2. *Ueber die Möglichkeit einer elektromagnetischen Begründung der Mechanik;* von *W. Wien.*

(Aus den Berichten der Société hollandaise des sciences à Harlem. Jubelband für H. A. Lorentz, 11. December 1900.)

Hr. H. A. Lorentz[1]) hat vor kurzem die Gravitation auf elektrostatische Anziehungen zwischen den aus Ionen bestehenden Elementen eines Körpers zurückzuführen gesucht. Er macht zu diesem Zweck die Annahme, dass die Anziehung zwischen positiver und negativer Elektricität die Abstossung zwischen gleichnamigen Elektricitäten überwiegt. Ich bin dadurch angeregt worden, Betrachtungen über denselben Gegenstand zu veröffentlichen, die ich schon vor längerer Zeit angestellt habe, wobei ich indessen über den Lorentz'schen Standpunkt noch hinaus gehe.

Es ist zweifellos eine der wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik, die beiden zunächst vollständig isolirten Gebiete der mechanischen und elektromagnetischen Erscheinungen miteinander zu verknüpfen und die für jedes geltenden Differentialgleichungen aus einer gemeinsamen Grundlage abzuleiten. Maxwell und Thomson und anschliessend Boltzmann und Hertz haben den zunächst sicherlich naturgemässen Weg eingeschlagen, die Mechanik als Grundlage zu wählen und aus ihr die Maxwell'schen Gleichungen abzuleiten. Zahlreiche Analogien, die zwischen elektrodynamischen und hydrodynamischen sowie elastischen Vorgängen bestehen, schienen immer wieder auf diesen Weg hinzuweisen. Die Hertz'sche Mechanik scheint mir ihrer ganzen Anlage nach dafür ersonnen zu sein nicht nur die mechanischen, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen zu umspannen. Dass eine mechanische Ableitung der Maxwell'schen Elektrodynamik möglich ist, hat Maxwell bekanntlich selbst gezeigt.

---

1) H. A. Lorentz, Koninkl. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 31. März 1900.

Diese Untersuchungen haben zweifellos das grosse Verdienst, nachgewiesen zu haben, dass beiden Gebieten etwas Gemeinschaftliches zu Grunde liegen muss, und dass die gegenwärtige Trennung nicht in der Natur der Sache begründet ist. Andererseits aber scheint mir aus diesen Betrachtungen mit Sicherheit hervorzugehen, dass das System unserer bisherigen Mechanik zur Darstellung der elektromagnetischen Vorgänge ungeeignet ist.

Niemals wird man die complicirten mechanischen Modelle, die den für specielle technische Zwecke ersonnenen Maschinen nachgebildet sind, als ein endgültig befriedigendes Bild für die innere Zusammensetzung des Aethers anerkennen.

Ob die Hertz'sche Mechanik, deren Aufbau in der That für die Aufnahme sehr allgemeiner kinematischer Zusammenhänge besonders geeignet ist, zweckmässigeres leistet, muss dahingestellt bleiben. Vorläufig hat sie auch nicht die allereinfachsten Vorgänge, die ausserhalb der Kinematik liegen, darzustellen vermocht.

Viel aussichtsvoller als Grundlage für weitere theoretische Arbeit scheint mir der umgekehrte Versuch zu sein, die elektromagnetischen Grundgleichungen als die allgemeineren anzusehen, aus denen die mechanischen zu folgern sind.

Die eigentliche Grundlage würde der Begriff der elektrischen und magnetischen Polarisation im freien Aether bilden, die durch die Maxwell'schen Differentialgleichungen miteinander zusammenhängen. Wie diese Gleichungen am besten aus den Thatsachen abgeleitet werden können, ist eine Frage, mit der wir uns hier nicht zu beschäftigen haben.

Nennen wir X, Y, Z die Componenten der elektrischen, L, M, N die der magnetischen Polarisation, A die reciproke Lichtgeschwindigkeit, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten, so haben wir:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} A\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, & A\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},\\ A\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, & A\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},\\ A\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & A\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Als Integrationsconstanten ergeben sich hieraus das elektrische und magnetische Quantum, wenn wir die Gleichungen (1) beziehentlich nach x, y, z differentiiren und addiren. Es ist dann nämlich

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0,$$

also

$$(2)\quad \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=-4\pi\varrho, \quad \frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=-4\pi m,$$

wo ϱ und m von der Zeit unabhängig, also zeitlich und veränderliche Quanten sind.

Multiplicirt man die erste Reihe der Gleichungen (1) mit $X/4\pi$, $Y/4\pi$, $Z/4\pi$, die zweite mit $L/4\pi$, $M/4\pi$, $N/4\pi$, und addirt sie sämtlich, so erhält man nach partieller Integration über einen geschlossenen Raum, dessen Oberflächennormale n und Oberflächenelement dS sein möge, den Satz

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\iiint dx\,dy\,dz\,(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2)\\ &\qquad=\int dS\,[(YN-ZM)\cos(xn)+(ZL-XN)\cos(ny)\\ &\qquad\qquad+(XM-YL)\cos(nz)].\end{aligned}\right.$$

Verschwinden an der Oberfläche entweder X, Y, Z oder L, M, N, so haben wir

$$(4)\quad \frac{1}{8\pi}\iiint dx\,dy\,dz\,(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2)=\text{const.}$$

Den linksstehenden, über einen genügend grossen Raum summirt immer constant bleibenden Ausdruck, nennen wir die elektromagnetische Energie.

Wir machen nun die Annahme, dass die mechanischen Vorgänge auch elektromagnetischer Natur sind, sich also aus den betrachteten Grundlagen entwickeln lassen.

Wir nehmen hierfür zunächst an, dass das als Materie bezeichnete Substrat aus positiven und negativen elektrischen Quanten zusammengesetzt ist und zwar aus solchen Elementar-

quanten, die wir einfach als Convergenzpunkte elektrischer Kraftlinien anzusehen haben.

Wir müssen indessen einem solchen Elementarquantum eine gewisse Ausdehnung beilegen, weil sonst der hierdurch repräsentirte Energievorrat unendlich gross im Vergleich mit dem Quantum selbst wäre. Da die ganze Materie sich aus diesen Quanten aufbauen soll, so müssen diese so klein angenommen werden, dass die Atomgewichte ganze Vielfache derselben sind. Das positive Elementarquantum ist ferner als durch eine gewisse kleine Strecke vom negativen entfernt anzusehen.

Dass die Materie aus solchen Dipolen sich zusammensetzt, ist kaum eine besondere Annahme, sondern wohl von allen Physikern gegenwärtig zugegeben. Bisher nahm man nun ausserdem noch ponderable Substanz an, die wir mit diesen Quanten identificiren wollen.

Die Aussage, dass sowohl die Materie als die Elektricität atomistisch aufgebaut ist, ist nach unserer hier vertretenen Anschauung gleichbedeutend.

Der Aether selbst ist nach dem Vorgange von Lorentz als ruhend anzusehen. Ortsveränderungen können nur bei den elektrischen Quanten vorkommen, von einer Bewegung des Aethers zu sprechen würde nach dem hier zu verfolgenden Grundsatz keinen Sinn haben.

Alle Kräfte sind auf die bekannten elektromagnetischen, im Sinne Maxwell's also auf Spannungen im Aether zurückzuführen, obwohl der der Elasticitätslehre entnommene Begriff hier kaum noch bedeutungsvoll ist.

Bei kleinen Geschwindigkeiten der bewegten Quanten sind es elektrostatische Kräfte, die zwischen den Quanten wirksam sind.

Ob eine Zurückführung der Molecularkräfte auf solche Kräfte möglich ist, muss zunächst dahingestellt bleiben. Klar ist nur, dass man durch verschiedene Gruppirungen von positiven und negativen Quanten in verschiedenen Entfernungen sehr complicirte Wirkungen erhalten kann. Durch diese Annahme würde man die Schwierigkeit verringern, welche der Michelson'sche Interferenzversuch der Theorie ruhenden Aethers bisher gemacht hat.

Hr. H. A. Lorentz[1]) hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Länge eines Körpers in der Richtung der Erdbewegung durch die Geschwindigkeit v dieser Bewegung im Verhältnis $\sqrt{1 - A^2 v^2}$ verkürzt wird, wenn die Molecularkräfte durch elektrostatische Kräfte ersetzt werden können.

Damit wäre das Michelson'sche Ergebnis erklärt, wenn man von der Molecularbewegung selbst Abstand nehmen kann. Wie weit dies zutrifft, muss durch gastheoretische Untersuchungen gezeigt werden.

Für die Erklärung der Gravitation müssen wir, wie Lorentz auseinander gesetzt hat, zwei verschiedene Arten elektrischer Polarisationen annehmen. Jede genügt für sich den Maxwell'schen Gleichungen. Ausserdem ist bei statischem Felde

$$X = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

und die Energie

$$\frac{1}{8\pi}\int\int\int dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int dS \frac{d\Phi}{dn}\Phi - \frac{1}{8\pi}\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Phi\,\Delta\,\Phi.$$

Verschwindet Φ oder $\partial \Phi / \partial n$ an der Oberfläche des Raumes, so ist die Energie

$$= -\frac{1}{8\pi}\int\int\int dx\,dy\,dz\,\Phi\,\Delta\,\Phi.$$

Nun ist nach (2)

$$\Delta\,\Phi = -4\pi\varsigma, \qquad \Phi = \int\int\int \frac{dx\,dy\,dz\,\varsigma}{r},$$

also ist das Integral

$$= \tfrac{1}{2}\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz\,\varsigma}{r}\int\int\int dx'\,dy'\,dz'\,\varsigma'$$
$$= \int\int\int\int\int\int \frac{\varsigma\,\varsigma'\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{r}.$$

---

1) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

Befinden sich in der Entfernung r zwei gleichnamige Quanten

$$e = \varrho\, dx\, dy\, dz\,,$$

$$e' = \varrho'\, dx'\, dy'\, dz'\,,$$

so ist die Energie

$$\frac{e\,e'}{r} = -\int_{\infty}^{r} \frac{e\,e'}{r^2}\, dr\,; \tag{5}$$

diese Energie ist durch Arbeitsleistung hervorgebracht gegen eine zwischen den Quanten wirkende abstossende Kraft im Betrage von

$$-\frac{e\,e'}{r^2}\,. \tag{6}$$

Hierdurch ist die zwischen zwei Quanten wirkende Kraft definirt.

Dies Gesetz muss für jede der beiden Polarisationen gelten.

Treten positive und negative Quanten in Wechselwirkung, so ist die Lorentz'sche Annahme die, dass die dann auftretende anziehende Kraft in einem bestimmten Verhältnis grösser ist, als die abstossende zwischen gleichnamigen. Auf grössere Entfernungen wirken die Dipole so, als ob das positive und negative Quantum an derselben Stelle läge. Also erhält man durch die Gesamtwirkung der negativen und positiven Quanten auf einen zweiten Dipol einen Ueberschuss in der Anziehung.

Diese Erklärung der Gravitation hat die unmittelbare Consequenz, dass ihre Störungen sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten und sie selbst eine Modification durch die Bewegung der sich anziehenden Körper erfahren muss. Lorentz hat untersucht, ob diese Modificationen der Gravitation die Anomalien in der Bewegung des Merkur erklären können, hat indessen ein negatives Resultat gefunden. Einzelne Astronomen haben für die Ausbreitung der Gravitation eine grössere Geschwindigkeit als die Lichtgeschwindigkeit annehmen zu müssen geglaubt. Von einer Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation selbst, als einer statischen Kraft, kann man indessen nicht sprechen.

Dies wäre nur dann sinngemäss, wenn man die Gravitation stärken oder schwächen und dann die Ausbreitungsgeschwindigkeit der hierdurch hervorgerufenen Störungen beobachten könnte.

Da aber die Gravitation immer unveränderlich wirkt, so können nur die ausserordentlich kleinen Aenderungen in Frage kommen, welche durch die Bewegung hervorgerufen werden, die wie Lorentz gezeigt hat, von zweiter Ordnung sind.

Die Trägheit der Materie, welche neben der Gravitation die zweite unabhängige Definition der Masse giebt, lässt sich ohne weitere Hypothesen aus dem bereits vielfach benutzten Begriff der elektromagnetischen Trägheit folgern.

Das elektrische Elementarquantum denken wir uns als einen elektrisirten Punkt. Die von einem solchen bewegten Punkt ausgehenden Kräfte und Polarisationen sind von Heaviside[1]) abgeleitet.

Da sich immer gleich grosse positive und negative Quanten zusammen bewegen, so heben sich, in einer Entfernung die gross gegen ihren Abstand ist, die von ihnen ausgehenden Kräfte, abgesehen von der oben besprochenen Gravitation, und die Polarisationen auf. Doch nehmen wir im Folgenden die Ausdehnung der Quanten selbst so klein gegen ihren Abstand an, dass die Energie jedes einzelnen so gross ist, als ob das zweite nicht vorhanden wäre.

Nach einer Berechnung von Searle[2]) gehen dieselben Polarisationen von einem Ellipsoid aus, das in der Richtung seiner Axe a mit der Geschwindigkeit v bewegt wird, dessen andere beiden Axen $a/\sqrt{1-A^2v^2}$ sind, und das dieselbe Ladung auf seiner Oberfläche trägt. Das Verhältnis der Axen hängt daher von der Geschwindigkeit ab.

Die Energie eines solchen Ellipsoides ist nach Searle

$$E = \frac{e^2}{2a}\left(1 + \tfrac{1}{3}A^2v^2\right).$$

Das Ellipsoid mit denselben Axen hat im Zustand der Ruhe die Energie

$$\mathfrak{E} = \frac{e^2\sqrt{1-A^2v^2}}{2a \quad Av} \arcsin Av.$$

1) O. Heaviside, Electrical papers 2.

2) G. F. C. Searle, Phil. Mag. 44. p. 340. 1897.

Nun darf naturgemäss $\mathfrak{E}$, die Energie des ruhenden Ellipsoides, die Geschwindigkeit v nicht enthalten.

Es ist also, da e unveränderlich ist, a variabel

$$2\,a = \frac{e^2 \arcsin A\,v \sqrt{1 - A^2 v^2}}{A\,v\,\mathfrak{E}},$$

$$E = \mathfrak{E}\,\frac{A\,v\,(1 + \frac{1}{2} A^2 v^2)}{\sqrt{1 - A^2 v^2} \arcsin A\,v},$$

oder durch die Reihenentwickelung

$$E = \mathfrak{E}(1 + \tfrac{2}{3} A^2 v^2 + \tfrac{16}{45} A^4 v^4 \ldots). \tag{7}$$

Die durch die Bewegung hervorgebrachte Energievermehrung ist also in erster Näherung

$$\tfrac{2}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2 v^2 = \frac{m}{2} v^2,$$

also die träge Masse $m = \frac{4}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2$.

Hiernach wäre die durch Trägheit definirte Masse nur bei kleinen Geschwindigkeiten constant und würde mit grösser werdender Geschwindigkeit zunehmen. Da die Trägheit der Anzahl der Quanten, aus denen sich ein Körper zusammensetzt, proportional ist, ebenso die von diesem Körper ausgehende Gravitation, so folgt, dass die durch die Trägheit definirte Masse der durch die Gravitation bestimmten proportional sein muss. Lassen wir einen Körper, dessen Masse $m = \frac{4}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2$ ist, bis in die Entfernung r von einem Körper von der Masse M anziehen, so ist der elektromagnetische Energievorrat der Gravitation um den Betrag $\varepsilon\,\frac{4}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2\,M/r$ vermindert, wo ε die Gravitationsconstante bezeichnet.

Diese Energie ist zur Herstellung der Geschwindigkeit v in Bewegungsenergie verwandelt. Wir haben also

$$\tfrac{2}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2 v^2 (1 + \tfrac{8}{15} A^2 v^2 \ldots) = \varepsilon\,\frac{\frac{4}{3}\,\mathfrak{E}\,A^2\,M}{r},$$

oder, da $v = dr/dt$ ist

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{\varepsilon\,M}{r}\left(1 - \tfrac{8}{15} A^2 \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right). \tag{8}$$

Hierfür lässt sich schreiben

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \left(1 + \tfrac{16}{15} A^2 \frac{\varepsilon\,M}{r}\right) = \frac{\varepsilon\,M}{r}. \tag{9}$$

Würden sich die Massen M und m nach dem Weber'schen Gesetz anziehen, so hätte man

$$m\frac{d^2 r}{d t^2} = -\frac{\varepsilon m M}{r^2}\left\{1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + r A^2 \frac{d^2 r}{d t^2}\right\}.$$

Multipliciren wir mit $d r / d t$ und integriren, so haben wir

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d r}{d t}\right)^2 = \frac{\varepsilon M}{r}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{d r}{d t}\right)^2\right],$$

wobei die Integrationsconstante so bestimmt ist, dass der Körper in unendlicher Entfernung in Ruhe ist.

Schreiben wir diese Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d r}{d t}\right)^2\left(1 + A^2 \frac{\varepsilon M}{r}\right) = \frac{\varepsilon M}{r}, \tag{10}$$

so stimmt dieselbe bis auf den Factor $\frac{16}{15}$ statt 1 mit der Gleichung (9) überein. Durch die Berücksichtigung der zweiten Näherung für die Trägheit erhalten wir also annähernd dieselbe Wirkung zwischen den beiden Massen, als wenn die Massen selbst unveränderlich wären, dafür aber anstatt des Newton'schen das Weber'sche Gesetz gelten würde.

Bekanntlich ist das Weber'sche Gesetz mit gewissem Erfolge auf die Theorie der Merkurbewegung angewandt worden.

Eine genaue Prüfung dieser Untersuchungen und Erweiterung durch Anwendung auf andere schnell laufende Himmelskörper mit stark excentrischer Bahn würde uns zu einer Vergleichung unserer Ergebnisse mit der Erfahrung führen. Doch ist hierbei zu berücksichtigen, dass neue Glieder gleicher Ordnung durch die Bewegung in gekrümmter Bahn hinzukommen. Die Rechnung wäre daher noch für einen in elliptischer Bahn sich bewegenden Körper zu ergänzen.

So grosse Geschwindigkeiten, wie sie nötig sind, damit das Quadrat der Geschwindigkeit, mit dem der reciproken Lichtgeschwindigkeit multiplicirt, nicht zu klein wird, haben wir nur bei den Kathodenstrahlen.

Die schnellsten, bisher erzeugten Strahlen haben $^1/_3$ Lichtgeschwindigkeit. Hier wäre die scheinbare Zunahme der Masse etwa 7 Proc.; die geringste Geschwindigkeit ist $^1/_{30}$ Lichtgeschwindigkeit[1]), die entsprechende Zunahme der Masse be-

1) Vgl. P. Lenard, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **108.** p. 1649. 1899.

trüge hier nur 0,07 Proc. Eine Vergrösserung der Masse im Vergleich zur elektrischen Ladung bei Kathodenstrahlen grosser Geschwindigkeit ist in der That in den Lenard'schen Beobachtungen enthalten.[1]) Doch sind die von Lenard gefundenen Unterschiede viel zu gross, um ihre Erklärung nur in der elektromagnetischen Trägheit zu finden.

Indessen sind diese quantitativen Messungen noch nicht als endgültig anzusehen.

Beschränken wir uns auf kleine Geschwindigkeiten, so haben wir für die Bewegungsenergie denselben Ausdruck, den die Mechanik für die lebendige Kraft aufstellt. Die Grösse der Beschleunigung lässt sich aber nicht ohne weiteres hieraus ableiten.

Die Beschleunigung setzt eine Veränderlichkeit der Geschwindigkeit voraus. Die Ausdrücke für die elektromagnetische Energie sind aber nur unter der Voraussetzung eines von der Zeit unabhängigen Wertes der Geschwindigkeit abgeleitet.

Für veränderliche Geschwindigkeit ist das Problem eines bewegten elektrischen Quantums strenge bisher nicht gelöst worden.

Doch können wir aus den Maxwell'schen Gleichungen ein Kriterium über die Grösse des Fehlers gewinnen, den wir machen, wenn wir die Ausdrücke für die Energie auch für veränderliche Geschwindigkeit benutzen.

Die elektrischen und magnetischen Polarisationen sind in unserem Falle, wenn die Bewegung in der Richtung x vor sich geht

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}(1 - A^2 v^2), \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$M = -A v \frac{\partial U}{\partial z}, \quad N = A v \frac{\partial U}{\partial y}, \quad L = 0,$$

$$U = \frac{e}{\sqrt{r^2 - A^2 v^2 \varrho^2}}, \quad \varrho^2 = x^2 + y^2.$$

Dabei ist das Coordinatensystem mit dem bewegten Punkt fest verbunden.

---

1) P. Lenard, Wied. Ann. **64.** p. 287. 1898 und l. c.

Diese Ausdrücke genügen den Maxwell'schen Gleichungen, wenn

$$\frac{d}{dt} = -v\frac{\partial}{\partial x}$$

ist, und führen zu der Gleichung

$$(1 - A^2 v^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Ist aber v von t abhängig, so haben wir

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial x}.$$

Soll unser Wert für x allgemein gelten, so muss also

$$\frac{\partial X}{\partial t} \text{ klein gegen } v\frac{\partial X}{\partial x} \text{ sein.}$$

Nun ist

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t} U(1 - A^2 v^2),$$

also muss

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial U}{\partial x}(1 - A^2 v^2)\right] \text{ klein gegen } v\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(1 - A^2 v^2),$$

oder

$$A^2 x\frac{\partial v}{\partial t} \text{ klein gegen } 1 - A^2 v^2$$

sein.

Ebenso ergeben die Werte von Y, Z und M, N, dass

$$[2x^2 - (1 - A^2 v^2)\varrho^2]\, A^2\frac{\partial v}{\partial t} \text{ klein gegen } 3x(1 - A^2 v^2)$$

und

$$(1 - A^2 v^2)\left[(x^2 + (1 - A^2 v^2)\varrho^2)\right]\frac{\partial v}{\partial t}$$
$$- [2x^2 - (1 - A^2 v^2)\varrho^2]\, A^2 v^2\frac{\partial v}{\partial t}$$

klein gegen $3x(1 - A^2 v^2)v^2$ sein muss.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Dimensionen des Raumes, in welchem die Energie wesentlich in Betracht kommt, genügend klein sind. Denn die zu vernachlässigenden Glieder enthalten alle die Lineardimensionen in einer höheren Potenz. Doch darf dv/dt nicht zu gross und die absolute Geschwindigkeit v nicht zu klein sein.

Wenn diese Vernachlässigung zulässig ist, so können wir für die Aenderung der Bewegungsenergie setzen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v^2\right) = mv\frac{dv}{dt} = K\frac{dr}{dt}dt = m\frac{dr}{dt}\frac{d^2 r}{dt^2},$$

wenn K die elektrische Kraft bezeichnet. Wir haben auf diese Weise das erste und zweite Newton'sche Bewegungsgesetz erhalten.

Denn wenn keine äussere Kraft einwirkt, so ist das Trägheitsgesetz einfach das Gesetz der Erhaltung der elektromagnetischen Energie und das zweite Newton'sche Gesetz sagt hier aus, dass die während dt von der Kraft geleistete Arbeit gleich der entsprechenden Aenderung der elektromagnetischen Energie ist.

Das dritte Newton'sche Gesetz, das die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung behauptet, gilt für alle elektrostatischen Kräfte zwischen elektrischen Quanten. Die mechanischen Kräfte müssen von unserem Standpunkte aus mit solchen Kräften identificirt werden. Da wir die Annahme ruhenden Aethers machen, so gilt das Gesetz für die allgemeinen elektromagnetischen Kräfte nicht.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist in unseren Grundlagen insofern enthalten, als er für elektrische Polarisationen und für die zwischen zwei elektrischen Quanten wirkenden Kräfte gilt.

Was schliesslich die festen Verbindungen anlangt, die zwischen mehreren elektrischen Massen existiren können, so würde es solche streng genommen von unserem Standpunkte aus nicht geben. Es können nur Kräfte auftreten, die sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Wenn z. B. ein Pendel schwingt, so wirkt die Schwerkraft so lange dehnend auf die Pendelschnur, bis die hervorgerufenen elastischen Kräfte gleich gross geworden sind. Solche Kräfte, welche keine Arbeit leisten, sind in der bekannten Lagrange'schen Form einzuführen.

Man kann die hier skizzirte Begründung der Mechanik als der Hertz'schen diametral entgegengesetzt bezeichnen. Die festen Verbindungen, welche bei Hertz zu den Voraussetzungen gehören, zeigen sich hier als Wirkung verwickelter Einzelkräfte. Ebenso ist das Gesetz der Trägheit eine verhältnismässig späte Consequenz aus den elektromagnetischen Voraussetzungen. Während die Hertz'sche Mechanik offenbar darauf abzielt, die elektromagnetischen Gleichungen als Folgerungen zu liefern, ist hier das Verhältnis gerade umgekehrt. In Bezug auf

logischen Aufbau kann sich natürlich eine elektromagnetisch begründete Mechanik mit der Hertz'schen nicht messen, schon weil das System der Maxwell'schen Differentialgleichungen überhaupt noch keine genau kritische Bearbeitung gefunden hat, aber sie hat, wie mir scheint, einen sehr erheblichen Vorzug, dass sie nämlich, wie gezeigt wurde, über die gewöhnliche Mechanik hinausgeht, die hiernach nur als erste Näherung zu bezeichnen ist. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben für oder gegen sie durch die Erfahrung zu entscheiden.

(Eingegangen 19. Mai 1901.)