Lehrstuhl für Theoretische Physik II
Prof. Dr. Ulrich Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik II — SS 2008
Blatt 1

1. Grundzustandsenergie eines Elektronengases für $e^2 \to 0$

   (a) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie eines freien Elektronengases. Drücken Sie das Ergebnis mit Hilfe des Bohrschen Radius, $a_0 = \hbar^2/me^2$, sowie des Parameters $r_s = r_0/a_0$ aus, wobei r_0 gegeben ist durch $n^{-1} = (4\pi/3)r_0^3$.

   (b) Berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung (Störungstheorie). Das Ergebnis – nullte plus erste Ordnung – ist von der folgenden Form:

   $$E = \frac{Ne^2}{a_0 r_s^2}(a + br_s + \dots)$$

   mit gewissen Koeffizienten a und b; N: Elektronenzahl, $n = N/V$: Elektronendichte.

   (c) Diskutieren Sie die Korrektur zweiter Ordnung, insbesondere die auftretende Divergenz. Bestimmen Sie die Art der Divergenz, indem Sie die Coulomb-Wechselwirkung durch $4\pi e^2/(q^2 + q_{TF}^2)$ ersetzen; drücken Sie q_{TF}^2 durch r_s aus und betrachten Sie $r_s \to 0$.
   Hinweis: siehe Fetter-Walecka, Kap. 3, Aufgaben 1.4 und 1.5.

2. Greensche Funktionen (Elektronen, nur eine Spin-Komponente)

   Verschiedene Greensche Funktionen sind wie folgt definiert (wobei der Spin-Index zur Vereinfachung nicht notiert ist, d. h. wir nehmen an, es handelt sich nur um eine der Spin-Komponenten):

   $$G^>(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = -i\langle\psi(\mathbf{r}t)\psi^+(\mathbf{r}'t')\rangle \ , \ G^<(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = +i\langle\psi^+(\mathbf{r}'t')\psi(\mathbf{r}t)\rangle$$

   sowie

   $$G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t') = G^>(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')\Theta(t - t') + G^<(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')\Theta(t' - t)$$

   und (jeweils mit den entsprechenden Argumenten)

   $$G^R = (G^> - G^<)\Theta(t - t') \ , \ G^A = -(G^> - G^<)\Theta(t' - t) \ , \ G^K = G^> + G^<$$

   Hier sind $\psi(\mathbf{r}t)$ und $\psi^+(\mathbf{r}'t')$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Heisenberg-Bild, $\Theta(t)$ die Stufenfunktion, und $\langle\dots\rangle$ bedeutet den Erwartungswert bezüglich des Grundzustandes bzw. des großkanonischen Ensembles. G ist die zeitgeordnete Greensche Funktion; G^R und G^A heißen retardierte und avancierte Greensche Funktion.

   (a) Drücken Sie die ψ-Operatoren durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren im Impulsraum aus, d. h. leiten Sie die entsprechenden Definitionen für $G(\mathbf{k}, t, t')$ etc. her.

(b) Bestimmen Sie G, G^R, G^A, G^K explizit für freie Fermionen (kein externes Potential, $T = 0$) als Funktion von $(\mathbf{k}, \omega)$, wobei die Fouriertransformation jeweils bezüglich der Differenz-Koordinaten zu nehmen ist. Berechnen Sie dazu zuerst die entsprechenden Funktionen als Funktion von $(t - t')$, und achten Sie auf die kleinen Imaginärteile beim Fouriertransformieren.

(c) Diskutieren Sie an diesem Beispiel den Zusammenhang zwischen $(G^R - G^A)(\mathbf{k}, \omega)$ und der Zustandsdichte. (Integration bezüglich $\mathbf{k}$!)

(d) Zeigen Sie, dass ganz allgemein im Gleichgewicht folgende Relationen gelten:

$$G^K(\mathbf{k}, \omega) = (G^R - G^A)(\mathbf{k}, \omega) \tanh(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})$$

$$G^<(\mathbf{k}, \omega) = -(G^R - G^A)(\mathbf{k}, \omega) f_0(\hbar\omega)$$

$$G^>(\mathbf{k}, \omega) = (G^R - G^A)(\mathbf{k}, \omega)(1 - f_0(\hbar\omega))$$

Hier ist $f_0(\hbar\omega)$ die Fermi-Funktion.

(e) Überlegen Sie, wie man ganz allgemein aus G bzw. $G^<$ die (mittlere) Teilchendichte und Teilchenstromdichte berechnet. Betrachten Sie dazu zunächst die Operator-Ausdrücke dieser beiden Größen, ausgedrückt durch ψ und ψ^+.