Lehrstuhl für Theoretische Physik II
U. Eckern

Übungen zur Theoretischen Festkörperphysik I — WS 2007/08
Blatt 3

1. Zum Pauli-Paramagnetismus ($T \to 0$): Gegeben sei ein Gas von N Elektronen (Spin-1/2, magnetisches Moment $\vec{\mu}$, Volumen V) in einem homogenen Magnetfeld:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} + e\hat{\vec{A}})^2 - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}$$

mit

$$\vec{B} = (0, 0, B) \quad , \quad \hat{\vec{\mu}} = \mu_0 \cdot \vec{\sigma}.$$

Das Vektorpotential soll im folgenden vernachlässigt werden.

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte ϵ_λ eines Elektrons.

(b) Das Gas besteht aus zwei Komponenten, N_+ Teilchen mit Spin $+1/2$ und N_- Teilchen mit Spin $-1/2$. Zeigen Sie, dass für die chemischen Potentiale $\epsilon_F^\pm$ der beiden Komponenten gilt:

$$\epsilon_F^\pm = \frac{\hbar^2}{2m}\Big(6\pi^2 \frac{N_\pm}{V}\Big)^{2/3} \mp \mu_0 B.$$

(c) Benutzen Sie dann $\epsilon_F^+ = \epsilon_F^-$ (warum gilt dies?), um eine Beziehung zwischen N_+ und N_- herzustellen.

(d) Berechnen Sie die Magnetisierung $M = \mu_0(N_+ - N_-)$ und die magnetische Suszeptibilität $\chi = \partial M/\partial B$, jeweils für $B \to 0$.

2. Zum Pauli-Paramagnetismus ($T \to \infty$):

(a) Bestimmen Sie die großkanonische Zustandssumme $Z_G(T, V, \mu)$ für das Gas aus der vorhergehenden Aufgabe.

(b) Für hohe Temperaturen wird die Fugazität z beliebig klein, $z = \exp(\beta\mu) \to 0$. Entwickeln Sie die Zustandssumme Z_G und die Teilchenzahl $N = N_+ + N_-$ zunächst nach z.

(c) Bestimmen Sie dann das magnetische Moment durch Ableiten des Potentials nach dem Magnetfeld, und durch nochmaliges Ableiten die Suszeptibilität.

(d) Berechnen Sie schließlich $z = z(N/V, T)$ mit Hilfe von (b) und daraus das Verhalten der Suszeptibilität als Funktion der Temperatur.

3. Zur Molekularfeldnäherung:
Gegeben sei die Spinkette

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i,$$

mit $\sigma_i = \pm 1$, der Wechselwirkung $V_{ij} = V(|i-j|)$, $V(0) = 0$, $\tilde{V}(k=0) = \sum_n V(n) < \infty$ und dem äußeren Feld h_i. Wir untersuchen Zustandsgrößen im Rahmen der kanonischen Zustandsverteilung.

(a) Bestimmen Sie in Molekularfeldnäherung die mittlere Magnetisierung pro Spin $\langle\sigma_i\rangle$. Bestimmen Sie die kritische Temperatur T_c, und zeigen Sie, dass mit $h_i \to 0$ die Magnetisierung für $T \to T_c^-$ (d.h. $T < T_c$) wie $|T - T_c|^{1/2}$ verschwindet.
Hinweis: $H_{mf} = -\sum_i (h_i + h_i^{mf})\sigma_i$, mit $h_i^{mf} = \sum_j V_{ij}\langle\sigma_j\rangle$.

(b) Fluktuationen für $T > T_c$: Zeigen Sie, dass allgemein gilt:

$$\frac{\partial}{\partial h_j}\langle\sigma_i\rangle = \beta(\langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle).$$

Bestimmen Sie damit für $h_j \to 0$ die Korrelationsfunktion

$$g_{ij} = g(|i-j|) = \langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \delta_{i,j}$$

in der Molekularfeldnäherung (Ergebnis: $g_{ij} = \beta V_{ij} + \beta\sum_l g_{il}V_{lj}$). Mit periodischen Randbedingungen $\sigma_{i+N} = \sigma_i$ und $V(n+N) = V(n)$, lässt sich diese Gleichung durch Fouriertransformation auflösen.
Berechnen Sie $\tilde{g}(k)$, wobei

$$g(n) = \frac{1}{N}\sum_k e^{ikn}\tilde{g}(k); \quad \tilde{g}(k) = \sum_n e^{-ikn}g(n); \quad k = 2\pi\nu/N, \ \nu = 0, 1, \dots N-1.$$

(c) Setzen Sie jetzt $h = h_i$ für alle i. Drücken Sie die Suszeptibilität $\chi_0 = -\partial^2 F/\partial h^2|_{h\to 0} = \beta\langle M^2\rangle$ $(T > T_c)$, mit $M = \sum_{i=1}^N \sigma_i$ durch $\tilde{g}$ aus und zeigen Sie, dass für $T \to T_c^+$, $\chi_0 \sim (T - T_c)^{-1}$ divergiert.
Für $k \to 0$ sei $\tilde{V}(k) \approx \tilde{V}(0) - \alpha k^2$ und damit:

$$\tilde{g}(k) \approx \frac{\tilde{V}(0)/\alpha}{\kappa^2 + k^2}.$$

Wie hängt die Korrelationslänge $\xi = \kappa^{-1}$ von T/T_c $(T/T_c > 0)$ ab? Bestimmen Sie das Verhalten von g für $N \to \infty$ und $1 \ll n \ll N$.