8. *Zur Theorie des statischen Gravitationsfeldes;* *von A. Einstein.*

In einer jüngst erschienenen Arbeit habe ich aus einer Hypothese, die ich als Äquivalenzprinzip bezeichnet habe, die Bewegungsgleichungen eines in einem solchen Felde bewegten materiellen Punktes abgeleitet. Im folgenden soll exakt abgeleitet werden, welchen Einfluß ein statisches Schwerefeld auf die elektromagnetischen und thermischen Vorgänge nach dem Äquivalenzprinzip hat. Die erste dieser beiden Fragen habe ich schon früher in erster Näherung behandelt. Zuletzt wird die Differentialgleichung für das statische Gravitationsfeld selbst abgeleitet.

§ 1. Ableitung der elektromagnetischen Gleichungen unter Berücksichtigung des (statischen) Gravitationsfeldes.

Der Weg, den wir hier einschlagen, ist genau derselbe, welcher uns in der früheren Arbeit die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes geliefert hat. Wir suchen nämlich die elektromagnetischen Gleichungen, welche relativ zu einem (im Bornschen Sinne) gleichförmig beschleunigten System $K(x, y, z, t)$ gelten, und nehmen nach der Äquivalenzhypothese an, daß diese Gleichungen auch im statischen Schwerefeld gelten. Um die in bezug auf K gültigen Gleichungen zu finden, gehen wir aus von den bekannten Gleichungen, welche in bezug auf ein unbeschleunigtes System $\sum(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ gelten. Wählen wir in letzterem die Zeiteinheit so, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird, so haben diese Gleichungen für das Vakuum die bekannte Form:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{v}' \varrho' + \frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \tau} &= \operatorname{rot}' \mathfrak{H}', \\ 0 &= \operatorname{div}' \mathfrak{H}', \\ \frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial \tau} &= - \operatorname{rot}' \mathfrak{E}', \\ \varrho' &= \operatorname{div}' \mathfrak{E}'. \end{aligned}\right.$$

Die Zeichen für die in diesen Gleichungen auftretenden Skalare, Vektoren und Operatoren sind gestrichelt, um ihre Zugehörigkeit zum System $\sum$ anzudeuten. Diese Gleichungen sind auf das gleichförmig beschleunigte System K zu transformieren nach Gleichungen, die für genügend kleine t und bei geeigneter Wahl der Koordinatenachsen und Anfangspunkte für die Zeiten sich in der Form schreiben lassen:

$$
(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= x + \frac{a c}{2} t^2, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z, \\ \tau &= c t, \end{aligned} \right.
$$

wobei

$$c = c_0 + a x .$$

Auch die Feldvektoren $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{H}'$ wollen wir aufs beschleunigte System K transformieren. Dies tun wir auf Grund der Festsetzung, daß die auf K bezogenen Feldvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ identisch sein sollen mit den Feldvektoren $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$ desjenigen unbeschleunigten Systems $\sum$, in bezug auf welches das System K gerade die Geschwindigkeit Null hat. Für $t = \tau = 0$ aus dieser Festsetzung unmittelbar:

$$
\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}', \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}'. \end{aligned}
$$

Analoges setzen wir für die elektrische Dichte fest, so daß für $t = \tau = 0$

$$\varrho = \varrho'$$

ist. Nun bemerken wir, daß es genügt, wenn wir die den Gleichungen (1) entsprechenden transformierten Gleichungen für $t = \tau = 0$ aufstellen, da ja diese Gleichungen für jedes t die nämlichen sein müssen. Für $t = \tau = 0$ gilt nach (2)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Aus dem bisher Gesagten folgt schon, daß die rechten Seiten von (1) durch Weglassung der Striche ungeändert bleiben, ebenso die linken Seiten der zweiten und vierten der Gleichungen (1). Einiges Nachdenken erfordert nur die Umformung der linken Seiten der ersten und dritten der Gleichungen (1).

Zunächst folgt aus (2), daß für einen bewegten Punkt zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$
(2\text{a}) \qquad \left\{ \begin{aligned} dx &= d\xi, \\ dy &= d\eta, \\ dz &= d\zeta, \\ dt &= \frac{1}{c}\, d\tau, \end{aligned} \right.
$$

woraus unmittelbar folgt, daß

$$
\mathfrak{v} = c\,\mathfrak{v}' \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v}' = \frac{1}{c}\,\mathfrak{v}, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{v}_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{usw.}
$$

gesetzt wird. Wir bezeichnen ferner mit $d\,\mathfrak{E}$ die Änderung, welche $\mathfrak{E}$ in einer unendlich kurzen Zeit in einem Systempunkt von K erfährt, mit $d'\,\mathfrak{E}'$ die entsprechende Änderung, welche $\mathfrak{E}'$ in dem momentan koinzidierenden Punkte von $\sum$ in der entsprechenden Zeit erfährt. Im Anfang der unendlich kleinen Zeitstrecke dt bzw. $d\tau$ sei $t = \tau = 0$; zu dieser Zeit ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$. Diese letztere Gleichung gilt aber am Ende von dt bzw. $d\tau$ aus zwei Gründen nicht mehr genau. Erstens fällt nämlich am Ende von $d\tau$ der Systempunkt von K nicht mehr mit dem von $\sum$ zusammen; hiervon kann jedoch Abstand genommen werden, da diese Verrückung unendlich klein zweiter Ordnung ist. Zweitens aber erlangt während der betrachteten unendlich kleinen Zeit der Systempunkt von K eine Geschwindigkeit $\mathfrak{g}\,d\tau$ in Richtung der ξ-Achse; man hat also, um $\mathfrak{E}$ am Ende von $d\tau$ zu erhalten, das elektromagnetische Feld auf ein beschleunigungsfreies System zu beziehen, welches gegenüber $\sum$ im Sinne der positiven ξ-Achse mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{g}\,d\tau$ bewegt ist. Dabei transformiert sich das elektromagnetische Feld in bekannter Weise. Mit Rücksicht auf die angedeuteten Überlegungen erhält man:

$$
d\,\mathfrak{E} = d'\,\mathfrak{E}' + [\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}']\,dt,
$$

oder mit Rücksicht auf die letzte der Gleichungen (2a):

$$
\frac{\partial\,\mathfrak{E}'}{\partial\,\tau} = \frac{1}{c}\,\frac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial\,t} - \frac{1}{c}\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{H}].
$$

Nun erhält man aber aus den Gleichungen (2)

$$
|\mathfrak{g}| = \frac{a}{c} = \frac{1}{c}\,\frac{dc}{dx},
$$

also, weil c von y und z unabhängig ist,

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{c} \operatorname{grad} c .$$

Man erhält also endlich

$$\frac{\partial \mathfrak{E}'}{\partial \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} [\operatorname{grad} c, \mathfrak{H}]$$

und auf ganz analoge Weise

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial \tau} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\operatorname{grad} c, \mathfrak{E}] .$$

Berücksichtigt man nun noch, daß nach den Regeln der Vektorrechnung

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} + [\operatorname{grad} c, \mathfrak{H}] = \operatorname{rot} (c \mathfrak{H})$$

ist, und daß die analoge Gleichung für $\operatorname{rot}(c\mathfrak{E})$ besteht, so erhält man mit Rücksicht auf die Resultate der bereits angegebenen Überlegungen aus den Gleichungen (1) die folgenden auf das System K bezüglichen:

$$\text{(1a)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{v} \varrho + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (c \mathfrak{H}) , \\ 0 &= \operatorname{div} \mathfrak{H} , \\ \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} &= - \operatorname{rot} (c \mathfrak{E}) , \\ \varrho &= \operatorname{div} \mathfrak{E} . \end{aligned} \right.$$

Die physikalische Bedeutung der in diesen Gleichungen auftretenden Größen ist dabei eine vollkommen bestimmte. x, y, z werden durch am starren System K angelegte Maßstäbe gemessen. t ist die Zeit im System K, welche durch verschieden beschaffene, in den Systempunkten von K ruhend angeordnete Uhren gemessen wird; t ist durch die Festsetzungen definiert, daß die Lichtgeschwindigkeit in K nicht von der Zeit und nicht von der Richtung abhängen soll. $\mathfrak{v}$ ist die mit der Zeit t gemessene Geschwindigkeit der Elektrizität. ϱ ist die Dichte der Elektrizität, gemessen in Einheiten folgender Art: In einem nicht beschleunigten System sollen zwei solche Einheiten im Abstand 1 cm aufeinander die Kraft 1 aufeinander ausüben, wobei die Kraft 1 diejenige ist, welche einem Gramm die Beschleunigung 1 erteilt, falls man als Zeiteinheit die Zeit wählt, welche das Licht braucht, um 1 cm zu durchlaufen (Lichtzeit). Der Feldvektor $\mathfrak{E}$ hat folgende Bedeutung. Hat man eine

Federwage so graduiert, daß sie in dem nicht mitbeschleunigten[1]) System $\sum$ die Kraft unter Zugrundelegung der Licht–Zeiteinheit mißt, und befestigt man am Angriffspunkt dieser Federwage die Einheit der Elektrizität, so mißt diese Federwage direkt die Feldintensität $|\mathfrak{E}|$. Analog gestaltet sich die Definition von $\mathfrak{H}$. —

Nach dem Äquivalenzprinzip hat man die Gleichungen (1a) als die elektromagnetischen Grundgleichungen in einem statischen Schwerefelde anzusehen. Sie sind insofern als exakt anzusehen, als sie mit gleicher Annäherung gelten sollen, wie sehr auch das Gravitationspotential mit dem Orte variieren möge. Hingegen könnten sie aus dem Grunde unexakt sein, weil das elektromagnetische Feld das Gravitationsfeld derart beeinflussen könnte, daß letzteres kein statisches Feld mehr ist. Sie erlauben ferner, auch in den Fällen, in denen sie genau gelten, nicht, den Einfluß zu berechnen, welchen das elektromagnetische Feld auf das statische Gravitationsfeld (c) ausübt.

§ 2. Bemerkungen über den Inhalt der abgeleiteten Gleichungen.

Ich will die im letzten Paragraph bei der anschaulichen Interpretation der Feldvektoren eingeführte Federwage nach einem mündlichen Vorschlag P. Ehrenfests als „Taschen"-Federwage bezeichnen. Es sollen überhaupt mit der Bezeichnung „Taschen" solche physikalische Einrichtungen bezeichnet werden, welche an Orte verschiedenen Gravitationspotentials gebracht gedacht werden, und deren Angaben stets benuzt werden, an einem Orte von wie großem c sie sich auch gerade befinden mögen.[2]) So kann man die Uhr, welche die „Lichtzeit" angibt, als „Taschenuhr"- bezeichnen, die mit der Elektrizitätseinheit im Angriffspunkte versehene Federwage als „Taschenfeldmesser" usw.

Aus der früheren Arbeit geht nun hervor, daß die Angabe einer „Taschenfederwage" nicht direkt die von ihr ausgeübte

---

1) Natürlich ist dasjenige System $\sum$ gemeint, welches in dem betreffenden Augenblick keine Relativgeschwindigkeit in bezug auf K hat.

2) Mit der Bezeichnung „Taschen"- soll angedeutet werden, daß die Dinge transportiert werden können, nicht nur an einem Orte benutzt werden.

Kraft mißt. Letztere ist vielmehr der mit c multiplizierten Angabe der Taschenfederwage gleichzusetzen. Hieraus ergibt sich unmittelbar, daß die auf die in K ruhende Elektrizitätseinheit ausgeübte ponderomotorische Kraft nicht gleich $\mathfrak{E}$, sondern gleich $c \cdot \mathfrak{E}$ zu setzen ist. Entsprechendes gilt für den Feldvektor $\mathfrak{H}$.

Da nach der dritten der Gleichungen (1a) in einem statischen elektrischen Felde $\operatorname{rot}(c\,\mathfrak{E}) = 0$ ist, das Linienintegral des Vektors $c\,\mathfrak{E}$ über eine geschlossene Kurve also verschwindet, sieht man, daß es unmöglich ist, durch Führen einer Elektrizitätsmenge über eine geschlossene Bahn unbegrenzt Arbeit zu erhalten.

Wir stellen nun Coulombs Gesetz für einen Raum von konstantem c auf. Aus der letzten der Gleichungen (1a) folgt, daß das Feld einer Punktladung ε durch $|\mathfrak{E}| = \frac{\varepsilon}{4\pi r^2}$ gegeben ist, falls man mit r den Abstand von der Punktladung bezeichnet. Befindet sich in diesem Falle eine zweite elektrische Masse ε', so ist die auf sie ausgeübte Kraft gleich $c\,\varepsilon' |\mathfrak{E}|$ oder gleich $c\frac{\varepsilon\,\varepsilon'}{4\pi r^2}$, also wie nach der früheren Arbeit jede Kraft eines beliebigen „Taschensystems" in bestimmtem Zustande — proportional c. Mit diesem Resultat hängt das Folgende eng zusammen. Wir bringen von zwei genau gleichen Kondensatoren C und C' mit den Belegungen a, b bzw. $a'\,b'$ den einen an einen Ort vom Gravitationspotential c, den anderen an einen Ort vom Gravitationspotential c'. a sei mit a', b mit b' leitend verbunden. Laden wir die Kondensatoren, so ist wegen $\operatorname{rot}(c\,\mathfrak{E}) = 0$ die Ladung beider Kondensatoren nicht dieselbe; es ist vielmehr $c\,\mathfrak{E} = c'\,\mathfrak{E}'$ und wegen $\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{E}$ auch $c\,\varepsilon = c'\,\varepsilon'$, wenn man mit ε bzw. ε' die Ladungen der beiden Kondensatoren bezeichnet.

Aus dem für das Coulombsche Gesetz gefundenen Ausdruck geht hervor, daß wir nicht $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, sondern den Ausdruck $c/2\,(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ der Dichte der elektromagnetischen Energie gleichzusetzen haben. Wir werden also die dem Energieprinzip entsprechende Gleichung dadurch erhalten, daß wir die erste der Gleichungen (1a) skalar mit $c\,\mathfrak{E}$, die dritte skalar mit $c\,\mathfrak{H}$ multiplizieren und beide addieren, und hierauf über einen beliebigen geschlossenen Raum integrieren. Es ergibt sich so in bekannter Weise:

$$(3) \quad \int \mathfrak{v}\, c\, \mathfrak{E}\, \varrho\, d\tau + \frac{d}{dt}\left\{\int \frac{c}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\tau\right\} = \int [c\,\mathfrak{E},\, c\,\mathfrak{H}]\, \mathfrak{n}\, d\sigma,$$

falls man mit $d\tau$ das Raumelement, mit $d\sigma$ das Element der Begrenzungsfläche, mit $\mathfrak{n}$ deren nach innen gerichtete Normale bezeichnet. Das Energieprinzip ist also erfüllt, wobei der Vektor $c^2[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]$ dem Energiestrom gleich ist.

Wir leiten nun den Impulssatz ab, indem wir die erste der Gleichungen (1a) vektoriell mit $\mathfrak{H}$, die dritte derselben mit $-\mathfrak{E}$ multiplizieren und addieren. Setzen wir als Ausdruck der Maxwellschen Spannungen

$$X_x = c(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{H}_x^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2), \quad X_y = c(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y),$$
$$X_z = c(\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z)$$

usw., so erhalten wir:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} &\varrho(c\,\mathfrak{E}_x + [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]_x) + \frac{d}{dt}[\mathfrak{E}, \mathfrak{H}]_x \\ &\qquad = \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\frac{\partial c}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

sowie die hieraus durch zyklische Vertauschung entstehenden Gleichungen. In dieser Gleichung drückt das erste Glied die X-Komponente der Impulsgröße aus, welche durch die elektrischen Massen pro Zeiteinheit und Volumeinheit an die ponderabeln Massen des Systems abgegeben wird. Der Ausdruck der ponderomotorischen Kraft ist also bis auf den Faktor c der von H. A. Lorentz angegebene. Das zweite Glied der linken Seite drückt den Zuwachs der Volumeinheit an elektromagnetischem Impuls aus. Verschwinden die räumlichen Differentialquotienten von c, d. h. ist kein Schwerefeld vorhanden, so wird die der linken Seite entsprechende Zunahme des Impulses der Volumeinheit durch die elektromagnetischen Spannungen bewirkt, wie in der Elektrodynamik ohne Berücksichtigung des Schwerefeldes. Für den Fall aber, daß ein Gravitationsfeld vorhanden ist, ergibt sich aus dem letzten Gliede der rechten Seite, daß dieses für das elektromagnetische Feld als Impulsquelle anzusehen ist. Die elektromagnetische Feldenergie empfängt aus dem Schwerefeld einen Impuls, genau wie eine ponderable ruhende Masse; denn in der früheren Arbeit ergab es sich, daß das Gravitationsfeld auf die ruhende Masse m pro Zeiteinheit den Impuls $-m \operatorname{grad} c$ überträgt. Es ergibt sich also z. B., daß die Hohlraumstrahlung eine ihrer trägen Masse genau entsprechende schwere Masse besitzt; dies Resultat ist in den Gleichungen (1a) und dem Ausdruck für die auf die Elektrizitätsmengen wirkenden ponderomotorischen Kräfte bereits enthalten, da die zuletzt angeschriebene Impulsgleichung eine Folge der Gleichungen (1a) ist. Zu bemerken ist, daß die Größe $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, nicht die eigentliche Energiedichte $c/2\,(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$, für die Schwere des elektromagnetischen Feldes maßgebend, d. h. einer räumlichen Dichte unbewegter träger Masse äquivalent ist. Dies ist auch zu erwarten; denn der Ausdruck $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ ist die Energiedichte, wie sie von einem mit „Tascheninstrumenten" messenden Beobachter erscheint. Diese Größe ist es also, welche der trägen Masse nach der von uns benutzten Definition für letztere analog ist.

Es geht aus diesen Überlegungen hervor, daß das elektromagnetische Feld auch umgekehrt eine Rückwirkung auf das Gravitationsfeld besitzt, dessen Ausdruck für den statischen Fall sich nach den angegebenen Überlegungen ohne weiteres ergibt, da die Raumfunktion $\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)$ einer gleich großen Dichte unbewegter ponderabler Masse äquivalent ist. Hierauf soll aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden. Ebensowenig will ich mich hier mit dem in den Gleichungen (1a) enthaltenen Gesetze der Krümmung der Lichtstrahlen im Schwerefelde befassen, weil dieses in erster Annäherung bereits in der voriges Jahr über den Gegenstand erschienenen Abhandlung angegeben ist.

§ 3. Thermische Größen und Gravitationsfeld.

An zwei voneinander entfernten Orten mit den Lichtgeschwindigkeiten c_1 bzw. c_2 seien zwei Wärmebehälter W_1 bzw. W_2 angeordnet. Dieselben sollen insofern gleiche Temperaturen besitzen, als ein und dasselbe Thermometer („Taschenthermometer"), mit ihnen nacheinander in Berührung gebracht, in beiden Fällen die nämliche Temperatur („Taschenthermometer"-Temperatur) T^* haben sollen. Unter „Temperatur" (T) schlechtweg sei jene Temperatur verstanden, wie sie durch

Carnotsche Kreisprozesse definiert wird. Wir fragen nach der Beziehung, die zwischen den Temperaturen der Wärmebehälter W_1 und W_2 besteht.

Wir denken uns folgenden Kreisprozeß. Mit einem Körper von der Taschentemperatur T^* werde dem Behälter W_1 die Taschenwärmemenge Q^* entzogen, der Körper hierauf zum Behälter W_2 bewegt. Dann wird vom Körper dieselbe Taschenwärmemenge Q^* auf den Wärmebehälter W_2 bei der Taschentemperatur T^* übertragen und endlich der Körper wieder zum Behälter W_1 zurückbewegt.

Nach den Ergebnissen der früheren Arbeit ist dabei die den Behältern in Wahrheit entzogene bzw. zugeführte Wärme

$$Q_1 = Q^* c_1 ,$$

$$Q_2 = Q^* c_2 .$$

Die bekannte Relation

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

liefert also sofort

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{T_1}{T_2} .$$

Haben also zwei Wärmebehälter — mit Taschenthermometern gemessen — gleiche Temperatur T^*, so verhalten sich ihre wahren (thermodynamischen) Temperaturen wie die Lichtgeschwindigkeiten der betreffenden Orte. Man kann dies auch so ausdrücken: Man erhält die wahre Temperatur, indem man die Angabe eines Taschenthermometers mit c multipliziert:

$$T = c\,T^* .$$

Hieraus folgt andererseits, daß zwei Wärmebehälter, welche sich an Orten verschiedenen Gravitationspotentials befinden und in wärmeleitender Verbindung stehen, nicht dieselben Taschentemperaturen annehmen, sondern daß letztere beim Temperaturgleichgewicht sich umgekehrt verhalten wie die Lichtgeschwindigkeiten.

Dagegen ist die Entropie eines Körpers nur von seinem mit Tascheninstrumenten gemessenen Zustande, nicht aber von dem Gravitationspotential abhängig. Es folgt dies einmal daraus, daß der Körper ohne Änderung seines mit Tascheninstrumenten gemessenen Zustandes ohne Zufuhr von Wärme nach einer Stelle von anderem Gravitationspotential gebracht werden kann, andererseits aus den soeben gefundenen Relationen. Denn es ist für zwei gleichbeschaffene Körper, die an verschiedenen Orten — mit Tascheninstrumenten gemessen — dieselben Änderungen erfahren:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q^*}{T^*} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

§ 4. Differentialgleichung des statischen Gravitationsfeldes.

In der ersten Arbeit wurde aus der letzten der Gleichungen (2)

$$c = c_0 + a x$$

auf dem Wege der Verallgemeinerung für das statische Gravitationsfeld die Gleichung

$$\Delta c = 0 \tag{3}$$

für den materiefreien Raum, und die Gleichung

$$\Delta c = k c \sigma \tag{3a}$$

für den mit Materie erfüllten Raum abgeleitet. Es zeigt sich aber, daß die Gleichung (3a) zusammen mit unserem in der früheren Abhandlung gefundenen Ausdruck für die Kraft $\mathfrak{F}$, welche auf die in der Volumeinheit befindliche ponderable Materie σ wirkt, zu einem Widerspruch führt. Ruht die Materie, so soll nämlich gelten

$$\mathfrak{F} = - \sigma \operatorname{grad} c \tag{4}$$

Bilden wir das Integral

$$\int \mathfrak{F} \, d\tau$$

über einen Raum, für welchen im Unendlichen c konstant ist, so verlangt das Prinzip der Gleichheit von actio und reactio, daß dieses Integral verschwinde. Anderenfalls würde sich die Gesamtheit der in dem betrachteten Raume befindlichen Massen, die wir auf einem starren, masselosen Gerüste uns befestigt denken wollen, sich in Bewegung zu setzen streben. Es ist aber nach (4) und (3a)

$$\int \mathfrak{F} \, d\tau = - \int \sigma \operatorname{grad} c \, d\tau = - \frac{1}{k} \int \frac{\Delta c}{c} \operatorname{grad} c \, d\tau,$$

und man beweist von dem letzten dieser Integrale leicht, daß es im allgemeinen nicht verschwindet.

Wir sind also zu einem recht bedenklichen Resultat gelangt, das geeignet ist, Zweifel an der Zulässigkeit der ganzen hier entwickelten Theorie zu erzeugen. Sicherlich deutet dieses Resultat auf eine tief liegende Lücke des Fundamentes unserer beiden Untersuchungen hin; denn es dürfte kaum gelingen, aus dem für c für das gleichförmig beschleunigte System gefundenen Ausdruck $c_0 + a\,x$ eine andere in Betracht zu ziehende Gleichung als Gleichung (3) zu entnehmen, welche ihrerseits die Gleichung (3a) mit Notwendigkeit nach sich zieht.

Um diese Schwierigkeit zu lösen, wird man sich zunächst mit Rücksicht auf die Resultate der alten Relativitätstheorie bewogen fühlen, dem Spannungen unterworfenen Gerüst eine schwere Masse zuzuschreiben, so daß zu den Kräften, die das Gravitationsfeld auf die Massen von der Dichte σ ausübt, Kräfte hinzu kämen, die es auf Spannungen unterworfene Gerüstteile ausübt. Die folgende Betrachtung führt aber zur Verwerfung einer derartigen Hypothese.

In einem statischen Schwerefeld befinde sich ein Kasten mit spiegelnden Wänden, in den Strahlung eingeschlossen sei, deren mit „Tascheninstrumenten" gemessene Energie E sei; d. h. es sei

$$E = \frac{1}{2}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\tau.$$

Ist die Ausdehnung des Kastens klein genug, so ergibt sich aus Gleichung (4) dieser Arbeit, daß die Summe der Kräfte, welche die Strahlung auf die Kastenwände ausübt, den Wert

$$-E \operatorname{grad} c$$

besitzt. Diese Kräftesumme muß gleich sein der Resultierenden der Kräfte, welche das Schwerefeld auf das ganze System (Kasten samt Strahlung) ausübt, wenn der Kasten masselos ist, und wenn der Umstand, daß die Kastenwände infolge des Strahlungsdruckes Spannungen unterworfen sind, nicht zur Folge hat, daß das Schwerefeld auf die Kastenwände wirkt. Wäre letzteres der Fall, so würde die Resultierende der von dem Schwerefeld auf den Kasten (samt Inhalt) ausgeübten Kräfte von dem Werte $-E \operatorname{grad} c$ verschieden sein, d. h. die schwere Masse des Systems wäre von E verschieden.

Befindet sich andererseits unser Strahlungskasten in einem Raum von konstantem c, so gelten für ihn die Resultate der alten Relativitätstheorie. Speziell folgt dann, daß die *träge* Masse des Systems gleich E ist.

Will man also an der Proportionalität von schwerer und träger Masse solcher Gebilde, welche sich als materielle Punkte auffassen lassen, festhalten, so muß man annehmen, daß die *schwere* Masse unseres Systems ebenfalls gleich E sei. Dies ist aber nach obiger Überlegung nur dann der Fall, wenn wir Kräfte des Gravitationsfeldes auf Spannungen unterworfene, masselose Wände *nicht* annehmen.

Eine ganz analoge Betrachtung läßt sich an die in der früheren Arbeit gefundenen Bewegungsgleichungen materieller Punkte anknüpfen. Man betrachte nämlich einen Kasten, in dem materielle Punkte hin- und herfliegen, die an den Wänden vollkommen elastisch abprallen (Modell eines einatomigen Gases). Ganz wie im Falle des Strahlungskastens findet man, daß die schwere und die träge Masse des ganzen Systems nur in dem Falle gleich sind, wenn vom Schwerefeld auf in Spannungszuständen befindliche masselose Gerüste Kräfte nicht ausgeübt werden.

Die in Gleichungen (3a) und (4) enthaltene Verletzung des Reaktionsprinzips bleibt also bestehen. Der Ausdruck (4) für die im Gravitationsfelde auf ruhende Massen wirkende Kraft geht mit Notwendigkeit aus unseren Bewegungsgleichungen für den materiellen Punkt hervor. Es liegt deshalb nahe, an dem Zutreffen dieser Gleichungen zu zweifeln; daß letztere aber schwerlich abzuändern sein dürften, geht aus folgender Überlegung hervor.

Soll die Bewegungsgröße eines materiellen Punktes — wie es die alte Relativitätstheorie fordert — in einem Raume von konstantem c durch $\dfrac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,dc$ gegeben sein, so darf sich der Ausdruck der Bewegungsgröße im allgemeinen Falle von diesem nur durch einen Faktor unterscheiden, der Funktion von c allein ist.[1]) Dieser Faktor wird aus Dimensionsgründen eine Potenz von c sein müssen (c^{α}). Die Bewegungsgleichungen müssen also von der Form sein

1) Eigentlich müßte man noch zulassen, daß die Bewegungsgröße auch von den räumlichen Ableitungen von c abhängt. Wir wollen aber annehmen, daß dies nicht der Fall sei.

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m\,\dot{x}\,c^\alpha}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = \mathfrak{K}_{xs} + \mathfrak{K}_{xa},$$

falls man mit $\mathfrak{K}_{xs}$ die x-Komponente der vom Schwerefelde auf den Punkt ausgeübten Kraft, mit $\mathfrak{K}_{xa}$ die x-Komponente der Resultierenden der Kräfte anderen Ursprunges bezeichnet. Es frägt sich nun, durch was für einen Ausdruck $\mathfrak{K}_s$ gegeben sein kann. Handelt es sich um einen Punkt, für den gerade $q = 0$ ist, so wird die Kraft dem Vektor $- m \operatorname{grad} c$ proportional sein müssen, wenn man nur annimmt, daß das statische Schwerefeld durch c charakterisiert ist. Diese Kraft wird sich von $-m \operatorname{grad} c$ nur durch einen Faktor unterscheiden können, der von c allein abhängt; auch dieser Faktor wird aus Dimensionsgründen eine Potenz von c sein müssen (c^β). In dem Falle, daß $q \neq 0$ ist, würde die Kraft auch noch von q abhängen; und zwar muß die Abhängigkeit eine derartige sein, daß die schwere Masse eines bewegte elastische materielle Punkte enthaltenden Kastens von der Geschwindigkeit der Bewegung der Punkte in gleicher Weise abhängt wie die schwere Masse. Dies dürfte sich mit Rücksicht auf die Resultate der alten Relativitätstheorie nur durch den Ansatz

$$\mathfrak{K}_s = \frac{-m \operatorname{grad} c \cdot c^\beta}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} \cdot \text{konst.}$$

erzielen lassen. Setzt man $\mathfrak{K}_{xs}$ demgemäß in die Bewegungsgleichungen ein, so kann man beweisen, daß $\mathfrak{K}_{xa}\dot{x} + \mathfrak{K}_{ya}\dot{y} + \mathfrak{K}_{za}\dot{z}$ sich nur dann als Differentialquotient nach der Zeit darstellen läßt, wenn den Konstanten α und β solche Werte gegeben werden, daß die in der früheren Arbeit angegebenen Bewegungsgleichuugen resultieren. Man wird also wohl an diesen und an dem aus ihnen resultierenden Ausdruck (4) für die Kraft festhalten müssen, wenn man nicht die ganze Theorie (Bestimmtheit des statischen Gravitationsfeldes durch c) aufgeben will.

Eine Beseitigung des genannten Widerspruches gegen das Reaktionsprinzip scheint also nur dadurch möglich zu sein, daß man die Gleichungen (3) und (3a) durch andere in c homogene Gleichungen ersetzt, für welche das Reaktionsprinzip bei Anwendung des Kraftansatzes (4) erfüllt ist. Zu diesem

Schritt entschließe ich mich deshalb schwer, weil ich mit ihm den Boden des unbedingten Äquivalenzprinzips verlasse. Es scheint, daß sich letzteres nur für unendlich kleine Felder aufrecht erhalten läßt. Unsere Ableitungen der Gleichungen der Bewegung des materiellen Punktes und der elektromagnetischen Gleichungen werden dadurch nicht illusorisch, weil sie die Gleichungen (2) nur für unendlich kleine Räume anwenden. Man kann diese Ableitungen z. B. auch an die allgemeineren Gleichungen

$$\begin{aligned}\xi &= x + \frac{c\frac{dc}{dx}}{2} t^2,\\ \eta &= y,\\ \zeta &= z,\\ \tau &= c\,t\end{aligned}$$

anknüpfen, wobei c eine beliebige Funktion von x ist. —

Durch passende Umformung des über einen beliebigen Raum erstreckten Integrales

$$\int \frac{\varDelta c}{c} \operatorname{grad} c\, d\tau$$

überzeugt man sich leicht, daß dem Reaktionsprinzip genügt wird, wenn wir unter Beibehaltung von (4) die Gleichung (3a) durch die Gleichung

$$c\,\varDelta c - \tfrac{1}{2}(\operatorname{grad} c)^2 = k\,c^2\,\sigma, \tag{3b}$$

die sich auch in die Form

$$\varDelta\left(\sqrt{c}\right) = \frac{k}{2}\sqrt{c}\,\sigma \tag{3b'}$$

bringen läßt, wobei σ die Dichte der ponderabeln Materie bzw. die Dichte der ponderabeln Materie vermehrt um die mit Tascheninstrumenten gemessene Energiedichte bedeutet. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\tag{5} \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{F}_x = -\sigma\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \text{ etc.},\\ &\text{wobei}\\ &c\,k\,X_x = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2}(\operatorname{grad} c)^2, \quad c\,k\,X_y = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad c\,k\,X_z = \frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

usw. gesetzt ist. Das Reaktionsprinzip ist also in der Tat erfüllt. Das in Gleichung (3b) zur Befriedigung des Reaktionsprinzipes hinzugesetzte Glied gewinnt unser Vertrauen durch die folgenden Überlegungen.

Wenn jegliche Energiedichte ($\sigma\, c$) eine (negative) Divergenz der Kraftlinien der Gravitation erzeugt, so muß dies auch für die Energiedichte der Gravitation selbst gelten. Schreibt man (3b) in der Form

$$\varDelta\, c = k \left\{ c\,\sigma + \frac{1}{2\,k} \frac{\operatorname{grad}^2 c}{c} \right\},$$

so erkennt man also sogleich, daß das zweite Glied der Klammer als die Energiedichte des Gravitationsfeldes aufzufassen ist.[1]) Wir haben nur noch zu zeigen, daß auch nach dem Energieprinzip dieses Glied die Dichte der Energie des Gravitationsfeldes bedeutet.

Zu diesem Zweck denken wir uns eine im endlichen befindliche Raumbelegung ponderabler Massen (Dichte σ), welche durch eine unendlich ferne Fläche eingeschlossen sei; im Unendlichen strebe c, soweit es die Gleichung (3b) bzw. 3b′) zuläßt, einem konstanten Werte zu. Wir haben dann zu beweisen, daß für eine beliebige unendlich kleine Verschiebung der Massen ($\delta\, x$, $\delta\, y$, $\delta\, z$) die dem System zuzuführende Arbeit $\delta\, A$ gleich sei der Vermehrung $\delta\, E$ des über den ganzen Raum erstreckten Integrales der totalen, in der Klammer der obigen Gleichung angegebenen Energiedichte.

Vermöge (4) erhält man zunächst

$$\begin{aligned}\delta\, A &= \int \sigma \left(\frac{\partial c}{\partial x}\, \delta\, x + \frac{\partial c}{\partial y}\, \delta\, y + \frac{\partial c}{\partial z}\, \delta\, z \right) d\,\tau \\ &= - \int c \left(\frac{\partial\, (\sigma\, \delta\, x)}{\partial x} + \ldots\, d\,\tau \right) = \int c\, \delta\, \sigma\, d\,\tau\,.\end{aligned}$$

Für die Berechnung von $\delta\, E$ schicken wir voraus, daß

$$\delta \left\{ \int \frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\, d\,\tau \right\} = \delta \left\{ 4 \int \operatorname{grad}^2 \sqrt{c}\, d\,\tau \right\} = \delta \left\{ 4 \int \operatorname{grad}^2 u\, d\,\tau \right\}$$

$$= 8 \int \left[\frac{\partial\, u}{\partial\, x}\, \delta \left(\frac{\partial\, u}{\partial\, x} \right) + \ldots \right] d\,\tau = 8 \left\{ \int \delta\, u \cdot \frac{\partial\, u}{\partial\, n}\, d\,s - \int \varDelta\, u\, \delta\, u\, d\,\tau \right\}.$$

Von diesen Integralen verschwindet das erste (Flächenintegral über die unendlich ferne Fläche), weil mit wachsendem Radiusvektor R die Größen $\delta\, u$ und $\partial\, u / \partial\, n$ wie $1/R$ bzw. wie $1/R^2$

1) Es sei hervorgehoben, daß diese — wie bei **Abraham** — einen positiven Wert erhält.

zu null herabsinken. Das zweite Integral aber läßt sich vermöge der Feldgleichung (3b′) umformen, so daß man erhält

$$\delta\left\{\int\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}\,d\tau\right\} = -4k\int u\,\delta u\,\sigma\,d\tau = -2k\int\sigma\,\delta c\,d\tau\,.$$

Unter Benutzung hiervon erhält man:

$$\delta E = \int(c\,\delta\sigma + \sigma\,\delta c - \sigma\,\delta c)\,d\tau = \delta A\,.$$

Damit ist also bewiesen, daß $\frac{1}{2k}\frac{\operatorname{grad}^2 c}{c}$ tatsächlich als die Energiedichte des Gravitationsfeldes aufzufassen ist.

(Eingegangen 23. März 1912.)

Nachtrag zur Korrektur.

Es ist bemerkenswert, daß die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im Schwerefeld

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{\dot x}{c}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\right\} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}} + \frac{\mathfrak{K}_x}{m}\quad\text{usw.}$$

eine sehr einfache Form annehmen, wenn man ihnen die Form der Gleichungen von Lagrange gibt. Setzt man nämlich

$$H = -m\sqrt{c^2 - q^2}\,,$$

so lauten sie

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial H}{\partial x} = \mathfrak{K}_x\quad\text{usw.}$$

Für den im statischen Gravitationsfeld ohne Einwirkung äußerer Kräfte bewegten materiellen Punkt gilt demnach

$$\delta\left\{\int H\,dt\right\} = 0\,,$$

oder

$$\delta\left\{\int\sqrt{c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}\right\} = 0\,.$$

Auch hier zeigt sich — wie dies für die gewöhnliche Relativitätstheorie von Planck dargetan wurde —, daß den Gleichungen der analytischen Mechanik eine über die Newtonsche Mechanik weit hinausreichende Bedeutung zukommt. Die zuletzt hingeschriebene Hamiltonsche Gleichung läßt ahnen, wie die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im dynamischen Gravitationsfelde gebaut sind.
