y(x) = e^x \rightarrow \frac{dy}{dx} = y \rightarrow \frac{d \ln y}{dy} = y^{-1} \leftrightarrow y = \ln x \rightarrow \frac{d \ln x}{dx} = x^{-1} \quad (2.17)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	a	0
e^x	e^x	e^{-ax}	$-ae^{-ax}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	a^x	$(\ln a)a^x$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$

Tabelle 2.1: Wichtige Ableitungen (a bezeichnet eine Konstante)

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + c$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ ($n \neq -1$)
e^x	$e^x + c$	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	a^x	$\frac{1}{\ln a}a^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$	$\cos x$	$\sin x + c$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	$\cosh x$	$\sinh x + c$

Tabelle 2.2: Wichtige Integrale; $F(x)$ bezeichnet die Stammfunktion von $f(x)$

Ein einfaches physikalisches Beispiel: Gesucht ist die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des Körpers, gegeben sind der Startort \mathbf{r}_0 , die Anfangsgeschwindigkeit \mathbf{v}_0 und die (konstante) Beschleunigung \mathbf{a}_0 . Ausgehend von

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_0t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \quad (2.18)$$

ergibt sich die Geschwindigkeit (einmal nach der Zeit ableiten) zu

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}_0t + \mathbf{v}_0 \quad (2.19)$$

Nochmalige Ableitung nach der Zeit ergibt die Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{a}_0, \quad (2.20)$$

konsistent mit den Anfangsannahmen.

2.2.2 Stammfunktion

Stammfunktion einer Funktion $f(x)$ ist die Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$. Für das Auffinden der Stammfunktion, d. h. die Integration, schreibt man ein unbestimmtes Integral:

$$\int dx f(x) = F(x) + C \quad (2.21)$$

C ist eine Integrationskonstante. Ihre Existenz besagt, dass die Integration kein eindeutiger Vorgang ist, sondern dass die Stammfunktion nur bis auf diese Integrationskonstante bestimmt werden kann.

Eigenschaften

- Linearität:

$$\int dx(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha F(x) + \beta G(x) \quad (2.22)$$

mit $G'(x) = g(x)$

Beispiel: Körper mit der Geschwindigkeit $v = at$, mit $a = 4 \text{ m/s}^2$. Der Weg x ist dann gegeben als

$$x = \int v dt = \int at dt = \frac{1}{2}at^2 + C = 2t^2 + C \quad (2.23)$$

wobei die Einheit von x Meter (m) und die von t Sekunde (s) ist. Eine Anfangsbedingung besagt, dass sich der Körper zur Zeit $t = 0$ bei (zum Beispiel) $x(0) = 4 \text{ m}$ befand.

$$x(0) = 2 \cdot 0^2 + C = 4 \text{ m} \rightarrow C = 4 \text{ m} \quad (2.24)$$

2.2.3 Bestimmtes Integral

Bei der Integration unterscheidet man zwischen dem unbestimmten (siehe oben) und dem bestimmten Integral. Letzteres wird in einem Intervall $[a, b]$ ausgewertet:

$$\int_a^b dx f(x) = F(x)|_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a) \quad (2.25)$$

Eigenschaften

- Vertauschen der Integrationsgrenzen \rightarrow Vorzeichenwechsel:

$$\int_a^b dx f(x) = - \int_b^a dx f(x) \quad (2.26)$$

- Fallen die Integrationsgrenzen zusammen, $a = b$, so verschwindet das Integral:

$$\int_a^a dx f(x) = F(x)|_a^a = F(a) - F(a) = 0 \quad (2.27)$$

- Teilintervalle:

$$\int_a^b dx f(x) + \int_b^c dx f(x) = \int_a^c dx f(x) \quad (2.28)$$

- Ein bestimmtes Integral nennt man ‘uneigentlich’, wenn eine oder beide Integrationsgrenzen im Unendlichen ($\pm\infty$) liegen.

- Aus der Produktregel der Differentiation ergibt sich die Regel für die partielle Integration:

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} g(x) + \int_a^b dx f(x) \frac{dg(x)}{dx} = f(x)g(x)|_a^b \quad (2.29)$$

$$\int_a^b dx f(x) \frac{dg(x)}{dx} = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b dx \frac{df(x)}{dx} g(x) \quad (2.30)$$

Beispiel: $\int_0^\pi dx x \sin x$: $f(x) = x$, $g(x) = -\cos x$

$$\frac{df}{dx} = 1; \quad \frac{dg}{dx} = \sin x \quad (2.31)$$

$$\int_0^\pi dx x \sin x = -x \cos x|_0^\pi + \int_0^\pi dx \cos x = \pi + \sin x|_0^\pi = \pi \quad (2.32)$$

- Aus der Kettenregel ergibt sich die Regel für die Integration durch Substitution:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} g(y(x)) = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dx \frac{dy}{dx} \frac{dg}{dy} = g(y(x_2)) - g(y(x_1)) = g(y_2) - g(y_1) = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dy \frac{dg}{dy} \quad (2.33)$$

mit $y_2 = y(x_2)$, $y_1 = y(x_1)$.

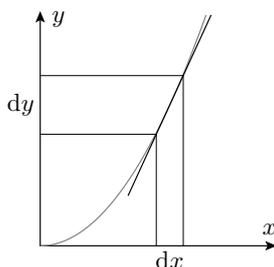


Abbildung 2.3: Illustration zur Substitution

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dy \frac{dx(y)}{dy} f(x(y)) \quad (2.34)$$

- Beispiel 1:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x_1| < 1, |x_2| < 1 \quad (2.35)$$

Substitutionsmethode: Ziel ist es, die zu integrierende Funktion $f(x)$ durch Einführung einer neuen Variablen zu vereinfachen.

$$x = \sin y, \quad \frac{dx}{dy} = \cos y \quad (2.36)$$

$$I = \int_{\arcsin x_1}^{\arcsin x_2} dy \cos y \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \arcsin x_2 - \arcsin x_1 \quad (2.37)$$

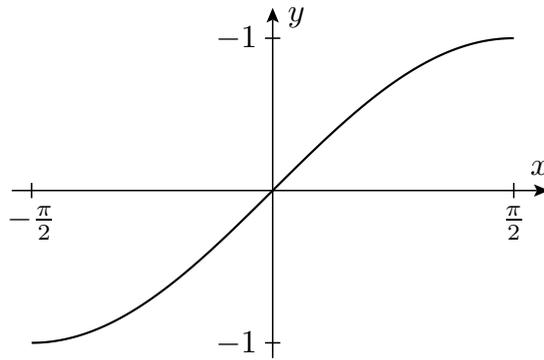


Abbildung 2.4: Sinusfunktion

- Beispiel 2:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2} \quad (2.38)$$

$$x = ay, \quad \frac{dx}{dy} = a > 0 \quad (2.39)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} a dy \frac{1}{a^2(y^2 + 1)} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{1}{y^2 + 1} \quad (2.40)$$

Auch wenn das Integral nicht auswertbar wäre, würden wir immerhin die Abhängigkeit von a kennen.

$$y = \tan u, \quad \frac{dy}{du} = \frac{d \sin u}{du \cos u} = \frac{1}{\cos^2 u} \quad (2.41)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \frac{1}{\cos^2 u} \frac{1}{\tan^2 u + 1} = \frac{\pi}{a} \quad (2.42)$$

Weitere nützliche Tricks:

- Partialbruchzerlegung

$$I = \int dx \frac{1}{x^2 + 7x + 10} \quad (2.43)$$

Nullstellen des Nenners: $x_1 = -2, x_2 = -5$

$$\rightarrow \frac{1}{x^2 + 7x + 10} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 5} = \frac{(A + B)x + 5A + 2B}{x^2 + 7x + 10} \quad (2.44)$$

Daraus folgt $A = -B = \frac{1}{3}$ und im letzten Schritt:

$$I = \frac{1}{3} \int dx \left(\frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 5} \right) = \frac{1}{3} \ln |x + 2| - \frac{1}{3} \ln |x + 5| \quad (2.45)$$

- Ausnutzung von Symmetrien

$$I = \int_{-a}^a dx f(x) \quad (2.46)$$

$$f(x) = g(x) + u(x) \quad (2.47)$$

mit

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) = g(-x) \quad (\text{gerader Anteil}) \quad (2.48)$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) = -u(-x) \quad (\text{ungerader Anteil}) \quad (2.49)$$

$$\rightarrow I = \int_{-a}^a dx s(x) = 2 \int_0^a dx s(x) \quad (2.50)$$

Beispiele:

$$\int_{-a}^a dx x \cos(\alpha x) = 0 \quad (\text{ohne weitere Rechnung}) \quad (2.51)$$

$$\int_{-a}^a dx x \sin(\alpha x) = 2 \int_0^a dx x \sin(\alpha x) = \dots \quad (\text{dann partielle Integration}) \quad (2.52)$$

- Ableitung nach einer Integrationsgrenze

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} dx f(x) = \frac{d}{d\alpha} (F(\alpha) - F(\alpha_0)) = f(\alpha) \quad (2.53)$$

- Leibniz'sche Regel

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b dx f(x, \alpha) = \int_a^b dx \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \quad (2.54)$$

Hier bezeichnet $\partial/\partial\alpha$ die partielle Ableitung nach α , wobei x als konstant betrachtet wird. Allgemeiner gilt:

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} dx f(x, \alpha) = \left[\int_{g(\alpha)}^{h(\alpha)} dx \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) \right] + f(h(\alpha), \alpha) \frac{dh}{d\alpha} - f(g(\alpha), \alpha) \frac{dg}{d\alpha} \quad (2.55)$$

Manchmal kann es sinnvoll sein, einen Parameter von Hand einzuführen.

Beispiel:

$$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} \quad (2.56)$$

Betrachte zunächst folgendes Integral:

$$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-ax} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} \quad (2.57)$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left(-\frac{1}{a} e^{-ax} \right) \Big|_0^{\infty} \quad (2.58)$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (2.59)$$

Danach wird $a = 1$ gesetzt:

$$\int_0^{\infty} dx x^n e^{-x} = n! \quad (2.60)$$

2.3 Taylorreihe

In vielen Fällen genügt es, eine Funktion $f(x)$ um einen Punkt x_0 durch ein Polynom nicht zu hoher Ordnung anzunähern. Wenn wir das Verfahren bis zu unendlicher Ordnung fortführen, erhalten wir die Taylorreihe. Wir beginnen mit zwei Beispielen.

- Verhalten eines Pendels in der Nähe seiner Ruhelage. Die potentielle Energie des Pendels (Massepunkt im Schwerfeld) ist gegeben durch

$$V(\phi) = mgl(1 - \cos \phi) \quad (2.61)$$

Für $\phi \ll 1$:

$$\cos \phi = 1 - \frac{\phi^2}{2} + \dots, \quad V(\phi) = \frac{mgl}{2}\phi^2 + \dots \quad (2.62)$$

Dies nennt man ‘harmonische Näherung’ (um das Potentialminimum bei $\phi = 0$).

- Energie eines freien relativistischen Teilchens mit Geschwindigkeit v

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.63)$$

Hier ist c die Lichtgeschwindigkeit. Im Grenzfall $v \ll c$ ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (2.64)$$

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{m}{2}v^2 \quad (2.65)$$

Allgemein setzen wir die Funktion $f(x)$ als unendliche Potenzreihe um den Punkt x_0 an und fordern, dass $f(x)$ und die Potenzreihe in allen Ableitungen (am Punkt x_0) übereinstimmen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \rightarrow f(x_0) = a_0 \quad (2.66)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \rightarrow f'(x_0) = a_1 \quad (2.67)$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \rightarrow f''(x_0) = 2a_2 \quad (2.68)$$

$$f^{(N)}(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n!}{(n-N)!} a_n (x - x_0)^{n-N} \rightarrow f^{(N)}(x_0) = N! a_N \quad (2.69)$$

Somit finden wir Taylorentwicklung oder Taylorreihe der Funktion $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \quad (2.70)$$

Beispiel: $f(x) = (1 - x)^\alpha$; Entwicklung um $x_0 = 0$

$$f(0) = 1 \quad (2.71)$$

$$f'(x) = -\alpha(1 - x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = -\alpha \quad (2.72)$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 - x)^{\alpha-2}, \quad f''(0) = \alpha(\alpha - 1) \quad (2.73)$$

$$f'''(x) = -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(1 - x)^{\alpha-3}, \quad f'''(0) = -\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \quad (2.74)$$

$$\rightarrow (1 - x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2 - \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{6} x^3 + \dots \quad (2.75)$$

Spezialfälle:

$$\alpha = 2: \quad (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 \quad (\text{exakt})$$

$$\alpha = \frac{1}{2}: \quad \sqrt{1 - x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \dots, \quad |x| \leq 1$$

$$\alpha = -1: \quad \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1 \quad (\text{geometrische Reihe})$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

Eine Taylorreihe konvergiert im Allgemeinen nicht für alle x . Die Taylorentwicklung einer Funktion um einen Punkt, an dem diese nicht definiert ist, ist nicht möglich. Als Beispiel sei die Funktion $f(x) = 1/x$ an der Stelle $x = 0$ betrachtet. Die Ableitungen von x^{-1} ergeben stets Funktionen der Form x^{-n} , d. h. diese sind bei $x = 0$ ebenfalls nicht definiert.

Anwendungen

- Beispiel: Klassischer Limes der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad p \ll mc$$

Erster Schritt:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2} \quad (2.76)$$

Entwicklung um $p = 0$:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots, \quad x = \left(\frac{p}{mc}\right)^2 \quad (2.77)$$

$$\rightarrow E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{p}{mc}\right)^4 + \dots\right) = mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2} + \dots \quad (2.78)$$

Hier bezeichnet mc^2 die relativistische Ruheenergie, $\frac{p^2}{2m}$ die klassische kinetische Energie und $-\frac{1}{8} \frac{p^4}{m^3 c^2}$ die erste relativistische Korrektur. Letztere verschwindet, wenn wir den Grenzfall $c \rightarrow \infty$ betrachten.

- Beispiel: Entwicklung der Sinusfunktion

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (2.79)$$

Diese Reihe zeigt, warum man den Sinus für kleine Argumente durch das Argument ersetzen kann.

- Weiteres Beispiel: $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ um $x = 0$ bis zur 4. Ordnung

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} \sin^4 x + \dots \text{(irrelevante Terme)} \\ \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)^2 - \frac{1}{8} (x - \dots)^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \dots \right) - \frac{1}{8} (x^4 - \dots) + \dots \\ \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} &= 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \dots \end{aligned} \quad (2.80)$$

Die Punkte ‘...’ bezeichnen jeweils die Terme, die in der betrachteten Ordnung weggelassen werden können. Das Resultat in der letzten Zeile lässt sich natürlich auch mithilfe der Taylorreihe des Cosinus direkt gewinnen. Das Ableiten der Reihenentwicklung von $\sin x$ ergibt $\cos x$, umgekehrt findet man durch Ableiten der Cosinus-Reihe gerade das Negative der Sinus-Reihe.

- Beispiel: Exponentialfunktion:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (2.81)$$

Die Ableitung liefert:

$$\frac{d}{dx} e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \quad (2.82)$$

Anwendung

- Grenzfall von Quotienten, zum Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (2.83)$$

Direktes Einsetzen von $x = 0$ liefert $0/0$!? Unter Verwendung der Reihe der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad (2.84)$$

ergibt sich jedoch:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2} + \dots\right) = 1 \quad (2.85)$$

- Regel von l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots}{g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \dots} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (2.86)$$

falls $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $f'(x_0) \neq 0$, $g'(x_0) \neq 0$. Falls auch die beiden ersten Ableitungen im Punkt x_0 verschwinden, erhält man das Verhältnis der zweiten Ableitungen, etc.

2.4 Differentiation von Vektoren

Eine Vektorfunktion ist ein Vektor, dessen Komponenten von einem Parameter abhängen. Wichtiges Beispiel in der Mechanik: $\mathbf{r}(t)$, der Ortsvektor als Funktion der Zeit. Konkretes Beispiel: Kreisbahn

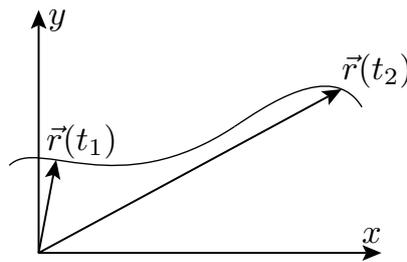


Abbildung 2.5: Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$: Ortsvektor als Funktion der Zeit t

- $\mathbf{r}(t) = \mathbf{e}_x r \cos \omega t + \mathbf{e}_y r \sin \omega t$ – Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω
- $\mathbf{r}(\phi) = \mathbf{e}_x r \cos \phi + \mathbf{e}_y r \sin \phi$ – Parametrisierung ohne Bezug zur Dynamik
- Parametrisierung mit Hilfe der Bogenlänge $s = r\phi$ (bzw. $ds = |\mathbf{dr}|$, siehe unten). Damit:

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{e}_x r \cos \frac{s}{r} + \mathbf{e}_y r \sin \frac{s}{r}$$

Ableitung von Vektorfunktionen

Die Ableitung einer Vektorfunktion ist komponentenweise definiert:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (2.87)$$

Explizit:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{r_x(t+\Delta t) - r_x(t)}{\Delta t} \\ \frac{r_y(t+\Delta t) - r_y(t)}{\Delta t} \\ \frac{r_z(t+\Delta t) - r_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r_x(t+\Delta t) - r_x(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r_y(t+\Delta t) - r_y(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r_z(t+\Delta t) - r_z(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

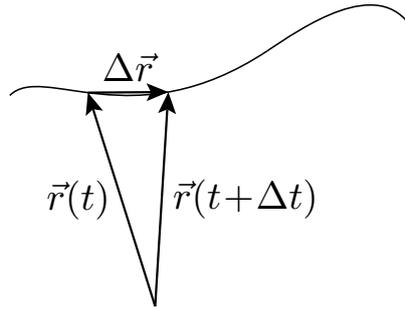


Abbildung 2.6: Differentiation einer Vektorfunktion

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Komponentenweises Ableiten des Ortes liefert die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \frac{dr_x}{dt} \\ \frac{dr_y}{dt} \\ \frac{dr_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

Die Ableitung ist offensichtlich tangential zur Bahnkurve gerichtet.

Rechenregeln in Analogie zu den üblichen Ableitungsregeln

- Produktregel für das Skalarprodukt:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (2.90)$$

- Produktregel für das Kreuzprodukt:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (2.91)$$

Hier ist die Reihenfolge wegen der Nichtkommutativität des Kreuzprodukts wichtig!

- Produktregel für Produkt mit einer skalaren Funktion:

$$\frac{d}{dt}(f(t)\mathbf{a}(t)) = \frac{df}{dt}\mathbf{a} + f\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (2.92)$$

- Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{a}(f(t)) = \frac{d\mathbf{a}(f)}{df} \frac{df}{dt} \quad (2.93)$$

Anwendung: Kreisbahn

Wir gehen aus von $\mathbf{r}^2(t) = \text{const}$:

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{r}^2 = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad (2.94)$$

D. h. die Geschwindigkeit steht senkrecht auf dem Ortsvektor. Die Beschleunigung zeigt in Richtung auf den Bahnmittelpunkt: Durch nochmaliges Ableiten ergibt sich:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}^2}{dt^2} = 2 \frac{d}{dt} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2 \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 + \mathbf{r} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \right] = 0 \quad (2.95)$$

Mit

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = v^2, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a} \quad (2.96)$$

folgt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_r = -\frac{v^2}{r} \quad (2.97)$$

Bogenlänge s

Bei der Parametrisierung haben wir die Ableitung $\dot{\mathbf{r}}$ des Ortsvektors \mathbf{r} verwendet. Diese Größe weist tangential entlang der Kurve; mit der Zeit t als Parameter entspricht sie der Geschwindigkeit \mathbf{v} und diese ist tangential gerichtet.

Im Folgenden verwenden wir den allgemeinen Parameter λ anstelle der Zeit. Für die Bogenlänge

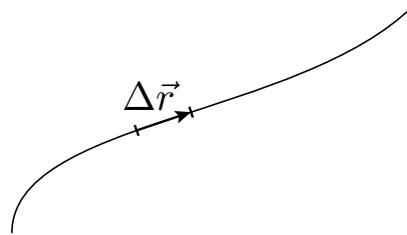


Abbildung 2.7: $|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s$

des Segments (siehe Abbildung 2.7) gilt: $|\Delta \mathbf{r}| \approx \Delta s$ bzw. $|d\mathbf{r}| = ds$ im Grenzfall $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0$. Mit Hilfe von $d\mathbf{r}/d\lambda$ kann jedem Punkt der Kurve ein Tangenteneinheitsvektor \mathbf{t} zugeordnet werden:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} / \left| \frac{ds}{d\lambda} \right| = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad |\mathbf{t}| = 1$$

Der Tangenteneinheitsvektor gibt die Änderung des Vektors bei einer Änderung der Bogenlänge an. Der Tangenteneinheitsvektor ändert entlang der Bahn seine Richtung – aber natürlich nicht seine Länge. Um für eine gegebenen Bahnkurve die Bogenlänge zu berechnen, gehen wir wie folgt vor:

$$\left| \frac{ds}{d\lambda} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}} = \sqrt{\sum_i \frac{dx_i}{d\lambda} \frac{dx_i}{d\lambda}} \quad (2.98)$$

Zur Vereinfachung schreiben wir wieder: $\frac{dx_i}{d\lambda} = \dot{x}_i$. Durch Integration finden wir somit:

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} d\lambda' \sqrt{\sum_i \dot{x}_i(\lambda') \dot{x}_i(\lambda')} \quad (2.99)$$

Die Änderung des Tangenteneinheitsvektor ist offensichtlich ein Maß für die Krümmung der Bahnkurve.

$$\text{Krümmung: } \kappa = \left| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \right| = \sqrt{\sum_i \frac{d^2x_i}{ds^2} \frac{d^2x_i}{ds^2}} \quad (2.100)$$

Die Größe $\rho = 1/\kappa$ nennt man Krümmungsradius.

Hauptnormale, Binormale

In welche Richtung zeigt $d\mathbf{t}/ds$? Wegen $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ gilt wiederum, dass $d\mathbf{t}/ds$ senkrecht auf \mathbf{t} steht:

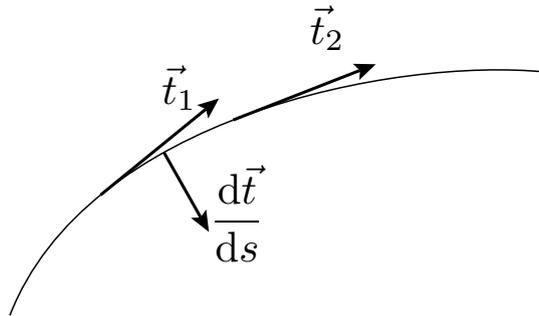


Abbildung 2.8: Änderung von \mathbf{t} entlang der Kurve

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \quad \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 0 \rightarrow \mathbf{t} \perp \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.101)$$

Der entsprechende Einheitsvektor, \mathbf{n} , wird als Hauptnormale bezeichnet:

$$\text{Hauptnormale: } \mathbf{n} = \rho \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|} \frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (2.102)$$

Schließlich definieren wir noch den Binormaleneinheitsvektor:

$$\text{Binormale: } \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}, \quad |\mathbf{b}| = 1 \quad (2.103)$$

Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormaleneinheitsvektor bilden eine Orthonormalbasis. Mit Hilfe der beiden Vektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} lässt sich somit das ‘begleitende Dreibein’ definieren, ein System aus drei orthonormalen Vektoren, die sich mit dem Körper entlang der Bahnkurve bewegen:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \rho \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (2.104)$$

Diese drei Vektoren bilden zudem ein Rechtssystem. Die beiden Normaleneinheitsvektoren spannen die Ebene senkrecht zur Bahnkurve auf.

Schraubung

Die Änderung des Binormaleneinheitsvektors entlang der Bahnkurve ist ein Maß für die Schraubung:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \left(\frac{d}{ds} \right) \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds} \quad (2.105)$$

Wegen $(d\mathbf{t}/ds) \times \mathbf{n} = 0$ steht somit $d\mathbf{b}/ds$ senkrecht auf \mathbf{t} und sowieso auf \mathbf{b} , d. h. zeigt in Richtung von \mathbf{n} :

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (2.106)$$

Die Größe τ , nennt man Torsion; $1/\tau$ heißt Windungsradius. Je größer die Torsion, desto schneller ändert der Binormaleneinheitsvektor $\mathbf{b}(s)$ in Abhängigkeit von s seine Richtung. Ist die Torsion überall gleich null, so handelt es sich bei der Bahnkurve um eine ebene Kurve, d. h. es gibt eine gemeinsame Ebene, in der alle Punkte der Kurve liegen.

Beispiel: Kreisbahn in einer Ebene

Wir betrachten nochmals eine Kreisbahn (in der x-y-Ebene) und bestimmen die gerade eingeführten Größen.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Die Ableitung dieser Funktion liefert:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = -r \sin \varphi \mathbf{e}_x + r \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.108)$$

Damit ist der Tangenteneinheitsvektor gegeben durch:

$$\mathbf{t} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.109)$$

Aus

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\varphi^2} = -r \cos \varphi \mathbf{e}_x - r \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.110)$$

finden wir direkt für die Hauptnormale:

$$\mathbf{n} = -\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.111)$$

Der Binormaleneinheitsvektor \mathbf{b} ist offensichtlich konstant (d. h. die Torsion ist gleich null) und zeigt in z-Richtung. Offensichtlich ist $\kappa = 1/r$ bzw. $\rho = r$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| = r(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2.112)$$

da $|d\mathbf{r}/d\varphi| = r$.

Die Einheitsvektoren \mathbf{t} und \mathbf{n} entsprechen den Basisvektoren in Polarkoordinaten. Diese sind wie folgt definiert. Ausgehend von

$$\mathbf{r} = r \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.113)$$

ist der Basisvektor in Radialrichtung gegeben durch die Änderung von \mathbf{r} als Funktion von r bei festem φ (und ggf. anschließender Normierung):

$$\frac{d\mathbf{r}}{dr} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_r \quad (2.114)$$

Entsprechend ist der Basisvektor \mathbf{e}_φ bestimmt durch die Änderung von \mathbf{r} als Funktion von φ bei festen r :

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} = -r \sin \varphi \mathbf{e}_x + r \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.115)$$

$$\rightarrow \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \quad (2.116)$$

Die Basisvektoren hängen vom Winkel ab, sind also nur lokal gültig.

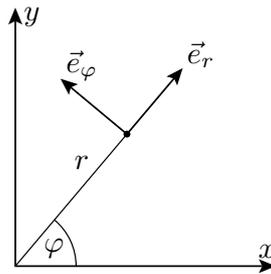


Abbildung 2.9: Kartesische Koordinaten versus Polarkoordinaten

2.5 Transformation der Basisvektoren

Bisher haben sich nur die Vektorkomponenten als Funktion eines Parameter geändert. Was passiert, wenn sich auch die Basisvektoren ändern? Dies wollen wir für den zweidimensionalen Fall genauer diskutieren, und wir beziehen uns explizit auf die Zeit, da wir Anwendungen wie ‘Labor auf der Erdoberfläche’ im Auge haben. In so einem rotierenden Bezugssystem treten sogenannte Scheinkräfte wie zum Beispiel die Coriolis-Kraft auf. Wie schon im ersten Kapitel nennen wir das (Ausgangs-)Ruhesystem K und das demgegenüber rotierende Koordinatensystem K' .

Beispiel: Rotierendes Bezugssystem

Wir betrachten ein Teilchen, das sich im System K in der x-y-Ebene bewegt. Damit können wir schreiben:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y = r(t) \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)} = r(t) \mathbf{e}_r(t) \quad (2.117)$$

wobei \mathbf{e}_x und \mathbf{e}_y die (zeitunabhängigen) Basisvektoren in K bezeichnen. Mit

$$\mathbf{e}_r = \cos \varphi(t) \mathbf{e}_x + \sin \varphi(t) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi(t) \mathbf{e}_x + \cos \varphi(t) \mathbf{e}_y \quad (2.118)$$

ergibt sich $\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$ (sowie $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r$):

$$\rightarrow \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.119)$$

Die beiden Beiträge zur Geschwindigkeit, $\dot{r} \mathbf{e}_r$ und $r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$, können wir als Radial- und Winkelgeschwindigkeit des Teilchens interpretieren. Für die zweite Ableitung folgt analog:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + 2\dot{r} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r \end{aligned} \quad (2.120)$$

Nun ist aber die Beschleunigung \mathbf{a} gleich \mathbf{F}/m entsprechend dem Newton'schen Gesetz. Außerdem setzen wir noch $\dot{\varphi} = \omega$, $\ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ und multiplizieren mit der Masse m . Damit erhalten wir nach einer letzten kleinen Umformung:

$$m \ddot{r} \mathbf{e}_r = \mathbf{F} - 2m \dot{r} \omega \mathbf{e}_\varphi + m r \omega^2 \mathbf{e}_r - m r \dot{\omega} \mathbf{e}_\varphi \quad (2.121)$$

Interpretation: Auf der linken Seite dieser Gleichung erkennen wir die Beschleunigung aus Sicht des mitrotierenden Beobachters, d. h. eines Beobachters im System K' , das mit $\varphi(t)$ gegenüber K rotiert. Auf der rechten Seite können wir $v_r = \dot{r}$, die radiale Geschwindigkeit, identifizieren, sowie: $-2m \dot{r} \omega \mathbf{e}_\varphi =$ Corioliskraft, $m r \omega^2 \mathbf{e}_r =$ Zentrifugalkraft, $-m r \dot{\omega} \mathbf{e}_\varphi =$ Eulerkraft. Letztere tritt nur auf, wenn ω zeitabhängig ist. Für eine allgemeine Drehachse erhält man die folgenden Ausdrücke: $-2m \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, $-m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ (siehe auch folgender Abschnitt).

Alternative Herleitung

Wir gehen aus von einem festen Koordinatensystem K und betrachten ein demgegenüber rotierendes System K' , mit konstantem $\boldsymbol{\omega}$ parallel zur z-Achse. (Trotzdem verwenden wir gelegentlich eine allgemeine Notation.) Aus Kapitel 1.3 wissen wir bereits, wie sich die Basisvektoren transformieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_x(t) &= \mathbf{e}_x \cos(\omega t) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t) \\ \mathbf{e}'_y(t) &= -\mathbf{e}_x \sin(\omega t) + \mathbf{e}_y \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.122)$$

Für die Einheitsvektoren in K' (und für alle Vektoren, die in K' fest sind, vergleiche Kapitel 1.5) gilt:

$$\dot{\mathbf{e}}'_x = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_x, \quad \dot{\mathbf{e}}'_y = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}'_y \quad (2.123)$$

Die Komponenten von \mathbf{r} bezeichnen wir mit x_i bzw. x'_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_i x_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_i x'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) \\ \rightarrow \dot{\mathbf{r}} &= \sum_i \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_i \dot{x}'_i(t) \mathbf{e}'_i(t) + \sum_i x'_i(t) \dot{\mathbf{e}}'_i(t) \\ &= \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.124)$$

Hier bedeutet $\dot{\mathbf{r}}'$, dass nur die Komponenten des Ortsvektors im System K' abzuleiten sind, nicht aber die gestrichenen Einheitsvektoren. Alternative Schreibweise:

$$\dot{\mathbf{r}}' = \left(\frac{d}{dt} \right)' \mathbf{r}$$

Damit können wir formal $d/dt = [(d/dt)' + \boldsymbol{\omega} \times]$ schreiben und finden für die Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} &= \left[\left(\frac{d}{dt} \right)' + \boldsymbol{\omega} \times \right] \left[\left(\frac{d}{dt} \right)' \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right] \\ &= \ddot{\mathbf{r}}' + \dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.125)$$

Wichtig: Bei den gestrichenen Zeitableitungen ('im rotierenden Bezugssystem') ist *nicht* nach den zeitabhängigen ('gestrichenen') Basisvektoren abzuleiten. Damit erhalten wir (siehe vorheriger Abschnitt):

$$m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}}' \times \mathbf{r} \quad (2.126)$$

Die obige Darstellung folgt: T. Fließbach, Mechanik, Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, Spektrum Akademischer Verlag, Kapitel 6. Dort finden Sie auch eine Diskussion zum Thema 'Labor auf der Erde'.

2.6 Gradient

Skalarfeld: Jedem Punkt im Raum wird ein Skalar zugeordnet. Ein Beispiel ist eine Funktion ('Potential') $V(\mathbf{r}) = V(x, y)$ im zweidimensionalen Raum. Durch die Darstellung mit Höhenlinien, d. h. Linien, die Punkte mit gleichem Potential verbinden, $V(x, y) = \text{konstant}$, lässt sich ein guter Eindruck von der räumlichen Variation gewinnen.

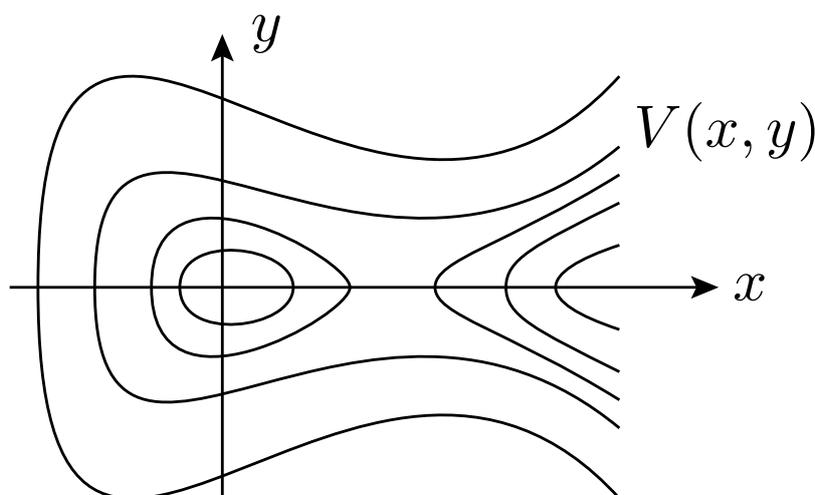


Abbildung 2.10: Höhenlinien (Beispiel)

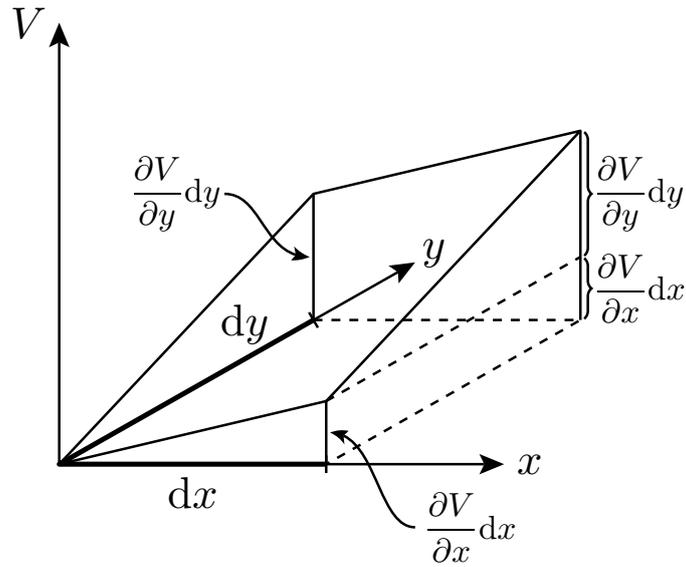


Abbildung 2.11: Partielle Ableitungen

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \quad (2.127)$$

Partielle Ableitungen charakterisieren die Variation (Steigung) des Potentials entlang bestimmten Richtungen, hier als Funktion von x bei festem y und als Funktion von y bei festem x .

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x, y) - V(x, y)}{\Delta x} \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{V(x, y + \Delta y) - V(x, y)}{\Delta y} \quad (2.129)$$

Eine Funktion mehrerer Variablen wird also als eine Funktion nur jeweils einer der unabhängigen Variablen betrachtet, die anderen Variablen werden beim Ableiten konstant gehalten. Allgemein:

$$dV = \sum_i (\text{grad } V)_i dx_i$$

Die Größe dV nennt man auch totales Differential. Dieser Ausdruck lässt sich als Skalarprodukt des Vektors $\text{grad } V$ mit $d\mathbf{x}$ interpretieren. Explizit:

$$(\text{grad } V)_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.130)$$

In 3-Dimensionen (mit $1, 2, 3 \rightarrow x, y, z$):

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{e}_z = \nabla V \quad (2.131)$$

Hier haben wir den Vektor ∇ , auch ‘Nabla’ oder ‘Nabla-Operator’ genannt, definiert:

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.132)$$

In dem Ausdruck ∇V wird somit ein Vektor auf einen Skalar angewendet. Entsprechend kann man die Anwendung des ∇ -Vektors auf ein Vektorfeld definieren, wobei es zwei Möglichkeiten gibt, das Skalar- und das Kreuzprodukt. Dies führt auf die Divergenz ('div') und die Rotation ('rot') (siehe Mathematische Konzepte II).

Beispiel

Gegeben ist ein Skalarfeld der Form $V(x, y) = x^2 + y$. Daraus ergibt sich für den Gradienten

$$\nabla V = \mathbf{e}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial V}{\partial y} = 2x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$$

und für das totale Differential:

$$\begin{aligned} dV &= \nabla V \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \\ &= (2x\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \cdot (dx\mathbf{e}_x + dy\mathbf{e}_y) = 2x dx + dy \end{aligned}$$

Interpretation

Wir betrachten nochmals die Änderung des Potentials bei einer kleinen Änderung des Ortes:

$$\Delta V = \nabla V \cdot \Delta \mathbf{r} \quad (2.133)$$

Jetzt nehmen wir zusätzlich an, dass $\Delta \mathbf{r}$ in Richtung einer Höhenlinie zeigt, d. h. $V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = V(\mathbf{r}) \rightarrow \Delta V = 0$. Daraus folgt sofort: Der Gradient, ∇V , steht senkrecht auf den Höhenlinien des Potentials. Außerdem zeigt der Gradient in Richtung von zunehmendem V ; $|\nabla V|$ ist umso größer, je größer die Steigung ist.

Rechenregeln

Wir betrachten zwei Skalarfelder U und V :

$$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V \quad (2.134)$$

$$\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U \quad (\text{Produktregel}) \quad (2.135)$$

Beispiele:

- Coulombpotential, Gravitationspotential: $V(r) = V_0/r$

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{x}{r^3} \end{aligned} \quad (2.136)$$

Entsprechend für y und z .

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.137)$$

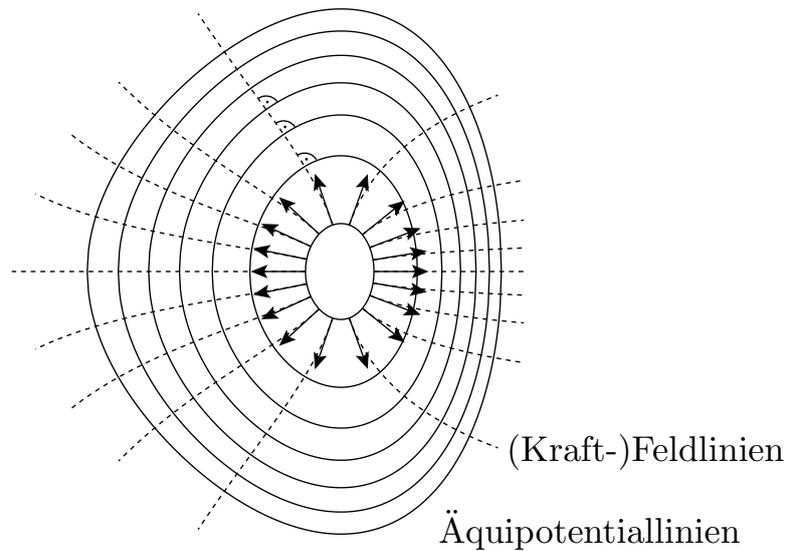


Abbildung 2.12: Die Kraft $\mathbf{F} = -\nabla V$ zeigt in Richtung abnehmenden Potentials.

- \mathbf{a} ein konstanter Vektor, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ somit ein Skalar:

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \nabla(a_x x + a_y y + a_z z) = \mathbf{a} \quad (2.138)$$

- Logarithmus:

$$\nabla(\ln r) = \frac{1}{r} \nabla r \quad (\text{Kettenregel}) \quad (2.139)$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad (2.140)$$

und entsprechend für die anderen Komponenten:

$$\Rightarrow \nabla(\ln r) = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (2.141)$$

Taylorentwicklung in Dimensionen > 1

Für kleine Δx , Δy gilt in zwei Dimensionen (was sich direkt aus der Definition des Gradienten ergibt):

$$\begin{aligned} V(x + \Delta x, y + \Delta y) &= V(x, y) + \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \dots \\ &= [1 + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) + \dots] V(x, y) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Wir stellen uns nun die Frage, wie diese Reihe weitergeht, oder allgemein: Welche Form hat eine Taylorreihe in mehr als einer Dimension?

Wir betrachten zuerst den zweidimensionalen Fall bis zur zweiten Ordnung:

$$\begin{aligned}
& V(x + \Delta x, y + \Delta y) - V(x, y) \\
&= V(x + \Delta x, y + \Delta y) - V(x, y + \Delta y) + V(x, y + \Delta y) - V(x, y) \\
&= \Delta x \frac{\partial}{\partial x} V|_{x,y+\Delta y} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} V|_{x,y+\Delta y} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} V|_{x,y} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} V|_{x,y} + \dots \\
&= \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(V + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} V + \dots \right) |_{x,y} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (V + \dots) |_{x,y} + \dots \\
&\quad + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} V|_{x,y} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} V|_{x,y} + \dots \\
&= \Delta x \frac{\partial V}{\partial x} |_{x,y} + \Delta y \frac{\partial V}{\partial y} |_{x,y} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} |_{x,y} + \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} |_{x,y} + \frac{1}{2}(\Delta y)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} |_{x,y} + \dots \quad (2.143)
\end{aligned}$$

Dabei haben wir implizit benutzt, dass partielle Ableitungen vertauschen (sofern sie existieren), zum Beispiel:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad (2.144)$$

Wie sehen nun die Terme n -ter Ordnung aus? Wir benutzen eine etwas andere Notation und ersetzen x, y durch a, b ; dann wird $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$:

$$\begin{aligned}
V(x, y) = V(a, b) &+ \frac{1}{1!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^1 V(x, y)|_{x=a,y=b} \\
&+ \frac{1}{2!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 V(x, y)|_{x=a,y=b} \\
&+ \dots \\
&+ \frac{1}{n!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^n V(x, y)|_{x=a,y=b} \\
&+ \dots \quad (2.145)
\end{aligned}$$

Das Resultat, das wir gerade in zweiter Ordnung gefunden haben, lässt sich leicht verifizieren. Durch Aufsummation (und Hinzufügen der dritten Komponente) erhalten wir schließlich:

$$V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^n V(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla)^n V(\mathbf{r}) \quad (2.146)$$

Beispiel: $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = -3\frac{xy}{r^5} \quad (2.147)$$

$$V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \left[3\frac{(\mathbf{r} \cdot \Delta \mathbf{r})^2}{r^5} - \frac{(\Delta \mathbf{r})^2}{r^3} \right] + \dots \quad (2.148)$$

Alternative Herleitung durch Entwickeln der Wurzelfunktion:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + (\Delta\mathbf{r})^2}} \\
 &= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{r^2} + \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{r^2}}} \\
 &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{r^2} + \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{r^2} + \dots \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{(\Delta\mathbf{r})^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r})^2}{r^4} + \dots \right] \tag{2.149}
 \end{aligned}$$

Dies führt natürlich zum gleichen Resultat.

2.7 Linienintegral

Problemstellung: Integration eines Vektorfeldes entlang einer vorgegebenen Linie bzw. Bahn bzw. Kurve

In der Physik spielt allgemein der Begriff der Energie und speziell der Begriff ‘Arbeit’ eine wesentliche Rolle. Wenn wir ein Teilchen in einem Kraftfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ entlang einer bestimmten Bahnkurve bewegen, leisten wir die folgende Arbeit (siehe Anfang dieses Kapitels):

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\
 &= - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (dx F_x + dy F_y + dz F_z) \\
 &= - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dx F_x - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dy F_y - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} dz F_z \tag{2.150}
 \end{aligned}$$

Hier bezeichnen \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 den Anfangs- und den Endpunkt der Bahn. Es tritt das Skalarprodukt auf, da nur die Kraft in Wegrichtung für die Berechnung der Arbeit relevant ist: Bei einer Bewegung senkrecht zur Kraft ist offensichtlich keine Arbeit zu leisten. Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen die Arbeit nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, sondern auch von der durchlaufenen Bahn!

Wie wertet man so ein Linienintegral aus? Betrachte dazu eine Bahn, die in parametrisierter Form gegeben ist, zum Beispiel als zeitlicher Ablauf, $\mathbf{r}(t)$. Dann folgt

$$d\mathbf{r}(t) = \left(\frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z \right) dt = \mathbf{v} dt \tag{2.151}$$

Die Anfangs- und Endzeit bezeichnen wir mit t_1 bzw t_2 , d. h. $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$:

$$\rightarrow W = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \tag{2.152}$$

Den Integranden, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$, kann man als Leistung interpretieren.

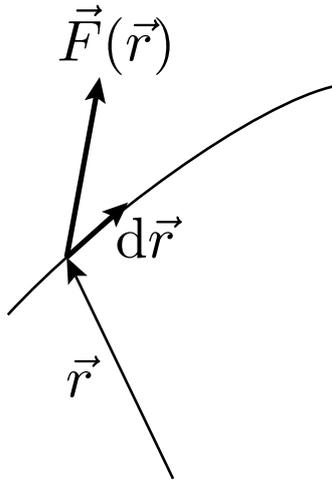


Abbildung 2.13: Illustration zum Linienintegral

Beispiel (1)

Wir betrachten als Beispiel das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = (2x + y^2)\mathbf{e}_x + 2xy\mathbf{e}_y$, das wir von $(0,0)$ nach $(1,2)$ integrieren wollen, und zwar entlang der Bahn $A = A_1 + A_2$ und entlang der Bahn B , siehe Abbildung 2.14.

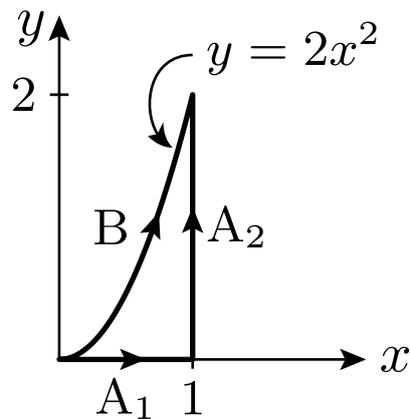


Abbildung 2.14: Die Bahn A verläuft erst horizontal und dann vertikal, B entlang einer Parabel.

- Integration entlang A

- Teilstück A_1 : Parametrisierung $x = u, y = 0, 0 \leq u \leq 1$ (oder einfach $x = \alpha u$; dann sind jedoch andere Integrationsgrenzen zu wählen!)

$$I_{A_1} = \int_0^1 du \begin{pmatrix} 2u \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \int_0^1 du u = 1 \quad (2.153)$$

- Teilstück A_2 : Parametrisierung $x = 1, y = 2u, 0 \leq u \leq 1$

$$I_{A_2} = \int_0^1 du \begin{pmatrix} 2 + 4u^2 \\ 4u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \int_0^1 du u = 4 \quad (2.154)$$

Insgesamt ergibt sich $I_A = I_{A_1} + I_{A_2} = 5$.

- Integration entlang B . Parametrisierung $x = u, y = 2u^2, 0 \leq u \leq 1$

$$I_B = \int_0^1 du \begin{pmatrix} 2u + 4u^4 \\ 4u^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4u \end{pmatrix} = \int_0^1 du (2u + 20u^4) = (u^2 + 4u^5) \Big|_0^1 = 5 \quad (2.155)$$

Hier hängt das Integral nicht vom gewählten Weg ab, $I_{A_1} + I_{A_2} - I_B = 0$: Das Integral entlang der geschlossenen Kurve $A_1 + A_2 - B$ verschwindet.

Beispiel (2)

Wir bleiben in zwei Dimensionen und betrachten das Vektorfeld $\mathbf{f}(x, y) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$, das wir entlang einer Kreisbahn entgegen dem Uhrzeigersinn (d. h. im mathematisch positiven Sinn) integrieren wollen. Parametrisierung der Bahn: $x = r_0 \cos \varphi, y = r_0 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Damit erhalten wir:

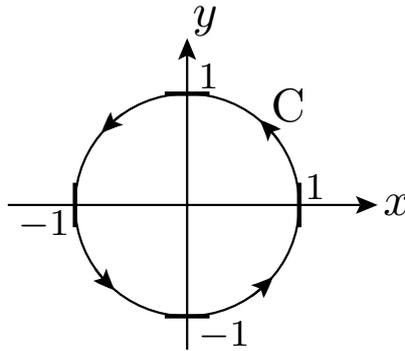


Abbildung 2.15: Kreisbahn mit Radius $r_0 = 1$.

$$I = r_0^2 \oint_{C(r_0)} d\varphi \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi 1 = 2\pi r_0^2 \quad (2.156)$$

Hier verschwindet das Integral entlang einer geschlossenen Kurve nicht! Außerdem hängt das Ergebnis vom Radius der gewählten Kreisbahn ab!

Somit stellt sich die Frage: Wann ist ein Linienintegral (bei vorgegebenen, aber beliebigen Anfangs- und Endpunkten) *unabhängig* vom Weg? Oder: Wann ist das Linienintegral über eine beliebige geschlossene Bahn gleich null? Dies ist genau dann der Fall, wenn das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist; solche Vektorfelder heißen auch konservativ. Beweis:

- Annahme: das Vektorfeld sei ein Gradientenfeld, $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla V(\mathbf{r})$. Und aus Kapitel 2.5 wissen wir: $dV = d\mathbf{r} \cdot \nabla V$:

$$\Rightarrow \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t)) = \int_{V_1}^{V_2} dV = V_2 - V_1 \quad (2.157)$$

D. h. das Integral hängt nicht vom Weg, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt ab.

- Annahme: das Integral sei vom Weg unabhängig. Wir können dann die Funktion

$$V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (2.158)$$

definieren und dann folgende Differenz berechnen (im Grenzfall $|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0$):

$$V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_m) \cdot \Delta\mathbf{r} \quad (2.159)$$

wobei \mathbf{r}_m ein geeigneter Punkt auf dem Weg von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ ist (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Hier geht entscheidend die Annahme der Wegunabhängigkeit ein: Es ist egal, auf welchem Weg man von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} bzw. $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ läuft.

$$\Rightarrow \lim_{|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0} [V(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - V(\mathbf{r})] = \lim_{|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0} [\nabla V \cdot \Delta\mathbf{r}] = \lim_{|\Delta\mathbf{r}| \rightarrow 0} [\mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r}] \quad (2.160)$$

Somit folgt $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \nabla V$, d. h. das Vektorfeld lässt sich als Gradientenfeld darstellen (was zu beweisen war).

- Fazit: Das Integral $\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})$ ist genau dann vom Weg unabhängig, wenn sich das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ als Gradient eines Skalarfeldes $V(\mathbf{r})$ ausdrücken lässt, und umgekehrt.

Beispiele:

$$(1) \mathbf{f}(x, y) = (2x + y^2) \mathbf{e}_x + 2xy \mathbf{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 2x + y^2 \rightarrow V(x, y) = x^2 + xy^2 + C_1(y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 2xy \rightarrow V(x, y) = xy^2 + C_2(x) \\ \Rightarrow V(x, y) &= x^2 + xy^2 + C \end{aligned} \quad (2.161)$$

$$(2) \mathbf{f}(x, y) = x^n \mathbf{e}_x + y^m \mathbf{e}_y$$

$$\Rightarrow V(x, y) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{y^{m+1}}{m+1} + C \quad (2.162)$$

$$(3) \mathbf{f}(x, y) = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -y \rightarrow V(x, y) = -xy + C_1(y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= x \rightarrow V(x, y) = xy + C_2(x) \end{aligned}$$

Hier existiert kein Potential! Man sieht auch sofort, dass in diesem Beispiel die Annahmen $\partial V/\partial x = -y$ und $\partial V/\partial y = x$ zum Widerspruch führen, wenn man nochmals nach y bzw. x ableitet.

$$(4) \mathbf{f}(x, y) = -\frac{y}{r^2} \mathbf{e}_x + \frac{x}{r^2} \mathbf{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{y}{r^2} \rightarrow V(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C_1(y) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{x}{r^2} \rightarrow V(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C_2(x) \\ \Rightarrow V(x, y) &= \arctan \frac{y}{x} + C \end{aligned} \quad (2.163)$$

Andererseits können wir, völlig analog zur obigen Rechnung, auch für dieses Vektorfeld das Linienintegral entlang einer Kreisbahn um den Nullpunkt berechnen. Allerdings stellen wir dann fest, dass der Kreisradius r_0 herausfällt, d. h. das Integral ergibt immer 2π und ist insbesondere ungleich null, obwohl ja anscheinend ein Potential, nämlich $\arctan(y/x)$, existiert! Die Lösung des Problems liegt in der Singularität bei $x = y = 0$: Solange wir den Ursprung ausschließen, ergibt in der Tat jedes Linienintegral über einen geschlossenen Weg null. Wenn wir den Ursprung einmal im mathematisch positiven Sinn umfahren, bekommen wir jedoch 2π – egal wie wir um den Nullpunkt herumlaufen; wenn wir den Nullpunkt im mathematisch negativen Sinn umlaufen, erhalten wir -2π ; etc. Hinweis: Wenn wir das Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ noch mit einer Konstanten C multiplizieren, erhalten wir $2\pi C$ bzw. $-2\pi C$ bei einmaligem positiven bzw. negativen Umlauf um den Nullpunkt.

Das Beispiel (4) beschreibt das Strömungsfeld eines Wirbels in einer Flüssigkeit, siehe auch Mathematische Konzepte II.

Anmerkung: Ausgehend von einer Parametrisierung des Weges lassen sich auch Integrale der Form $\int d\mathbf{r} U(\mathbf{r})$ und $\int d\mathbf{r} \times \mathbf{a}(\mathbf{r})$ betrachten, die Vektoren ergeben.

2.8 Mehrdimensionale Integrale

Bei ausgedehnten Körpern treten verschiedene ortsabhängige physikalische Größen auf, wie zum Beispiel die Massendichte ('Masse pro Volumen'), $\rho(\mathbf{r})$, oder die Energiedichte, und viele andere. In so einem Fall lässt sich (z. B.) die Gesamtmasse m als 'Summe' über alle Teile des Körpers berechnen:

$$m = \sum_i (\Delta V)_i \rho(\mathbf{r}_i) \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{r}) \quad (2.164)$$

wobei dV ein infinitesimales Volumenelement bezeichnet, $dV = dx dy dz$ in kartesischen Koordinaten. (Dieses dV sollte nicht mit dem totalen Differential Kapitel aus Kapitel 2.6 verwechselt werden!)

Wir betrachten aber zuerst den zweidimensionalen Fall, in dem über eine Fläche integriert wird. Das Integrationsgebiet sei ein Rechteck mit $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$:

$$I = \int_0^a dx \int_0^b dy f(x, y) \quad (2.165)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^L dx \int_0^{2L} dy \sin(x+y) = \int_0^L dx [-\cos(x+y)] \Big|_{y=0}^{y=2L} \\
 &= \int_0^L dx (-\cos(x+2L) + \cos x) = (-\sin(x+2L) + \sin x) \Big|_0^L \\
 &= -\sin(3L) + \sin(2L) + \sin(L) = \int_0^{2L} dy \int_0^L dx \sin(x+y)
 \end{aligned}$$

Es wird hier erst über y und dann über x integriert – aber auf die Reihenfolge kommt es nicht an, die umgekehrte Reihenfolge liefert das gleiche Ergebnis (was sich leicht nachrechnen lässt). Falls sich die Berandung durch eine Funktion $y(x)$ (oder $x(y)$) beschreiben lässt, kann die Integration auch für allgemeine Gebiete in kartesischen Koordinaten durchgeführt werden:

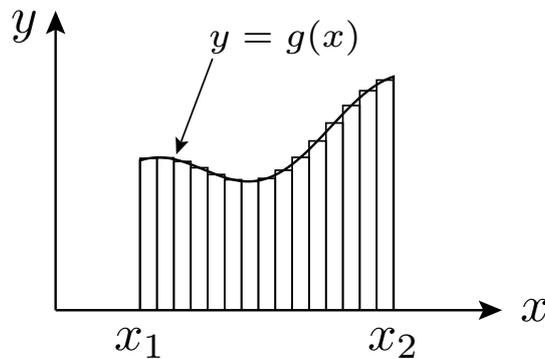


Abbildung 2.16: Flächenintegration bei vorgegebener Berandung

$$I = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{g(x)} dy f(x, y) \tag{2.166}$$

Beispiel: Fläche eines Kreises mit Radius R

Der Kreismittelpunkt liege im Ursprung; $x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} \\
 &= \left[x\sqrt{R^2-x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R} \right] \Big|_{-R}^R = \pi R^2
 \end{aligned} \tag{2.167}$$

Hier kommt es allerdings offensichtlich auf die Reihenfolge der beiden Integrationen an. In diesem Beispiel wäre es zudem sinnvoll, Polarkoordinaten zu verwenden, aber dann stellt sich die Frage, wodurch das Flächenelement $dx dy$ ersetzt werden muss. (Bei Polarkoordinaten ist schon aus Dimensionsgründen klar, dass die Ersetzung $dx dy \rightarrow dr d\varphi$ nicht richtig sein kann!) Wir betrachten den allgemeinen Fall einer Koordinatentransformation $x, y \rightarrow u, v$, mit vorgegebenen Beziehungen

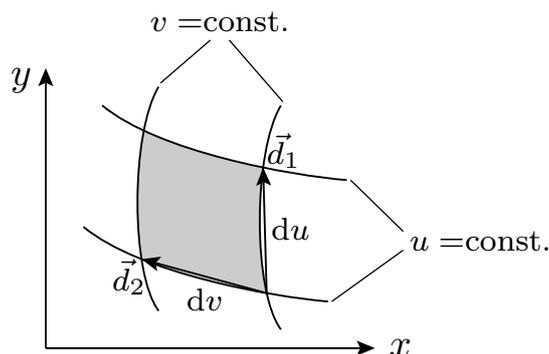


Abbildung 2.17: Koordinatentransformation mit zwei Variablen

$u(x, y)$, $v(x, y)$, die fast immer als lokal umkehrbar angenommen werden muss, siehe Abbildung 2.17. Mit

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad , \quad \mathbf{d}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{e}_y \right) du \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad , \quad \mathbf{d}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{e}_y \right) dv \end{aligned} \quad (2.168)$$

erhalten wir für das infinitesimale Flächenelement:

$$df = |\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2| = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \mathbf{e}_z \right| dudv = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| dudv \quad (2.169)$$

Eine allgemeine Fläche im dreidimensionalen Raum ist durch $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ gegeben, siehe unten.

Beispiel: Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \quad , \quad y = r \sin \varphi \\ \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \varphi \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -r \sin \varphi \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \end{aligned}$$

- Flächenelement ($u \rightarrow r, v \rightarrow \varphi$)

$$\begin{aligned} df &= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| dudv \\ \rightarrow df &= |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| dr d\varphi = r dr d\varphi \end{aligned} \quad (2.170)$$

- Integral in Polarkoordinaten

$$\int r dr \int d\varphi f(r, \varphi) \quad (2.171)$$

Beispiel: nochmals Fläche eines Kreises

Wir betrachten einen Kreis mit Radius R . Für die Fläche ($A = \text{'area'}$) ergibt sich:

$$A = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \quad (2.172)$$

Koordinatentransformation in Dimensionen > 2

In beliebigen Dimensionen ergibt sich Folgendes. Es seien x_1, x_2, \dots die ‘alten’ und u_1, u_2, \dots die ‘neuen’ Koordinaten. Dann gilt:

$$dx_1 dx_2 dx_3 \dots \rightarrow |J| du_1 du_2 du_3 \dots \quad (2.173)$$

wobei $|J|$ den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix \mathbf{J} bezeichnet. Die Matrixelemente von \mathbf{J} berechnen sich aus den partiellen Ableitungen $\partial x_i / \partial u_j$, zum Beispiel für drei Dimensionen:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial u_1 & \partial x_1 / \partial u_2 & \partial x_1 / \partial u_3 \\ \partial x_2 / \partial u_1 & \partial x_2 / \partial u_2 & \partial x_2 / \partial u_3 \\ \partial x_3 / \partial u_1 & \partial x_3 / \partial u_2 & \partial x_3 / \partial u_3 \end{pmatrix} \quad (2.174)$$

Im Hinblick auf Anwendungen in der Thermodynamik sei noch eine andere Notation erwähnt:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (2.175)$$

In drei Dimensionen benötigen wir insbesondere Zylinderkoordinaten:

$$x, y, z \rightarrow r, \varphi, z \quad (2.176)$$

wobei im Vergleich zu den Polarkoordinaten nur z hinzukommt und nicht transformiert wird, sowie Kugelkoordinaten:

$$x, y, z \rightarrow r, \theta, \varphi \quad (2.177)$$

Die Volumenelemente in drei Dimensionen sind:

- kartesische Koordinaten: $dV = dx dy dz$
- Zylinderkoordinaten: $dV = r dr d\varphi dz$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \quad (2.178)$$

- Kugelkoordinaten: $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \tan \theta &= (x^2 + y^2)/z^2, & \tan \varphi &= y/x \end{aligned} \quad (2.179)$$

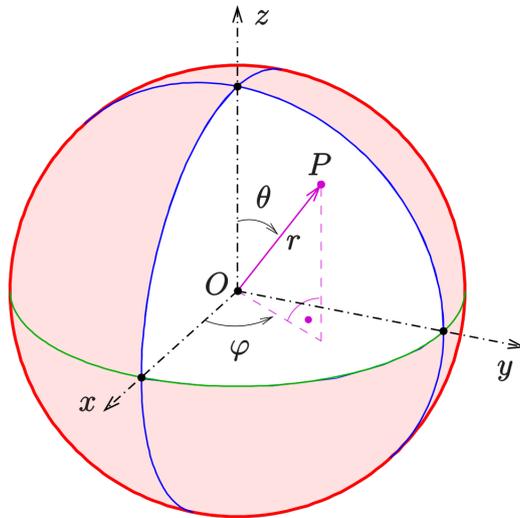


Abbildung 2.18: Illustration zu den Kugelkoordinaten [Bild von: Ag2gaeh - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=41627945>]

Bei den Kugelkoordinaten beschreibt r den Abstand vom Ursprung, θ den Polarwinkel und φ den Azimutalwinkel, siehe Abbildung 2.18. Damit können wir $|J|$ berechnen:

$$\begin{aligned}
 |J| &= \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix} \\
 &= r^2 \sin \theta [\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi] \\
 &= r^2 \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2.180}$$

Für die Bestimmung von dV in Kugelkoordinaten, $dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$, gibt es auch eine anschauliche Version, siehe Vorlesung.

Die Basisvektoren

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\
 \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y
 \end{aligned} \tag{2.181}$$

bilden ein Dreibein, siehe Abbildung 2.19.

Beispiel: Volumen einer Kugel

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\
 &= \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\xi \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} R^3
 \end{aligned} \tag{2.182}$$

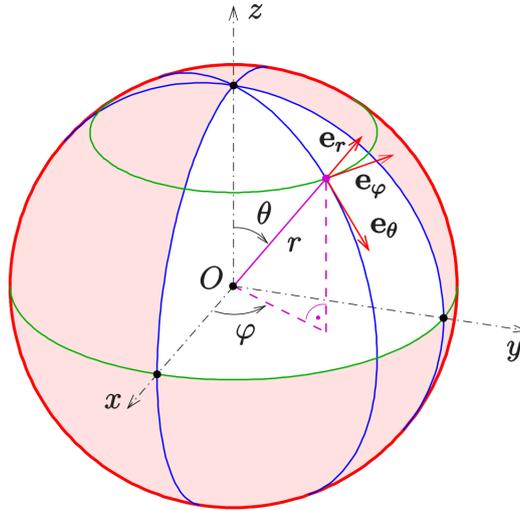


Abbildung 2.19: Basisvektoren der Kugelkoordinaten [Bild von: Ag2gaeh - Eigenes Werk, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=43953509>]

Hier haben wir die Substitution $\xi = \cos \theta$ benutzt, mit $d\xi = -\sin \theta d\theta$: $\theta = 0 \dots \pi \rightarrow \xi = 1 \dots -1$:

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sin \theta d\theta \dots = \int_{-1}^1 d\xi \dots \quad (2.183)$$

Trägheitstensor

Der Trägheitstensor Θ eines Körpers mit Massendichte $\rho(\mathbf{r})$ ist wie folgt definiert:

$$\Theta_{ij} = \int dV \rho(\mathbf{r}) (\delta_{ij} r^2 - x_i x_j) \quad (2.184)$$

Hier, wie üblich, $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir eine Vollkugel mit homogener Massenverteilung, daher ist die Massendichte einfach Masse durch Volumen, d. h. $\rho = 3m/4\pi R^3$. Es lässt sich leicht überlegen, dass in diesem Fall, in dem keine räumliche Richtung ausgezeichnet ist, alle Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensor gleich null sind und alle Diagonalelemente den gleichen Wert haben. Zum Beispiel ergibt sich:

$$\Theta_{33} = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \rho (r \sin \theta)^2 \quad (2.185)$$

da $r^2 - x_3 x_3 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$, und weiter:

$$\Theta_{33} = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot 2\pi = \frac{2}{5} m R^2 \quad (2.186)$$

Flächenintegral über ein Vektorfeld

Wir betrachten jetzt Integrale der Form $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$, mit $d\mathbf{f} = df \mathbf{n}$, wobei df das Flächenelement, \mathbf{n} den Flächennormalenvektor und $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ein Vektorfeld bezeichnet. Wenn die Fläche in der x-y-Ebene

liegt, gilt einfach $df = dx dy$ und $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Im allgemeinen Fall ist es nützlich, sich an die Überlegungen zur Koordinatentransformation mit zwei Variablen zu erinnern. Das obige Ergebnis lässt sich nämlich wie folgt schreiben:

$$df = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dudv \rightarrow d\mathbf{f} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv \quad (2.187)$$

Damit erhalten wir:

$$\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int dudv \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \quad (2.188)$$

Die Fläche ist durch ihre Parameterdarstellung, $\mathbf{r}(u, v)$, gegeben.

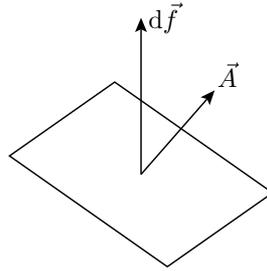


Abbildung 2.20: ‘Fluss’ durch eine infinitesimale Fläche

Beispiel: Strömungsprofil

Wir betrachten eine Flüssigkeit, die durch ein Rohr mit Radius R strömt. Das Strömungsprofil sei vorgegeben, siehe auch Abbildung 2.21:

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) \mathbf{e}_x \quad (2.189)$$

(1) Gesamtfluss durch eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung

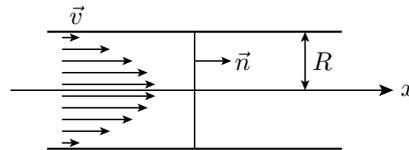


Abbildung 2.21: Strömungsprofil (Beispiel)

In diesem Fall setzen wir $y = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ und erhalten daraus $d\mathbf{f} = r dr d\varphi \mathbf{e}_x$:

$$\begin{aligned} \int_{(1)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v} = v_0 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x \\ &= 2\pi v_0 \int_0^R dr \left(r - \frac{r^3}{R^2} \right) \\ &= 2\pi v_0 \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{2} v_0 R^2 \end{aligned} \quad (2.190)$$

(2) Gesamtfluss durch eine Halbkugelschale mit Radius R . Um dies zu berechnen, sollten wir auf

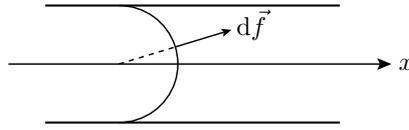


Abbildung 2.22: Fluss durch eine Halbkugeloberfläche mit Radius R

Kugelkoordinaten zurückgreifen. Ein Punkt auf dieser Halbkugel hat die Koordinaten:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi, & y &= R \sin \theta \sin \varphi, & z &= R \cos \theta \\ \mathbf{R} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Der radiale Einheitsvektor, \mathbf{n} , steht senkrecht auf der Halbkugel, und das Flächenelement ist durch $df = dV/dr = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ gegeben. Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{R}/R = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ d\mathbf{f} &= \mathbf{n} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Projektion auf die y - z -Ebene:

$$y^2 + z^2 = R^2(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) \quad (2.191)$$

Somit lässt sich das Strömungsprofil schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \mathbf{e}_x \\ &= v_0(1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta) \mathbf{e}_x = v_0 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

Nun kann man das Flächenintegral explizit auswerten (Integrationsgrenzen für die Winkelintegration beachten!):

$$\begin{aligned} \int_{(2)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \\ &= v_0 R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sin \theta \cos \varphi \\ &= v_0 R^2 \int_0^\pi d\theta \sin^4 \theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \cos^3 \varphi \\ &= v_0 R^2 \cdot \left(\frac{3}{8} \theta - \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{32} \sin^4 \theta \right) \Big|_0^\pi \cdot \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= v_0 R^2 \cdot \frac{3\pi}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} v_0 R^2 \end{aligned} \quad (2.192)$$

Das Ergebnis ist somit das gleiche wie beim Fluss durch die Fläche senkrecht zur Strömung – und das muss auch so sein!

2.9 Zusammenfassung

Differentiation

- Taylorreihe: Entwicklung einer Funktion um einen Punkt
- Ableitung von Vektoren nach einem Parameter
 - Ableitung komponentenweise
 - (ggf.) Ableitung der Basisvektoren; physikalische Anwendung: Scheinkräfte
- Gradient: charakterisiert die Änderung eines Skalarfeldes; physikalische Anwendung: Kraft

$$\text{totales Differential} = dV = \nabla V \cdot d\mathbf{r} \quad (2.193)$$

Integration

- Linienintegral $\int d\mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r})$
 - Ergebnis hängt im Allgemeinen vom Weg ab
 - Direkte Integration falls $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ als Gradient darstellbar; dann hängt das Integral nur vom Anfangs- und vom Endpunkt des Weges ab, aber nicht vom durchlaufenen Weg ($\mathbf{f} =$ konservatives Vektorfeld)
- Integration über eine Fläche
 - kartesische Koordinaten $\int dx dy f(x, y)$
 - Polarkoordinaten $\int r dr d\varphi f(r, \varphi)$
- Integration über ein Volumen
 - kartesische Koordinaten $\int dx dy dz f(x, y, z)$
 - Zylinderkoordinaten $\int r dr d\varphi dz f(r, \varphi, z)$
 - Kugelkoordinaten $\int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi f(r, \theta, \varphi)$
- Flächenintegral: $\int d\mathbf{f} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$, $\mathbf{n} =$ Flächennormalenvektor

Kapitel 3

Komplexe Zahlen

Der italienische Arzt, Philosoph und Mathematiker Gerolamo Cardano stellte sich bereits 1545 die Frage, ob es möglich ist, eine Strecke der Länge 10 in zwei Teile x und y mit $x + y = 10$ aufzuteilen, derart dass das mit diesen Teilstrecken konstruierte Rechteck die Fläche 40 hat, $xy = 40$. Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung:

$$x(10 - x) = 40, \quad x^2 - 10x + 40 = 0 \quad (3.1)$$

Lösungen:

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 40} = 5 \pm \sqrt{-15} \quad (3.2)$$

Im Hinblick auf die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl führt man die ‘imaginäre Einheit’ i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ und somit $\sqrt{-1} = \pm i$ ein.

3.1 Die komplexe Zahlenebene

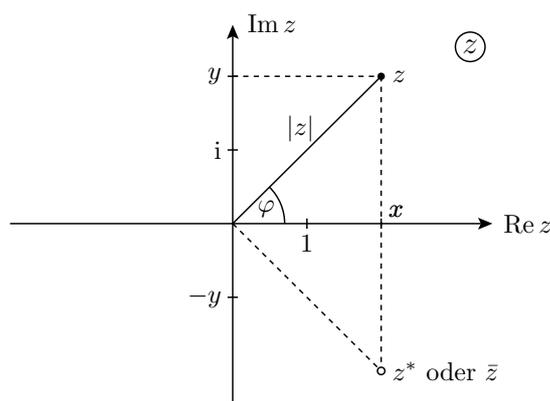


Abbildung 3.1: $z^* = x - iy$ bezeichnet die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl.

Damit können wir komplexe Zahlen der Form $z = x + iy$ betrachten, wobei x und y reell sein sollen. Eine komplexe Zahl wird als Punkt in der komplexen Zahlenebene (\mathbb{C} ; die Menge der reellen Zahlen wird mit \mathbb{R} bezeichnet) auffassen.

- Realteil von z : $\operatorname{Re}z = x$, Imaginärteil von z : $\operatorname{Im}z = y$,
- Gegeben sei $z = x + iy$; als dazu konjugiert komplexe Zahl bezeichnet man $z^* = x - iy$ (andere Notation: \bar{z}). *Anmerkung*: Die Lösungen von reellen quadratischen Gleichungen sind konjugiert komplex zueinander. Falls z_1 eine Lösung ist, folgt $z_2 = (z_1)^*$ ist die zweite Lösung.
- Alternativ: $\operatorname{Re}z = \frac{1}{2}(z + z^*)$, $\operatorname{Im}z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$
- Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = (\operatorname{Re}z)^2 + (\operatorname{Im}z)^2 = (x + iy)(x - iy) = zz^* \quad (3.3)$$

- Argument (= Winkel in der komplexen Ebene; vgl. Polarkoordinaten):

$$\varphi = \arg z = \arctan \frac{y}{x} \quad (3.4)$$

- Polardarstellung:

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi} \\ z^* &= |z| (\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z| e^{-i\varphi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

- Euler-Formel:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi} \quad (3.7)$$

Mithilfe der Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei wird benutzt: $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i(i^2)^n = i(-1)^n$.

Aus der Euler-Formel folgt sofort:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \quad (3.9)$$

Die Exponentialfunktion lässt sich auch für beliebige komplexe Zahlen z mithilfe der Potenzreihe erklären:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (3.10)$$

Diese Reihe konvergiert für alle z ($|z| < \infty$).

3.2 Eigenschaften

- Multiplikation mit einer reellen Zahl a :

$$az = ax + iay ; \operatorname{Re}(az) = ax , \operatorname{Im}(az) = ay \quad (3.11)$$

- Addition zweier komplexen Zahlen:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (3.12)$$

- Multiplikation zweier komplexen Zahlen:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \quad (3.13)$$

Multiplikation in Polardarstellung:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ |z_1 z_2| &= |z_1| |z_2| \quad \text{da } |e^{i\varphi}|^2 = e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Division zweier komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Division in Polardarstellung:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3.16)$$

3.3 Komplexwertige Funktionen

Eine komplexe Funktion ordnet einer unabhängigen komplexen Variablen $z = x + iy$ durch eine bestimmte Vorschrift eine andere komplexe Variable w zu. Wir schreiben analog zum reellen Fall:

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.17)$$

Anders ausgedrückt: Die komplexe Zahl $z = x + iy$ wird auf die komplexe Zahl $w = u + iv$ (x, y, u, v reell) abgebildet ($\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$).

Beispiele:

- $f(z) = z^2$

$$w = x^2 - y^2 + 2ixy \rightarrow u = x^2 - y^2 , v = 2xy \quad (3.18)$$

- $f(z) = e^z$

$$\begin{aligned} w &= e^z \rightarrow w = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ \rightarrow u &= e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y \end{aligned} \quad (3.19)$$

- $f(z) = \cos z$

$$\begin{aligned} w &= \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(e^{ix-y} + e^{-ix+y}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ \rightarrow u &= \cos x \cosh y, \quad v = -\sin x \sinh y \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bei den gerade diskutierten Beispielen stellen wir durch Nachrechnen fest:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.21)$$

Dies ist kein Zufall – siehe Mathematische Konzepte II.

- $f(z) = z^2 z^*$

$$w = z(zz^*) = (x + iy)(x^2 + y^2) \rightarrow u = x(x^2 + y^2), \quad v = y(x^2 + y^2) \quad (3.22)$$

Die Relationen (3.21) gelten in diesem Beispiel *nicht*.

Kapitel 4

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind Gleichungen, die außer der gesuchten Funktion, zum Beispiel $x(t)$ oder $f(x)$, auch Ableitungen dieser Funktion enthalten.

4.1 Typologie der Differentialgleichungen

- Eine Differentialgleichung (DGL) heißt n -ter Ordnung, wenn die höchste Ableitung der gesuchten Funktion n -fach ist. Die Newton'sche Bewegungsgleichung, $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$, wobei der Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ als Funktion der Zeit t gesucht ist, ist 2. Ordnung.
- Beispiel: Harmonischer Oszillator, eine Dimension, Kraft $F(x) = -kx$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 ; \quad \text{gesucht: } x(t) \quad (4.1)$$

- Lineare Differentialgleichung: Die gesuchte Funktion ($x(t)$ beim harmonischen Oszillator) kommt nur linear vor.
- Nichtlineare Differentialgleichung, zum Beispiel Pendel

$$ml\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0 ; \quad \text{gesucht: } \varphi(t) \quad (4.2)$$

Hier tritt eine nichtlineare Funktion der gesuchten Funktion auf ($\sin \varphi$).

- Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Die Vorfaktoren der gesuchten Funktion und deren Ableitungen hängen nicht von der unabhängigen Variablen, hier t , ab. Nicht-konstante Koeffizienten würden zum Beispiel auftreten, wenn die Pendellänge variabel ist, oder die Masse (einer Rakete, die Masse durch das Verbrennen des Treibstoffs verliert) von t abhängt. Im letzteren Fall:

$$\frac{d}{dt} \left(m(t) \frac{dx}{dt} \right) = F \leftrightarrow m\ddot{x} + \dot{m}\dot{x} = F \quad (4.3)$$

- Homogene Differentialgleichung Es gibt keine von der gesuchten Funktion, hier $x(t)$, unabhängigen Terme.

- Inhomogene Differentialgleichung, zum Beispiel getriebener harmonischer Oszillator

$$m\ddot{x} + kx = F(t) ; \text{wichtiger Spezialfall: } F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (4.4)$$

- Zur Bestimmung einer eindeutigen Lösung müssen Anfangs- oder Randbedingungen vorgegeben werden. Bei einer DGL zweiter Ordnung sind genau zwei Bedingungen notwendig, zum Beispiel Anfangsort, $x(t_0)$, und Anfangsgeschwindigkeit, $v(t_0) = \dot{x}(t_0)$. Ein anderes Beispiel ist die DGL, die die Auslenkung ($\eta(x)$) eines bei $x = 0$ und $x = L$ eingespannten Balkens unter dem Einfluss einer Kraft beschreibt:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + k\eta = F(x) ; \quad \eta(0) = \eta(L) = 0 \quad (\text{Randwertproblem}) \quad (4.5)$$

- Gewöhnliche Differentialgleichung: Es gibt nur eine unabhängige Variable.
- Partielle Differentialgleichung: mehrere unabhängige Variable. Beispiel: Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 ; \text{ gesucht: } \Phi(x, t) \quad (4.6)$$

Anfangsbedingungen in diesem Fall: $\Phi(x, t_0)$ und $\dot{\Phi}(x, t_0)$ vorgegeben

4.2 Homogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel aus der Elektronik. Q bezeichnet die Ladung auf dem

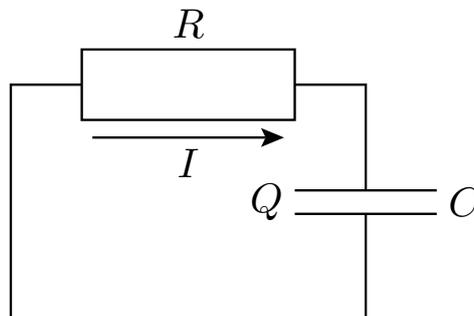


Abbildung 4.1: RC-Kreis

Kondensator, $I = \dot{Q}$ den elektrischen Strom, C die Kapazität und R den Widerstand. Die Summe der Spannungen muss gleich null sein, daher ergibt sich:

$$\frac{Q}{C} + RI = 0 \rightarrow R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow \dot{Q} + \gamma Q = 0 \quad (4.7)$$

mit $\gamma = (RC)^{-1}$. Dies ist eine lineare homogene DGL 1. Ordnung, gesucht ist $Q(t)$. Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dQ}{dt} = -\gamma Q \rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\gamma dt \quad (4.8)$$

Auf der einen Seite steht nur die Variable Q , auf der anderen Seite nur die Variable t . Integration von einem Anfangswert $Q(t_0) = Q_0$, der zur Spezifizierung der Lösung vorgegeben wird, bis zu einem Endwert $Q(t)$, der gesucht ist:

$$\begin{aligned} \int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ'}{Q'} &= -\gamma \int_{t_0}^t dt' \\ \rightarrow \ln Q(t) - \ln Q_0 &= -\gamma(t - t_0) \\ \rightarrow \ln[Q(t)/Q_0] &= -\gamma(t - t_0) \\ \rightarrow Q(t) &= Q_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Lösung ist eine Exponentialfunktion, da die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat und die Exponentialfunktion sich beim Ableiten reproduziert. Alternativ benutzen wir einfach den folgenden *Ansatz* (wobei A zunächst eine beliebige Konstante bezeichnet):

$$Q(t) = Ae^{\lambda t}, \quad \dot{Q}(t) = \lambda Ae^{\lambda t} \quad (4.10)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \lambda Ae^{\lambda t} + \gamma Ae^{\lambda t} &= 0 \rightarrow (\lambda + \gamma)Ae^{\lambda t} = 0 \\ \Rightarrow \lambda &= -\gamma, \quad Q(t) = Ae^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Bestimmung des Vorfaktors A mithilfe der Anfangsbedingung $Q(t_0) = Q_0$:

$$Q_0 = Ae^{-\gamma t_0} \rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (4.12)$$

Beispiel: Typ ‘nicht-konstante Koeffizienten’

$$x \frac{dy}{dx} - \alpha y = 0; \quad \text{gesucht: } y(x) \quad (4.13)$$

Diese DGL ist linear und homogen, aber einer der Koeffizienten hängt von x ab. Methode: Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dy'}{y'} &= \alpha \frac{dx'}{x'} \\ \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy'}{y'} &= \alpha \int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} \\ \ln y(x) - \ln y(x_0) &= \alpha (\ln x - \ln x_0) \\ \ln \frac{y(x)}{y(x_0)} &= \alpha \ln \frac{x}{x_0} \\ y(x) &= y(x_0) \left(\frac{x}{x_0} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (4.14)$$

Die Lösung mithilfe der Trennung der Variablen ist immer möglich, wenn die DGL die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (4.15)$$

hat. Betrachte speziell den linearen Fall:

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = 0 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy'}{y'} &= - \int_{x_0}^x dx' f(x') \\ \rightarrow \ln \frac{y(x)}{y(x_0)} &= - \int_{x_0}^x dx' f(x') \\ \Rightarrow y(x) &= y(x_0) e^{-\int_{x_0}^x dx' f(x')} \end{aligned} \quad (4.17)$$

4.3 Homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

4.3.1 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir beginnen wieder mit einem Beispiel:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \quad (4.18)$$

Von der Diskussion der linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten wissen wir, dass ein Exponentialansatz zur Lösung führt. Aber auch bei linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung führt dieser Ansatz zum Ziel – wenn die Koeffizienten konstant sind!

$$\text{Ansatz: } y = Ae^{\lambda x} \quad (4.19)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + 4\lambda e^{\lambda x} + 3e^{\lambda x} &= 0 \\ (\lambda^2 + 4\lambda + 3)e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 3 &= 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1, -3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wir erhalten somit zwei Lösungen, e^{-x} und e^{-3x} . Außerdem gilt: Bei linearen Differentialgleichungen liefert die Linearkombination von Lösungen wieder eine Lösung. Dies sieht man allgemein wie folgt: Es seien $y = f(x)$ und $y = g(x)$ Lösungen einer Differentialgleichung $\hat{L}y(x) = 0$. Im Beispiel:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx} + 3 \right) y(x) = 0, \quad \hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx} + 3 \quad (4.21)$$

$$\hat{L}f(x) = 0, \quad \hat{L}g(x) = 0 \quad (4.22)$$

Ist $y(x) = Af(x) + Bg(x)$ auch eine Lösung? Dazu betrachten wir:

$$\hat{L}(Af(x) + Bg(x)) = A\hat{L}f(x) + B\hat{L}g(x) = 0 \quad (4.23)$$

Aus der Linearität von Differentialoperatoren (hier \hat{L}) folgt somit, dass eine Linearkombination zweier Lösungen auch eine Lösung ist.

Somit ist die allgemeine Lösung der DGI (4.18) durch

$$y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x} \quad (4.24)$$

gegeben. Es gilt allgemein: Eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung besitzt n Fundamentallösungen. Damit ist die allgemeinste Lösung:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\lambda_k x} \quad (4.25)$$

Im Beispiel haben wir zwei Fundamentallösungen gefunden; $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-3x}$ ist somit die allgemeinste Lösung.

Die zunächst freien Konstanten A und B (bzw. A_1, \dots, A_n) werden durch Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt. Wir betrachten speziell Anfangsbedingungen: Der Funktionswert und die Ableitungen bis einschließlich der $(n-1)$ -ter Ordnung seien zu einem 'Anfangspunkt' x_0 vorgegeben, woraus man die A_1, \dots, A_n bestimmen kann. Alle höheren Ableitungen ergeben sich dann aus der Differentialgleichung. In unserem Beispiel betrachten wir $x_0 = 0$ und:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \rightarrow A + B = 0 \\ y'(0) &= 1 \rightarrow -A - 3B = 1 \\ A &= \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{-3x}) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Bei der Newton'schen Bewegungsgleichung werden als Anfangsbedingungen der anfängliche Ort und die anfängliche Geschwindigkeit benötigt. Die Beschleunigung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung.

Wichtiges physikalisches Beispiel: harmonischer Oszillator

Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.27)$$

Exponentialansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t} \rightarrow \lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \lambda^2 = -\omega_0^2, \lambda = \pm i\omega_0 \quad (4.28)$$

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (4.29)$$

Wenn wir verlangen, dass die Anfangsbedingungen reell sind, ergibt sich auch eine reelle Lösung $x(t)$, aber die Koeffizienten A und B müssen komplex sein:

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B \quad (= \text{reell}) \\ v(0) &= \dot{x}(0) = i\omega_0(A - B) \quad (= \text{reell}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2} \left(x(0) - i \frac{v(0)}{\omega_0} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(x(0) + i \frac{v(0)}{\omega_0} \right) = A^* \quad (4.31)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \left(x(0) - i \frac{v(0)}{\omega_0} \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(x(0) + i \frac{v(0)}{\omega_0} \right) e^{-i\omega_0 t} \\ &= x(0) \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) - \frac{i}{2\omega_0} v(0) (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) \\ &= x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (= \text{reell}) \end{aligned} \quad (4.32)$$

wobei wir im letzten Schritt die Euler-Formel verwendet haben:

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) \pm i \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2}, \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \quad (4.33)$$

Entartung ($\lambda_1 = \lambda_2$)

Wir betrachten als Beispiel die folgende lineare, homogene DGL zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0 \quad (4.34)$$

und benutzen wieder den Exponentialansatz:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ \rightarrow (\lambda - 2)^2 &= 0 \Rightarrow \lambda = 2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Somit es ergibt sich zunächst nur eine (!) Lösung (was man Entartung nennt). Wir können aber wie folgt vorgehen: Wir ersetzen den Koeffizienten '4' vor dem x durch einen anderen Wert, $(4 - \epsilon^2)$, und betrachten am Schluss den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$. Im ersten Schritt ergibt sich mithilfe des Exponentialansatzes: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \epsilon$. Dann betrachten wir statt $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ die Summe und die Differenz dieser beiden Fundamentallösungen:

$$e^{(2+\epsilon)t} \pm e^{(2-\epsilon)t} = e^{2t} (e^{+\epsilon t} \pm e^{-\epsilon t}) \rightarrow \begin{cases} 2e^{2t} \\ 2\epsilon t e^{2t} \end{cases} \quad (4.36)$$

Hier haben wir im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ wieder mal die Taylorentwicklung der Exponentialfunktion benutzt, $e^{\pm \epsilon t} = 1 \pm \epsilon t + \dots$. Wir erkennen eine zweite Fundamentallösung, te^{2t} , und erhalten damit die allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} \quad (4.37)$$

Natürlich kann man dies auch explizit überprüfen:

$$x(t) = te^{2t} \rightarrow \dot{x}(t) = 2te^{2t} + e^{2t} \rightarrow \ddot{x}(t) = 4te^{2t} + 4e^{2t} \quad (4.38)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4te^{2t} + 4e^{2t} - 8te^{2t} - 4e^{2t} + 4te^{2t} = 0 \quad (4.39)$$

Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung treten bei höherer Entartung entsprechend höhere Potenzen der unabhängigen Variablen auf. Zum Beispiel ergeben sich für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (und alle anderen λ_k davon verschieden) die drei Fundamentallösungen $e^{\lambda_1 t}$, $te^{\lambda_1 t}$ und $t^2 e^{\lambda_1 t}$.

4.3.2 Erstes Integral

Wir betrachten die Newton'sche Bewegungsgleichung in einer Dimension, $m\ddot{x} = F(x) = -dV/dx$, die wir mit \dot{x} multiplizieren:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} - F(x)\dot{x} &= 0 \\ \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.40)$$

Man rechnet dies leicht nach mithilfe von:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}^2}{2} &= \frac{1}{2} 2\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}\ddot{x} \\ \frac{d}{dt} V(x) &= \frac{dV}{dx} \dot{x} = -F(x)\dot{x} \end{aligned}$$

Integration liefert direkt:

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = E \quad (4.41)$$

wobei E , mathematisch betrachtet, eine Integrationskonstante ist. Physikalisch betrachtet können wir E mit der Gesamtenergie identifizieren. Aus einer Differentialgleichung zweiter Ordnung wurde somit eine Differentialgleichung erster Ordnung. Die Energie ist ein 'erstes Integral der Bewegung'; E ersetzt hier eine der Anfangsbedingungen, denn

$$\dot{x}(0) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x(0))]} \quad (4.42)$$

Das erste Integral lässt sich mithilfe der Trennung der Variablen weiter integrieren:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)] \quad (4.43)$$

Im Folgenden werde das positive Vorzeichen beim Wurzelziehen gewählt:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} &= dt \\ \rightarrow \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x')]} } &= \int_0^t dt' = t \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mithilfe dieser Relation erhalten wir nicht direkt $x(t)$, sondern die Umkehrfunktion $t(x)$.

Anwendung: harmonischer Oszillator

In diesem Fall ist $V(x) = kx^2/2$, und wir finden folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 &= E ; \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{2}x^2 \right)} \\
 \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - \frac{k}{2}x'^2 \right)}} &= \int_0^t dt' \\
 \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x'^2}} &= t ; \quad \sqrt{\frac{k}{2E}}x' = u' \\
 \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du'}{\sqrt{1 - u'^2}} &= \sqrt{\frac{k}{m}}t
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Bei der Integration muss natürlich vorausgesetzt werden, dass immer $E > V(x')$ gewährleistet ist (was auch $E > 0$ impliziert). Zur Vereinfachung der Schreibweise haben wir $x(0) = x_0$ gesetzt sowie $u(t) = \sqrt{(k/2E)}x(t)$ und $u_0 = \sqrt{(k/2E)}x_0$ eingeführt. Nach Integration:

$$\arcsin(u(t)) - \arcsin(u_0) = \sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{4.46}$$

Schließlich finden wir:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \arcsin \left(\sqrt{x_0 \frac{k}{2E}} \right) \right) \\
 &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) ; \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

Im letzten Schritt haben wir ein Additionstheorem für die Winkelfunktionen benutzt, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, sowie $\cos(\arcsin \alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$. Die Anfangswerte x_0 und v_0 sind mit der Energie verknüpft, da diese nicht von t abhängt (siehe Gleichung (4.42)):

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \tag{4.48}$$

Die Identifikation des Vorfaktors v_0 im zweiten Term ergibt sich auch aus $v_0 = \dot{x}(0)$.

Analog in drei Dimensionen:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}, \quad \frac{d}{dt}V(\mathbf{r}) = \nabla V \cdot \dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \tag{4.49}$$

In diesem Fall erhalten wir:

$$\frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}) = E \tag{4.50}$$

Dies lässt sich jedoch nicht einfach nochmals mithilfe der Trennung der Variablen integrieren! *Anmerkung:* Beim Kepler-Problem gibt es aufgrund der Kugelsymmetrie noch eine weitere Erhaltungsgröße, den Drehimpuls, was sich als sehr hilfreich herausstellt; siehe Theoretische Physik I.

4.4 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Bisher haben wir homogene lineare Differentialgleichungen betrachtet, $\hat{L}y(x) = 0$. Jetzt untersuchen wir den Fall, dass zusätzlich eine Inhomogenität, d. h. ein Term $f(x)$ auftritt, der zwar von x , aber nicht von der gesuchten Funktion $y(x)$ abhängt: $\hat{L}y(x) = f(x)$.

Für *inhomogene* lineare Differentialgleichungen gilt: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der *homogenen* Gleichung, $y_h(x)$, und einer *speziellen* Lösung der inhomogenen Gleichung, $y_{si}(x)$:

$$y(x) = y_h(x) + y_{si}(x) \quad (4.51)$$

mit $\hat{L}y_h(x) = 0$ und $\hat{L}y_{si}(x) = f(x)$:

$$\hat{L}y(x) = \hat{L}y_h(x) + \hat{L}y_{si}(x) = f(x) \quad (4.52)$$

Zwei Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung unterscheiden sich nur um eine Lösung der homogenen Differentialgleichung, denn:

$$\hat{L}y_1(x) = f(x), \hat{L}y_2(x) = f(x) \rightarrow \hat{L}(y_1(x) - y_2(x)) = 0 \quad (4.53)$$

4.4.1 1. Ordnung: Variation der Konstanten

Wir untersuchen wieder (siehe Kapitel 4.2) eine lineare DGL erster Ordnung mit einem nicht-konstanten Koeffizienten, fügen aber eine Inhomogenität $f(x)$ hinzu:

$$\frac{dy}{dx} + g(x)y = f(x) \quad (4.54)$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung kennen wir bereits:

$$y_h(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} \quad (4.55)$$

Die ‘Variation der Konstanten’ besteht darin, dass wir einen Ansatz machen, in dem der Vorfaktor der Exponentialfunktion als x -abhängig betrachtet wird:

$$\begin{aligned} y_{si}(x) &= C(x)e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} \\ \frac{dy_{si}}{dx} &= \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} - C(x)g(x)e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} \\ \hat{L}y_{si}(x) &= \frac{dy_{si}}{dx} + g(x)y_{si}(x) = \frac{dC(x)}{dx}e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} = f(x) \\ \rightarrow \frac{dC(x)}{dx} &= f(x)e^{\int_{x_0}^x dx' g(x')} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dies können wir direkt integrieren, da rechts einfach eine Funktion von x steht:

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^x dx'' f(x'')e^{\int_{x_0}^{x''} dx' g(x')} \quad (4.57)$$

Damit finden wir:

$$y_{si}(x) = C(x_0)e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} + e^{-\int_{x_0}^x dx' g(x')} \int_{x_0}^x dx'' f(x'') e^{\int_{x_0}^{x''} dx' g(x')} \quad (4.58)$$

Der erste Term hat aber genau die gleiche Form wie die Lösung der homogenen Gleichung, daher kann man $C(x_0) = 0$ setzen. Endergebnis:

$$y_{si}(x) = \int_{x_0}^x dx'' f(x'') e^{-\int_{x''}^x dx' g(x')} \quad (4.59)$$

Übrigens ist $y_{si}(x_0) = 0$, d. h. die Anfangsbedingung wird mithilfe der homogenen Gleichung erfüllt. Zur Sicherheit überprüfen wir das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{dy_{si}}{dx} &= f(x) - \int_{x_0}^x dx'' f(x'') g(x) e^{-\int_{x''}^x dx' g(x')} \\ &= f(x) - g(x) \int_{x_0}^x dx'' f(x'') e^{-\int_{x''}^x dx' g(x')} \\ &= f(x) - g(x) y_{si}(x) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Beispiel: angetriebener RC-Kreis

Wir betrachten nochmals den *RC*-Kreis aus Kapitel 4.1, gehen aber davon aus, dass zusätzlich eine Wechselspannung angelegt wird:

$$\begin{aligned} R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} &= U_0 \cos(\omega t) \\ \frac{dQ}{dt} + \gamma Q &= I_0 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (4.61)$$

mit $I_0 = U_0/R$. Da $\cos(\omega t) = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$, können wir auch die DGL mit $e^{i\omega t}$ auf der rechten Seite betrachten, die Gleichung lösen und am Schluss den Realteil nehmen (denn γ und I_0 sind reell):

$$\frac{dQ}{dt} + \gamma Q = I_0 e^{i\omega t} \quad (4.62)$$

Als Anfangszeitpunkt wählen wir der Einfachheit halber $t_0 = 0$. Die Lösung der homogenen Gleichung kennen wir bereits:

$$Q_h(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \quad (4.63)$$

Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich aus (4.59) mit folgenden Ersetzungen: $x \rightarrow t$, $x' \rightarrow t'$, $x'' \rightarrow t''$, $g(x') \rightarrow \gamma$, $f(x'') \rightarrow e^{i\omega t''}$:

$$\begin{aligned} Q_{si}(t) &= I_0 \int_0^t dt'' e^{i\omega t''} e^{-\gamma \int_{t''}^t dt'} \\ &= I_0 \int_0^t dt'' e^{i\omega t''} e^{-\gamma(t-t'')} \\ &= I_0 e^{-\gamma t} \frac{1}{i\omega + \gamma} (e^{(i\omega + \gamma)t} - 1) \\ &= \frac{I_0}{i\omega + \gamma} (e^{i\omega t} - e^{-\gamma t}) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Somit erhalten wir die folgende allgemeine – immer noch komplexe – Lösung:

$$\begin{aligned} Q(t) &= Q_0 e^{-\gamma t} + \frac{I_0}{i\omega + \gamma} (e^{i\omega t} - e^{-\gamma t}) \\ &= \left(Q_0 - \frac{I_0}{i\omega + \gamma} \right) e^{-\gamma t} + \frac{I_0}{i\omega + \gamma} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Der erste Beitrag, $\sim e^{-\gamma t}$, ist der sogenannte transiente Anteil, der auch via Q_0 von der Anfangsbedingung abhängt; er ist für $\gamma t \gg 1$ vernachlässigbar. Im zweiten Beitrag, $\sim e^{i\omega t}$, verwenden wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\omega + \gamma} &= \frac{-i\omega + \gamma}{(i\omega + \gamma)(-i\omega + \gamma)} = \frac{\gamma - i\omega}{\omega^2 + \gamma^2} \\ \rightarrow \frac{I_0}{i\omega + \gamma} e^{i\omega t} &= \frac{I_0}{\omega^2 + \gamma^2} (\gamma - i\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &= \frac{I_0}{\omega^2 + \gamma^2} [(\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + i(\gamma \sin \omega t - \omega \cos \omega t)] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Wir setzen jetzt $Q(t) = Q_1(t) + iQ_2(t)$, d. h. $\text{Re } Q(t) = Q_1(t)$ und $\text{Im } Q(t) = Q_2(t)$. *Anmerkung:* In der Elektrotechnik und teilweise in der Physik ist auch die Notation $Q(t) = Q'(t) + iQ''(t)$ gebräuchlich.

$$\rightarrow Q_1(t) = \left(Q_0 - \frac{I_0\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \right) e^{-\gamma t} + \frac{I_0}{\omega^2 + \gamma^2} (\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \quad (4.67)$$

Damit erhalten wir für $\gamma t \gg 1$:

$$\begin{aligned} Q(t) &\simeq \frac{I_0}{\omega^2 + \gamma^2} (\gamma \cos \omega t + \omega \sin \omega t) \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos \omega t + \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \sin \omega t \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die Vorfaktoren von $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ sind < 1 , außerdem sind sie quadriert und dann aufsummiert gleich 1. Daher können wir einen Winkel α mit

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} = \sin \alpha \quad (4.69)$$

eingeführen und erhalten schließlich ($\gamma t \gg 1$):

$$Q(t) = \frac{I_0}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos(\omega t - \alpha) \quad (4.70)$$

Interpretation: Wir erhalten wieder einen Kosinus, der aber im Vergleich zur Kraft ($\sim \cos(\omega t)$) um den Winkel α phasenverschoben ist. Im Grenzfall $\omega \ll \gamma$ ergibt sich $\alpha = 0$, für $\omega \gg \gamma$ dagegen $\alpha = \pi/2$. Dies folgt auch direkt aus der DGl (4.61), wenn wir die Grenzfälle $|\dot{Q}| \ll \gamma|Q|$ bzw. $|\dot{Q}| \gg \gamma|Q|$ betrachten.

4.4.2 2. Ordnung: Lösung durch Raten

Manchmal lässt sich eine spezielle Lösung durch Raten finden.

Beispiel:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 2e^{-t} \quad (4.71)$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGI (Kapitel 4.3.1):

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 \rightarrow x_h(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} \quad (4.72)$$

Im Hinblick auf die Form der Inhomogenität machen wir folgenden Ansatz für die spezielle Lösung: $x_{si} = \alpha e^{-t}$, d. h. von der gleichen Form (Zeitabhängigkeit) wie die Inhomogenität. Einsetzen in die DGI liefert:

$$\alpha e^{-t} - 4\alpha e^{-t} + 4\alpha e^{-t} = 2e^{-t} \Rightarrow \alpha = 2 \quad (4.73)$$

Daher ist die allgemeine Lösung:

$$x(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + 2e^{-t} \quad (4.74)$$

Beispiel: Resonanzfall

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 e^{i\omega t} \quad (4.75)$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGI:

$$x_h(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (4.76)$$

Hier führt der Ansatz $x_{si} = \alpha e^{i\omega t}$ nicht zum Ziel, denn dies ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Daher versuchen wir Folgendes:

$$\begin{aligned} x_{si} &= \alpha t e^{i\omega t} \\ \dot{x}_{si} &= \alpha e^{i\omega t} + i\omega \alpha t e^{i\omega t} \\ \ddot{x}_{si} &= 2i\omega \alpha e^{i\omega t} - \omega^2 \alpha t e^{i\omega t} \\ \rightarrow 2i\omega \alpha e^{i\omega t} &= f_0 e^{i\omega t} \Rightarrow \alpha = -\frac{if_0}{2\omega} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Allgemeine Lösung daher:

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} - \frac{if_0}{2\omega} t e^{i\omega t} \\ &= \left(A + \frac{f_0}{2\omega} t e^{-i\pi/2} \right) e^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (4.78)$$

Das zusätzliche t in der speziellen Lösung ist typisch für den Resonanzfall, es beschreibt ein 'Aufschaukeln' der Lösung. Außerdem tritt eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ zwischen angelegter Kraft ($f_0 e^{i\omega t}$) und Systemantwort auf.

4.5 Methode der Green'schen Funktion

Beispiel: Getriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)/m \quad (4.79)$$

Die Kraft $F(t)$ kann zunächst beliebig sein – wir diskutieren zuerst das allgemeine Ergebnis und betrachten dann ein konkretes Beispiel. *Idee:* Zerlege die kontinuierliche Kraft $F(t)$ in viele kurze

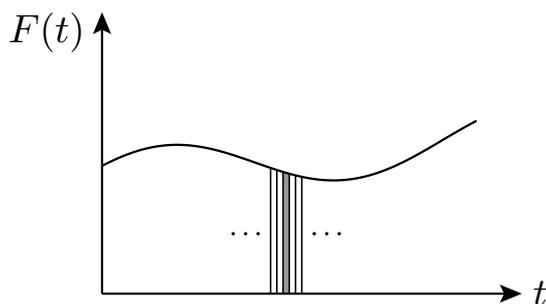


Abbildung 4.2: Zerlegung von $F(t)$

Kraftstöße und überlagere dann die zugehörigen Lösungen (was aufgrund der Linearität der Differentialgleichung möglich ist).

Der harmonische Oszillator sei bis zur Zeit t' in Ruhe und erfahre dann einen sehr kurzen Kraftstoß. Anschließend wird der Oszillator eine gedämpfte Oszillation ausführen. Wir betrachten zuerst

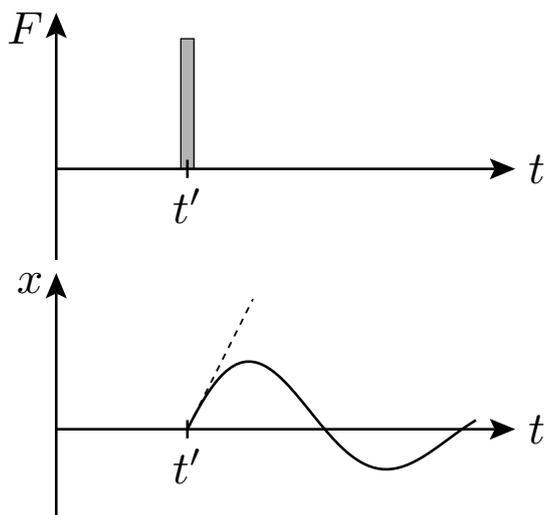


Abbildung 4.3: Gedämpfte Oszillation als Reaktion auf einen kurzen Kraftstoß

ein infinitesimal kleines Intervall, $t' - \epsilon \dots t' + \epsilon$ im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$. Mithilfe der Newton'schen

Gleichung folgt dann, wenn wir voraussetzen, dass der Oszillator vor dem Kraftstoß in Ruhe ist:

$$\begin{aligned} \dot{p} = F &\rightarrow \Delta p = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} F dt; \\ p(t' - \epsilon) = 0 &\rightarrow p(t' + \epsilon) = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} F dt \end{aligned} \quad (4.80)$$

Die Reaktion des Oszillators auf einen Einheitskraftstoß, $\int F dt = 1$, entspricht somit den Anfangsbedingungen $x(t') = 0$, $\dot{x}(t' - \epsilon) = 0$ und $\dot{x}(t' + \epsilon) = 1/m$ (wegen $p = m\dot{x}$). Einen beliebig kurzen Kraftstoß, der integriert 1 ergibt, nennt man auch δ -Puls.

4.5.1 Green'sche Funktion und der Wronskian

Da der Kraftstoß nur sehr kurz zum Zeitpunkt t' wirkt, müssen wir für $t > t'$ die homogene DGL mit den gerade diskutierten Anfangsbedingungen lösen. Der Exponentialansatz führt auf

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \rightarrow \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} - \frac{\gamma}{2} = \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Wir nehmen an, dass $\omega_0^2 > \gamma^2/4$, und benutzen die letztere Version. Außerdem sei $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}$:

$$\begin{aligned} \rightarrow x_1(t) &= e^{-\gamma t/2} \cos(\bar{\omega} t), \quad x_2(t) = e^{-\gamma t/2} \sin(\bar{\omega} t) \\ x(t) &= Ax_1(t) + Bx_2(t) \\ &= [A \cos(\bar{\omega} t) + B \sin(\bar{\omega} t)] e^{-\gamma t/2} \end{aligned} \quad (4.82)$$

Anfangsbedingungen, wie oben diskutiert:

$$\begin{aligned} x(t') = 0 &\rightarrow Ax_1(t') + Bx_2(t') = 0 \\ \dot{x}(t') = \frac{1}{m} &\rightarrow A\dot{x}_1(t') + B\dot{x}_2(t') = \frac{1}{m} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Auflösen nach A und B :

$$\begin{aligned} A = -\frac{1}{m} \frac{x_2(t')}{W(t')}, \quad B = \frac{1}{m} \frac{x_1(t')}{W(t')} \\ W(t') = x_1(t')\dot{x}_2(t') - \dot{x}_1(t')x_2(t') \end{aligned} \quad (4.84)$$

Die Größe $W(t') = \bar{\omega} e^{-\gamma t'}$, die insbesondere ungleich null ist (vorausgesetzt, x_1 und x_2 sind die beiden Fundamentallösungen, siehe unten), nennt man Wronski-Determinante oder Wronskian. Endergebnis:

$$A = -\frac{1}{m\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega} t') e^{\frac{\gamma}{2} t'}, \quad B = \frac{1}{m\bar{\omega}} \cos(\bar{\omega} t') e^{\frac{\gamma}{2} t'} \quad (4.85)$$

$$\rightarrow x(t) = \frac{1}{m\bar{\omega}} \sin[\bar{\omega}(t - t')] e^{-\gamma(t-t')/2} \quad (t > t') \quad (4.86)$$

Alternativ kann man wie folgt argumentieren. Wenn (4.82) die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist, dann ist auch die gleiche Funktion mit einem um eine Konstante verschobenen Zeitargument eine Lösung:

$$x(t) = \left[\tilde{A} \cos(\bar{\omega}(t - t')) + \tilde{B} \sin(\bar{\omega}(t - t')) \right] e^{-\gamma(t-t')/2} \quad (4.87)$$

mit anderen Konstanten \tilde{A} und \tilde{B} . Daran sieht man aber sofort, dass $\tilde{A} = 0$, und auch \tilde{B} bestimmt man leicht aus der Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit.

Die so erhaltene homogene Lösung, einschließlich $x_h(t) = 0$ für $t < t'$, definiert die Green'sche Funktion:

$$G(t - t') = \frac{1}{m\bar{\omega}} \sin(\bar{\omega}(t - t')) e^{-\gamma(t-t')/2} \Theta(t - t') \quad (4.88)$$

wobei die Heaviside'sche Stufenfunktion durch

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (4.89)$$

definiert ist. Die Überlagerung dieser Lösung zu verschiedenen Zeitpunkten t' beschreibt dann die Antwort des Oszillators auf eine allgemeine Kraft $F(t)$:

$$x_{si}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' F(t') G(t - t') \quad (4.90)$$

Die Stufenfunktion, d. h. die Tatsache dass $G(t - t') = 0$ für $t < t'$, bedeutet anschaulich, dass sich zu einem Zeitpunkt t nur diejenigen Kräfte auswirken können, die zu einem früheren Zeitpunkt $t' < t$ gewirkt haben (zeitliche Kausalität). Daher kann man die obere Integrationsgrenze auch durch t ersetzen.

Wir überprüfen, ob dies tatsächlich eine Lösung von $m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$ ist:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t dt' F(t') G(t - t') \\ \dot{x}(t) &= F(t)G(0) + \int_{-\infty}^t dt' F(t') \dot{G}(t - t') = \int_{-\infty}^t dt' F(t') \dot{G}(t - t') \quad (G(0) = 0!) \\ \ddot{x}(t) &= F(t)\dot{G}(0 + \epsilon) + \int_{-\infty}^t dt' F(t') \ddot{G}(t - t') \end{aligned} \quad (4.91)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x &= F(t) \\ mF(t)\dot{G}(0 + \epsilon) + m \int_{-\infty}^t dt' F(t') \ddot{G}(t - t') & \\ + m\gamma \int_{-\infty}^t dt' F(t') \dot{G}(t - t') + m\omega_0^2 \int_{-\infty}^t dt' F(t') G(t - t') &= \\ mF(t)\dot{G}(0 + \epsilon) + \int_{-\infty}^t dt' [m\ddot{G}(t - t') & \\ + m\gamma\dot{G}(t - t') + m\omega_0^2 G(t - t')] &= F(t) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Dabei haben wir $\dot{G}(0 + \epsilon) = 1/m$ benutzt und dass $G(t - t')$ für $t > t'$ eine Lösung der homogenen DGl ist. Wir haben damit eine spezielle Lösung $x_{si}(t)$ der inhomogenen Gleichung erhalten, zu der noch die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung zu addieren ist.

4.5.2 Allgemeine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

Wir betrachten nun den allgemeinen ‘Differentialoperator’

$$\hat{L} = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 \quad (4.93)$$

wobei die Koeffizienten a_n, \dots, a_0 auch von der Zeit abhängen können. Falls mindestens ein Koeffizient zeitabhängig sind, hängt die Green’sche Funktion separat von zwei Argumenten ab, nicht nur von deren Differenz. Dabei ist t sozusagen der Zeitpunkt, an dem die Lösung betrachtet wird, und t' der Zeitpunkt, an dem die Kraft wirkt.

Eigenschaften der Green’schen Funktion:

- $\hat{L}G(t, t') = 0$ für $t > t'$ (\hat{L} enthält nur Ableitungen nach $t!$)
- $G(t, t') = 0$ für $t < t'$
- Anfangsbedingungen:

$$\left. \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} G(t, t') \right|_{t=t'+\epsilon} = \frac{1}{a_n} \quad (4.94)$$

Alle niedrigeren Ableitungen und die Funktion sind stetig (außer für $n = 1$, wo bereits G selbst einen Sprung aufweist).

- Spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\hat{L}x(t) = f(t)$:

$$x_{si}(t) = \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') f(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t, t') f(t') \quad (4.95)$$

Beispiel: inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{x} + g(t)x = f(t) \quad (\text{vgl. Kapitel 4.4.1}) \quad (4.96)$$

Homogene Lösung:

$$x_h(t) = C e^{-\int_{-\infty}^t dt' g(t')} \quad (4.97)$$

Hier wurde der Anfangszeitpunkt nach $-\infty$ geschoben, $x_h(t \rightarrow -\infty) = 0$. Anfangsbedingung für die Green’sche Funktion: $G(t' + \epsilon, t') = 1$.

$$\Rightarrow G(t, t') = \begin{cases} e^{-\int_{t'}^t dt'' g(t'')}, & t > t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad (4.98)$$

Somit finden wir, natürlich in Übereinstimmung mit dem Resultat aus Kapitel 4.4.1:

$$x_{si}(t) = \int_{-\infty}^t dt' f(t') e^{-\int_{t'}^t dt'' g(t'')} \quad (4.99)$$

Beispiel: inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

Abschließend wollen wir noch ein allgemeines Ergebnis für lineare inhomogene DGL zweiter Ordnung vorstellen – beginnen aber wiederum mit dem ungedämpften Oszillator, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$, mit einer geringfügigen Notationsänderung im Vergleich zu Kapitel 4.5.1. Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$x_h(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (4.100)$$

Green'sche Funktion:

$$\begin{aligned} G(t', t') = 0 \rightarrow G(t, t') &= A \sin \omega_0(t - t') \\ \frac{d}{dt} G(t, t') &= A \omega_0 \cos \omega_0(t - t') \\ \frac{d}{dt} G(t, t') \Big|_{t'+\epsilon} &= A \omega_0 = 1 \rightarrow A = \frac{1}{\omega_0} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Damit finden wir ($t > t'$):

$$G(t, t') = \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t - t') = \frac{1}{\omega_0} (\sin \omega_0 t \cos \omega_0 t' - \cos \omega_0 t \sin \omega_0 t') \quad (4.102)$$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} x_{si}(t) &= \int_{-\infty}^t dt' G(t, t') f(t') = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^t dt' \sin \omega_0(t - t') f(t') \\ &= \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int_{-\infty}^t dt' \cos \omega_0 t' f(t') - \frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^t dt' \sin \omega_0 t' f(t') \end{aligned} \quad (4.103)$$

Wronski-Determinante für den harmonischen Oszillator ($x_1 = \cos(\dots)$, $x_2 = \sin(\dots)$):

$$W(t') = x_1(t') \frac{dx_2}{dt} \Big|_{t=t'} - x_2(t') \frac{dx_1}{dt} \Big|_{t=t'} = \omega_0 \neq 0 \quad (4.104)$$

Das Ergebnis (4.103) ist ein Beispiel für folgende allgemeine Aussage. Betrachte eine lineare DGL zweiter Ordnung, mit $x_1(t)$ und $x_2(t)$ den beiden Fundamentallösungen. Dann ist die Green'sche Funktion durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$G(t - t') = \frac{x_2(t)x_1(t') - x_1(t)x_2(t')}{W(t')} \Theta(t - t') \quad (4.105)$$

Daraus folgt:

$$x_{si}(t) = x_2(t) \int_{-\infty}^t dt' \frac{x_1(t') f(t')}{W(t')} - x_1(t) \int_{-\infty}^t dt' \frac{x_2(t') f(t')}{W(t')} \quad (4.106)$$

Falls die Wronski-Determinante gleich null ist, hat man noch nicht zwei Fundamentallösungen gefunden. Anders ausgedrückt: $W = 0$ bedeutet, dass x_1 und x_2 linear abhängig sind, $x_1 \sim x_2$.

4.6 Zusammenfassung

Differentialgleichungen 1. Ordnung

- Homogene Differentialgleichungen vom Typ

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad (4.107)$$

→ Trennung der Variablen

- Inhomogene Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) + h(x) \quad (4.108)$$

→ Variation der ‘Konstanten’ der homogenen Lösung

In physikalischen Problemstellungen oft hilfreich:

- Bildung eines ersten Integrals (zum Beispiel Newton’sche Bewegungsgleichung = Differentialgleichung 2. Ordnung)
- Konservative Kräfte, Energieerhaltung → Differentialgleichung 1. Ordnung

Lineare Differentialgleichungen: Überlagerung von Lösungen

- Konstante Koeffizienten → Exponentialansatz
- Lineare inhomogene Differentialgleichungen: allgemeine Lösung = allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung
- Spezielle Lösung → Methode der Green’schen Funktion

Kapitel 5

Lineare Algebra

5.1 Dyadisches Produkt

Physikalische Anwendung: Trägheitstensor (siehe Kapitel 2.8)

Wir betrachten nochmals den Drehimpuls einer sich bewegenden Masse:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (5.1)$$

und nehmen an, dass diese Masse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine feste Achse rotiert, d. h. $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ mit $\boldsymbol{\omega}$ ein konstanter Vektor. Daraus berechnet man den Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m[(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] = m[\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]\boldsymbol{\omega} \quad (5.2)$$

Dyadisches Produkt: $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$, mit $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})_{ij} = x_i x_j$. In Komponentenschreibweise:

$$L_i = m \left[\omega_i \sum_{j=1}^3 x_j x_j - x_i \sum_{j=1}^3 x_j \omega_j \right] = m \sum_{k=1}^3 [r^2 \delta_{ik} - x_i x_k] \omega_k \quad (5.3)$$

Trägheitstensor:

$$\boldsymbol{\Theta} = m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \leftrightarrow \Theta_{ij} = m[r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] = \Theta_{ji} \quad (5.4)$$

Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehvektor:

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}; \quad L_i = \sum_j \Theta_{ij} \omega_j \quad (5.5)$$

Im Allgemeinen ist \mathbf{L} nicht parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, daher kann $\boldsymbol{\Theta}$ nicht durch ein Skalar ersetzt werden.

Allerdings ist \mathbf{L} immer parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, wenn

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix} = \theta \mathbf{1} \quad (5.6)$$

Beispiele: Kugel und Würfel mit homogener Massenverteilung

Ansonsten ist \mathbf{L} parallel zu $\boldsymbol{\omega}$, falls $\boldsymbol{\omega}$ in Richtung einer der drei Hauptträgheitsachsen zeigt, die wie folgt definiert sind:

$$\Theta \boldsymbol{\omega}^{(i)} = \theta^{(i)} \boldsymbol{\omega}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.7)$$

Dies stellt ein Eigenwertproblem dar, $\theta^{(i)}$ nennt man Eigenwert, $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ Eigenvektor, siehe Kapitel 5.4. Physikalische Interpretation:

- $\theta^{(i)}$: Hauptträgheitsmoment, $\mathbf{e}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}^{(i)} / |\boldsymbol{\omega}^{(i)}|$: Hauptträgheitsachse

Trägheitstensor

Wir betrachten jetzt die durch die Eigenvektoren von Θ aufgespannte Orthonormalbasis, $\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^{(j)} = \delta_{ij}$. *Anmerkung:* Die Orthonormalität ergibt sich aus der Tatsache, dass Θ reell und symmetrisch ist, was auch impliziert, dass die Eigenwerte $\theta^{(i)}$ reell sind. Mit $\boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega_i \mathbf{e}^{(i)}$, $\omega_i = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}^{(i)}$ erhalten wir:

$$\Theta \boldsymbol{\omega} = \sum_i \omega_i \Theta \mathbf{e}^{(i)} = \sum_i \theta^{(i)} \omega_i \mathbf{e}^{(i)} = \sum_i \theta^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (5.8)$$

$$\Rightarrow \Theta = \sum_i \theta^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} \quad (5.9)$$

Interpretation: Θ projiziert $\boldsymbol{\omega}$ auf die durch die $\mathbf{e}^{(i)}$ definierten Achsen, multipliziert die Projektion mit den entsprechenden Hauptträgheitsmomenten und baut die Anteile wieder zusammen.

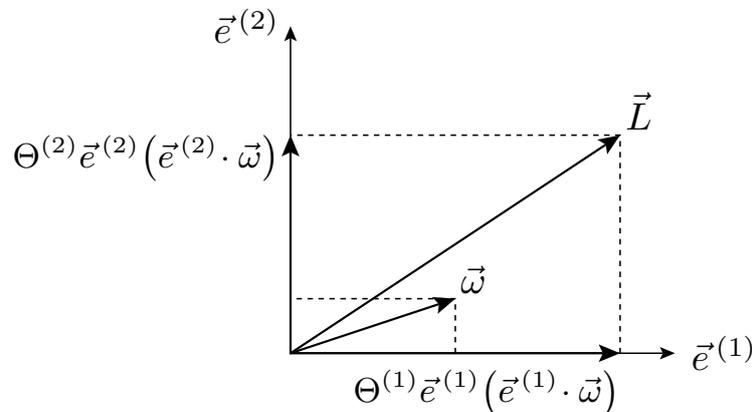


Abbildung 5.1: Zerlegung des Trägheitstensors

Beispiel

Hauptträgheitsachse:

$$\mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Hauptträgheitsmomente:

$$\theta^{(1)} = 2, \theta^{(2)} = 4, \theta^{(3)} = 1 \quad (5.11)$$

Daraus folgt:

$$\theta^{(1)} \mathbf{e}^{(1)} \otimes \mathbf{e}^{(1)} = 2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

$$\theta^{(2)} \mathbf{e}^{(2)} \otimes \mathbf{e}^{(2)} = 4 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ -1 \ 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

$$\theta^{(3)} \mathbf{e}^{(3)} \otimes \mathbf{e}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

Somit finden wir in diesem Beispiel folgenden Trägheitstensor:

$$\Theta = \sum_{i=1}^3 \theta^{(i)} \mathbf{e}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Die Diagonalelemente Θ_{ii} nennt man Trägheitsmomente, die Nicht-Diagonalelemente Θ_{ij} , $i \neq j$, Deviationsmomente. Man rechnet zum Beispiel leicht nach:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{kein Eigenvektor} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eigenvektor, Eigenwert 2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Projektionsmatrizen

Projektionsmatrizen \mathbf{P} sind über die Relation $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ definiert, d. h. \mathbf{P} projiziert einen Vektor auf eine bestimmte Richtung, und das nochmalige Ausführen der Projektion hat dann offensichtlich keine weitere Wirkung. Beispiele sind die Matrizen $\mathbf{P}_i = \mathbf{e}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)} (\mathbf{e}^{(i)})^T$ (vgl. Kapitel 1.3):

- Projektion auf $\mathbf{e}^{(1)}$

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{e}^{(1)} \otimes \mathbf{e}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$\mathbf{P}_1^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \quad (5.18)$$

- Projektion in die x - y -Ebene

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{e}^{(1)} \otimes \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} \otimes \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

- Vollständigkeit

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{e}^{(1)} \otimes \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} \otimes \mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{e}^{(3)} \mathbf{e}^{(3)} = \mathbf{1} \quad (5.20)$$

Interpretation: Die Zerlegung eines Vektor in der Basis $\{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}\}$ und anschließendes Wiederausammenbauen liefert den ursprünglichen Vektor: \rightarrow Die Basis ist vollständig.

5.2 Determinanten

Matrixinversion in zwei Dimensionen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Die Gleichungen $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$ stellen ein lineares Gleichungssystem für die zu bestimmenden b_{ij} dar:

$$\begin{aligned} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} &= 1 \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} &= 0 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} &= 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Die Matrix \mathbf{A} ist genau dann invertierbar, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Und genau dann ist das zweidimensionale inhomogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} \neq 0$ lösbar, und die Lösung ist $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Determinanten

Für 2×2 -Matrizen gilt:

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (5.23)$$

Lässt sich dieses Konzept auf höherdimensionale Matrizen verallgemeinern?

3×3 -Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

In diesem Fall ist die Determinante durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{31}a_{22} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\end{aligned}\quad (5.25)$$

Hier gilt analog: Eine 3×3 -Matrix ist invertierbar, falls $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Determinanten lassen sich mithilfe des Entwicklungssatzes berechnen, der zunächst für den 3×3 -Fall illustriert wird.

Entwicklung nach der ersten Spalte

- Multipliziere jedes Element a_{i1} der ersten Spalte mit der Determinante der Matrix, die sich durch Streichen der i -ten Zeile und ersten Spalte ergibt.
- Addiere alle Beiträge unter Verwendung alternierender Vorzeichen. Dabei wird die Matrix schachbrettartig mit Vorzeichen belegt, wobei links oben mit einem $+$ begonnen wird. Entsprechend kann man nach einer beliebigen Spalte oder Zeile entwickeln.

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (5.26)$$

Entwicklung nach der zweiten Zeile

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{Vorzeichen:} \quad \begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}\quad (5.27)$$

‘21’:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ | & & \\ a_{21} & - & a_{22} & - & a_{23} \\ | & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$

‘22’:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & | & \\ a_{21} & - & a_{22} & - & a_{23} \\ & & | & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

‘23’:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) \quad (5.28)$$

$$\rightarrow \det \mathbf{A} = -a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{23}a_{12}a_{31} \quad (5.29)$$

Alternativ kann man für 3×3 -Matrizen die Regel von Sarrus anwenden, bei der man die Matrixelemente entlang aller Diagonalen aufmultipliziert und dann addiert bzw. subtrahiert. Dazu ist es praktisch, die Determinante um zwei Spalten zu ergänzen:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & a_{11} & a_{12} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & & \\ - & - & - & + & + & + & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Auch die Determinante einer 2×2 -Matrix kann man mithilfe der Entwicklung nach Zeilen oder Spalten interpretieren.

Rekursionsformel für Determinanten von $N \times N$ -Matrizen

Entwicklungssatz allgemein, wobei wir nach der i -ten Zeile, die willkürlich herausgegriffen wird, entwickeln:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad (5.30)$$

Hier ist \mathbf{A}_{ij} die $(N-1) \times (N-1)$ -Matrix, die durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte in \mathbf{A} entsteht. *Anmerkung:* i ist eine feste, willkürlich herausgegriffene Zeile (keine Summenkonvention!). Explizite Darstellung der Determinante:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\pi} (-1)^{j(\pi)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{Ni_N} \quad (5.31)$$

Dabei sind (i_1, \dots, i_N) alle möglichen Permutationen π von $(1, \dots, N)$, und $j(\pi)$ ist gerade für gerade Permutationen und ungerade für ungerade Permutation, d. h. $(-1)^{j(\pi)} = 1$ (gerade) bzw. $(-1)^{j(\pi)} = -1$ (ungerade). Für 3×3 -Matrizen, siehe oben.

Bemerkungen

- Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

- Addition eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile zu einer anderen Spalte bzw. Zeile lässt die Determinante unverändert.
- Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einem Faktor multipliziert die Determinante mit diesem Faktor.
- Sind die Spalten oder Zeilen linear abhängig, so verschwindet die Determinante, da dann eine Spalte bzw. Zeile zu null gemacht werden kann.
- Das Vertauschen aller Spalten mit den entsprechenden Zeilen ändert die Determinante nicht:
 $\rightarrow \det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$
 Dies impliziert auch, dass man sowohl nach einer beliebigen Zeile als auch nach einer beliebigen Spalte entwickeln kann.

Multiplikationssatz

$$\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} \quad (5.32)$$

Dabei wurde $\det \mathbf{1} = 1$ benutzt.

Eine Matrix heißt orthogonal, wenn ihre transponierte Matrix gleich der inversen Matrix ist, $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}^{-1}$. Daraus folgt sofort:

$$(\det \mathbf{D})^2 = \det \mathbf{D} \det(\mathbf{D}^T) = \det \mathbf{D} \det(\mathbf{D}^{-1}) = 1 \rightarrow \det \mathbf{D} = \pm 1 \quad (5.33)$$

Eine orthogonale Matrix mit $\det \mathbf{D} = +1$ beschreibt eine Drehung, bei $\det \mathbf{D} = -1$ handelt es sich um Drehung + Spiegelung (in ungeraden Dimensionen). Beispiel (Spiegelung an der x - z -Ebene):

$$\text{Spiegelung, } y \rightarrow -y : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Anwendung von Determinanten im bisherigen Stoff

(1) Kreuzprodukt:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x(a_2b_3 - a_3b_2) - \mathbf{e}_y(a_1b_3 - a_3b_1) + \mathbf{e}_z(a_1b_2 - a_2b_1) \quad (5.35)$$

(2) Spatprodukt:

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (5.36)$$

(3) ϵ -Tensor:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (5.37)$$

(4) Umrechnung eines Flächenelements (Funktionaldeterminante):

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} dudv = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| dudv \quad (5.38)$$

Mit entsprechenden Verallgemeinerungen in höheren Dimensionen, siehe Kapitel 2.8.

(5) Wronski-Determinante

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix} \quad (N = 2) \quad (5.39)$$

Ebenfalls mit entsprechender Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen, zum Beispiel:

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \ddot{x}_3 \end{vmatrix} \quad (N = 3) \quad (5.40)$$

Im allgemeinen Fall (N Funktionen x_1, \dots, x_N) treten die Funktionen und ihre Ableitungen bis zur $(N - 1)$ -ten Ordnung auf.

5.3 Lineare Gleichungssysteme

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \quad (5.41)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N & = & c_2 \\ & \dots & = \dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N & = & c_N \end{cases} \quad (5.42)$$

Inhomogenes Gleichungssystem: $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

Lösung:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$$

Aber existiert die inverse Matrix, \mathbf{A}^{-1} ? Wegen

$$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{AA}^{-1}) = \det \mathbf{1} = 1$$

ist $\det \mathbf{A} \neq 0$ eine notwendige Bedingung für die Existenz der inversen Matrix. Wir werden noch zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Wir halten fest: Ein inhomogenes Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null ist.

Homogenes Gleichungssystem: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$

In diesem Fall, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, kann es nur dann eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ geben, wenn die Spaltenvektoren von \mathbf{A} linear abhängig sind, d. h. wenn $\det \mathbf{A} = 0$. Denn für $\det \mathbf{A} \neq 0$ wäre \mathbf{A} invertierbar und es würde sofort $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ folgen.

Beispiel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad (5.43)$$

Hier ist offensichtlich $\det \mathbf{A} = 0$, da 1. Zeile + 2. Zeile = 3. Zeile. Wir betrachten (zum Beispiel) die ersten beiden Zeilen und darin x_3 als 'Inhomogenität':

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_3 \\ 2x_1 - x_2 = -x_3 \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det \mathbf{A}' = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \\ (\mathbf{A}')^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow x_1 = -\frac{3}{5}x_3, x_2 = -\frac{1}{5}x_3 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Wir setzen nun $x_3 = 5\alpha$, α beliebig, und erhalten die allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Bestimmung der inversen Matrix

Wir betrachten nochmals den Entwicklungssatz (Entwicklung nach der i -ten Zeile):

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \rightarrow \sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})}{\det \mathbf{A}} = 1 \quad (5.47)$$

Dies ist offensichtlich von der Form $\sum_j a_{ij} b_{ji} = 1$, mit

$$b_{ji} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ij})}{\det \mathbf{A}} \quad (5.48)$$

Wenn wir nun noch zeigen können, dass $\sum_j a_{ij} b_{jk} = 0$ für $i \neq k$, dann gilt insgesamt

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik} \quad (5.49)$$

und wir haben damit die Matrixelemente b_{jk} der inversen Matrix gefunden, da $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}$ die inverse Matrix definiert. Für den Beweis betrachten wir den folgenden Ausdruck für $i \neq k$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N (-1)^{k+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{kj}) &= \sum_{j=1}^N (-1)^{k+j} a_{ij} \det(\tilde{\mathbf{A}}_{kj}) \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{k+j} \tilde{a}_{kj} \det(\tilde{\mathbf{A}}_{kj}) = \det(\tilde{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ erhält man, indem man in der Matrix \mathbf{A} die k -te Zeile durch die i -te Zeile ersetzt, d. h. $\tilde{a}_{kj} = a_{ij}$ für alle j . Da in \mathbf{A}_{kj} und $\tilde{\mathbf{A}}_{kj}$ aber, ausgehend von \mathbf{A} , die k -te Zeile per Definition gestrichen ist, gilt $\mathbf{A}_{kj} = \tilde{\mathbf{A}}_{kj}$. Schließlich folgt $\det(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$, was zu beweisen war, da in $\tilde{\mathbf{A}}$ die i -te Zeile gleich der k -ten Zeile ist. Wir halten fest:

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})}{\det \mathbf{A}} \quad (5.51)$$

Der Zähler in diesem Ausdruck heißt auch Adjunkte.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 + 12 = 20 \quad (5.53)$$

Inverse Matrix:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -9 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Dabei wurde für die Berechnung (z. B.) der ersten Zeile benutzt:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

$$\rightarrow (-1)^{1+1} \det \mathbf{A}_{11} = 8, \quad (-1)^{1+2} \det \mathbf{A}_{21} = 4, \quad (-1)^{1+3} \det \mathbf{A}_{31} = -4 \quad (5.56)$$

Wir überprüfen das Ergebnis explizit:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -9 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \quad (5.57)$$

Anwendung auf die Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} \quad (5.58)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^N b_{ij}c_j = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \sum_{j=1}^N (-1)^{i+j} c_j \det(\mathbf{A}_{ji}) \quad (5.59)$$

Dieses Ergebnis ist als Cramers'sche Regel bekannt. Der Ausdruck $\sum_j (-1)^{i+j} c_j \det(\mathbf{A}_{ji})$ ist gleich der Determinante der $N \times N$ -Matrix \mathbf{A}_i , die aus der Matrix \mathbf{A} hervorgeht, indem man die i -te Spalte durch den Vektor \mathbf{c} ersetzt: Dies wird deutlich, wenn man die Variante des Entwicklungssatzes betrachtet, in der nicht nach der i -ten Zeile, siehe (5.47), sondern nach der i -ten Spalte entwickelt wird: $\det\mathbf{A} = \sum_j (-1)^{i+j} a_{ji} \det(\mathbf{A}_{ji})$.

$$\Rightarrow x_i = \det(\mathbf{A}_i) / \det(\mathbf{A}) \quad (5.60)$$

Beachten Sie aber, dass es sich bei den \mathbf{A}_{ji} um $(N-1) \times (N-1)$ -Matrizen handelt.

Beispiel:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \det\mathbf{A} = 20, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

Anwendung der Cramer'schen Regel:

$$\det\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} c_1 & 0 & 2 \\ c_2 & 2 & -1 \\ c_3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{20} = -\frac{1}{5}$$

$$\det\mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & c_1 & 2 \\ 3 & c_2 & -1 \\ 0 & c_3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2 \rightarrow x_2 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\det\mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 3 & 2 & c_2 \\ 0 & 2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12 \rightarrow x_3 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \quad (5.62)$$

5.4 Eigenwertprobleme

Bereits in Kapitel 5.1 hatten wir erwähnt, dass die Bestimmung der Hauptträgheitsmomente und -achsen des Trägheitstensors ein Eigenwertproblem darstellen. Allgemein setzten wir an:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \quad (5.63)$$

Gesucht sind die Eigenwerte λ_i , für die es eine nichttriviale Lösung \mathbf{x}_i (= Eigenvektor) gibt. Umformulierung:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})\mathbf{x} = 0 \quad (5.64)$$

Dieses homogene Gleichungssystem hat nichttriviale Lösungen wenn $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0$, was wir im ersten Schritte für die Bestimmung der Eigenwerte nutzen.

Beispiel: Drehmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

Anwendung von Gleichung (5.64) liefert:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0 \quad (5.66)$$

$$\rightarrow \lambda_{1,2} = \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi - 1} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi = e^{\pm i\varphi} \quad (5.67)$$

Für diese Drehmatrix gibt es nur einen reellen Eigenwert, wenn $\varphi = 0$ ist, ansonsten sind die Eigenwerte komplex. Beachten Sie, dass die Drehmatrix zwar reell, aber nicht symmetrisch ist. Die normierten Eigenvektoren sind:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

mit $|\mathbf{x}_1|^2 = \mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_1 = 1$, $|\mathbf{x}_2|^2 = \mathbf{x}_2^* \cdot \mathbf{x}_2 = 1$ und $\mathbf{x}_1^* \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2^* = 0$.

Bei reell symmetrischen Matrizen ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$) andererseits sind alle Eigenwerte reell, denn:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \lambda^*\mathbf{x}^* \quad (5.69)$$

Wenn λ ein Eigenwert ist, so ist auch sein konjugiert Komplexes λ^* ein Eigenwert von \mathbf{A} , da die Matrix reell ist. Weiter folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} &= \lambda \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}^* &= \lambda^* \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^* \end{aligned} \quad (5.70)$$

Wegen der Kommutativität des Skalarprodukts ist $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^*$, d.h. $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{x}$ ist reell. Aus der Symmetrie von \mathbf{A} folgt:

$$\sum_{i,j} x_i^* A_{ij} x_j = \sum_{i,j} x_i^* A_{ji} x_j = \sum_{i,j} x_j A_{ji} x_i^* \leftrightarrow \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}^* \quad (5.71)$$

Damit folgt $\lambda = \lambda^*$, d.h. λ ist reell. Weiterhin gilt: Die Eigenvektoren einer reell symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander, denn:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 &\rightarrow \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2 &\rightarrow \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Wegen $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2$ ergibt sich:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0 \quad (5.73)$$

Aus $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt dann $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$.

Wenn es mehrere linear unabhängige Eigenvektoren zu einem bestimmten Eigenwert gibt, spricht man von Entartung. Diese Eigenvektoren bilden einen Unterraum, in dem jedoch immer eine orthogonale Basis gewählt werden kann.

Wir halten fest: Aus den Eigenvektoren einer reell symmetrischen Matrix lässt sich eine Orthonormalbasis konstruieren.

- *Wichtig für die Quantenmechanik:* Diese Aussagen gelten auch, wenn man 'reell symmetrische Matrix' durch 'hermitesche Matrix' ersetzt. Eine hermitesche Matrix ist wie folgt definiert:

$$a_{ji} = a_{ij}^* \leftrightarrow \mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^T \quad (5.74)$$

Wegen $a_{ii} = a_{ii}^*$ sind alle Diagonalelemente einer hermiteschen Matrix reell. 2×2 -Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \alpha, \gamma \text{ reell, } \beta \text{ komplex} \quad (5.75)$$

Beispiel: reelle symmetrische 2×2 -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

Eigenwertbedingung

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 13 - \lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 - \lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 13)(\lambda - 7) - 27 \\ &= \lambda^2 - 20\lambda + 91 - 27 = \lambda^2 - 20\lambda + 64 \\ &\rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 16 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Eigenvektoren (die wir in diesem Beispiel mit \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 bezeichnen)

- $\lambda_1 = 4$: Betrachte zum Beispiel die erste Zeile der Matrixgleichung $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{1})\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, d. h. $(13 - 4)a_{1,1} - 3\sqrt{3}a_{1,2} = 0$, wobei $a_{1,1}$ und $a_{1,2}$ die erste und die zweite Komponente des zu λ_1 gehörenden Eigenvektors \mathbf{a}_1 bezeichnen.

$$\rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{1,2}}{\sqrt{3}} \\ a_{1,2} \end{pmatrix} \quad (5.78)$$

Hier ist $a_{1,2}$ im Prinzip beliebig; in der Regel wählt man die freie Konstante so, dass der Eigenvektor normiert ist:

$$\frac{4}{3}a_{1,2}^2 = 1 \rightarrow a_{1,2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

Die zweite Zeile der Matrixgleichung ist dann automatisch erfüllt:

$$-3\sqrt{3}a_{1,1} + (7 - 4)a_{1,2} = -3\sqrt{3} \frac{1}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad (5.80)$$

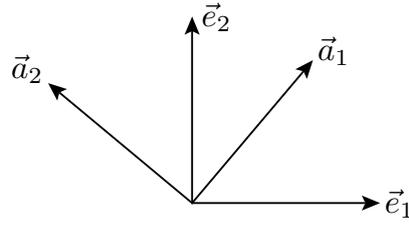


Abbildung 5.2: Im Text werden die Basisvektoren mit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ bezeichnet.

- $\lambda_2 = 16$:

$$(13 - 16)a_{2,1} - 3\sqrt{3}a_{2,2} = 0 \quad (5.81)$$

$$\rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}a_{2,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} \quad (5.82)$$

Aus der Normierungsbedingung folgt:

$$a_{2,2} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

Orthonormalität:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.84)$$

Die Transformation von der ursprünglichen Basis in die Eigenbasis:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.85)$$

ist ein Beispiel für eine Hauptachsentransformation, siehe Kapitel 1.3. Die entsprechende Drehmatrix ergibt sich aus den Skalarprodukten zwischen ‘alten’ und ‘neuen’ Basisvektoren:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.86)$$

Die angegebene Drehmatrix ist so definiert, dass sie \mathbf{a}_1 ‘zurück’ nach \mathbf{e}_1 dreht (und entsprechend \mathbf{a}_2 ‘zurück’ nach \mathbf{e}_2):

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{a}_1 &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1)a_{1,1} + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2)a_{1,2} \\ (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)a_{1,1} + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2)a_{1,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \\ (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_1) + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_2)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1^T \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2^T \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T] \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2^T [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T] \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T [\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2] \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2^T [\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2] \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2^T \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Wir erinnern daran, dass ein transponierter Vektor einen Zeilenvektor bezeichnet, und dass die Summe der Projektionsmatrizen gleich der Einheitsmatrix ist. Zu beachten ist auch, dass wir in diesem Beispiel, in dem wir mehrfach die Komponentendarstellung verwendet haben, die \mathbf{e}_i -Basis verwendet haben:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{in der Basis } \{\mathbf{e}_i\} \quad (5.88)$$

Aber:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in der Basis } \{\mathbf{a}_i\} \quad (5.89)$$

Die Matrix \mathbf{A} ist in der neuen Basis diagonal:

$$\begin{aligned} \mathbf{DAD}^T &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} & \lambda_2 a_{2,1} \\ \lambda_1 a_{1,2} & \lambda_2 a_{2,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \lambda_2 \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \lambda_1 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \lambda_2 \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.90)$$

Explizit für unser Beispiel:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -8\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Die Größe $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ bleibt bei der Drehung unverändert, denn:

$$(\mathbf{x}')^T \mathbf{A}' \mathbf{x}' = (\mathbf{Dx})^T \mathbf{DAD}^T \mathbf{Dx} = \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T \mathbf{DAD}^T \mathbf{Dx} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (5.91)$$

da $(\mathbf{Dx})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{D}^T$ und $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{1}$.

Physikalische Interpretation: Die Energie der Rotationsbewegung eines Körpers, der durch den Trägheitstensor Θ charakterisiert werden kann, ist durch

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \Theta \boldsymbol{\omega} \quad (5.92)$$

gegeben. Die Rotationsenergie ist somit unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, was natürlich sinnvoll ist.

Spektraldarstellung der Matrix \mathbf{A} (obiges Beispiel)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} + 16 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Für jede reell symmetrische Matrix \mathbf{A} mit Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren $\{\mathbf{a}_i\}$ können wir entsprechend die Spektraldarstellung angeben:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{A} \sum_i \mathbf{P}_i = \mathbf{A} \sum_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T = \sum_i (\mathbf{A}\mathbf{a}_i) \mathbf{a}_i^T = \sum_i \lambda_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T \quad (5.94)$$

5.5 Lineare Differentialgleichungssysteme

Ein System von Differentialgleichungen erhält man zum Beispiel, wenn man eine DGL höherer Ordnung durch gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung ausdrückt. Wir betrachten zuerst wieder unser Standardbeispiel.

Harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5.95)$$

Alternativ:

$$\dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -m\omega_0^2 x, \quad \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega_0^2 x \quad (5.96)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

Dies stellt ein gekoppeltes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten dar. Exponentialansatz:

$$\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \mathbf{a} e^{\lambda t}; \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{a} e^{\lambda t} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{a} e^{\lambda t} \quad (5.98)$$

Eigenwertproblem:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} \\ \left| \begin{array}{cc} -\lambda & \frac{1}{m} \\ -m\omega_0^2 & -\lambda \end{array} \right| = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad (5.99)$$

- $\lambda_1 = i\omega_0$:

$$-i\omega_0 a_{1,1} + \frac{1}{m} a_{1,2} = 0 \rightarrow \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

- $\lambda_2 = -i\omega_0$:

$$i\omega_0 a_{2,1} + \frac{1}{m} a_{2,2} = 0 \rightarrow \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.101)$$

Die Eigenvektoren \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 sind nicht orthogonal, $\mathbf{a}_1^* \cdot \mathbf{a}_2 \neq 0$, und dies muss auch nicht der Fall sein, da die Matrix nicht symmetrisch ist. Wir haben auch darauf verzichtet, die Eigenvektoren zu normieren. Durch Überlagerung der beiden Lösungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ im\omega_0 \end{pmatrix} e^{i\omega_0 t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -im\omega_0 \end{pmatrix} e^{-i\omega_0 t} \quad (5.102)$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= a + b, & p(0) &= im\omega_0(a - b) \\ \rightarrow a &= \frac{1}{2} \left(x(0) - i \frac{p(0)}{m\omega_0} \right), & b &= \frac{1}{2} \left(x(0) + i \frac{p(0)}{m\omega_0} \right) \end{aligned} \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) \cos \omega_0 t + \frac{p(0)}{m\omega_0} \sin \omega_0 t \\ \Rightarrow \\ p(t) &= p(0) \cos \omega_0 t - m\omega_0 x(0) \sin \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.104)$$

5.5.1 Beispiel: gekoppelte harmonische Oszillatoren

Die Konfiguration, die wir jetzt untersuchen wollen, ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Potentielle

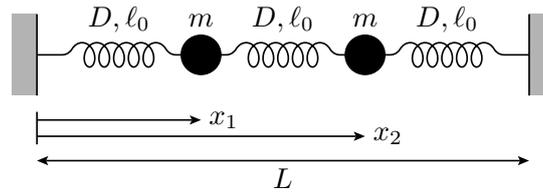


Abbildung 5.3: Zwei gekoppelte Oszillatoren; D bezeichnet die Federkonstante, ℓ_0 die Ruhelänge der einzelnen Federn und L die Gesamtlänge des Systems.

Energie:

$$V(x_1, x_2) = \frac{D}{2}(x_1 - \ell_0)^2 + \frac{D}{2}(x_2 - x_1 - \ell_0)^2 + \frac{D}{2}(L - x_2 - \ell_0)^2 \quad (5.105)$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -2Dx_1 + Dx_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial x_2} = Dx_1 - 2Dx_2 + DL \end{aligned} \quad (5.106)$$

Im ersten Schritt bestimmen wir die Ruhelage, d. h. die Werte von x_1 und x_2 , bei denen die Kräfte verschwinden. Diese Ruhelagen nennen wir $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$:

$$-2Dx_1^{(0)} + Dx_2^{(0)} = 0, \quad Dx_1^{(0)} - 2Dx_2^{(0)} + DL = 0 \quad (5.107)$$

$$\rightarrow x_1^{(0)} = \frac{L}{3}, \quad x_2^{(0)} = \frac{2L}{3} \quad (5.108)$$

Im zweiten Schritt betrachten wir die Auslenkungen aus der Ruhelage, u_1 und u_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + u_1, \quad x_2 = x_2^{(0)} + u_2 \\ V(u_1, u_2) &= V_0 + \frac{D}{2}(2u_1^2 - 2u_1u_2 + 2u_2^2) \end{aligned} \quad (5.109)$$

Für ein beliebiges Potential gilt für die Auslenkung aus der Ruhelage $\mathbf{x}^{(0)}$, wenn wir Terme bis zur zweiten Ordnung betrachten (Taylorentwicklung – wobei die Terme ersten Ordnung verschwinden, wenn wir um die Ruhelage entwickeln):

$$\begin{aligned} V(u_1, \dots, u_N) &= V_0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} u_i u_j + \dots \\ \rightarrow m_i \ddot{u}_i &= -\frac{\partial V}{\partial u_i} = -\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} u_j \end{aligned} \quad (5.110)$$

Hier haben wir auch angenommen, dass die Massen m_i verschieden sind. Wenn wir die Terme dritter Ordnung im Potential (sogenannte anharmonische Terme) vernachlässigen, erhalten wir ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem. In unseren Beispiel:

$$\begin{aligned} m \ddot{u}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial u_1} = -2Du_1 + Du_2 \\ m \ddot{u}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial u_2} = Du_1 - 2Du_2 \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{x}^{(0)}} = \frac{D}{m} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten.

Exponentialansatz:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a} e^{\lambda t} \rightarrow \lambda^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{D}{m} & \frac{D}{m} \\ \frac{D}{m} & -2\frac{D}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

Lösbarkeitsbedingung:

$$\begin{vmatrix} -2\frac{D}{m} - \lambda^2 & \frac{D}{m} \\ \frac{D}{m} & -2\frac{D}{m} - \lambda^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 4\frac{D}{m}\lambda^2 + 4\frac{D^2}{m^2} - \frac{D^2}{m^2} = \lambda^4 + 4\frac{D}{m}\lambda^2 + 3\frac{D^2}{m^2} = 0 \quad (5.113)$$

$$\lambda_{1,2}^2 = -2\frac{D}{m} \pm \sqrt{4\frac{D^2}{m^2} - 3\frac{D^2}{m^2}} \rightarrow \lambda_1^2 = -\frac{D}{m}, \quad \lambda_2^2 = -3\frac{D}{m} \quad (5.114)$$

Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 = -\frac{D}{m} \rightarrow \lambda_1 &= \pm i \sqrt{\frac{D}{m}} : \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2^2 = -3\frac{D}{m} \rightarrow \lambda_2 &= \pm i \sqrt{\frac{D}{m}} : \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.115)$$

Wir definieren noch $\omega_1 = \sqrt{D/m}$ und $\omega_2 = \sqrt{3D/m}$; die Überlagerung der Lösungen – vier freie Konstanten auf! – ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 e^{i\omega_1 t} + b_1 e^{-i\omega_1 t}) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (a_2 e^{i\omega_2 t} + b_2 e^{-i\omega_2 t}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned} \quad (5.116)$$

Wir erkennen zwei charakteristische Eigenschwingungen, die je eine kollektive Bewegung des Systems beschreiben, mit $u_1(t) = u_2(t)$ ($\sim \mathbf{a}_1$) und $u_1(t) = -u_2(t)$ ($\sim \mathbf{a}_2$). In unserem Beispiel haben wir zwei DGL zweiter Ordnung, daher treten vier Integrationskonstanten auf und wir benötigen vier Anfangsbedingungen, um diese festzulegen. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_0, \quad u_2(0) = 0 \\ \dot{u}_1(0) &= 0, \quad \dot{u}_2(0) = 0 \\ \rightarrow \alpha_1 &= \alpha_2 = u_0/2, \quad \phi_1 = \phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (5.117)$$

Resultat:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \frac{u_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + \frac{u_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) \quad (5.118)$$

Für diese Anfangsbedingungen ist zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Masse ausgelenkt und die zweite in Ruhe; beide Anfangsgeschwindigkeiten sind gleich null. Für $t > 0$ verteilt sich die Anfangsenergie auf beide Eigenschwingungen. *Anmerkung:* Eigenschwingungen werden auch ‘Eigenmoden’ genannt.

5.5.2 Beispiel: zwei gekoppelte Massen

Wir stellen uns jetzt vor, dass wir im gerade diskutierten Beispiel die beiden Federn zu den Wänden und auch die Wände entfernen. Die Koordinaten der beiden Massen seien wieder x_1 und x_2 , wobei die Wahl des Koordinatennullpunkts offensichtlich irrelevant ist.

Potentielle Energie:

$$V(x_1, x_2) = \frac{D}{2}(x_2 - x_1 - \ell_0)^2 \rightarrow V(u_1, u_2) = \frac{D}{2}(u_1 - u_2)^2 \quad (5.119)$$

Die Gleichgewichtslage ist hier durch $x_2^{(0)} - x_1^{(0)} = \ell_0$ festgelegt. Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= -Du_1 + Du_2 \\ m\ddot{u}_2 &= +Du_1 - Du_2 \end{aligned} \quad (5.120)$$

Alternativ:

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}; \text{ Ansatz: } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a} e^{\lambda t} \quad (5.121)$$

Eigenwerte:

$$\left| \begin{array}{cc} -\frac{D}{m} - \lambda^2 & \frac{D}{m} \\ \frac{D}{m} & -\frac{D}{m} - \lambda^2 \end{array} \right| = \lambda^4 + 2\frac{D}{m}\lambda^2 = 0 \quad (5.122)$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = 0; \lambda_2^2 = -2\frac{D}{m} \rightarrow \lambda_2 = \pm i\sqrt{\frac{2D}{m}} = \pm i\omega_2 \quad (5.123)$$

Eigenvektoren:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.124)$$

Der Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit Eigenvektor \mathbf{a}_1 entspricht einer Translation der beiden Massen in die gleiche Richtung, $u_1 = u_2$, was die Feder natürlich nicht auslenkt. Dies kann man auch sofort sehen, wenn man die beiden Differentialgleichungen (5.120) addiert:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (u_1 + u_2) = 0 \quad (5.125)$$

D. h. die Schwerpunktsbewegung ist kräftefrei. Der zweite Eigenwert, $\lambda_2 = \pm i\omega_2$, mit Eigenvektor \mathbf{a}_2 ($u_1 = -u_2$), beschreibt die gegenläufige Bewegung der beiden Massen. Somit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = (\alpha_1 + \beta_1 t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.126)$$

Anmerkung: Die Eigenschwingungen bzw. Eigenmoden, die die Auslenkungen der Atome in einem Festkörper beschreiben, nennt man Phononen.

5.6 Zusammenfassung

- Dyadisches Produkt $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$, $(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)_{ij} = a_i b_j$
 - Abbildung eines Vektors auf einen anderen Vektor: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}\mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x})$.
 - speziell: Projektor $\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$ projiziert auf den normierten Vektor \mathbf{e}

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P} \quad (5.127)$$

- Lineare Gleichungssysteme
 - homogen: $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \rightarrow$ Lösungsbedingung $\det\mathbf{A} = 0$
 - inhomogen: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c} \rightarrow$ Lösungsbedingung $\det\mathbf{A} \neq 0$, Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{c}$
 - Matrixelemente der inversen Matrix:

$$(\mathbf{A}^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})}{\det\mathbf{A}} \quad (5.128)$$

- orthogonale Matrix: $\mathbf{D}^T \mathbf{D} = \mathbf{1} \rightarrow \det\mathbf{D} = \pm 1$

- Eigenwertprobleme
 - reell symmetrische Matrizen: reelle Eigenwerte λ_i , orthogonale (oder orthogonal wählbare) Eigenvektoren $\mathbf{e}^{(i)}$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{e}^{(i)} \quad (5.129)$$

- $|\mathbf{e}^{(i)}| = 1 \rightarrow$ Spektralzerlegung

$$\mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \mathbf{e}^{(i)} \otimes \mathbf{e}^{(i)} \quad (5.130)$$

- Lineare Differentialgleichungssysteme
 - konstante Koeffizienten: Exponentialansatz \rightarrow Eigenwertproblem
 - gekoppelten Oszillatoren: Eigenwerte \rightarrow Eigenfrequenzen, Eigenvektoren (= Eigenmoden)