Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Prof. Dr. Ulrich Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik II — SS 2008
Blatt 4

1. Elektron-Phonon-Wechselwirkung: elektronische Massenrenormierung und Lebensdauer

   (a) Gehen Sie aus von dem folgenden Ausdruck für die elektronische Selbstenergie:

   $$\Sigma(\vec{k},\omega) = -g^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_{\omega'} D_0(\vec{k}-\vec{k}',\omega-\omega')\mathcal{G}_0(\vec{k}',\omega')$$

   und verwenden Sie die üblichen, bei tiefen Temperaturen und in der Nähe der Fermi-Kante anwendbaren Approximationen: $|\vec{k}| \simeq |\vec{k}'| \simeq k_F$. Zeigen Sie:

   $$\Sigma(\vec{k},\omega) \simeq i\pi\lambda\beta^{-1} \sum_{\bar{\omega}} B(\bar{\omega}) g(\bar{\omega}+\omega)$$

   wobei $B(.)$ die winkelgemittelte Green'sche Funktion der Phononen bedeutet, und

   $$g(\omega') = \frac{i}{\pi} \int d\xi' \; \mathcal{G}_0(\vec{k}',\omega') \; .$$

   (b) Bestimmen Sie $g(\omega')$ sowie die entsprechenden retardierten und avancierten Funktionen, g^R und g^A.

   (c) Schreiben Sie die $\bar{\omega}$-Summe mit Hilfe einer Kontur-Integration um. Verwenden Sie:

   $$\sum_{\omega} h(\omega) = \frac{\beta}{4\pi i} \int_{\mathcal{C}} dz \; h(-iz) \coth(\frac{\beta z}{2})$$

   Achtung – hier wird über Bose-Matsubara-Frequenzen summiert! Zur Bestimmung der richtigen Kontur $\mathcal{C}$: Überlegen Sie, wo die "kritischen Punkte" von $B(\bar{\omega})g(\bar{\omega}+\omega)$ liegen. Deformieren Sie den Weg derart, dass das z-Integral entlang der reellen Achse und entlang der Linie $\mathrm{Im}z = -\omega$ verläuft.

   (d) Führen Sie, nach geeigneter Vereinfachung, die analytische Fortsetzung durch: $\omega \to -iE + 0$.

   (e) Zeigen Sie: $\mathrm{Re}\Sigma^R(E) = -\lambda E$, und interpretieren Sie dieses Resultat.

   (f) Diskutieren Sie die analytische Fortsetzung von $B(\bar{\omega})$, d. h.

   $$B^{R,A}(E) = B(\bar{\omega} \to -iE \pm 0) \; .$$

   Zeigen Sie, dass $B^R - B^A$ direkt zur Phononen-Zustandsdichte proportional ist (Debye-Modell).

   (g) Die Lebensdauer ist definiert über $\mathrm{Im}\Sigma^R = -i/2\tau_E$. Zeigen Sie:

   $$\frac{1}{\tau_E} = 2\pi \int dE' \mu(E-E') \left[\tanh\left(\frac{\beta E'}{2}\right) - \coth\left(\frac{\beta(E'-E)}{2}\right)\right]$$

   mit

   $$\mu(E-E') = \frac{i\lambda}{4\pi}\left[B^R - B^A\right](E-E') \; .$$

   (h) Schätzen Sie $1/\tau_E$ für $E = 0$ und für $E \gg T$ ab.