Lehrstuhl für Theoretische Physik II
U. Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik I — WS 2007/08
Blatt 6

1. Diskutieren Sie die *statische* Suszeptibilität, $\chi_{\rm stat}$, mit Hilfe der klassischen und der Quantenstatistik, jeweils in der kanonischen Gesamtheit. Es sei $\hat{H} = \hat{H}_0 - f\hat{X}$, wobei f ein konstantes externes Feld ist.

   (a) Zeigen Sie, daß $\langle \hat{X} \rangle \equiv \mathrm{Sp}\left(\hat{X}\hat{W}\right) = -\partial F/\partial f$ gilt, wobei $F = -\beta^{-1}\ln Z$ die Freie Energie bezeichnet.

   (b) Zeigen Sie, daß für den klassischen Grenzfall $\chi_{\rm stat} = \beta\langle\left(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle\right)^2\rangle_{f=0}$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, daß für den allgemeinen Fall:

   $$\chi_{\rm stat} = \int_0^\beta d\lambda\ \langle e^{\lambda\hat{H}_0}\hat{X}e^{-\lambda\hat{H}_0}\hat{X}\rangle_{f=0}\ .$$

   Zur Vereinfachung dürfen Sie annehmen, daß $\langle\hat{X}\rangle = 0$ gilt. Was ergibt sich, wenn $\hat{X}$ eine erhaltene Größe ist?

   (d) Stellen Sie $\chi_{\rm stat}$ mit Hilfe der Eigenzustände von $\hat{H}_0$ dar: $\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle$; eine bequeme Notation hierbei ist: $W_n \equiv e^{-\beta E_n}/Z$, wobei $Z = \sum_n e^{-\beta E_n}$.

2. Diskutieren Sie die lineare Antwort eines Elektronengases auf ein elektrostatisches Potential $\phi(\mathbf{r})$ in der *Thomas-Fermi*-Näherung. Gehen Sie dazu von der lokalen Energie-Impuls-Relation aus,

   $$E(\mathbf{p},\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + e\phi(\mathbf{r})\ ,\quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}\ ,$$

   und berechnen Sie die Änderung der Ladungsdichte, linear in ϕ (d.h. $\delta\rho = -\chi_{\rm stat}\,\phi$). Hierbei ist die Ladungsdichte durch

   $$\rho(\mathbf{r}) = 2e\Omega^{-1}\sum_{\mathbf{k}} f_{\rm F}\left(E(\mathbf{p},\mathbf{r})\right)$$

   gegeben, wobei $f_{\rm F}(E)$ die Fermi-Funktion und Ω das Volumen darstellt. Berechnen Sie $\chi_{\rm stat}$ insbesondere für tiefe und hohe Temperaturen. Wann ist die Thomas-Fermi-Näherung anwendbar?

3. Berechnen Sie $\chi_{\rm stat}(\mathbf{q})$ für beliebige $\mathbf{q}$ durch Verallgemeinerung der Ergebnisse von Aufg. 1, (c) und (d). Ausgangspunkt sei $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, wobei

   $$\hat{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}\sigma}(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}\ ,\quad \epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2\mathbf{k}^2/2m$$

   $$\hat{V} = e\Omega\sum_{\mathbf{q}}\phi(-\mathbf{q})\hat{n}(\mathbf{q})\ ,\quad \hat{n}(\mathbf{q}) = \Omega^{-1}\sum_{\mathbf{k}\sigma}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}\ .$$

   (a) Begründen Sie diese Darstellung.

(b) Zeigen Sie, daß

$$\chi_{\text{stat}}(\mathbf{q}) = -2e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{f_{\text{F}}(\epsilon_{\mathbf{k}}) - f_{\text{F}}(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}} \, .$$

(c) Berechnen Sie χ_{stat} für $q \ll k_{\text{F}}$, $T \ll E_{\text{F}}/k_{\text{B}}$.

(d) Berechnen Sie χ_{stat} für $T = 0$, und zwar für Dimensionen $d = 3$ und $d = 1$. Diskutieren Sie das Ergebnis.

(e) Wie hängt $\chi_{\text{stat}}(\mathbf{q})$ mit der statischen Dielektrizitätsfunktion zusammen?

(f) Was folgt aus (e) für die Abschirmung einer Testladung? Wie groß ist die Abschirmlänge? - Geben Sie typische Zahlenwerte an.

Literatur: Ashcroft + Mermin, S. 337-344.

4. Diskutieren Sie die *dynamische* Antwort eines Elektronengases im Grenzfall $T = 0$. Gehen Sie aus von dem Resultat, das auch für $T \neq 0$ gültig ist:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = -2e^2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{f_{\text{F}}(\epsilon_{\mathbf{k}}) - f_{\text{F}}(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{\epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \hbar\omega + i\delta} \, ,$$

wobei der Limes $\delta \to 0$ zu nehmen ist. Außerdem ist die Dielektrizitätsfunktion gegeben durch

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \frac{4\pi}{q^2} \chi(\mathbf{q}, \omega) \, .$$

(a) Der Imaginärteil der Dielektrizitätsfunktion, $\epsilon'' \equiv \text{Im } \epsilon$, ist Null für große Frequenzen. Wie groß muß ω bei festem q sein, damit dies der Fall ist? Was bedeutet dieses Resultat?

(b) Zeigen Sie, daß im Limes $q \to 0$

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) \sim 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (q \to 0)$$

gilt, und bestimmen Sie die Plasmafrequenz ω_p. Was bedeutet dieses Resultat?