8. *Die Nordströmsche Gravitationstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalküls; von A. Einstein und A. D. Fokker.*

Bei allen bisherigen Darstellungen der Nordströmschen Theorie der Gravitation[1]) wurde als invarianten-theoretisches Hilfsmittel lediglich die Minkowskische Kovariantentheorie benutzt, d. h. es wurde von den Gleichungen der Theorie lediglich verlangt, daß sie linearen orthogonalen Raum-Zeittransformationen gegenüber kovariant sein sollten. Diese den Gleichungen a priori auferlegte Bedingung schränkt aber die theoretischen Möglichkeiten nicht in dem Maße ein, daß man ohne Zuhilfenahme spezieller physikalischer Voraussetzungen zwanglos zu den Grundgleichungen der Theorie gelangen kann. Im folgenden soll dargetan werden, daß man zu einer in formaler Hinsicht vollkommen geschlossenen und befriedigenden Darstellung der Theorie gelangen kann, wenn man, wie dies bei der Einstein-Großmannschen Theorie bereits geschehen ist, das invarianten-theoretische Hilfsmittel benutzt, welches uns in dem absoluten Differentialkalkül gegeben ist. Da in der Natur Bezugssysteme, auf die wir die Dinge beziehen können, sich uns nicht darbieten, beziehen wir die vierdimensionale Mannigfaltigkeit zunächst auf ganz beliebige Koordinaten (entsprechend den Gaussschen Koordinaten in der Flächentheorie), und beschränken die Wahl des Bezugssystems erst dann, wenn uns das behandelte Problem selbst Veranlassung hierzu bietet.

Es erweist sich hierbei, daß man zur Nordströmschen Theorie statt zur Einstein-Großmannschen gelangt, wenn man die einzige Annahme macht, es sei eine Wahl bevorzugter Bezugssysteme in solcher Weise möglich, daß das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gewahrt ist.

1) Vgl. G. Nordström, Ann. d. Phys. 42. p. 533. 1913; A. Einstein, Phys. Zeitschr. 14. p. 1251. 1913.

§ 1. *Charakteristik des Gravitationsfeldes. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge.*

Wir nehmen an[1]), daß für einen sich in einem Gravitationsfelde bewegenden Punkt ein Bewegungsgesetz gelte, das in Hamiltonscher Form lautet:

$$\delta \int d s = 0, \tag{1}$$

worin

$$d s^2 = \sum_{\mu \nu} g_{\mu \nu} d x_\mu d x_\nu . \tag{2}$$

Das Gravitationsfeld wird dann charakterisiert durch die zehn Raum-Zeitfunktionen $g_{\mu \nu}$. ds ist eine Invariante bezüglich beliebiger Substitutionen, welche in der auf dem absoluten Differentialkalkül begründeten allgemeinen Relativitätstheorie dieselbe Rolle spielt wie das Euklidische Linienelement in der Minkowskischen Invariantentheorie. Als der einzige Skalar, der sich auf zwei benachbarte Raum-Zeitpunkte bezieht, hat ds die Bedeutung des „natürlich gemessenen" Abstandes dieser zwei Raum-Zeitpunkte.

Da jeder vektoranalytischen Größe, bzw. jeder vektoranalytischen Operation in der Euklidischen Mannigfaltigkeit eine allgemeinere vektoranalytische Größe bzw. Operation in der durch ein beliebiges Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit entspricht, lassen sich den Gesetzen der ursprünglichen Relativitätstheorie für die physikalischen Erscheinungen entsprechende Gesetze der verallgemeinerten Relativitätstheorie zuordnen. Die so erhaltenen Gesetze, welche allgemein kovariant sind, enthalten den Einfluß des Gravitationsfeldes auf die physikalischen Vorgänge.

Von allen jenen die physikalischen Vorgänge beschreibenden Gesetzen geben wir hier nur ein einziges an, von allgemeinster Bedeutung: nämlich dasjenige, das dem Erhaltungssatz des Impulses und der Energie in der ursprünglichen Theorie der Relativität entspricht. In jener Theorie wurden die energetischen Eigenschaften der Vorgänge ausgedrückt durch einen Spannungs-Energietensor $(T_{\mu \nu})$. Diesen Größen $T_{\mu \nu}$ entsprechen in der verallgemeinerten Theorie Größen $\mathfrak{T}_{\sigma \nu}$, welche die mit $\sqrt{-g}$

1) Vgl. A. Einstein, Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62. p. 6. 1913.

multiplizierten Komponenten eines gemischten Tensors bilden, der aus einen symmetrischen kontravarianten Tensor ($\Theta_{\mu\nu}$) durch die gemischte Multiplikation

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\mathfrak{T}_{\sigma\nu} = \sum_{\mu} g_{\sigma\mu}\,\Theta_{\mu\nu}$$

hervorgeht (g bedeutet die Determinante aus den Größen $g_{\mu\nu}$).

Besteht z. B. das physikalische System in einer bewegten kontinuierlichen Massenverteilung von der Ruhedichte ϱ_0, so ist

$$\Theta_{\mu\nu} = \varrho_0 \frac{d x_\mu}{d s}\frac{d x_\nu}{d s},$$

und die physikalische Bedeutung der $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ geht aus folgender Tabelle hervor[1]):

$$\begin{matrix} \mathfrak{T}_{11} & \mathfrak{T}_{12} & \mathfrak{T}_{13} & \mathfrak{T}_{14} \\ \mathfrak{T}_{21} & \mathfrak{T}_{22} & \mathfrak{T}_{23} & \mathfrak{T}_{24} \\ \mathfrak{T}_{31} & \mathfrak{T}_{32} & \mathfrak{T}_{33} & \mathfrak{T}_{34} \\ \mathfrak{T}_{41} & \mathfrak{T}_{42} & \mathfrak{T}_{43} & \mathfrak{T}_{44} \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} -X_x & -X_y & -X_z & -i_x \\ -Y_x & -Y_y & -Y_z & -i_y \\ -Z_x & -Z_y & -Z_z & -i_z \\ f_x & f_y & f_z & \eta. \end{matrix}$$

X_x usw. bezeichnen die Komponenten des Flächendrucks, i_x usw. die Komponenten der Impulsdichte, f_x usw. die Komponenten der Strömungsdichte der Energie, und η die Energiedichte.

Die erwähnten Erhaltungssätze haben in der allgemeinen Theorie die allgemein-kovariante Form:

$$(3) \qquad \sum_{\nu}\frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu\tau}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\gamma_{\mu\tau}\mathfrak{T}_{\tau\nu}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung drückt aus, daß der betrachtete Vorgang für sich allein die Erhaltungssätze nicht erfüllt, da von dem Gravitationsfeld Impuls und Energie an das materielle System abgegeben wird.

Allgemein beziehen sich die Komponenten $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ auf alle physikalischen Vorgänge im Raume, mit Ausschluß der das Gravitationsfeld selbst betreffenden.

Wir wissen aus der ursprünglichen Relativitätstheorie, daß der Energietensor allein maßgebend ist für die Trägheitseigenschaften eines Systems. Aus der rechten Seite von (3) geht hervor, daß auch die Einwirkung eines Gravitationsfeldes

1) In der Tabelle, so wie sie in der Phys. Zeitschr. XIV, p. 1257 gegeben wurde, findet sich ein Vorzeichenfehler.

nur durch die Komponenten des Energietensors bestimmt wird. Es entspricht dies durchaus den Erfahrungsgesetzen von der Gleichheit der trägen und der schweren Masse. Wir werden im folgenden annehmen, daß auch für die Erzeugung eines Gravitationsfeldes durch ein materielles System der Energietensor allein maßgebend ist.

§ 2. *Differentialgleichung für das Gravitationsfeld im Falle der Nordströmschen Theorie.*

Das bisher Gesagte gilt ebenso für die Nordströmsche wie für die Einstein-Großmannsche Theorie; der Unterschied beider Theorien aber besteht im folgenden:

Das Gravitationsfeld wird von zehn Größen $g_{\mu\nu}$ bestimmt. Gemäß der Einstein-Großmannschen Theorie werden für diese zehn Größen zehn formal gleichwertige Gleichungen angegeben. Der Nordströmschen Theorie aber liegt die Annahme zugrunde, daß es möglich sei, durch passende Wahl des Bezugssystems dem Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu genügen. Wir wollen sogleich zeigen, daß dies auf die Annahme herauskommt, daß sich die zehn Größen $g_{\mu\nu}$ bei passender Wahl des Bezugssystems auf eine einzige Größe Φ^2 reduzieren lassen.

Damit nämlich das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfüllt sei, muß die für die Lichtausbreitung maßgebende Gleichung

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, d x_\mu\, d x_\nu = 0$$

in die Gleichung

$$d x^2 + d y^2 + d z^2 - c^2 d t^2 = 0$$

übergehen. Daraus folgt, daß bei einer solchen Wahl des Bezugssystems sein muß:

$$\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, d x_\mu\, d x_\nu = \Phi^2 d x_1{}^2 + \Phi^2 d x_2{}^2 + \Phi^2 d x_3{}^2 - \Phi^2 d x_4{}^2$$

wobei jetzt $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ und $x_4 = c\,t$ gesetzt ist.

Das System der $g_{\mu\nu}$ degeneriert also in

$$\begin{matrix} \Phi^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi^2 \end{matrix} \tag{4}$$

Zur Bestimmung der einen Größe Φ^2 brauchen wir eine einzige Differentialgleichung, die wie die Poissonsche Gleichung skalaren Charakter haben wird. Diese Gleichung wollen wir ebenso wie die früheren in allgemein kovarianter Form aufstellen, d. h. ohne zunächst die durch das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nahegelegte Spezialisierung des Bezugssystems auszuführen. Die gesuchte Gleichung ist vollständig bestimmt durch die Annahme, daß sie von der zweiten Ordnung ist, wenn man noch berücksichtigt, daß sie eine Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung sein muß. Offenbar wird sie von der Form sein

$$\Gamma = \varkappa \mathfrak{T}, \tag{5}$$

wobei Γ ein Skalar ist, der aus den Größen $g_{\mu\nu}$ und deren ersten und zweiten Ableitungen gebildet ist, und $\mathfrak{T}$ ein Skalar, der durch den materiellen Vorgang, nach dem Gesagten also durch die $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$, bestimmt ist. $\varkappa$ bedeutet eine Konstante.

Aus den Untersuchungen der Mathematiker über die Differentialtensoren einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit geht hervor, daß der einzige Ausdruck, der für Γ in Betracht kommt, eine Funktion ist von

$$\sum_{iklm} \gamma_{im} \gamma_{kl} \, (ik, lm).$$

Dabei bedeutet (ik, lm) den bekannten Riemann-Christoffelschen Tensor vierten Ranges, der mit dem Krümmungsmaße der Flächentheorie zusammenhängt, und durch die Gleichung

$$(ik, lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_i \partial x_l}\right) + \sum_{\varrho\sigma} \gamma_{\varrho\sigma} \left(\begin{bmatrix} im \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right)$$

definiert ist, wobei $\begin{bmatrix} im \\ \varrho \end{bmatrix}$ bedeutet $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\varrho}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{m\varrho}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{im}}{\partial x_\varrho}\right)$.

Ferner ist aus der allgemeinen Kovariantentheorie klar, daß zu den $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ nur der Skalar $\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}$ gehört (bzw. eine Funktion dieser Größe).

Hieraus geht hervor, daß die gesuchte Gleichung die Form

$$\sum_{iklm} \gamma_{im} \gamma_{kl} \, (ik, lm) = \varkappa \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau} \tag{5a}$$

erhalten muß. Dabei ist allerdings *vorausgesetzt*, daß in der gesuchten Gleichung die zweiten Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ und die $\mathfrak{T}_{\sigma\nu}$ *linear* eingehen.

Die Gleichung (5a), die wir jetzt aufgestellt haben, und die Gleichungen (3) enthalten die Nordströmsche Theorie der Gravitation vollständig mit Bezug auf beliebige Raum-Zeit-koordinaten, wenn man die *Bedingungen hinzunimmt*, welche die $g_{\mu\nu}$ erfüllen müssen, damit das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit für ein passend gewähltes Bezugssystem erfüllt sei.

§ 3. *Die Grundgleichungen der Nordströmschen Theorie mit Bezug auf die dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit angepaßten Bezugssysteme.*

Wir denken uns jetzt diejenigen Bezugssysteme bevorzugt in bezug auf welche das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erfüllt ist. Die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Fundamentaltensors sind dann durch die in (4) geschriebenen Werte gegeben. Die zugehörigen $g_{\mu\nu}$ findet man in der Tabelle

$$
\begin{array}{cccc}
+\frac{1}{\Phi^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & +\frac{1}{\Phi^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & +\frac{1}{\Phi^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\Phi^2}
\end{array}
\tag{4a}
$$

In diesem Falle erhält man $ds = \Phi\sqrt{dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 - dx_4{}^2}$. Wie schon erwähnt, ist ds der „natürlich gemessene" Abstand zweier benachbarter Raum-Zeitpunkte. Jetzt kann man die Fälle unterscheiden, wo der Verbindungsvektor raumartig oder zeitartig ist. Im ersten Falle kann durch passende Wahl des Bezugssystems der Vektor zu einem rein räumlichen gemacht werden; man erhält dann als Zusammenhang der „natürlich" und der im Koordinatenmaß gemessenen Längen

$$ds = \Phi\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

d. h. ein Maßstab von der natürlichen Länge ds hat die Koordinatenlänge ds / Φ.

Für einen zeitartigen Verbindungsvektor verschwinden bei passender Wahl des Bezugssystems die räumlichen Komponenten, und man erhält

$$ds = \Phi \sqrt{-dx_4^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{ds}{i} = \Phi\, dx_4.$$

ds/i ist nichts anderes als die mit einer Uhr von bestimmter Beschaffenheit gemessene Zeitdauer. $ds/\Phi i$ ist also die Zeitdifferenz im Koordinatenmaßstab.

$1/\Phi$ ist also der Faktor, mit dem die natürlich gemessenen Zeiten und Längen multipliziert werden müssen, um Koordinatenzeiten bzw. Koordinatenlängen zu ergeben.

Aus der Form des Linienelementes

$$ds^2 = \Phi^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2)$$

folgt, daß die Gleichungen der Nordströmschen Theorie nicht nur bezüglich den Lorentz-Transformationen, sondern auch bezüglich Ähnlichkeitstransformationen kovariant sind.

Die Impuls- und Energiegleichungen (3) für die Materie nehmen die Form an

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \log \Phi}{\partial x_\sigma} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}. \tag{3a}$$

Es ist bemerkenswert, daß für den Einfluß des Gravitationsfeldes auf ein System gemäß dieser Gleichung nur der Skalar $(1/\sqrt{-g}) \sum\limits_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}$ maßgebend ist. Es ist dies im Einklang mit der Erwägung, die wir bei der Ableitung der Gleichung (5a) gegeben haben.

Die Differentialgleichung des Gravitationsfeldes (5a) nimmt die Form an

$$\frac{1}{\Phi^3}\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_4^2}\right] = \frac{k}{\Phi^4} \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau} \tag{5b}$$

(wobei k eine neue Konstante bedeutet), oder

$$\Phi \,\square\, \Phi = k \sum_\tau \mathfrak{T}_{\tau\tau}.$$

Da das Verhältnis der natürlichen und der Koordinatenlängen an *einem* Orte beliebig gewählt werden kann, kann über die Wahl der Konstante k noch beliebig verfügt werden. Man kann z. B. nach dem Vorgange von Nordström $k = 1$ setzen.

Man sieht, daß die abgeleiteten Gleichungen mit den von Nordström gegebenen vollkommen übereinstimmen.

§ 4. *Schlußbemerkungen.*

Im vorstehenden konnte gezeigt werden, daß man bei Zugrundelegung des Prinzips von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit durch rein formale Erwägungen, d. h. ohne Zuhilfenahme weiterer physikalischen Hypothesen zur Nordströmschen Theorie gelangen kann. Es scheint uns deshalb, daß diese Theorie allen anderen Gravitationstheorien gegenüber, die an diesem Prinzip festhalten, den Vorzug verdient. Vom physikalischen Standpunkt ist dies um so mehr der Fall, als diese Theorie dem Satz von der Äquivalenz der trägen und schweren Masse strenge Genüge leistet.

Wir bemerken, daß nur die Verwendung der Invariantentheorie des absoluten Differentialkalküls uns eine klare Einsicht in den formalen Inhalt der Nordströmschen Theorie zu geben vermag. Ferner setzt uns diese Methode in den Stand, die Beeinflussung beliebiger physikalischer Vorgänge durch das Gravitationsfeld, so wie sie nach der Nordströmschen Theorie zu erwarten ist, ohne Hinzuziehung neuer Hypothesen anzugeben. Auch tritt die Beziehung der Nordströmschen Theorie zur Einstein-Großmannschen mit voller Deutlichkeit hervor.

Endlich legt die Rolle, welche bei der vorliegenden Untersuchung der Riemann-Christoffelsche Differentialtensor spielt, den Gedanken nahe, daß er auch für eine von physikalischen Annahmen unabhängige Ableitung der Einstein-Großmannschen Gravitationsgleichungen einen Weg öffnen würde. Der Beweis der Existenz oder Nichtexistenz eines derartigen Zusammenhanges würde einen wichtigen theoretischen Fortschritt bedeuten.[1])

1) Die in § 4, p. 36, des „Entwurfs einer verallgemeinerten Relativitätstheorie“ angegebene Begründung für die Nichtexistenz eines derartigen Zusammenhanges hält einer genaueren Überlegung nicht stand.

(Eingegangen 19. Februar 1914.)