Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Prof. Dr. Ulrich Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik II — SS 2008
Blatt 2

1. Bewegungsgleichungen für Greensche Funktionen (vgl. Blatt 1)

   Leiten Sie, für nicht-wechselwirkende Elektronen in einem beliebigen externen Potential, die Bewegungsgleichungen

   $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \dots \quad , \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = \dots$$

   und entsprechend für G^R und G^A her.

2. Temperatur-Greensfunktion

   Die sogenannte Temperatur- oder Matsubara-Greensfunktion – wir betrachten weiterhin Fermionen, aber unterdrücken den Spin – ist definiert als

   $$\mathcal{G}(\mathbf{r}\tau, \mathbf{r}'\tau') = -\langle \psi(\mathbf{r}, -i\tau)\psi^+(\mathbf{r}', -i\tau') \rangle \Theta(\tau - \tau') + \langle \psi^+(\mathbf{r}', -i\tau')\psi(\mathbf{r}, -i\tau) \rangle \Theta(\tau' - \tau)$$

   mit $\langle \dots \rangle$ dem großkanonischen Erwartungswert. Betrachten Sie Gleichgewichtssituationen, d. h. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau - \tau')$ hängt nur von der Zeitdifferenz ab. Zur Vereinfachung setzen Sie dann $\tau' = 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{G}(\tau)$ zunächst im Intervall $-\hbar\beta \dots \hbar\beta$ sinnvoll definiert ist; $\beta = (k_B T)^{-1}$.

   (b) Zeigen Sie weiterhin:
   $$\mathcal{G}(\tau < 0) = -\mathcal{G}(\tau + \hbar\beta)$$
   Setzen Sie, auf der Basis dieses Resultats, $\mathcal{G}(\tau)$ periodisch fort.

   (c) Entwickeln Sie $\mathcal{G}(\tau)$ in eine Fourier-Reihe gemäß
   $$\mathcal{G}(\tau) = (\hbar\beta)^{-1} \sum_n \mathcal{G}(\omega_n) \exp(-i\omega_n \tau)$$
   und bestimmen Sie die Rücktransformation. Welche Werte können die ω_n annehmen?

   (d) Bestimmen Sie $\mathcal{G}(\mathbf{k}, \omega_n)$ für ein freies Elektronengas.