QUATERNIONEN UND OKTAVEN

J.-H. ESCHENBURG

Vorbemerkung

In dieser Vorlesung geht es um *Divisionsalgebren* über den reellen Zahlen. Eine *Algebra* über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum A mit einer bilinearen Abbildung

$$\mu : A \times A \to A, \quad \mu(a, b) =: ab$$

genannt "Multiplikation". Eine Algebra heißt *Divisionsalgebra*, wenn jede Gleichung vom Typ $ux = v$ oder $xu = v$ (wobei $u, v \in A$ mit $u \neq 0$ gegeben und $x \in A$ gesucht sind) eine eindeutig bestimmte Lösung x besitzt, wenn man also auch dividieren kann (außer durch Null).[1] Es gibt nur vier endlich dimensionale Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$, und diese haben die Dimensionen 1, 2, 4, 8: Reelle und komplexe Zahlen, Quaternionen und Oktaven (oder Oktonen). Das ist ein schwieriger Satz, der erst 1958 von M. Kervaire mit topologischen Methoden bewiesen wurde. Wir werden den Satz unter bestimmten Zusatzannahmen (normierte Algebren) zeigen; dieser Beweis stammt von Hurwitz (1898). Die interessanteste der vier Divisionsalgebren ist die Oktavenalgebra, weil sie das absolute Ende des Zahlbegriffs markiert. Wir werden sehen, dass viele erstaunliche Phänomene und Strukturen damit zusammenhängen. Wir werden auch eine neue Struktur kennenlernen, die hier wie in der gesamten Geometrie von großer Bedeutung ist: Clifford-Algebren. Als Leitfaden dient uns die Arbeit von John Baez: The Octonians, Bulletin Amer. Math. Soc. 39, S. 145 - 205 (2001), die im Internet frei erhältlich ist;[2] siehe auch den Wikipedia-Artikel "Octonian".

Date: 23. Juli 2009.

[1] Wenn die Divisionsalgebra A zusätzlich *assoziativ* ist, $a(bc) = (ab)c$, dann besitzt sie eine Eins, denn für ein festes $a \in A$, $a \neq 0$, gibt e mit $ae = a$, und da jedes $b \in A$ sich als xa schreiben lässt, folgt $be = xae = xa = b$. e ist zunächst nur eine "Linkseins", aber ebenso gibt es eine "Rechtseins", ein Element e' mit $e'b = b$ für alle $b \in A$, und es gilt $e' = e$ wegen $e' = e'e = e$. Eine assoziative Divisionsalgebra heißt *Schiefkörper* ("schief" wegen der fehlenden Kommutativität). Die Oktaven bilden eine nicht-assoziative Divisionsalgebra, die aber trotzdem eine Eins besitzt.

[2] http://mathhttp://math.ucr.edu/home/baez/octonions

I. Der Cayley-Dickson-Prozess

1. Die komplexen Zahlen

Unsere Geschichte beginnt im Jahr 1572 mit der Einführung der komplexen Zahlen durch Raffaele Bombelli.[3] Er entdeckte, dass man die reellen Zahlen durch eine neue Zahl i, die Quadratwurzel von -1, erweitern kann, ohne die Rechengesetze ändern zu müssen, und dass sich auf diesem Weg reelle Lösungen kubischer Gleichungen berechnen lassen, die vorher unerreichbar schienen. Die Zahl i und ihre reellen Vielfachen nannte man später *imaginär* und die Summen aus reellen und imagninären Zahlen *komplex*. Aus $i^2 = -1$ ergibt sich die Rechenregel für die Multiplikation komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= ac + ibid + aid + ibc \\ &= ac - bd + i(ad + bc).\end{aligned}$$

Jede komplexe Zahl $a + ib$ kann als ein Paar reeller Zahlen (a, b) aufgefasst werden; dann lautet die obige Multiplikationsformel

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \tag{1}$$

Die Darstellungsweise von komplexen Zahlen als Paare reeller Zahlen erscheint uns heute ganz selbstverständlich, aber sie musste erst einmal eingeführt und damit der Zahl i ihr Mysterium genommen werden: Aus der Quadratwurzel aus -1, die es doch "eigentlich" gar nicht gibt (die Parabel $y = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle), wurde das Zahlenpaar $(0, 1)$, das genauso viel oder wenig geheimnisvoll ist wie das der Zahl 1 entsprechende Paar $(1, 0)$. Dieser Schritt geschah 1833 durch W.R. Hamilton,[4] aber der Sachverhalt war sicher schon Gauß bekannt, nach dem ja die Gaußsche Zahlenebene benannt ist. Der Beitrag Hamiltons ist auf jeden Fall bedeutsam, weil er ihm selbst keine Ruhe ließ: Wenn man eine Multiplikation in der Ebene, also für Zahlenpaare einführen konnte, warum nicht auch im Raum, also für Triplets? Diese Frage beschäftigte ihn 10 Jahre lang, und selbst seine Kinder fragten ihn schließlich jeden Morgen: "Well, Papa can you multiply triplets?" Am 16. Oktober 1843 fand er die Antwort: die Quaternionenalgebra.

Die Zahl i wurde nicht einfach "erfunden". Mathematiker erfinden nicht, sie entdecken. Man kann zum Beispiel keine Zahl u erfinden (u wie "unendlich" oder besser wie "unmöglich"), die mit 0 multipliziert 1 ergibt, denn aus $u \cdot 0 = 1$ würde $1 = u \cdot 0 = u \cdot 2 \cdot 0 = 2 \cdot u \cdot 0 = 2 \cdot 1 = 2$ folgen; eine solche Zahl wäre also mit den Rechengesetzen nicht vereinbar. Aber eine Zahl i, die mit sich selbst multipliziert -1

[3] Raffaele Bombelli, Bologna 1526 Rom 1572

[4] William Rowan Hamilton, 1815 - 1865 (Dublin)

ergibt, konnte man (er)finden, obwohl sie ebenso wenig vorstellbar war. Warum? Welche Struktur in unserer Welt machte dies möglich? Es ist die Struktur der *Drehgruppe* der Ebene.

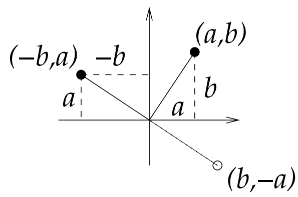
Die *Orthogonale Gruppe* ist die Matrizenmenge

$$O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ A^tA = I\} \tag{2}$$

wobei A^t die zu A transponierte Matrix ist: $A^t = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$. Die Gleichung $A^tA = I$ besagt, dass die Spalten von A (und ebenso die Zeilen, denn $AA^t = (A^tA)^t = I$) eine Orthonormalbasis bilden, $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \delta_{ij}$, denn $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = (Ae_i)^tAe_j = e_i^tA^tAe_j = \langle e_i, A^tA\, e_j\rangle$. Aus $A^tA = I$ folgt $\det A = \pm 1$, denn $(\det A)^2 = \det A \det A^t = \det A^tA = \det I = 1$. Die Teilmenge mit Determinante 1 heißt spezielle Orthogonale Gruppe SO_n; das Wort "*speziell*" steht in der Matrizentheorie für det = 1:

$$SO_n = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ A^tA = I,\ \det A = 1\}. \tag{3}$$

Diese Gruppe wird auch als *Drehgruppe* bezeichnet. Für $n = 2$ besteht jede Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ aus zwei Zeilen (a, b) und (c, d), die eine Orthonormalbasis bilden. Damit ist (a, b) ein Einheitsvektor, $a^2+b^2 = 1$, hat also seine Spitze auf der Einheitskreislinie, und (c, d) ist ein Einheitsvektor senkrecht zu (a, b). Das lässt noch zwei Möglichkeiten für (c, d) offen: $(-b, a)$ oder $(b, -a)$, aber die Determinantenbedingung wählt die erste Möglichkeit aus: $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2 = 1$ und $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a\end{smallmatrix}\right) = -b^2 - a^2 = -1$. Anders gesagt: (a, b) und $(-b, a)$ bilden eine *orientierte* Orthonormalbasis.[5]



Wir erhalten also

$$SO_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right);\ a^2 + b^2 = 1\}. \tag{4}$$

Die komplexen Zahlen bestehen aus denselben Matrizen, nur ohne die zusätzlichen Gleichung zwischen a und b:

$$\mathbb{C} = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right);\ a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

[5]Wegen $a^2 + b^2 = 1$ gibt es einen Winkel α mit $a = \cos\alpha$ und $b = \sin\alpha$. Damit ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)$ die Rechtsdrehung um den Winkel α.

In der Tat gibt die Multiplikation solcher Matrizen die Gleichung (1) zurück:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \tag{6}$$

mit $u = ac - bd$ und $v = ad + bc$. Die komplexen Zahlen bilden also eine Unteralgebra der Matrizen-Algebra $\mathbb{R}^{2\times 2}$, die Unteralgebra der *Drehstreckungen*, Kompositionen von Drehungen um den Ursprung und zentrischen Streckungen.

Warum ist $\mathbb{C}$ eine Divisionsalgebra? Dies sieht man mit der komplexen *Konjugation*, die einer komplexen Zahl $x = a+ib$ die Zahl $\bar{x} = a-ib$ zuordnet. Es gilt

$$x\bar{x} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |x|^2, \tag{7}$$

wobei $|x|$ die euklidische Norm des Vektors $x = (a,b)$ bezeichnet. Damit ist $x\frac{\bar{x}}{|x|^2} = 1$ und somit $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$, und die Gleichung $ux = v$ hat die Lösung $x = u^{-1}v = \bar{u}v/|u|^2$.

2. Quaternionen

> On 16 October 1843 (a Monday) Hamilton was walking in along the Royal Canal with his wife to preside at a Council meeting of the Royal Irish Academy. Although his wife talked to him now and again Hamilton hardly heard, for the discovery of the quaternions, the first non-commutative algebra to be studied, was taking shape in his mind:
>
> "And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triples ... An electric circuit seemed to close, and a spark flashed forth."
>
> He could not resist the impulse to carve the formulae for the quaternions
>
> $$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$
>
> in the stone of Broome Bridge (or Brougham Bridge as he called it) as he and his wife passed it.[6]

Wir wollen zunächst einen anderen Weg gehen als Hamilton, der vom $\mathbb{R}^3$ herkam und eine vierte Dimension hinzunehmen musste. Die Quaternionen entstehen nämlich auf ganz ähnliche Weise aus den komplexen Zahlen wie vorher die komplexen Zahlen aus den reellen. Wir wollen

[6] http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Hamilton.html

zunächst die geometrischen Hintergründe für eine solche Struktur aufdecken. Die orthogonale Gruppe besitzt ein komplexes Analogon: die *unitäre Gruppe*

$$U_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n};\ A^*A = I\} \tag{8}$$

wobei $A^* = \bar{A}^t$, also $A^* = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Die definierende Gleichung $A^*A = I$ besagt, dass die Spalten von A (und ebenso die Zeilen, da $AA^* = (A^*A)^* = I$) eine *unitäre Basis* bilden, d.h. eine Orthonormalbasis für das *hermitesche Skalarprodukt*[7] $\langle x, y\rangle = x^*y = \sum_i \overline{x_i}y_i$. Aus $A^*A = I$ folgt

$$1 = \det A^*A = \det A^* \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2,$$

die Determinante einer unitären Matrix kann also eine beliebige Zahl vom Betrag 1 sein. Wenn wir uns auf Determinante 1 einschränken, erhalten wir die *spezielle* unitäre Gruppe

$$SU_n = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n};\ A^*A = I,\ \det A = 1\}. \tag{9}$$

Im Fall $n = 2$ ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Dabei ist (a, b) ein frei wählbarer Einheitsvektor in $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, d.h. $|a|^2 + |b|^2 = 1$; er liegt also auf der *3-Sphäre* $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, dem (dreidimensionalen) Rand des 4-dimensionalen Einheitsballs $B_1(0)$, und (c, d) ist ein Einheitsvektor senkrecht dazu, in dem eindimensionalen komplexen Unterraum $(a, b)^\perp \subset \mathbb{C}^2$. In jedem eindimensionalen komplexen Unterraum gibt es noch immer unendlich viele Einheitsvektoren, eine ganze Kreislinie voll, denn mit (c, d) ist auch $(\lambda c, \lambda d)$ ein solcher Vektor für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Aber die Determinantenbedingung wählt uns genau einen Vektor davon aus: $(c, d) = (-\bar{b}, \bar{a})$, denn $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) = a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. Wir erhalten also für SU_2 eine ganz ähnliche Darstellung wie (4) für SO_2:

$$SU_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{c} \end{smallmatrix}\right);\ a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1\}. \tag{10}$$

Die *Quaternionen* haben die gleiche Darstellung ohne die letzte Gleichung, ganz analog zur Darstellung (5) von $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{H} = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right);\ a, b \in \mathbb{C}\}. \tag{11}$$

Dies ist ein *reeller* (!) Untervektorraum der komplexen Matrizenalgebra $\mathbb{C}^{2\times 2}$, denn die Multiplikation mit i lässt ihn nicht invariant:

$$\begin{pmatrix} ia & ib \\ -i\bar{b} & i\bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ia & ib \\ \overline{ib} & -\overline{ia} \end{pmatrix} \notin \mathbb{H}.$$

[7]Das hermitesche Skalarprodukt ist $\mathbb{C}$-wertig und lässt sich in Real- und Imaginärteil zerlegen: $\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}}$ wobei $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle = \sum_i(\mathrm{Re}\, x_i \,\mathrm{Re}\, y_i + \mathrm{Im}\, x_i \,\mathrm{Im}\, y_i)$ das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet. Insbesondere ist $\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} = |x|^2 > 0$ falls $x \neq 0$.

Dieser Unterraum ist sogar ein (reelle) *Unteralgebra* von $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (was eigentlich auch ohne Rechnung klar ist, denn SU_2 ist eine Gruppe):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -\bar d & \bar c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - b\bar d & ad + b\bar c \\ -\bar b c - \bar a \bar d & -\bar b d + \bar a \bar c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar v & \bar u \end{pmatrix}$$

mit $u = ac - b\bar d$ und $v = ad + b\bar c$. Wir können die zweite Zeile einfach weglassen und erhalten auf $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ die Multiplikation

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar d, ad + b\bar c). \tag{12}$$

Die Multiplikation ist natürlich assoziativ, da sie eine Matrixmultiplikation ist, aber sie ist nicht kommutativ, denn SU_2 ist nicht kommutativ (anders als SO_2). Doch es gibt eine Reihe von Gemeinsamkeiten mit dem Fall der komplexen Zahlen. Wie vorher gibt es eine *Konjugation*, und zwar

$$\overline{(a, b)} = (\bar a, -b), \tag{13}$$

und wieder ist $\bar x x = |x|^2$. Wenn wir nämlich in der obigen Gleichung (12) für den zweiten Faktor (c, d) die Konjugierte des ersten, $(\bar a, -b)$, einsetzen, also $c = \bar a$ und $c = -b$ wählen, dann ergibt sich

$$x\bar x = (a, b)(\bar a, -b) = (a\bar a + b\bar b, -ab + ba) = |a|^2 + |b|^2 = |x|^2.$$

Ganz ohne Rechnung sieht man diese Beziehung bei Benutzung der Matrixdarstellung, wobei man der Quaternion (a, b) die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right)$ zuordnet; dann gehört zu $\overline{(a, b)} = (\bar a, -b)$ die Matrix $A^* = \left(\begin{smallmatrix} \bar a & -b \\ \bar b & a \end{smallmatrix}\right)$, und weil A ein positives Vielfaches einer Matrix in SU_2 ist, genauer $B := A/\sqrt{|a|^2 + |b|^2} \in SU_2$, folgt $B^*B = I$ und damit $A^*A = (|a|^2 + |b|^2)I$. Auf dieselbe Weise sieht man auch die Beziehung der Konjugation zur Multiplikation: Da ganz allgemein $(AB)^* = B^*A^*$, folgt

$$\overline{xy} = \bar y \bar x \tag{14}$$

für alle $x, y \in \mathbb{H}$. Man sagt, dass die Konjugation ein *Anti-Automorphismus* von $\mathbb{H}$ ist, weil sie bei der Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren umdreht. Eine Konsequenz davon wiederum ist, dass $\mathbb{H}$ (ebenso wie $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$) eine *normierte Divisionsalgebra* ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt

$$|xy| = |x||y|, \tag{15}$$

denn $|xy|^2 = (xy)\overline{(xy)} = xy\bar y \bar x = |y|^2 x\bar x = |y|^2|x|^2$.

Hamilton hat die Quaternionen nicht als Matrixalgeba aufgefasst; Matrizen kamen erst gegen Ende des Jahrhunderts in Mode. Fast muss man sagen: “zum Glück”, denn die noch im gleichen Jahr 1843 entdeckten Oktaven haben keine solche Darstellung. Hamilton hat Quaternionen nicht als Paare von komplexen Zahlen aufgefasst ($\mathbb{H} = \mathbb{C}^2$), sondern als Quartetts von reellen Zahlen ($\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$), und zwar mit der Basis $1, i, j, k$, wobei

$$\begin{array}{rclcrcl} 1 &=& (1,0), & \qquad & i &=& (i,0), \\ j &=& (0,1), & & k &=& (0,i). \end{array} \tag{16}$$

Für diese Basiselemente gilt die Multiplikationstabelle

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ ij = -ji &= k, \\ jk = -kj &= i, \\ ki = -ik &= j, \end{aligned}$$

und die Multiplikation mit $1 = (1,0)$ ändert nichts. Um dies rasch zu sehen, schreiben wir die Multiplikationsvorschrift (12) in symbolischer Form:

$$(1,2)(3,4) = (13 - 2\bar{4}, 14 + 2\bar{3}). \tag{17}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} i^2 &= (i,0)(i,0) = (i^2 - 0, 0 + 0) = (-1,0) = -1 \\ j^2 &= (0,1)(0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1,0) = -1 \\ k^2 &= (0,i)(0,i) = (0 - i\bar{i}, 0 + 0) = (-1,0) = -1 \\ ij &= (i,0)(0,1) = (0 + 0, i + 0) = (0,i) = k \\ ji &= (0,1)(i,0) = (0 + 0, 0 + \bar{i}) = (0,-i) = -k \\ jk &= (0,1)(0,i) = (0 - \bar{i}, 0 + 0) = (i,0) = i \\ kj &= (0,i)(0,1) = (0 - i, 0 + 0) = (-i,0) = -i \\ ki &= (0,i)(i,0) = (0 + 0, 0 + i\bar{i}) = (0,1) = j \\ ik &= (i,0)(0,i) = (0 + 0, i^2 + 0) = (0,-1) = -j \end{aligned}$$

Dass diese neun Rechnungen alle unterschiedlich sind, trotz der doch offensichtlichen Symmetrie des Ergebnisses, zeigt uns, dass wir noch nicht die ganze Symmetrie von $\mathbb{H}$ verstanden haben; wir werden später von einem abstrakteren Standpunkt aus darauf zurückkommen.

Hamilton wollte ja ursprünglich eine Multiplikation auf dem $\mathbb{R}^3$ finden, und seine Darstellung legt wirklich eine Aufspaltung $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ nahe, wobei der $\mathbb{R}$-Faktor die Vielfachen von 1 enthält und der $\mathbb{R}^3$-Faktor die Linearkombinationen von i, j, k, die *imaginären Quaternionen.* Wenn wir jede Quaternion x entsprechen zerlegen als $x = \xi \cdot 1 + \vec{x}$ mit $\xi \in \mathbb{R}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, dann lässt sich die Multiplikation von zwei Quaternionen $x = (\xi, \vec{x})$ und $y = (\eta, \vec{y})$ auch folgendermaßen darstellen:

$$xy = (\xi\eta - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \, \xi\vec{y} + \eta\vec{x} + \vec{x} \times \vec{y}), \tag{18}$$

wobei $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$ das Skalarprodukt und $\vec{x}\times\vec{y}$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Obwohl $\mathbb{H}$ kein Körper, sondern nur ein Schiefkörper ist, ist die gewohnte Lineare Algebra noch weitgehend gültig. Man muss nur bei der Matrizenschreibweise aufpassen: Wenn man Elemente von $\mathbb{H}^n$ wie üblich als Spalten ansieht und Matrizen von links darauf anwendet, dann muss man die $\mathbb{H}$-wertigen Skalare rechts von den Vektoren schreiben; sieht man Vektoren dagegen als Zeilen an, ist es umgekehrt.

3. Die Oktaven (Oktonen)

Kann man den Prozess noch einmal wiederholen, mit Paaren von Quaternionen anstelle von Paaren komplexer Zahlen? Es gibt ein zu U_n analoge Gruppe mit quaternionalen Einträgen, genannt Sp_n, die (unitäre) *Symplektische Gruppe*:

$$Sp_n = \{A \in \mathbb{H}^{n\times n};\ A^*A = I\} \tag{19}$$

mit $A^* = \bar{A}^t$, also $A^* = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ wie vorher, nur jetzt mit quaternionalen Einträgen. Die Spalten und Zeilen von $A \in Sp_n$ bilden eine Orthonormalbasis bezüglich des quaternionalwertigen hermiteschen Skalarprodukts $\langle x,y\rangle = x^*y = \sum_i \bar{x}_i y_i$. Im Fall $n = 2$ ist $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, wobei (a,b) ein Einheitsvektor in $\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^8$ ist, $|a|^2+|b|^2 = 1$, und (c,d) ein Einheitsvektor in der zu (a,b) senkrechten quaternionalen Geraden liegt. Da die Gerade isomorph zu $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ ist, gibt es viele solche Vektoren, eine ganze $\mathbb{S}^3$ voll.[8] Und anders als im vorigen Fall steht diesmal keine Determinante zur Verfügung, um einen dieser Vektoren auszusondern. Natürlich könnten wir wieder die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$ betrachten; diese liegen ja in Sp_2, aber sie bilden keine Untergruppe, wie die Rechnung vor Gleichung (12) zeigt, denn weil die Konjugation jetzt die Reihenfolge der Faktoren umdreht, ist das Produkt nicht mehr vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{smallmatrix}\right)$.

Doch zum Glück ahnte Hamilton nichts von diesen Schwierigkeiten, und nachdem er seinem Freund J.T. Graves[9] von seiner Entdeckung der Quaternionen erzählt hatte, fand dieser nur zwei Monate später, am 2. Weihnachtstag 1843, eine Multiplikation auf $\mathbb{R}^8 = \mathbb{H}\times\mathbb{H} =: \mathbb{O}$, die diesen Vektorraum doch zu einer Divisionsalgebra machte; man musste in der Gleichung (12) nur an zwei Stellen die Reihenfolge der

---

[8] Mit $\mathbb{S}^n$ bezeichnen wir die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$, d.h. die Menge der Einheitsvektoren $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ |x| = 1\}$.

[9] John Thomas Graves, Esq. (1806 - 1870), irischer Jurist und Mathematiker

Faktoren umdrehen und das d nach vorne ziehen:

$$(a,b)(c,d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}). \tag{20}$$

Wenn a,b,c,d komplexe Zahlen sind, stimmt diese Formel mit (12) überein, aber für $a,b,c,d \in \mathbb{H}$ spielt die Umkehrung der Reihenfolge eine Rolle.

Hamilton versäumte es, die Entdeckung seines Freundes weiterzuverbreiten, und so kam es, dass A. Cayley[10] im Jahre 1845 diese Entdeckung wiederholte. Obwohl Hamilton darauf hinwies, dass John T. Graves der Vorzug gebührte wurden die Oktaven lange als Cayley-Zahlen bezeichnet.

Was ist nun so Besonderes an dieser Multiplikation (20)? Wir haben eine ganz ähnliche Struktur wie bei $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$, die, wie sich herausstellen wird, stärker ist als die Eigenschaft, eine Divisionsalgebra zu sein, nämlich die Konjugation

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b) \tag{21}$$

mit folgenden drei Eigenschaften: Für alle $x, y \in \mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ gilt

A: $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$,
B: $x\bar{x} = |x|^2$,
C: $|xy| = |x||y|$.

Die ersten beiden Eigenschaften, A und B, sind schnell nachgewiesen: Wenn wir wieder unsere formale Schreibweise benutzen,

$$(1,2)(3,4) = (13 - \bar{4}2, 41 + 2\bar{3}),$$

dann errechnet man leicht:

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)\cdot(c,d)} &= \overline{(ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})} = (\bar{c}\bar{a} - \bar{b}d, -da - b\bar{c}) \\ \overline{(c,d)}\cdot\overline{(a,b)} &= (\bar{c}, -d)(\bar{a}, -b) = (\bar{c}\bar{a} - \bar{b}d, -b\bar{c} - da)\end{aligned}$$

und

$$(a,b)\overline{(a,b)} = (a,b)(\bar{a}, -b) = (a\bar{a} + \bar{b}b, -ba + ba) = |a|^2 + |b|^2.$$

Die dritte Eigenschaft C lässt sich auch ganz gut an:

$$\begin{aligned}|xy|^2 &= (xy)(\overline{xy}) \\ &= (xy)(\bar{y}\bar{x}) \\ &\overset{*}{=} x(y\bar{y})\bar{x} \\ &= x|y|^2\bar{x} \\ &= |y|^2 x\bar{x} \\ &= |y|^2|x|^2\end{aligned}$$

[10] Arthur Cayley, 1821 (Richmond, England) - 1895 (Cambridge)

Aber die Gleichheit “$\overset{*}{=}$” ist verdächtig, denn sie benutzt die Assoziativität, die wir noch nicht nachgewiesen haben. Weil $\mathbb{O}$ keine Matrixalgebra ist, bekommen wir diese Eigenschaft diesmal nicht geschenkt. Die Assoziativität ist auch gar nicht erfüllt, sondern nur eine schwächere Eigenschaft, die für “$\overset{*}{=}$” ausreichend ist: Wir nennen eine Algebra X mit Eins *alternativ*, wenn jede nur von 1 und höchstens zwei anderen Elementen von X erzeugte Unteralgebra assoziativ ist.

Satz 3.1. *$\mathbb{O}$ ist alternativ.*

Dazu führen wir analog zum *Kommutator* $[x, y] = xy - yx$ den *Assoziator* $[x, y, z] = x(yz) - (xy)z$ ein. Wir werden uns mit einem einfacheren Resultat begnügen, das nach einem Satz von E. Artin[11] zu Satz 3.1 äquivalent ist und aus dem wir “$\overset{*}{=}$” direkt folgern können:

Satz 3.2. *Der Assoziator in $\mathbb{O}$ ist alternierend, d.h. $[x, y, z] = 0$, falls zwei der drei Elemente $x, y, z \in \mathbb{O}$ gleich sind.*

Beweis. Es genügt, die Eigenschaft “alternierend” in den ersten beiden Argumenten zu zeigen, $[x, x, y] = 0$, denn durch Konjugation folgt sie auch in den letzten beiden Argumenten, $[\bar y, \bar x, \bar x] = 0$, und durch die Trilinearität in den beiden äußeren:

$$0 = [x + y, x + y, y] = [x, x, y] + [x, y, y] + [y, x, y] + [y, y, x] = [y, x, y].$$

Statt $[x, x, y] = 0$ zeigen wir $[x, \bar x, y] = 0$, was äquivalent ist, weil $x + \bar x \in \mathbb{R}$ und der Assoziator mit einer reellen Zahl verschwindet; das folgt schon aus der Bilinearität der Multiplikation. Wir erinnern zunächst noch einmal an die Multiplikationsregel:

$$(1, 2)(3, 4) = (13 - \bar 4 2, 41 + 2\bar 3).$$

Für $x = (a, b)$ und $y = (c, d)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\bar x y &= (\bar a, -b)(c, d) \\
&= (\bar a c + \bar d b,\ d\bar a - b\bar c) \\
x(\bar x y) &= (a, b)(\bar a c + \bar d b,\ d\bar a - b\bar c) \\
&= \big(a(\bar a c + \bar d b) - (a\bar d - c\bar b)b,\ (d\bar a - b\bar c)a + b(\bar c a + \bar b d)\big) \\
&= \big(a(\bar a c) + [a, \bar d, b] + (c\bar b)b,\ (d\bar a)a + [b, \bar c, a] + b(\bar b d)\big) \\
(x\bar x)y &= \big((a\bar a)c \quad + \quad c(\bar b b),\ d(\bar a a) \quad + \quad (b\bar b)d\big) \\
[x, \bar x, y] &= \big([a, \bar a, c] + [a, \bar d, b] - [c, \bar b, b], -[d, \bar a, a] + [b, \bar c, a] + [b, \bar b, d]\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

[11] Vgl. Richard D. Schafer, Introduction to Non-Associative Algebras, Dover, New York, 1995.

Bemerkung: Die Terme $[a, \bar{d}, b]$ und $[b, \bar{c}, a]$ in dieser Rechnung zeigen, dass wir wirklich die volle Assoziativität von $\mathbb{H}$ benötigen; Alternativität würde nicht ausreichen. Wir können den Verdopplungsprozess also nicht noch einmal anwenden; die durch Verdopplung der Oktaven mit der Multiplikation (20) und der Konjugation (21) entstehenden "*Sedezimen*" $\mathbb{S}$ würden zwar immer noch (1) und (2) erfüllen – insbesondere hätte jedes Element $x \neq 0$ ein Inverses $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$, aber es wäre keine Divisionsalgebra: Wegen der fehlenden Alternativität könnten wir die Gleichung $ux = v$ nicht durch Linksmultiplikation mit u^{-1} nach x auflösen. Bei den Oktaven aber ist das möglich, denn $u^{-1}v = u^{-1}(ux) = (u^{-1}u)x = x$; sie bilden damit tatsächlich eine Divisionsalgebra. □

Folgerung 3.1. *Die Oktaven bilden eine Divisionsalgebra.*

Folgerung 3.2. *Die Oktaven erfüllen Eigenschaft* C*, sie bilden also eine normierte Algebra.*

Beweis. Es ist nur noch die Gleichung "$\overset{*}{=}$" auf S. 9 zu zeigen:

$$\begin{aligned}
((xy)(\bar{y}\bar{x}))\,x &= ((xy)(\overline{xy}))\,x \\
&= (xy)\,((\overline{xy})x) \\
&= (xy)\,(\bar{y}(\bar{x}x)) \\
&= |x|^2(xy)\bar{y} \\
&= |x|^2x(y\bar{y}) \\
&= |x|^2|y|^2x \\
(x(y\bar{y})\bar{x})\,x &= |y|^2|x|^2x
\end{aligned}$$

Weil aber die Rechtsmultiplikation mit x invertierbar ist (Divisions-Eigenschaft), haben wir $ux = vx \Rightarrow u = v$, also folgt $(xy)(\bar{y}\bar{x}) = x(y\bar{y})\bar{x}$ aus der vorigen Rechnung. □

Man kann unser Konstruktionsverfahren der Oktavenalgebra folgendermaßen verallgemeinern: Wir starten mit einer endlich dimensionalen Divisionsalgebra A mit Konjugation $a \mapsto \bar{a}$, die die Eigenschaften A,B,C erfüllt. Nun definieren wir eine neue Algebrenstruktur auf $X := A \times A$ mit Hilfe von (20) für alle $a, b, c, d \in A$. Die Konjugation $\overline{(a, b)} := (\bar{a}, -b)$ erfüllt A und B, und C gilt genau dann, wenn A assoziativ ist. Dies nennt man den *Cayley-Dickson-Prozess*. Von $A = \mathbb{R}$ gelangt man so zu $X = \mathbb{C}$, von $A = \mathbb{C}$ zu $X = \mathbb{H}$ und von $A = \mathbb{H}$ zu $X = \mathbb{O}$. Bei jedem Schritt geht eine Zahleigenschaft verloren: Bei $\mathbb{C}$ die Anordnung, bei $\mathbb{H}$ die Kommutativität und bei $\mathbb{O}$ die Assoziativität. Damit endet der Prozess, denn beim Schritt von $\mathbb{O}$ zu $\mathbb{S}$ (den "Sedezimen") verlieren wir die Divisionseigenschaft, wie wir in der obigen Bemerkung gesehen haben.

II. Normierte Algebren und Clifford-Systeme

4. Normierte Algebren

Wir haben gesehen, dass $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ nicht nur Divisionsalgebren, sondern auch normierte Algebren sind, d.h. die Norm oder der Betrag erhält die Multiplikation. Wir werden sehen, dass es keine weiteren normierten Algebren gibt (Satz von Hurwitz).

Zunächst klären wir den Begriff: Auf dem Vektorraum $A = \mathbb{R}^n$ möge eine Multiplikation mit Eins erklärt sein. Dann heißt A eine *normierte Algebra* (bezüglich der euklidischen Norm),[12] wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$|ab| = |a||b|. \tag{22}$$

Anders ausgedrückt: Für jedes $a \in A$ mit $|a| = 1$ sind die linearen Abbildungen $L_a, R_a : A \to A$,

$$L_a(x) = ax, \quad R_a(x) = xa, \tag{23}$$

die Links- und die Rechtstranslation normerhaltend und damit orthogonal, d.h. sie erhalten auch das Skalarprodukt:

Hilfssatz 4.1. *Ist V ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ linear mit $|fv| = |v|$ für alle $v \in V$, dann folgt $\langle fv, fw\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$.*

Beweis. Das ist die "Polarisationsformel" für das Skalarprodukt:

$$2\langle v, w\rangle = |v + w|^2 - |v|^2 - |w|^2,$$

und ebenso

$$2\langle fv, fw\rangle = |f(v + w)|^2 - |fv|^2 - |fw|^2,$$

wobei wir die Linearität $f(v + w) = fv + fw$ benutzt haben. Da die rechten Seiten der beiden Gleichungen nach Voraussetzung gleich sind, sind es auch die linken Seiten. □

Wir haben also $L_a, R_a \in O_n$ falls $|a| = 1$.[13] Wenn $a \in A$ ein beliebiges Element ungleich Null ist, so ist $a/|a|$ ein Einheitsvektor und damit sind $L_{a/|a|} = \frac{1}{|a|}L_a$ und $R_{a/|a|} = \frac{1}{|a|}R_a$ wieder in O_n. Anders gesagt, die linearen Abbildungen

$$L, R : A \to \mathrm{End}(A), \quad a \mapsto L_a, R_a \tag{24}$$

---

[12] Man kann eine beliebige Norm zulassen, aber nur die euklidische Norm ist realisierbar, weil die Einheitssphäre der Norm so viele Isometrien zulässt: Die Links- und Rechtstranslationen mit allen Elementen der Einheitssphäre.

[13] Genauer gilt sogar $L_a, R_a \in SO_n$, weil $L_1, R_1 = I \in SO(n)$ und die Einheitsspäre von A zusammenhängend ist; die Determinante von L_a kann also nicht von 1 auf -1 springen.

von A in den Raum der linearen Endomorphismen von A haben ihre Werte im *orthogonalen Kegel*[14] $\mathbb{R}O_n \subset \mathrm{End}(A)$, die aus den reellen Vielfachen orthogonaler Matrizen besteht. Da das Bild einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist, sind die Bilder von L und R also Unterräume, die ganz aus Vielfachen von orthogonalen Matrizen bestehen. Wir wollen solche Unterräume kurz "Räume von orthogonalen Matrizen" nennen und diese im nächsten Abschnitt untersuchen. Zunächst jedoch eine kleine Anwendung der normierten Algebren in der Zahlentheorie:

Exkurs: Der n-Quadrate-Satz. Welche natürlichen Zahlen p kann man als Summe von n Quadratzahlen darstellen? Wenn $\mathbb{R}^n$ eine normierte Algebra mit ganzzahligen Strukturkonstanten ist,[15] dann vererbt sich diese Eigenschaft auf Produkte: Wenn p und q jeweils Summe von n Quadratzahlen sind, dann auch pq. Ist nämlich $p = x_1^2 + \dots x_n^2$ und $y = y_1^2 + \dots + y_n^2$ für ganze Zahlen x_i, y_j, so formen wir daraus zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ und bilden ihr Algebrenprodukt $z = xy$, das ebenfalls ganzzahlige Komponenten hat. Damit $p = |x|^2$ und $q = |y|^2$, und $pq = |x|^2|y|^2 = |z|^2 = z_1^2 + \dots z_n^2$ ist wieder Summe von n Quadratzahlen. Dies wurde für $n = 4$ von Fermat und Euler beobachtet (1748) und für $n = 8$ von Graves 1844 mit Hilfe der Oktaven. Aber er war nicht der erste: Der Satz war bereits 1818 von C.F. Degen gefunden worden! In der Tat ist dieser n-Quadrate-Satz allgemeiner als die Existenz einer normierten Algebra: A. Pfister hat 1967 bewiesen, dass er für $n = 2^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.[16]

5. Räume orthogonaler Matrizen

Wir wollen in diesem Abschnitt bestimmte Unterräume des Vektorraums $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^{n\times n}$ aller $n \times n$-Matrizen betrachten. Auf diesem Raum ist das übliche Skalarprodukt definiert: Sind $f = (f_{ij})$ und $g = (g_{ij})$ zwei Matrizen, so ist

$$\langle f, g\rangle_o = \sum_{ij} f_{ij} g_{ij} = \mathrm{Spur}\,(f^t g).$$

---

[14] Ein *Kegel* ist eine Teilmenge C eines Vektorraums W mit der Eigenschaft, dass mit $c \in C$ auch $tc \in C$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$. Ein Kegel ist also eine Vereinigung von eindimensionalen Unterräumen. Jede Teilmenge $P \subset W$ spannt einen Kegel $\mathbb{R}P$ auf, der aus den reellen Vielfachen tp aller $p \in P$ besteht, den *Kegel über M*. Der *orthogonale Kegel* ist der Kegel über $O_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$.

[15] D.h. $e_i e_j = \sum_k n_{ijk} e_k$ mit $n_{ijk} \in \mathbb{Z}$

[16] Siehe J.H. Conway, D.A. Smith: On Quaternions and Octonions, Peters, Wellesley, MA, 2003

Wir wollen das Skalarprodukt allerdings noch durch den Normierungsfaktor $1/n$ abändern:

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{n}\langle f, g\rangle_o = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}\,(f^t g). \tag{25}$$

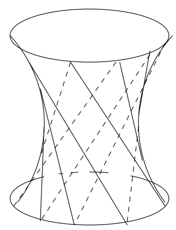
Mit der zugehörigen Norm wird O_n eine Teilmenge der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n\times n}$, denn $f \in O_n \Rightarrow |f|^2 = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}\,(f^t f) = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}\ I = 1$. Aber mehr noch, wir können jetzt den orthogonalen Kegel $\mathbb{R}O_n$ durch eine quadratische Gleichung kennzeichnen: Ist $f^t f = \lambda I$ mit $\lambda \geq 0$ (was keine Einschränkung ist), dann ist $|f|^2 = \frac{1}{n}\,\mathrm{Spur}\ f^t f = \lambda$. Wir erhalten also

$$\mathbb{R}O_n = \{f \in \mathbb{R}^{n\times n};\ f^t f = |f|^2 I\}. \tag{26}$$

Ein *Raum orthogonaler Matrizen* auf $\mathbb{R}^n$ ist ein linearer Unterraum V von $\mathbb{R}^{n\times n}$, der ganz im orthogonalen Kegel enthalten ist, $V \subset \mathbb{R}O_n$. Das ist eine recht seltene Situation: ein linearer Unterraum, dessen Elemente v alle dieselbe quadratische Gleichung erfüllen, nämlich

$$v^t v = |v|^2 I. \tag{27}$$

Es ist ähnlich wie beim einschaligen Hyperboloid, der Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ im $\mathbb{R}^3$, auf dem viele Geraden liegen, z.B. $x = z,\ y = 1$.



Satz 5.1. *$V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist Raum orthogonaler Matrizen $\iff$ für alle $v, w \in V$ gilt:*

$$v^t w + w^t v = 2\langle v, w\rangle I. \tag{28}$$

Beweis. Das ist die Polarisation der Formel (27): Zur quadratischen Form $v^t v$ gehört die symmetrische Bilinearform $\frac{1}{2}(v^t w + w^t v)$ (man setze $w = v$), und zu $|v|^2 = \langle v, v\rangle$ gehört $\langle v, w\rangle$.[17] □

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass unser Raum $V \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix I enthält, die wir hier lieber e nennen wollen. Mit V' wollen wir dann den Teil von V senkrecht zu e bezeichnen, $V' = V \cap e^\perp$. Die $v \in V'$ sind gekennzeichnet durch die Gleichung

$$v^t = -v, \tag{29}$$

[17] $v^t w + w^t v = (v+w)^t(v+w) - v^t v - w^t w \in \mathbb{R}\cdot I$ and $\frac{1}{n}\,\mathbb{R}O_n(v^t w + w^t v) = 2\langle v, w\rangle$.

denn $v \perp e \iff v^t e + e^t v = 0 \iff v^t + v = 0$. Für $v, w \in V'$ gilt also $v^t w + w^t v = -vw - wv$, und wir erhalten aus (28):

Satz 5.2. *$V \subset \mathbb{R}O_n$, $e \in V$, $V' = V \cap e^\perp$. Dann gilt für alle $v, w \in V'$:*

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle I. \tag{30}$$

Einen Unterraum $V' \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ mit (30) nenen wir eine *Clifford-Darstellung.*[18]

Bemerkung 1. Für beliebige $v \in V$ haben wir $v = \lambda e + v'$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Setzen wir $\bar{v} := \lambda e - v'$, so gilt mit (29)

$$v^t = \lambda e + (v')^t = \lambda e - v' = \bar{v}. \tag{31}$$

Bemerkung 2. Wenn $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Orthonormalbasis einer Clifford-Darstellung V' ist, dann ist (30) $\iff$

$$e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} e. \tag{32}$$

Clifford-Darstellungen sind zum ersten Mal in Verbindung mit dem Dirac-Operator wichtig geworden: Der Physiker Dirac suchte einen Differentialoperator erster Ordnung D, dessen Quadrat der Laplace-operator $-\Delta$ ist. Der allgemeine Ansatz $D = \sum_i e_i \partial_i$ mit Koeffizienten e_i ergibt

$$D^2 = (\sum_i e_i \partial_i)(\sum_j e_j \partial_j) = \sum_{ij} e_i e_j \partial_i \partial_j = \sum_{i \le j} (e_i e_j + e_j e_i) \partial_i \partial_j$$

und dieser Ausdruck ist gleich $-\Delta = -\sum_i \partial_i \partial_i$ genau dann, wenn (32) erfüllt ist. Dies ist nur durch Matrix-wertige Koeffizienen e_i möglich, eben durch eine Clifford-Darstellung.

6. Normierte Algebren sind Divisionsalgebren

Gegeben sei eine normierte Algebra mit Eins, die wir von jetzt an X anstelle von A nennen wollen. Der zugrundeliegende Vektorraum sei $\mathbb{R}^n$. Wir haben im Abschnitt 4 schon gesehen, dass die Bildräume der Links- und der Rechtsmultiplikation $L, R : X \to \mathrm{End}(X)$, vgl. (24) Räume orthogonaler Matrizen sind. Außerdem sind sie Isometrien, d.h. es gilt

$$\langle L_x, L_y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle R_x, R_y\rangle \tag{33}$$

[18]Die *Cliffordalgebra* über $\mathbb{R}^m$ ist definiert als die von allen $v \in \mathbb{R}^m$ erzeugte assoziative Algebra mit Eins mit der Relation $vw + wv = 2\langle v, w\rangle$. Sie hat als Vektorraum die Basis $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ zwischen 1 und m, denn jeder Ausdruck $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ für beliebige Indizes $i_1, \dots, i_k$ kann durch Vertauschungen der Elemente auf diese Form gebracht werden; die Dimension der Cliffordalgebra ist also 2^m. Eine Clifford-Darstellung ist eine Darstellung der Cliffordalgebra durch $n \times n$-Matrizen.

für alle $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} n|L_x|^2 &= \operatorname{Spur}(L_x^t L_x) \\ &= \sum_i \langle L_x^t L_x e_i, e_i\rangle \\ &= \sum_i |L_x e_i|^2 \\ &= \sum_i |x|^2 |e_i|^2 \\ &= n|x|^2. \end{aligned}$$

Wir können also direkt auf die Ergebnisse des vorigen Abschnittes zurückgreifen. Wir zerlegen jedex $x \in X$ in Real- und Imaginärteil, $x = \xi + x'$ mit $\xi \in \mathbb{R} = \mathbb{R}\,1$ und $x' \in X' := 1^\perp \subset X$ ("Imaginäre Elemente") und setzen $\bar{x} = \xi - x'$ ("Konjugation"). Da $L_{\bar{x}} = L_\xi - L_{x'} = L_x^t$ nach (31), erhalten wir mit Satz 5.1 für die Linkstranslation (Entsprechendes gilt auch für die Rechtstranslation):

(34) $$L_{\bar{x}} L_y + L_{\bar{y}} L_x = 2\langle x, y\rangle\, I,$$

und insbesondere (Anwendung auf $1 \in X$)

(35) $$\bar{x}y + \bar{y}x = 2\langle x, y\rangle.$$

Damit hat jedes $x \neq 0$ ein Inverses

(36) $$x^{-1} = \bar{x}/|x|^2,$$

denn $2\bar{x}x = 2\langle x, x\rangle$. Aber es gilt viel mehr:

Satz 6.1. *Jede normierte Algebra ist eine alternative Divisionsalgebra.*

Beweis. Es genügt, $[\bar{x}, x, y] = 0$ zu zeigen. Dies ist wahr, da

$$\begin{aligned} [\bar{x}, x, y] &= (\bar{x}x)y - \bar{x}(xy), \\ \langle \bar{x}(xy), z\rangle &= \langle L_{\bar{x}}(xy), z\rangle \\ &= \langle xy, L_x z\rangle \\ &= \langle L_x y, L_x z\rangle \\ &= |x|^2 \langle y, z\rangle, \\ \langle (\bar{x}x)y, z\rangle &= |x|^2\langle y, z\rangle \end{aligned}$$

für alle $z \in X$. Die Divisionseigenschhaft folgt mit (36), denn $ux = v \Rightarrow x = (u^{-1}u)x = u^{-1}(ux) = u^{-1}v$, und entsprechend $xu = v \Rightarrow x = x(uu^{-1}) = (xu)u^{-1} = vu^{-1}$. □

7. Die Umkehrung des Cayley-Dickson-Prozesses

Immer noch sei X eine normierte Algebra mit Eins über dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und $X' = 1^\perp \subset X$ der imaginäre Anteil.

Hilfssatz 7.1. *X' ist in folgendem Sinn anti-kommutativ: Ist $x, y \in X'$ mit $x \perp y$, so ist*

$$xy = -yx. \tag{37}$$

Beweis. Das folgt unmittelbar aus (35), da $\bar{x} = -x$ und $\bar{y} = -y$.

Hilfssatz 7.2. *X' ist in folgendem Sinne "anti-assoziativ": Sind x, y, z paarweise orthogonal und außerdem $xy \perp z$,*[19] *dann gilt*

$$x(yz) = -(xy)z. \tag{38}$$

Beweis. Nach (34) ist $L_xL_y + L_yL_x = 0$, und die entsprechende Aussage gilt für Rechtstranslationen, also

$$\begin{aligned} x(yz) = L_xL_yz = -L_yL_xz &= -y(xz) \\ &\overset{(37)}{=} (xz)y = R_yR_zx = -R_zR_yx = -(xy)z. \end{aligned}$$

Satz 7.1. *Ist X eine normierte Algebra mit Eins, $A \subset X$ eine Unteralgebra mit $1 \in A$ und $\epsilon \in A^\perp$ mit $|\epsilon| = 1$. Dann ist $A\epsilon \perp A$, und für alle $a, b, c, d \in A$ gilt:*

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac - \bar{d}b + (da + b\bar{c})\epsilon. \tag{39}$$

Beweis. Mit $a = \alpha + a' \in A$ folgt $\bar{a} = \alpha - a \in A$, denn $a' = a - \alpha \in A$. Deshalb gilt für alle $a, b \in A$:

$$\langle a\epsilon, b\rangle = \langle \epsilon, \bar{a}b\rangle = 0,$$

da $\bar{a}b \in A \perp \epsilon$. Also ist $A\epsilon \perp A$.

Durch Ausmultiplizieren der linken Seite von (39) gilt

$$(a + b\epsilon)(c + d\epsilon) = ac + (b\epsilon)(d\epsilon) + a(d\epsilon) + (b\epsilon)c$$

Wir müssen also zeigen:

$$(b\epsilon)(d\epsilon) = -\bar{d}b, \tag{40}$$

$$a(d\epsilon) = (da)\epsilon, \tag{41}$$

$$(b\epsilon)c = (b\bar{c})\epsilon \tag{42}$$

Zu (42): $(b\epsilon)c = R_cR_\epsilon b = -R_{\bar{\epsilon}}R_{\bar{c}}b = R_\epsilon R_{\bar{c}}b = (b\bar{c})\epsilon$.

---

[19] Ein solches Tripel werden wir später *Cayleytripel* nennen, wenn x, y, z Einheitsvektoren sind.

Zu (41): Wenn a oder d reell sind, gelten Assoziativität und Kommutativität und (41) folgt. Wir können daher $a, d \perp 1$ annehmen. Wenn a und d linear abhängig sind, gilt ebenfalls die Assoziativität und $ad = da$. Wir können somit $a \perp d$ annehmen. Dann gilt für (a, d, ϵ) das Anti-Assoziativgesetz (38) und für (a, d) das Anti-Kommutativgesetz (37) und damit $a(d\epsilon) = -(ad)\epsilon = (da)\epsilon$.

Zu (40): Wir treffen die gleiche Fallunterscheidung wie vorher: Wenn $b, d, 1$ linear abhängig sind, dann gilt das Assoziativ- und das Kommutativgesetz für die von $1, b, d$ erzeugte Unteralgebra, denn außer reellen Zahlen treten nur Potenzen eines imaginären Elements auf. Dasselbe gilt dann für $(1, b\epsilon, d\epsilon)$. Damit $(b\epsilon)(d\epsilon) \stackrel{*}{=} b(\epsilon(d\epsilon)) \stackrel{(35)}{=} -b(\epsilon(\bar\epsilon\bar d)) = b(\epsilon(\epsilon\bar d)) = b(\epsilon^2\bar d) = -b\bar d = -\bar d b$.[20]

Wenn aber $b, d, 1$ paarweise orthogonal sind, dann ist $b, \epsilon, d\epsilon$ ein paarweise orthogonales Tripel mit $b\epsilon \perp d\epsilon$ und erfüllt damit die Voraussetzungen des Anti-Assoziativgesetzes (38). Damit $(b\epsilon)(d\epsilon) \stackrel{(38)}{=} -b(\epsilon(d\epsilon)) \stackrel{(37)}{=} b(\epsilon(\epsilon d)) = b(\epsilon^2 d) = -bd \stackrel{(37)}{=} db = -\bar d b$. $\square$

Mit (39) haben wir nun die von Graves gefundene Multiplikationsregel (20) für beliebige normierte Algebren wiederentdeckt.

8. Der Satz von Hurwitz

Satz 8.1. (Hurwitz 1898) *Die einzigen normierten Algebren mit Eins über* $\mathbb{R}$ *sind* $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Beweis. Die gegebene normierte Algebra heiße X. Wir wenden Satz 7.1 auf immer größere Unteralgebren $A \subset X$ an.

Wenn $\mathbb{R} \subset X \neq \mathbb{R}$, dann setzen wir $A = \mathbb{R}$ und finden ein Einheitselement $\epsilon_1 \perp A$. Dann enthält X auch die Unteralgebra $\mathbb{R} + \mathbb{R}\epsilon_1$, und diese ist isomorph zu $\mathbb{C}$ nach (39), denn die Konjugation in X ist auf $\mathbb{R}$ die identische Abbildung und die Kommutativität von $\mathbb{R}$ macht (39) zur üblichen Multiplikationsregel für komplexe Zahlen.

Wenn $\mathbb{C} \subset X \neq \mathbb{C}$, dann setzen wir $A = \mathbb{C}$ und finden ein Einheitselement $\epsilon_2 \perp A$. Dann enthält X auch die Unteralgebra $\mathbb{C} + \mathbb{C}\epsilon_2$, und diese ist isomorph zu $\mathbb{H}$ nach (39), denn die Konjugation in X ist auf $\mathbb{C}$ die übliche Konjugation und die Kommutativität von $\mathbb{C}$ macht (39) zur üblichen Multiplikationsregel fir Quaternionen.

[20] Bei "$\stackrel{*}{=}$" behaupten wir etwas mehr, als wir bisher bewiesen haben, deshalb ein Nachtrag: Wenn z.B. $b = d$, dann müssen wir $(b\epsilon)^2 = b(\epsilon(b\epsilon))$ zeigen. Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit $\bar b$ und erhalten beidesmal das Gleiche: $\bar b(b\epsilon)^2 = (\bar b(b\epsilon))(b\epsilon) = ((\bar b b)\epsilon)(b\epsilon) = |b|^2\epsilon(b\epsilon)$ und $\bar b(b(\epsilon(b\epsilon))) = (\bar b b)(\epsilon(b\epsilon)) = |b|^2\epsilon(b\epsilon)$.

Wenn $\mathbb{H} \subset X \neq \mathbb{H}$, dann setzen wir $A = \mathbb{H}$ und finden ein Einheitselement $\epsilon_3 \perp A$. Dann enthält X auch die Unteralgebra $\mathbb{H} + \mathbb{H}\epsilon_3$, und diese ist isomorph zu $\mathbb{O}$ nach (39), denn die Konjugation in X ist auf $\mathbb{H}$ die übliche Konjugation und (39) ist die übliche Multiplikationregel für Oktaven.

Wenn $\mathbb{O} \subset X \neq \mathbb{O}$, dann setzen wir $A = \mathbb{O}$ und finden ein Einheitselement $\epsilon_4 \perp A$. Dann enthält X auch die Unteralgebra $\mathbb{O} + \mathbb{O}\epsilon_4$, und diese ist isomorph zu $\mathbb{S}$ nach (39), denn die Konjugation in X ist auf $\mathbb{O}$ die übliche Konjugation und (39) ist die übliche Multiplikationsregel für Sedezimen. Wir haben aber bereits in Abschnitt 3 gesehen, dass die Sedezimen nicht alternativ und keine Divisionsalgebra sind, im Widerspruch zu Satz 6.1. Dieser Fall kann also nicht eintreten. □

9. Die Automorphismengruppen der normierten Algebren

Ein *Automorphismus* einer normierten Algebra X ist eine orthogonale Abbildung $\sigma : X \to X$ mit $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Die Automorphismen von X bilden selbstverständlich eine Gruppe $\mathrm{Aut}(X)$, denn die Komposition und die Inversen von Automorphismen sind wieder Automorphismen. Wir wollen diese Gruppen bestimmen. Warum aber sind sie überhaupt interessant? Eine Art, die Algebra darzustellen, ist, die Produkte zwischen allen Elementen einer Basis anzugeben, $e_i e_j = \sum_k a_{ijk} e_k$; die Zahlen a_{ijk} heißen die *Strukturkonstanten* der Algebra. Für die Quaternionen haben wir dies auf S. 7 gemacht. Natürlich hängen diese Konstanten von der Wahl der Basis ab, und speziell für die Oktaven gibt es kaum zwei Darstellungen in der Literatur, die genau die gleichen Strukturkonstanten haben. Aber wenn man die Basis durch einen Automorphismus der Algebra transformiert, ändert sich nichts; die Automorphismen beschreiben alle möglichen Weisen, zu den gleichen Strukturkonstanten zu gelangen oder auch die Freiheit in der Wahl der Basis bei festgelegten Strukturkonstanten. Die Automorphismengruppe hat damit die gleiche Bedeutung wie überall in der Geometrie: Sie sagt, welche Konfigurationen im wesentlichen gleich heißen sollen.

Die normierte Algebra $X = \mathbb{R}$ hat offensichtlich überhaupt keine Automorphismen außer der identischen Abbildung. Zwar gibt es eine weitere Isometrie, nämlich $x \mapsto -x$, aber diese lässt die Eins nicht fest, kann also kein Isomorphismus sein.

Die normierte Algebra $X = \mathbb{C}$ hat immerhin einen nichttrivialen Automorphismus, die komplexe Konjugation $x \mapsto \bar{x}$. Weitere Automorphismen kann es nicht geben: Alle Drehungen und alle anderen Spiegelungen lassen die Eins nicht fest.

Die normierte Algebra $X = \mathbb{H}$ ist in dieser Hinsicht interessanter. Die Automorphismen müssen die Eins festhalten und damit den Raum der imaginären Quaternionen $X' = 1^\perp = \mathbb{R}^3$ invariant lassen; sie liegen also in der Orthogonalen Gruppe O_3. In der Tat ist die Automorphismengruppe die SO_3. Die *Konjugation*[21] mit jeder Einheitsquaternion[22] q ist die Abbildung[23]

$$\mathrm{Ad}_q = L_q \circ R_{q^{-1}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad x \mapsto \mathrm{Ad}_q\, x := qxq^{-1}. \tag{43}$$

Diese ist offensichtlich orthogonal (da L_q und R_q es sind) und ein Automorphismus, denn

$$\mathrm{Ad}_q(x)\,\mathrm{Ad}_q(y) = qxq^{-1}qyq^{-1} = q(xy)q^{-1} = \mathrm{Ad}_q(xy).$$

Da die Menge $\{\mathrm{Ad}_q;\ q \in \mathbb{H},\ |q| = 1\}$ nun eine zusammenhängende Teilmenge von O_3 ist, die die Einheitsmatrix $I = \mathrm{Ad}_1$ enthält, liegt sie in SO_3, jedes Ad_q ist also eine Drehung. Wir können Drehachse und Drehwinkel von Ad_q leicht bestimmen: Da $|q| = 1$, ist $q = c + su$ für einen Einheitsvektor $u \perp 1$ und $c = \cos t$, $s = \sin t$, und $q^{-1} = c - su$. Dann ist $\mathrm{Ad}_q\, u = u$, die Drehachse ist also $\mathbb{R}u$. Wählen wir einen zweiten Einheitsvektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \perp u$, so gilt wegen $vu = -uv$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_q(v) &= (c+su)v(c-su) \\
&= (cv+suv)(c-su) \\
&= c^2v + sc\,uv - cs\,vu - s^2uvu \\
&= (c^2-s^2)v + 2cs\,uv \\
&= (\cos 2t)v + (\sin 2t)uv.
\end{aligned}$$

Also ist Ad_q eine Drehung in der Ebene $u^\perp$ mit Drehwinkel $2t$, denn v und uv bilden eine Orthonormalbasis von $u^\perp$ (genauer ist (u, v, uv) eine orientierte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$). Die Abbildungen Ad_q bilden somit Drehungen mit beliebiger Drehachse und beliebigem Drehwinkel, jedes Element von SO_3 kommt also vor (sogar jeweils zweimal, denn $\mathrm{Ad}_{-q} = \mathrm{Ad}_q$). Genauer gilt:

Satz 9.1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = SO_3$ *und* $\mathrm{Ad} : \mathbb{S}^3 \to SO_3$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern* $\{\pm 1\}$.

Beweis. Wir haben schon gesehen: $SO_3 \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \subset O_3$. Gäbe es einen Automorphismus σ, der nicht in SO_3 liegt, also $\det\sigma = -1$, so wäre $\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = O_3$, denn σ erzeugt mit SO_3 zusammen die ganze Gruppe

---

[21] Das Wort “Konjugation” wird hier in einem anderen Sinn gebraucht als bisher; es hat mehrere ganz unterschiedliche Bedeutungen.

[22] Man kann auch eine beliebige Quaternion $q \neq 0$ nehmen; die Konjugation für q und $q/|q|$ ist dieselbe.

[23] Die Assoziativität von $\mathbb{H}$ besagt, dass L_q und $R_{q'}$ für beliebige Quaternionen $q, q' \in \mathbb{H}$ kommutieren, denn $L_qR_{q'}x = q(xq') = (qx)q' = R_{q'}L_qx$.

O_3 (denn $\tau \in O_3 \setminus SO_3 \Rightarrow \det \tau = -1 \Rightarrow \sigma^{-1}\tau \in SO_3 \Rightarrow \tau \in \sigma SO_3$). Aber die quaternionale Konjugation, die auf $\mathbb{R}^3$ einfach $-I$ ist, liegt nicht in $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$, denn sie ist ja ein Anti-Automorphimus. Deshalb ist $\operatorname{Aut}\mathbb{H} = SO_3$.

Die Einheitssphäre $\mathbb{S}^3$ ist eine Untergruppe[24] der multiplikativen Gruppe $\mathbb{H}^*$, denn $|pq| = 1$ falls $|p| = |q| = 1$. Die Abbildung $\operatorname{Ad} : \mathbb{S}^3 \to SO_3$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}_p \operatorname{Ad}_q x &= pqxq^{-1}p^{-1} = \operatorname{Ad}_{pq} x, \\ \operatorname{Ad}_{p^{-1}} x &= p^{-1}xp = (\operatorname{Ad}_p)^{-1} x, \end{aligned}$$

und $pxp^{-1} = x$ für alle $x \in \mathbb{H} \iff p \in \mathbb{R} \iff p = \pm 1$, weil $|p| = 1$. □

Wir hätten auch eine andere Methode zur Bestimmung von $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ wählen können, nämlich Gleichung (39). Diese sagt uns, dass wir einen Automorphismus von $\mathbb{H}$ erhalten, wenn wir eine Unteralgebra $A \cong \mathbb{C}$ und ein Element $\epsilon \perp A$ wählen. Die Algebra A wird als Vektorraum von 1 und einem Einheitsvektor $u \perp 1$ erzeugt, und ϵ ist ein Einheitsvektor senkrecht zu 1 und u. Jeder Automorphismus wird also durch zwei orthonormale Vektoren u, ϵ bestimmt, die durch $u\epsilon$ zu einer orientierten Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden. Demnach ist $\operatorname{Aut}\mathbb{H}$ isomorph zur Menge der orientierten Orthonormalbasen, d.h. zu SO_3.

Diese Methode wird bei $\mathbb{O}$, der interessantesten unter den normierten Algebren, unumgänglich. Nach (39) erhalten wir Automorphismen α durch Wahl einer Unteralgebra $A = \alpha(H) \subset \mathbb{O}$ und einem Element $\epsilon = \alpha(e_4) \perp A$, wobei wir uns $\mathbb{H}$ durch die Basisvektoren $e_o = 1$, e_1, e_2, e_3 aufgespannt denken. Auf $\mathbb{H}$ selbst wird der Automorphismus α festgelegt durch zwei orthonormale Vektoren $a = \alpha(e_1)$ und $b = \alpha(e_2)$ in A. Die Menge der Automorphismen lässt sich daher mit der Menge der *Cayley-Tripel* a, b, ϵ identifizieren: Tripel von Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^7$, die senkrecht aufeinander stehen und zusätzlich $ab \perp \epsilon$ erfüllen. Der erste Vektor a ist frei wählbar auf der $\mathbb{S}^6 \subset \mathbb{R}^7$, der zweite darf in der Einheitssphäre von $a^\perp \cong \mathbb{R}^6$, also in einer $\mathbb{S}^5$ gewählt werden, und der dritte liegt in der Einheitssphäre im Raum $\{a, b, ab\}^\perp \cong \mathbb{R}^4$, also in einer $\mathbb{S}^3$. Jeder Automorphismus wird demnach durch 6+5+3 = 14 Parameter bestimmt; die Gruppe $\operatorname{Aut}\mathbb{O}$ ist also 14-parametrig. Sie ist keine der schon bekannten Gruppen und bekommt daher einen neuen Namen: G_2. Sie ist eine zusammenhängende Untergruppe der O_7 und damit sogar eine Untergruppe der SO_7.

[24] Nach (10) ist das genau die Gruppe SU_2.

III. Clifford-Algebren

10. Clifford-Algebren

Die *Cliffordalgebra*[25] über $V = \mathbb{R}^n$ ist die von V erzeugte assoziative Algebra Cl_n mit Eins und der einzigen Relation[26]

$$v^2 = -|v|^2 \tag{44}$$

für alle $v \in V$, oder "polarisiert"

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle. \tag{45}$$

Eine Basis von Cl_n wird durch die Produkte der Basiselemente von V gegeben, $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ (wobei die Eins ein Produkt der Länge $k = 0$ ist). Wegen der Relationen $e_ie_j = -e_je_i$ für $i \neq j$ kann man $e_{i_1}\dots e_{i_k}$ so umordnen, dass die Indizes $i_1, \dots, i_k$ der Größe nach angeordnet sind. Danach hebt man mit der Relation $e_i^2 = -1$ die mehrfach auftretenden Indizes weg. Dann erhält man nur noch Ausdrücke $e_{i_1}\dots e_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Diese Produkte entsprechen genau den k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$, deren Anzahl $\binom{n}{k}$ ist. Das längste mögliche Produkt ist das sogenannte *Volumenelement*

$$\omega = e_1e_2\dots e_n, \tag{46}$$

und die Gesamtanzahl aller Produkte von Basiselementen ist[27]

$$\dim Cl_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \tag{47}$$

Das Volumenelement hat eine besondere Bedeutung: Es kommutiert oder antikommutiert mit allen Elementen von V, und sein Quadrat ist ± 1:

---

[25] William Kingdon Clifford, 1845 (Exeter, England) - 1879 (Madeira)

[26] Konstruktion: Man geht von der freien assoziativen Algebra mit 1 aus, die von V erzeugt wird, der Tensoralgebra $T(V)$. Sie ist direkte Summe von $\mathbb{R}\cdot 1$ mit den Einerprodukten, Zweierprodukten, Dreierprodukten usw., immer mit Elementen von V. Diese Algebra dividiert man durch das zweiseitige Ideal, dass von den Elementen $v^2 + |v|^2 \cdot 1$ erzeugt wird. Jede lineare Abbildung $f : V \to V$ wird zu einem Algebren-Homomorphismus $f : T(V) \to T(W)$ fortgesetzt. Wenn f das Skalarprodukt erhält, bleibt die Menge der Ausdrücke $v^2+|v|^2$ und also auch das davon erzeugte Ideal erhalten; jede orthogonale Abbildung auf $V = \mathbb{R}^n$ setzt sich also zu einem Automorphismus von Cl_n fort.

[27] Genau genommen können wir hier erst $\dim Cl_n \leq 2^n$ schließen, weil wir ja lineare Unabhängigkeit der Basisprodukte noch nicht gezeigt haben; stattdessen werden wir aber einfach Modelle der richtigen Dimension angeben.

Satz 10.1. *Mit* $N := \frac{1}{2}n(n+1)$ *gilt*

$$\omega^2 = (-1)^N, \tag{48}$$

$$v\omega = (-1)^{n-1}\omega v \tag{49}$$

für alle $v \in V$.

Beweis. Wir können den Basisvektor e_i mit $e_1 \dots e_{i-1}$ vertauschen mit Vorzeichen $(-1)^{i-1}$; wir können ihn auch mit $e_{i+1} \dots e_n$ vertauschen mit Vorzeichen $(-1)^{n-i}$, demnach gilt[28] $e_i\omega = (-1)^{n-1}\omega e_i$ und damit folgt (49) für alle $v \in V$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \omega^2 &= e_1 \dots e_n e_1 \dots e_n \\ &= (-1)^n e_2 \dots e_n e_2 \dots e_n \\ &= (-1)^n(-1)n - 1 e_3 \dots e_n e_3 \dots e_n \\ &= (-1)^N \end{aligned}$$

mit $N = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$.[29] □

Produkte von Elementen von V können verkürzt werden, indem Quadrate aufgelöst werden ($v^2 = -|v|^2$). Dabei wird die Länge eines Produkts geändert, aber nicht ihre Parität (gerade/ungerade). Wir erhalten deshalb eine direkte Summe

$$Cl_n = Cl_n^+ \oplus Cl_n^- \tag{50}$$

wobei Cl_n^+ und Cl_n^- von den Produkten von Elementen von V mit einer geraden bzw. einer ungeraden Anzahl von Faktoren erzeugt wird.[30]

Satz 10.2.

$$Cl_{n-1} \cong Cl_n^+, \tag{51}$$

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{n-1} \to Cl_n^+$, die jedes Basiselement e_i von $\mathbb{R}^{n-1}$ auf das Produkt $e_ie_n \in Cl_n^+$ abbildet. Da

[28]Beispiel $i = 2$, $n = 5$ (wir schreiben i statt e_i): $212345 = -122345$, $123452 = -123425 = 123245 = -122345$.

[29]Beispiel $n = 5$: $N = 3 \cdot 5 = 15$, $(-1)^N = -1$.

$$\begin{aligned} 12345\,12345 &= 11\,2345\,2345 \quad \text{(4 Vorzeichen)} \\ &= -11\,22\,345\,345 \quad \text{(3 Vorzeichen)} \\ &= -11\,22\,33\,45\,45 \quad \text{(2 Vorzeichen dazu)} \\ &= 11\,22\,33\,44\,55 \quad \text{(1 Vorzeichen dazu)} \\ &= -1 \quad \text{(5 Vorzeichen)} \end{aligned}$$

[30]Man bekommt diese Zerlegung auch durch den Automorphismus α von Cl_n mit $\alpha(v) = -v$ für alle $v \in V$, genannt *Graduierungsautomorphismus*. Weil $\alpha^2 = I$, zerfällt Cl_n in Eigenräume zu den Eigenwerten ± 1; das sind Cl_n^+ und Cl_n^-.

$e_ie_ne_je_n = -e_ie_ne_ne_j = e_ie_j$, setzt sich diese Abbildung zu einen injektiven Algebren-Homomorphismus $Cl_{n-1} \to Cl_n^+$ fort.[31] Es gibt gleich viele Basisprodukte mit gerader wie mit ungerader Faktorenanzahl, denn $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$. Deshalb haben Cl_n^+ und Cl_n^- beide die halbe Dimension von Cl_n, also 2^{n-1}, und die Behauptung folgt wegen Gleichheit der Dimension. □

11. Beispiele von Cliffordalgebren

$n = 0$: Cl_0 besteht nur aus den Vielfachen der 1, also $Cl_0 = \mathbb{R}$.

$n = 1$: Es gibt noch ein Basiselement $e_1 = i$ mit $i^2 = -1$, also $Cl_1 = \mathbb{C}$.

$n = 2$: Es gibt zwei Basiselemente $e_1 = i$, $e_2 = j$ und ihr Produkt $ij = \omega$ und $\omega^2 = ijij = -iijj = -1$. Also ist $Cl_2 = \mathbb{H}$.

$n = 3$: Es scheint zunächst, als könnten wir $\mathbb{H}$ auch als Modell für Cl_3 nehmen mit $e_1 = i$, $e_2 = j$, $e_3 = k$. Aber $\dim Cl_3 = 2^3 = 8$ ist doppelt so groß wie $\dim \mathbb{H} = 4$, deshalb kann die Abbildung $Cl_3 \to \mathbb{H}$ nicht injektiv sein, nur ihre Einschränkung auf $Cl_3^+ \cong Cl_2$. Das Problem ist die Relation $ij = k$ oder $e_1e_2 = e_3$, die in $\mathbb{H}$ gilt, aber nicht in der Cliffordalgebra Cl_3. Man kann sie auflösen, indem man e_i durch die Matrix $\hat e_i = \left(\begin{smallmatrix} e_i & \\ & -e_i \end{smallmatrix}\right)$ ersetzt; dann ist $\hat e_i \hat e_j = \left(\begin{smallmatrix} e_k & \\ & e_k \end{smallmatrix}\right) \neq \hat e_k$. Produkte der Länge 1 sind vom Typ $\left(\begin{smallmatrix} v & \\ & -v \end{smallmatrix}\right)$, die von Länge 2 sind $\left(\begin{smallmatrix} v & \\ & v \end{smallmatrix}\right)$ und $\hat e_1 \hat e_2 \hat e_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir erhalten also $Cl_3 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.

$n = 4$: Wenn wir die e_i $(i = 1,2,3)$ anders in eine 2×2-Matrix einbauen, nämlich als $E_i = \left(\begin{smallmatrix} & e_i \\ e_i & \end{smallmatrix}\right)$, dann ist noch Platz für eine weitere Matrix $E_4 = \left(\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$ mit $E_4^2 = -I$, die mit den anderen dreien antikommutiert. Anders gesagt, man bildet $u \in \mathbb{H}$ ab auf die Matrix $U = \left(\begin{smallmatrix} & -\bar u \\ u & \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}^{2\times 2}$. Dann sind Zweierprodukte wieder diagonal: $UV = \left(\begin{smallmatrix} -\bar u v & \\ & -u\bar v \end{smallmatrix}\right)$ und Dreierprodukte antidiagonal, $UVW = \left(\begin{smallmatrix} & u\bar v w \\ \bar u v \bar w & \end{smallmatrix}\right)$, und schließlich $E_1E_2E_3E_4 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Wir erreichen damit beliebige quaternionale 2×2-Matrizen; somit ist $Cl_4 = \mathbb{H}^{2\times 2}$.

$n = 7$: Wie im Fall der Quaternionen $(n = 3)$ stellen wir auch bei den Oktaven $(n = 7)$ fest, dass die Linkstranslationen $L_{e_1}, \dots, L_{e_7} \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ die Cliffordrelation erfüllen. Aber wie im Fall $n = 3$ stimmt die Dimension nicht: $\dim \mathbb{R}^{8\times 8} = 64$ ist nur die Hälfte von $\dim Cl_7 = 2^7 = 128$. Nur Cl_7^+ wird richtig dargestellt, siehe

[31] Eine lineare Abbildung $f : V \to Cl(W)$ setzt sich zu einem Homomorphismus der Clifford-Algebren fort, wenn f die Relation $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$ erhält: $f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = -2\delta_{ij}$. Das ist hier offensichtlich erfüllt, weil $f(e_i)f(e_j) = e_ie_j$. Die Injektivität gilt, weil f ein Produkt $e_{i_1} \dots e_{i_k}$ fix lässt (falls k gerade ist) oder auf $e_{i_1} \dots e_{i_k} e_n$ abbildet.

unten. Wir helfen uns wir vorher und setzen $\hat{e}_i = \begin{pmatrix} L_{e_i} & \\ & -L_{e_i} \end{pmatrix}$; dann wird $Cl_7 = \mathbb{R}^{8\times 8} \times \mathbb{R}^{8\times 8}$, was die richtige Dimension hat.

$n = 8$: Wie bei $n = 4$ definieren wir $E_i = \begin{pmatrix} & L_{e_i} \\ L_{e_i} & \end{pmatrix}$ und ergänzen durch $E_8 = \begin{pmatrix} & -I \\ I & \end{pmatrix}$; jeder Oktave $u \in \mathbb{O}$ wird damit die Matrix $\begin{pmatrix} & -L_{\bar u} \\ L_u & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ zugeordnet, und wir erhalten $Cl_8 = \mathbb{R}^{16\times 16}$ (mit Dimension 256).

$n = 6$: Da $Cl_6 \cong Cl_7^+$, erhalten wir $Cl_6 = \mathbb{R}^{8\times 8}$ aus dem Fall $n = 7$.

$n = 5$: Wir können $Cl_5 \cong Cl_6^+$ als Unteralgebra von $Cl_6 = Cl_7^+$ darstellen. Da die Matrizen in Cl_6^+ mit der komplexen Struktur $J = L_{e_7}$ vertauschen, sind sie komplex linear bezüglich dieser Struktur, und aus Dimensionsgründen gilt $Cl_5 = \mathbb{C}^{4\times 4}$.

$n = 4$: Wir erreichen $Cl_4 \cong Cl_5^+$ auch als Unteralgebra von Cl_7^+, deren Elemente mit den beiden antikommutierenden komplexen Strukturen L_{e_7}, L_{e_6} vertauschen und somit quaternional linear sind; wir sehen daher erneut $Cl_4 = \mathbb{H}^{2\times 2}$.

Wir wollen uns noch klar machen, dass sowohl die Links- als auch die Rechttranslationen der Oktaven tatsächlich alle 8×8-Matrizen erzeugen. Wir zeigen es für die Rechtstranslationen. Aus der Multiplikationsregel der Oktaven $\mathbb{O} = \mathbb{H}^2$,

$$(x,y)(u,v) = (xu - \bar v y, vx + y\bar u)$$

ergibt sich für die Rechtsmultiplikation:

$$R_{(u,v)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_u x - L_{\bar v} y \\ L_v x + R_{\bar u} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_u & -L_{\bar v} \\ L_v & R_{\bar u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{52}$$

Insbesondere $R_{(u,0)} = \begin{pmatrix} R_u & \\ & R_{\bar u} \end{pmatrix}$ und $R_{(0,v)} = \begin{pmatrix} & -L_{\bar v} \\ L_v & \end{pmatrix}$, also

$$R_{(a,0)} R_{(b,0)} = \begin{pmatrix} R_{ba} & \\ & R_{\bar b \bar a} \end{pmatrix}, \quad R_{(0,a)} R_{(0,b)} = \begin{pmatrix} -L_{\bar a b} & \\ & -L_{a \bar b} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Welche Paare $(p,q) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ mit $|p| = |q|$ erreichen wir als $(p,q) = (ba, \bar b \bar a)$? Wir dürfen dabei $|a| = |b| = |p| = |q| = 1$ annehmen. Dann erhalten wir $b = p\bar a$ und $\bar a = bq$ und daraus $b = pbq = L_p R_q b$; somit muss b ein Fixvektor von $L_p R_q \in SO_4$ sein. Jedes Element von SO_4 besteht Drehungen in zwei zueinander senkrechten Ebenen; Fixvektoren gibt es also nur, wenn eine der beiden Drehungen trivial ist. Das geschieht z.B. für $p = q$: Wenn $b \perp p, 1$, dann ist $pbp = -p\bar p \bar b = |p|^2 b = b$.

Mit $(ba, \bar b \bar a)$ erreichen wir also nicht alle Paare, wohl aber mit Produkten mit mehr Faktoren: Die Gleichungen $cba = p$, $\bar c \bar b \bar a = q$ können wir für beliebig vorgegebene $(p,q) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ lösen, falls alle beteiligten Quaternionen die Länge Eins haben: Aus $c = p\bar a \bar b$ und $\bar a = bcq$ erhalten wir $c = pbcq\bar{b}$. Wenn wir $pb = qb =: d$ fordern, wird diese Gleichung durch jedes $c \perp d, 1$ gelöst, wie wir gerade gesehen haben. Die Gleichung $pb = qb$ bedeutet $b^2 = \bar{p}q$, damit ist b (weitgehend) bestimmt. Setzen wir nun $\bar{a} = bcq$, dann gilt auch $c = pbcq\bar{b} = p\bar{a}\bar{b}$, und beide Gleichungen sind erfüllt.

Hilfssatz 11.1.

$$SO_4 = \{L_p R_q;\ p, q \in \mathbb{H},\ |p| = |q| = 1\}. \tag{54}$$

Beweis. Eine beliebige orientierte Orthonormalbasis $B = (a, b, c, d)$ von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ verwandeln wir auf folgende Weise in die Standardbasis $(1, i, j, k)$: Mit der Linksmultiplikation mit $\bar{a}$ erhalten wir $L_{\bar{a}}(a, b, c, d) = (1, \bar{a}b, \bar{a}c, \bar{a}d)$, und mit einer Konjugation $\mathrm{Ad}(v) = L_v R\bar{v}$ verwandeln wir diese in $(1, i, j, k)$, vgl. Abschnitt 9. Insgesamt haben wir $L_{v\bar{a}} R_{\bar{v}}$ angewandt, also gilt umgekehrt $(a, b, c, d) = L_{a\bar{v}} R_v$. □

Hilfssatz 11.2. *Die SO_n ist für $n \geq 3$ in keinem echten Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$ enthalten.*

Beweis. Andernfalls gibt es eine Matrix $X \neq 0$ mit $X \perp SO_n$. Es sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so eine Matrix; wir werden $X = 0$ zeigen. Das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist invariant gegenüber Rechts- und Linkstranslationen mit Elementen von SO_n, denn für alle $A \in SO_n$ ist

$$\begin{aligned}
\langle AX, AY\rangle_o &= \text{Spur } X^t A^t A X = \langle X, Y\rangle_o \\
\langle XA, YA\rangle_o &= \text{Spur } A^t X^t Y A = \text{Spur } X^t Y = \langle X, Y\rangle_o,
\end{aligned}$$

weil $A^t = A^{-1}$ und die Spur unter Konjugation gleich bleibt. Nun ist aber jede Matrix X von der Gestalt $X = B^{-1}DA$ für eine Diagonalmatrix D und $A, B \in SO_n$ (*Singulärwert-Darstellung*).[32] Aus $\langle X, SO_n\rangle = 0$ folgt daher $\langle D, SO_n\rangle = 0$. Aber dann müssen alle Koeffizienten μ_i der Diagonalmatrix D verschwinden: Wir betrachten $A \in SO_n$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix}\cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t\end{smallmatrix}\right)$ auf $E = \mathbb{R}e_i + \mathbb{R}e_j$ und $A = I$ auf $E^\perp$, dann ist

$$0 = \langle D, A\rangle = \text{Spur } DA = (\mu_i + \mu_j)\cos t + {\sum}' \mu_k$$

wobei $\sum'$ über $k \neq i, j$ summiert. Es folgt also $\mu_i + \mu_j = 0$ für alle $i \neq j$. Für $n \geq 3$ folgt, dass alle μ_i verschwinden, denn die Matrix des

[32] $X^t X$ ist symmetrisch und daher orthogonal diagonalisierbar, $X^t X a_i = \lambda_i a_i$ für eine Orthonormalbasis $A = (a_1, \ldots, a_n)$. Damit ist $\langle Xa_i, Xa_j\rangle = \langle X^t X a_i, a_j\rangle = \lambda_i \delta_{ij}$. Also stehen die Vektoren Xa_i aufeinander senkrecht, d.h. $Xa_i = \mu_i b_i$ für eine Orthonormalbasis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ (und $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$) und $XA = BD$ für die Diagonalmatrix D mit Einträgen $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

homogenen Gleichungssystems $\mu_i + \mu_j = \mu_j + \mu_k = \mu_k + \mu_i = 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$ mit Determinante $2 \neq 0$. □

Aus (52), (53) folgt nun, dass Produkte von beliebig vielen Rechtstranslationen von der Form $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ für beliebige $A, B, C, D \in \mathbb{R} \cdot SO_4$ sind; der davon aufgespannte Vektorraum ist nach den beiden vorstehenden Hilfssätzen $\mathbb{R}^{8\times 8}$.

12. Die Anti-Cliffordalgebra

Die Algebra Cl_n hat eine Reihe von Verwandten, für die das Skalarprodukt auf V durch eine andere symmetrische Bilinearform ersetzt wird. Die triviale Bilinearform zum Beispiel, die alles auf Null abbildet, führt zur *Äußeren Algebra* mit der Relation $vw = -wv$ für alle $v, w \in V = \mathbb{R}^n$. Die Dimension aller dieser Algebren ist immer 2^n, unabhängig von der Bilinearform. Wir interessieren uns besonders für die Algebra Cl'_n, bei der das Vorzeichen vor dem Skalarprodukt entfällt:

$$vw + wv = 2\langle v, w\rangle. \tag{55}$$

Wir wollen sie *Anti-Cliffordalgebra* nennen. Wie sehen diese für kleine n aus? Für $n = 0$ ist natürlich kein Unterschied, d.h. $Cl'_0 = Cl_0 = \mathbb{R}$.

n=1: Das einzige Basiselement e_1 erüllt jetzt die Relation $e_1^2 = 1$. Wir können e_1 durch die Matrix $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ und 1 natürlich durch die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ darstellen und erhalten damit $Cl'_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \\ & \mathbb{R} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

n=2: Es gibt noch ein zweites Basiselement e_2 mit $e_2^2 = 1$, das mit e_1 antikommutiert. Wir können p_1 wie bei $n = 1$ wählen und $p_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$.[33] Dann ist $p_1 p_2 =: p_{12} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ und somit $Cl'_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir brauchen diese Reihe nicht fortzuführen, weil wir gleich ein allgemeines Konstruktionsprinzip entwickeln wollen.

Eine Matrix-Darstellung[34] der Cliffordalgebra Cl_n wird durch Matrizen $E_1, \dots, E_n$ mit

$$E_i E_j + E_j E_i = -2\delta_{ij} \tag{56}$$

---

[33] Dies ist in der Tat i.W. die einzig mögliche Wahl: Weil $p_1^2 = 1$, hat p_1 nur die Eigenwerte ± 1. Die zweite Matrix p_2 antikommutiert mit p_1 und vertauscht deshalb die beiden Eigenräume $V_\pm$ von e_1. Wenn wir V_- und V_+ mit Hilfe von p_2 identifizieren, dann wird $p_1 = \begin{pmatrix} I & \\ & -I \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} & I \\ I & \end{pmatrix}$.

[34] Eine *Darstellung* einer assoziativen Algebra A ist ein Algebrenhomomorphismus $\rho : A \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Es reicht, die Matrizen $E_i = \rho(e_i)$ für ein Erzeugendensystem $\{e_1, \dots, e_n\}$ von A anzugeben, wobei die E_i die entsprechenden Relation wie die e_i erfüllen müssen.

gegeben. Wie können wir dieses System erweitern? Wir definieren dazu Matrizen von doppeltem Format $P_1, \dots, P_{n+2}$ mit

$$P_1 = \left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right), \quad P_2 = \left(\begin{smallmatrix} & I \\ I & \end{smallmatrix}\right), \quad P_{i+2} = \left(\begin{smallmatrix} & E_i \\ -E_i & \end{smallmatrix}\right) \tag{57}$$

Für dieses neue System von Matrizen (*Cliffordsystem*)[35] ist das Vorzeichen allerdings anders:[36]

$$P_iP_j + P_jP_i = 2\delta_{ij}, \tag{58}$$

sie bilden also eine Darstellung der Anti-Clifford-Algebra. Ebenso gibt es auch den umgekehrten Prozess: Aus einem Cliffordsystem $P_1, \dots, P_n$ entsteht eine um zwei größere Clifford-Darstellung $E_1, \dots, E_{n+2}$:

$$E_1 = i\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right), \quad E_2 = i\left(\begin{smallmatrix} & I \\ I & \end{smallmatrix}\right), \quad E_{i+2} = \left(\begin{smallmatrix} & P_i \\ -P_i & \end{smallmatrix}\right) \tag{59}$$

13. Tensorprodukte von Algebren

Diese Konstruktion kann als ein *Tensorprodukt* gedeutet werden. Das Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier Vektorräume V und W mit Dimensionen p und q ist ein Vektorraum der Dimension pq, der sich sich wie folgt definieren lässt:[37] Wenn $w_1, \dots, w_p$ ein Basis von W ist, ersetzen wir die reellen Koeffizienten t_i der Vektoren $\sum_i t_i w_i \in W$ formal durch Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$. Solche formalen Summen $\sum_i v_i w_i$ (oft geschrieben $\sum_i v_i \otimes w_i$) bilden den Vektorraum $V \otimes W$; dieser Vektorraum ist unabhängig von der Wahl der Basis $w_1, \dots, w_p$. Wenn V und W sogar Algebren sind, wird $V \otimes W$ wieder eine Algebra, denn zwei solche Summanden $v \otimes w$ und $\tilde v \otimes \tilde w$ lassen sich multiplizieren zu $v\tilde v \otimes w\tilde w$. Ein einfaches Beispiel ist $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $W = \mathbb{R}^{r\times r}$. Als Basis von W wählen wir die Matrizen w_{ij}, deren Koeffizienten alle Null sind bis auf eine Eins an der Stelle ij; dann wird $V \otimes W$ der Raum aller $r \times r$-Matrizen, deren Koeffizienten selbst $n \times n$-Matrizen sind;

[35] Der Begriff stammt aus der Arbeit von D. Ferus, H. Karcher und H.-F. Münzner: Cliffordalgebren und isoparametrische Hyperflächen, Math. Z. 177, 479 - 502 (1981), die auf S. 482 f. eine knappe Zusammenfassung der hier dargestellten Theorie enthält.

[36] $\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} & I \\ I & \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} & E_i \\ -E_i & \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} I & \\ & I \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} & A \\ B & \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} & A \\ -B & \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} & A \\ B & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} I & \\ & -I \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} & I \\ I & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} & A \\ -A & \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -A & \\ & A \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} & A \\ -A & \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} & I \\ I & \end{smallmatrix}\right)$.

[37] Die formale Definition ist etwas sperrig: $V \otimes W$ ist ein Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\beta_o : V \times W \to V \otimes W$, geschrieben $\beta_o(v, w) = v \otimes w$, mit der Eigenschaft, dass jede (andere) Bilinearform $\beta : V \times W \to U$ in einen beliebigen Vektorraum U sich von β_o nur um eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \otimes W \to U$ unterscheidet, $\beta = f \circ \beta_o$. Mit anderen Worten: Die bilinearen Abbildungen auf $V \times W$ werden durch die linearen Abbildungen auf $V \otimes W$ gegeben.

diese bilden den Raum aller $nr \times nr$-Matrizen: $\mathbb{R}^{n\times n} \otimes \mathbb{R}^{r\times r} = \mathbb{R}^{np\times np}$. Allgemeiner gilt für jede Algebra A, dass $A \otimes \mathbb{R}^{n\times n}$ die Algebra der $r \times r$-Matrizen mit Koeffizienten in A bildet.

Das Tensorprodukt ist bis auf Isomorphie kommutativ und assoziativ: Die Abbildung $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ definiert einen Isomorphismus $V \otimes W \to W \otimes V$, und die Abbildung $u \otimes (v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$ definiert einen Isomorphismus $U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes V) \otimes W$.

14. Periodizität der Cliffordalgebren

Wir können die beiden Erweiterungen (57) und (59) durch Tensorprodukte beschreiben: Die Matrizen $e = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $p_{12} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $Cl'_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$, und es gilt $P_j \in Cl'_2 \otimes Cl_n$ für $j = 1, \dots, n+2$, denn

$$P_1 = p_1 \otimes I, \quad P_2 = p_2 \otimes I, \quad P_{i+2} = p_{12} \otimes E_i,$$

Somit $Cl'_{n+2} \subset Cl'_2 \otimes Cl_n = \mathbb{R}^{2\times 2} \otimes Cl_n$, und wegen Dimensionsgleichheit gilt sogar

$$Cl'_{n+2} = Cl'_2 \otimes Cl_n = \mathbb{R}^{2\times 2} \otimes Cl_n \tag{60}$$

Etwas ganz Analoges gilt für Cl_{n+2}. Dazu müssen wir daran erinnern, dass Cl_2 die Quaternionenalgebra ist, $Cl_2 = \mathbb{H} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{pmatrix};\ a, b \in \mathbb{C}\}$ mit der Basis $1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $\mathsf{i} = \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}$, $\mathsf{j} = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$, $\mathsf{k} = \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}$. Nach (59) sind alle $E_j \in Cl_2 \otimes Cl'_n$, denn

$$E_1 = \mathsf{i} \otimes I, \quad E_2 = \mathsf{k} \otimes I, \quad E_{i+2} = \mathsf{j} \otimes P_i,$$

also erhalten wir $Cl_{n+2} \subset Cl_2 \otimes Cl'_n$, und wegen Dimensionsgleichheit folgt

$$Cl_{n+2} = Cl_2 \otimes Cl'_n = \mathbb{H} \otimes Cl'_n. \tag{61}$$

Hilfssatz 14.1.

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}^{4\times 4}. \tag{62}$$

Beweis. Wir definieren eine lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$ durch[38]

$$\Phi(a \otimes b) = L_a R_{\bar b}. \tag{63}$$

Dies ist ein Algebren-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} \Phi(a \otimes b)\Phi(c \otimes d) &= L_a R_{\bar b} L_c R_{\bar d} \\ &= L_a L_c R_{\bar b} R_{\bar d} \\ &= L_{ac} R_{\overline{db}} \end{aligned}$$

[38] Die Abbildung $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}^{4\times 4}$, $(a, b) \mapsto L_a R_{\bar b}$ ist bilinear und definiert daher eine lineare Abbildung auf $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} &= L_{ac}R_{\overline{bd}} \\ \Phi((a\otimes b)(c\otimes d)) &= \Phi(ac\otimes bd) \\ &= L_{ac}R_{\overline{bd}}. \end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass $\{L_aR_{\bar b};\ a,b\in\mathbb{H}\} = \mathbb{R}\cdot SO_4$ und dass die lineare Hülle von SO_4 den ganze Matrizenraum $\mathbb{R}^{4\times4}$ bildet. Daher ist Φ surjektiv, und da beide Algebren $\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}$ und $\mathbb{R}^{4\times4}$ die gleiche Dimension 16 haben, muss Φ ein Isomorphismus sein. □

Satz 14.1. Periodizitätssatz: [39]

(64) $$Cl_{n+8} \cong Cl_n \otimes \mathbb{R}^{16\times16}.$$

Beweis. $Cl_{n+8} \cong Cl'_{n+6}\otimes\mathbb{R}^{2\times2} \cong Cl_{n+4}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}^{2\times2}$ und $Cl_{n+4} \cong Cl'_{n+2}\otimes\mathbb{R}^{2\times2} \cong Cl_n\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}^{2\times2}$, also $Cl_{n+8} \cong Cl_n\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}^{2\times2}\otimes\mathbb{R}^{2\times2} \cong Cl_n\otimes\mathbb{R}^{4\times4}\otimes\mathbb{R}^{4\times4} \cong Cl_8\otimes\mathbb{R}^{16\times16}$. □

IV. Spin-Gruppen

15. Pin-Gruppe und orthogonale Gruppe

In der abstrakten Cliffordalgebra Cl_n über $V=\mathbb{R}^n$ betrachten wir die Menge aller Produkte von Elementen der Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1} = \{v\in V;\ |v|=1\}$:

(65) $$Pin_n := \{v_1v_2\dots v_k \in Cl_n;\ v_j\in\mathbb{S}^{n-1},\ j=1,\dots,k,\ k\in\mathbb{N}\}$$

die aus allen Clifford-Produkten von Einheitsvektoren besteht.[40] Zweifellos ist Pin_n eine Gruppe, eine Untergruppe der Multiplikativen Gruppe Cl_n^* aller invertierbaren Elemente in der Algebra Cl_n, denn das Inverse zu $v_1\dots v_k$ ist $(-1)^k v_k\dots v_1$, und das Produkt aus zwei solchen Produkten mit Längen k und l ist ein ebensolches Produkt mit Länge

[39] Laut J. Baez stammt dieser Satz von Elie Cartan, 1869 (Dolomieu bei Chambéry) - 1951 (Paris). In den 50'ger Jahren konnte Raoul Bott, 1923 (Budapest) - 2005 (San Diego, USA), damit einen der berümtesten Sätze der Topologie beweisen, den Bottschen Periodizitätssatz, der die Homotopiegruppen der SO_n für große n bestimmt, vgl. Abschnitt 18. Die k-te Homotopiegruppe $\pi_k(SO_n)$ enthält nach Definition die Homotopieklassen (Deformationsklassen) stetiger Abbildungen von $\mathbb{S}^k$ nach SO_n. Literatur: R. Bott: The Stable Homotopy of the Classical Groups, Ann. Math. 70 (1959), 313 337; J. Milnor: Morse Theory. Princeton University Press, 1969.

[40] Der merkwürdige Name wird im nächsten Abschnitt klarer werden: Die Bezeichnung "Pin" entsteht aus "Spin" durch Weglassen des Buchstaben S, so wie "O_n" aus "SO_n" durch Weglassen des Buchstaben S entsteht. Das englische Wort "Spin" bedeutet Drehung um die eigene Achse; die Spin-Gruppe beschreibt in der Quantenmechanik den Eigendrehimpuls der Elektronen (Spin-Quantenzahl).

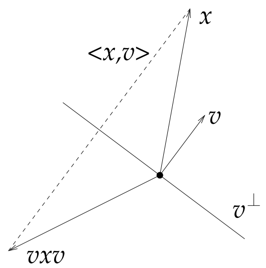
$k+l$. Ein besonderes Element von Pin_n ist das früher erwähnte Volumenelement

$$\omega = e_1 e_2 \dots e_n. \tag{66}$$

Die geometrische Bedeutung der Gruppe Pin_n wird klar, wenn wir uns die Konjugation mit Elementen von Pin_n auf V ansehen. Wir brauchen das nur für Produkte der Länge Eins zu tun:

Hilfssatz 15.1. *Für alle $x \in V$ und $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ist $vxv \in V$, und die Abbildung $x \mapsto vxv$ ist die Spiegelung an der Hyperebene $v^\perp$, insbesondere also ein Element der orthogonalen Gruppe O_n.*

Beweis. $vxv = -vvx - 2\langle x, v\rangle v = x - 2\langle x, v\rangle v$. Von x wird also zweimal die Komponente in Richtung v abgezogen; das ist die Spiegelung an $v^\perp$.



□

Für jedes $\alpha = v_1 \dots v_k \in Pin_n$ betrachten wir nun die Abbildung $\mathrm{Ad}_\alpha : V \to V$,

$$\mathrm{Ad}_\alpha(x) = \alpha x \alpha^{-1} = (-1)^k v_1(v_2(\dots(v_k x v_k)\dots)v_2)v_1. \tag{67}$$

Diese ist bis auf das Vorzeichen das Produkt der Spiegelungen $x \mapsto v_j x v_j$ und damit ein Element der orthogonalen Gruppe; wir haben somit eine Abbildung

$$\mathrm{Ad} : Pin_n \to O_n, \quad \alpha \mapsto \mathrm{Ad}_\alpha \tag{68}$$

definiert. Sie ist offensichtlich ein Gruppen-Homomorphismus, denn $\mathrm{Ad}_1 = I$ und

$$\mathrm{Ad}_{\alpha\beta}\, v = \alpha\beta v(\alpha\beta)^{-1} = \alpha\beta v \beta^{-1}\alpha^{-1} = \mathrm{Ad}_\alpha \mathrm{Ad}_\beta\, v.$$

Der Faktor $(-1)^k$ in (67) ist allerdings höchst lästig; ohne ihr wäre Ad_α direkt ein Produkt von Hyperebenenspiegelungen. Also lassen wir ihn weg und definieren für $\alpha = v_1 \dots v_k$:

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha(x) = (-1)^k \mathrm{Ad}_\alpha(x) = v_1(v_2(\dots(v_k x v_k)\dots)v_2)v_1. \tag{69}$$

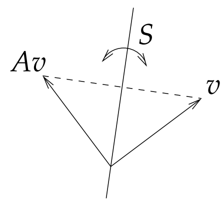
Aber ist das auch noch ein Gruppenhomomorphismus? Ja, denn wenn α Länge k und β Länge l hat, dann ist $k+l$ die Länge von $\alpha\beta$ und es gilt

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha \tilde{\mathrm{Ad}}_\beta = (-1)^k(-1)^l \mathrm{Ad}_\alpha \mathrm{Ad}_\beta = (-1)^{k+l} \mathrm{Ad}_{\alpha\beta} = \tilde{\mathrm{Ad}}_{\alpha\beta}.$$

Dieser Homomorphismus ist sogar surjektiv, wie der folgende geometrische Hilfssatz zeigt:

Hilfssatz 15.2. *Jede orthogonale Abbildung $A \in O_n \setminus \{I\}$ ist Produkt von höchstens n Hyperebenenspiegelungen.*

Beweis. Induktion nach n.
$n = 1$: Es gibt nur ein Element $A \neq I$, nämlich $x \mapsto -x$, die Spiegelung an der "Hyperebene" $\{0\} \subset \mathbb{R}^1$.
$n \to n+1$: Da $A \neq I$, gibt es ein $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Av \neq v$. Die Spiegelung S an der Hyperebene $(Av - v)^\perp$ bildet Av nach v ab. Für $A' := SA$ gilt also $A'v = v$. Damit ist A' eine orthogonale Abbildung der Hyperebene $(Av - v)^\perp \cong \mathbb{R}^n$ und damit nach Induktionsvoraussetzung ein Produkt aus k Spiegelungen $S_1, \dots, S_k$ mit $k \leq n$. Somit ist $A = SA' = SS_1 \dots S_k$ ein Produkt aus $k + 1 \leq n + 1$ Spiegelungen.



□

Satz 15.1. *Die Abbildung* $\tilde{\mathrm{Ad}} : Pin_n \to O_n$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern* $\{\pm 1\}$.

Beweis. Es sei $\alpha = v_1 \dots v_k \in \ker \tilde{\mathrm{Ad}} \subset Pin_n$. Dann gilt $\alpha v \alpha^{-1} = (-1)^k v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ oder

$$\alpha v = (-1)^k v \alpha.$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst nur für $v = e_1$ (erster Basisvektor) ausnutzen. Wenn wir die Faktoren v_j von α mit Hilfe der Standardbasis darstellen, $v_j = \sum_k t_{jk} e_k$, dann wird α zu einer Linearkombination von Produkten von Basisvektoren. Die Länge jedes einzelnen Produkts hat dieselbe Parität (gerade vs. ungerade) wie k: Zunächst haben alle Produkte k Faktoren, aber wegen $e_j^2 = -1$ können Faktoren sich paarweise wegheben, wobei die Länge des Produktes (Anzahl der Faktoren) geändert wird, aber nicht deren Parität. Es gibt nun zwei Sorten von Summanden in α: solche, die e_1 enthalten, und solche, die e_1 nicht enthalten. Die ersteren fassen wir zu einer Teilsumme vom Typ $e_1\beta$ zusammen, die letzteren zu einer Teilsumme γ, wobei sowohl β als auch γ kein e_1 mehr enthalten. Wir bekommen also $\alpha = e_1\beta + \gamma$. Beim Vertauschen von e_1 mit γ erhalten wir ein Vorzeichen $(-1)^k$, beim Vertauschen mit β dagegen $(-1)^{k-1}$. Daher gilt

$$\alpha e_1 \;=\; e_1 \beta e_1 + \gamma e_1$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^{k-1}e_1^2\beta + (-1)^k e_1\gamma \\ &= (-1)^k(\beta + e_1\gamma), \\ e_1\alpha &= e_1^2\beta + e_1\gamma \\ &= -\beta + e_1\gamma \end{aligned}$$

Aus $\alpha e_1 = (-1)^k e_1\alpha$ folgt nun $\beta + e_1\gamma = -\beta + e_1\gamma$, also $\beta = 0$. Somit ist e_1 in keinem Summanden von $\alpha = \gamma$ enthalten. Dasselbe Argument funktioniert für $e_2, \dots, e_n$. Damit kann kein Summand von α irgendeinen der Basisvektoren e_i enthalten, also muss α ein skalares Vielfaches von 1 sein, und weil die Faktoren v_j Einheitsvektoren sind, bleibt nur $\alpha = \pm 1$ übrig. □

Bemerkung 1. Weil jedes Element von O_n aus höchstens n Spiegelungen besteht, besteht die Gruppe Pin_n, nur aus den Produkten aus höchstens n Faktoren:

$$Pin_n = \{v_1 \dots v_k;\ v_j \in \mathbb{S}^{n-1},\ j = 1, \dots, k,\ k \le n\}. \tag{70}$$

Denn $\tilde{\mathrm{Ad}}$ bildet solche Elemente bereits auf sämtliche Elemente von O_n ab; wir erhalten also bis auf das Vorzeichen alle Elemente von Pin_n, und dieses Vorzeichen können wir durch Übergang von v_1 auf $-v_1$ berücksichtigen.

Bemerkung 2. Der Beweis von Satz 15.1 zeigt noch etwas mehr, denn wir haben nirgendwo benutzt, dass $\alpha \in Cl_n$ ein einfaches Produkt $v_1 \dots v_k$ ist. In der Tat lässt sich die Abbildung $\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$ als Abbildung auf Cl_n für beliebige $\alpha \in Cl_n^*$ definieren:

$$\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha(\xi) = \alpha\xi(\alpha^\mu)^{-1} \tag{71}$$

für alle $\xi \in Cl_n$, wobei μ der Automorphismus von Cl_n ist, der von der Abbildung $-I : V \to V$, $v \mapsto -v$ induziert wird. Dann gilt:

Satz 15.2. *Für jedes $\alpha \in Cl_n^*$ gilt: $\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha(V) = V$ und $\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha|_V \in O_n$ (mit $V = \mathbb{R}^n$) $\iff$ $\alpha \in Pin_n$.*

Beweis. Da $\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha \in O_n$, gibt es ein $\alpha' \in Pin_n$ mit $\tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha = \tilde{\mathrm{Ad}}_{\alpha'}$ oder $\tilde{\mathrm{Ad}}_{\alpha''} = I$ für $\alpha'' = \alpha'\alpha^{-1}$. Nach dem Beweis von Satz 15.1 folgt $\alpha'' = \pm 1$, also ist $\alpha = \pm\alpha' \in Pin_n$.

16. Spin-Gruppen

Die Gruppe $Spin_n$ ist die Untergruppe von Pin_n, die nur aus den Produkten gerader Länge besteht:

$$Spin_n = \{v_1 \dots v_{2r} \in Cl_n;\ v_j \in \mathbb{S}^{n-1},\ j = 1, \dots, 2r,\ r \in \mathbb{N}\} \tag{72}$$

Wenn wir den Homomorphismus $\tilde{\mathrm{Ad}}$ in Satz 15.1 auf die Untergruppe $Spin_n$ einschränken (dort gilt $\tilde{\mathrm{Ad}} = \mathrm{Ad}$), so liegen die Werte in der

Gruppe SO_n, denn eine gerade Anzahl von Spiegelungen ergibt ein Element von SO_n ("Drehung"), und jede Drehung lässt sich nach Hilfssatz 15.2 so darstellen. Somit erhalten wir aus Satz 15.1:

Satz 16.1. *Die Abbildung* $\tilde{\mathrm{Ad}}|_{Spin_n} = \mathrm{Ad}|_{Spin_n}$ *ist ein surjektiver 2:1-Homomorphismus von* $Spin_n$ *auf* SO_n *mit Kern* $\{\pm 1\}$. *Also ist*

$$SO_n = Spin_n/\{\pm 1\}. \tag{73}$$

Wir wollen nun diese Gruppen für kleine n der Reihe nach ansehen. Dabei beachten wir, dass $Spin_n$ in Cl_n^+ liegt; mit Hilfe des von der Abbildung $e_i \mapsto e_i e_n$ erzeugten Isomorphismus $Cl_{n-1} \to Cl_n^+$ werden wir also aus der Matrizendarstellung von Cl_{n-1} eine Matrizendarstellung von $Spin_n$ erhalten, genannt *Spindarstellung.*

$n = 1$: $Cl_1^+ \cong Cl_0 = \mathbb{R}$ und $Spin_1 = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$.
$n = 2$: $Cl_2^+ \cong Cl_1 = \mathbb{C}$ und $Spin_2 = \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.
$n = 3$: $Cl_3^+ \cong Cl_2 = \mathbb{H}$ und $Spin_3 = \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$
$n = 4$: $Cl_4^+ \cong Cl_3 = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ und $Spin_4 = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$.
$n = 7$: $Cl_7^+ \cong Cl_6 = \mathbb{R}^{8\times 8}$, und $Spin_7$ wird als Gruppe erzeugt von den Produkten $L_v L_w$ von Linksmultiplikationen mit imaginären Einheitsoktaven ($v, w \in \mathbb{S}^6 \subset \mathbb{O}' = \mathbb{R}^7$). Da diese orthogonal und $Spin_7$ zusammenhängend ist,[41] ist $Spin_7$ eine Untergruppe von SO_8.[42]

---

[41] Alle Spin-Gruppen $Spin_n$ mit $n \geq 2$ sind zusammenhängend, denn die Sphäre S^{n-1} ist zusammenhängend, und nach (72) lässt sich jedes Element von $Spin_n$ als $v_1 \dots v_{n'}$ mit $v_j \in \mathbb{S}^{n-1}$ darstellen, wobei $n' = n$ falls n gerade und $n' = n - 1$ falls n ungerade; durch Hinzufügen von trivialen Faktoren vom Typ $-vv = 1$ kann man diese Maximalanzahl ja immer erreichen. Aus demselben Grund ist $Spin_n$ sogar *einfach zusammenhängend* für $n \geq 3$, d.h. jede geschlossene Kurve in $Spin_n$ lässt sich auf einen Punkt zusammenziehen. Deshalb ist $Spin_n$ für $n \geq 3$ die *universelle* (= einfach zusammenhängende) *Überlagerung* von SO_n, denn 2:1-Abbildungen sind Beispiele von Überlagerungen.

[42] Wir werden im folgenden Abschnitt diese Untergruppe genau bestimmen. Bereits jetzt können wir an den Dimensionen ablesen, dass $Spin_7$ nicht ganz SO_8 ausfüllen kann: Die Orthogonale Gruppe $O_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Mannigfaltigkeit, genauer ein reguläres Urbild, definiert durch die Gleichung $A^t A = I$, und SO_n ist eine offene und abgeschlossene Teilmenge darin, definiert durch die Gleichung $\det A > 0$ oder $\det A = 1$. Der Tangentialraum $T_I SO_n$ im Punkte I (Einheitsmatrix) ist der Raum der antisymmetrischen Matrizen $\{X \in \mathbb{R}^{n\times n};\ X^t + X = 0\}$, denn die Ableitung $X = A'(0)$ einer Kurve $A(t)$ in O_n mit $A(0) = I$ erfüllt $0 = (A^t A)'(0) = X^t + X$. Die Dimension dieses Raumes ist leicht abzulesen: Wir können die Koeffizienten einer antisymmetrischen Matrix oberhalb der Diagonale beliebig vorgeben; unterhalb stehen dann die gleichen Koeffizienten mit anderem Vorzeichen und die Diagonalelemente sind alle Null. Wir können also $(n^2 - n)/2 = n(n-1)/2$ Koeffizienten frei wählen; diese Zahl ist die Dimension von O_n, SO_n und $Spin_n$. Damit ist $\dim Spin_7 = 7 \cdot 3 = 21 < \dim SO_8 = 4 \cdot 7 = 28$.

$n=6$: $Cl_6^+ \cong Cl_5 = \mathbb{C}^{4\times 4}$, also besteht $Spin_6$ aus Elementen von $Spin_7 \subset SO_8$, die gleichzeitig in $\mathbb{C}^{4\times 4}$ liegen, also komplex linear sind.[43] Die komplex linearen Elemente von SO_8 bilden die Gruppe U_4, also gilt $Spin_6 \subset U_4$. Aus dem Vergleich der Dimensionen[44] sieht man $Spin_6 = SU_4$.

$n=5$: $Cl_5^+ \cong Cl_4 = \mathbb{H}^{2\times 2}$, also besteht $Spin_5$ aus Elementen von $Spin_7 \subset SO_8$, die gleichzeitig in $\mathbb{H}^{2\times 2}$ liegen, also quaternional linear sind.[45] Die quaternional linearen Elemente von SO_8 bilden die Gruppe Sp_2, also gilt $Spin_5 \subset Sp_2$, und der Dimensionsvergleich[46] ergibt $Spin_5 = Sp_2$.

$n=8$: $Cl_8^+ \cong Cl_7 = \mathbb{R}^{8\times 8} \times \mathbb{R}^{8\times 8}$, und $Spin_8$ wird als Gruppe von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} & -L_{\bar u} \\ L_u & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -L_{\bar v} \\ L_v & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_{\bar u}L_v & \\ & -L_u L_{\bar v} \end{pmatrix}$$

mit $u, v \in \mathbb{S}^7 \subset \mathbb{O} = \mathbb{R}^8$ erzeugt, vgl. S. 25, Fall $n = 8$. Da $L_{\bar u}, L_v, -I \in SO_8$, ist $Spin_8$ eine Untergruppe von $SO_8 \times SO_8$. Wir werden diese im folgenden Abschnitt genau bestimmen.

$n{=}m{+}8$: $Spin_{m+8} \subset Cl_{m+8}^+ \cong Cl_{m-1+8} = Cl_{m-1} \otimes \mathbb{R}^{16\times 16}$ nach dem Periodizitätssatz 14.1.

---

[43]Das sieht man auch direkt: $Spin_6$ benutzt nur $L_{e_1}, \dots, L_{e_6}$ und nicht L_{e_7}; also vertauschen die Elemente von $Spin_6$ mit der komplexen Struktur $J = L_{e_7}$, sind also komplex linear bezüglich der auf $\mathbb{R}^8$ definierten komplexen Skalarmultiplikation $cv := av + bJv$ für $c = a + ib \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{R}^8$.

[44]Die Unitäre Gruppe $U_n \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ ist durch die Gleichung $A^*A = I$ definiert; der Tangentialraum im Punkt I ist der Raum der antihermiteschen Matrizen $\{X \in \mathbb{C}^{n\times n};\ X^* + X = 0\}$, denn $X^* + X$ ist die Ableitung von A^*A, siehe die vorvorige Fußnote. Eine antihermitesche Matrix ist auf der Diagonale rein imaginär und oberhalb der Diagonale beliebig komplex, die Elemente unterhalb der Diagonale sind dann bestimmt wegen $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$. Es gibt also $n(n-1)/2$ komplexe und n reelle Parameter, insgesamt also $n(n-1) + n = n^2$ reelle Parameter. Die U_4 hat demnach Dimension 16, während die $Spin_6$ wie die SO_6 die Dimension $3 \cdot 5 = 15$ hat. Somit ist $Spin_6$ eine 15-dimensionale Untergruppe der U_4, und da gibt es nur eine, nämlich SU_4.

[45]Wieder sieht man dies auch direkt: $Spin_5$ benutzt nur $L_{e_1}, \dots, L_{e_5}$ und vertauscht deshalb mit den antikommutierenden komplexen Strukturen $J = L_{e_6}$ und $K = L_{e_7}$; diese definieren eine quaternionale Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}^8$, und die Elemente von $Spin_5$ sind bezüglich dieser Skalarmultiplikation linear.

[46]Die Symplektische Gruppe $Sp_n \subset \mathbb{H}^{n\times n}$ wird durch die Gleichung $A^*A = I$ definiert, deren Ableitung in I die Gleichung $X^* + X = 0$ ist. Der Tangentialraum der Sp_n im Punkt I ist daher der Raum der quaternional antihermiteschen Matrizen. Eine solche Matrix ist rein imaginär auf der Diagonale und beliebig quaternional oberhalb der Diagonale; die Anzahl der reellen Parameter ist demnach $4n(n-1)/2 + 3n = n(2n - 2 + 3) = n(2n + 1)$. Für $n = 2$ ergibt sich $\dim Sp_2 = 2 \cdot 5 = 10$ und $\dim Spin_5 = \dim SO_5 = 5 \cdot 2 = 10$, also ist $Spin_5 = Sp_2$.

Jede der Gruppen $Spin_n$ operiert also als Gruppe orthogonaler Matrizen auf einem ganz bestimmten Vektorraum $S_n = \mathbb{R}^p$, wobei $p = 1, 2, 4, 4, 8, 8, 8, 8$ für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; man beachte $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. In den Fällen $n = 4$ und $n = 8$ zerfällt die Spindarstellung in zwei Blöcke, d.h. die Gruppen $Spin_4$ und $Spin_8$ lassen zwei zueinander orthogonale Räume S_n^+ und S_n^- (beide isomorph zu $\mathbb{R}^4$ bzw. zu $\mathbb{R}^8$) invariant. Für $n = m+8$ ist $S_n = S_m \otimes \mathbb{R}^{16}$ bzw. $S_n^\pm = S_m^\pm \otimes \mathbb{R}^{16}$; für die zweite Periode $n = 9, \dots, 16$ gilt also $p = 16, 32, 64, 64, 128, 128, 128, 128$.[47]

Den Raum S bzw. $S^\pm$ nennt man auch *Spinor-Raum*, seine Elemente *Spinoren*. Für seine Dimension p gilt $p \geq n$ mit Gleichheit nur für $n = 1, 2, 4, 8$ (Dimension der normierten Algebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$).

17. Die Trialität der Oktaven

Satz 17.1. *$Spin_8$ ist die folgende Untergruppe von $SO_8 \times SO_8$: Für jedes $(A, B) \in SO_8 \times SO_8$ gilt: $(A, B) = \alpha \in Spin_8$ genau dann, wenn es ein $C \in SO_8$ gibt (nämlich $C = \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$) mit*

$$C(x)A(y) = B(xy) \tag{74}$$

für alle $x, y \in \mathbb{O}$.

Beweis. Jeder Vektor $x \in V = \mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ wird in Cl_8 eingebettet als Matrix $\begin{pmatrix} & -L_{\bar x} \\ L_x & \end{pmatrix}$, vgl. S. 25, Fall $n = 8$, und $C := \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$ bildet jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^8$ wieder auf einen Vektor $z \in \mathbb{R}^8$ ab und ist durch diese Eigenschaft gekennzeichnet, (vgl. Satz 15.2):

$$\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & -L_{\bar x} \\ L_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t & \\ & B^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -L_{\bar z} \\ L_z & \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} A L_{\bar x} B^t &= L_{\bar z} \\ B L_x A^t &= L_z \end{aligned}$$

die zweimal dasselbe aussagen (die zweite Gleichung ist die Transponierte der ersten), nämlich $BL_x = L_z A$ mit $z = \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha\, x$. Wendet man beide Seiten auf ein $y \in \mathbb{O}$ an, so ergibt sich $BL_x y = B(xy)$ und $L_z Ay = z(Ay)$ und damit $B(xy) = (Cx)(Ay)$ für $C = \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$. □

Die Gleichung (74) wird oft auch als *Trialität* bezeichnet. Eine Trialität ist eigentlich dasselbe wie eine Trilinearform, die hier durch die

[47] Diese zweite Periode ist für die Geometrie besonders interessant; vier der Symmetrischen Räume vom Ausnahmetyp

$$F_4/Spin_9, \quad E_6/(Spin_{10} \cdot U_1), \quad E_7/(Spin_{12} \cdot Sp_1), \quad E_8/Spin_{16}$$

mit Dimensionen 16, 32, 64, 128 haben S_9, S_{10}, S_{12}, S_{16}^+ als Isotropiedarstellung.

Abbildung

$$t_8 : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \times \mathbb{O} \to \mathbb{R}, \quad t(x,y,z) = \langle xy, z\rangle \tag{75}$$

gegeben wird. Ein *Automorphismus* der Trilinearform t ist ein Tripel $(A,B,C) \in (SO_8)^3$ mit $t_8(Cx,Ay,Bz) = t_8(x,y,z)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{O}$.[48] Damit sagt Satz 17.1 einfach

$$Spin_8 = \mathrm{Aut}(t_8), \tag{76}$$

wobei man die Elemente von $Spin_8$ nicht mehr als Paare $(A,B) = \alpha$, sondern als Tripel $(A,B,C) = (\alpha, \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha)$ auffasst: $t_8(Cx,Ay,Bz) = \langle (Cx)(Ay), Bz\rangle \overset{(74)}{=} \langle B(xy), Bz\rangle = \langle xy, z\rangle = t_8(x,y,z)$.

Satz 17.2. *$Spin_7$ ist die folgende Untergruppe von SO_8: Für jedes $A \in SO_8$ gilt $A = \alpha \in Spin_7$ genau dann, wenn es $C \in SO_8$ gibt (nämlich $C = \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$) mit*

$$(Cx)(Ay) = A(xy) \tag{77}$$

für alle $x, y \in \mathbb{O}$.

Beweis. Der Vektorraum $V = \mathbb{R}^7 = \mathbb{O}'$ wird in Cl_7 eingebettet, indem wir jedem $x \in \mathbb{O}'$ die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} L_x & \\ & -L_x \end{smallmatrix}\right)$ zuordnen, vgl. S. 25, Fall $n = 7$. Die $Spin_7$ wird erzeugt von Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} L_v & \\ & -L_v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} L_w & \\ & -L_w \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} L_vL_w & \\ & L_vL_w \end{smallmatrix}\right)$. Die davon erzeugten Matrizen sind vom Typ $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} A & \\ & A \end{smallmatrix}\right)$ mit $A \in SO_8$, aber nicht alle solche Matrizen liegen in $Spin_7$, sondern nach Satz 15.2 nur genau diejenigen, die den Unterraum $\mathbb{O}' \subset Cl_7$ erhalten:

$$\left(\begin{smallmatrix} A & \\ & A \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} L_x & \\ & -L_v \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} A^t & \\ & A^t \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} L_z & \\ & -L_z \end{smallmatrix}\right),$$

also $AL_xA^t = L_z$ oder $AL_x = L_zA$ für $z = Cx$ mit $C = \tilde{\mathrm{Ad}}_\alpha$. Angewandt auf ein $y \in \mathbb{O}'$ ergibt sich $A(xy) = (Cx)(Ay)$. □

Wenn wir (74) mit (77) vergleichen, sehen wir:

Folgerung 17.1.

$$Spin_7 = \{(A,B,C) \in Spin_8;\ A = B\}, \tag{78}$$

$$G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = \{(A,B,C) \in Spin_8;\ A = B = C\} \tag{79}$$

Folgerung 17.2. *Die Gruppe $Spin_7$ operiert transitiv auf der $\mathbb{S}^7$, und die Standgruppe (Stabilisator, Isotropiegruppe) der Eins $1 \in \mathbb{S}^7 \subset \mathbb{O}$ ist die Gruppe $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$.*[49]

---

[48] Die Reihenfolge C, A, B ist natürlich willkürlich; wir haben sie an die Gleichung (74) angepasst. In der Tat kann man die Reihenfolge leicht ändern, wenn man die Symmetrie-Eigenschaften von t_8 ausnutzt: $\langle xy, z\rangle = \langle y, \bar{x}z\rangle$ und $\langle xy, z\rangle = \langle \bar{y}\bar{x}, \bar{z}\rangle$ übersetzen sich in $t_8(x,y,z) = t_8(\bar{x}, z, y) = t_8(\bar{y}, \bar{x}, \bar{z})\rangle$.

[49] Man schreibt dafür oft $\mathbb{S}^7 = Spin_7/G_2$.

Beweis. Da L_v für jedes $v \in \mathbb{S}^7$ eine Isometrie ist mit $L_v(1) = v$, gilt $L_v(\mathbb{O}') = v^\perp$. Für jedes $x \in \mathbb{S}^7$ wählen wir $v \in \mathbb{O}'$ mit $v \perp x$. Dazu gibt es $w \in \mathbb{O}'$ mit $L_v L_w 1 = L_v w = x$; wir können also $1 \in \mathbb{S}^7$ mit $L_v L_w \in Spin_7$ auf $x \in \mathbb{S}^7$ abbilden, und damit wirkt $Spin_7$ transitiv auf $\mathbb{S}^7$.[50] Wenn wir die Gleichung (77) auf $y = 1$ anwenden, ergibt sich $C(x)A(1) = A(x)$ für alle $x \in \mathbb{O}$. Somit gilt $A(1) = 1 \iff C = A \overset{(79)}{\iff} A \in \operatorname{Aut}\mathbb{O}$. □

18. Der Bottsche Periodizitätssatz

Ein ganz anderer Beweis des Periodizitätssatzes wird in dem Buch von J. Milnor, Morse Theory (Princeton 1963) gegeben, zwar auch mit Clifford-Darstellungen, aber ohne die Anti-Cliffordalgebra und ohne Tensorprodukte. Das Ziel dieses Beweises ist eigentlich ein topologisches Resultat, der bereits erwähnte Bottsche Periodizitätssatz, vgl. Fußnote auf S. 30, der die *Homotopiegruppen* der Drehgruppe SO_n für große n berechnet. Ich möchte zunächst diesen Hintergrund kurz schildern.

Die erste Homotopiegruppe oder *Fundamentalgruppe* $\pi_1(M)$ einer Mannigfaltigkeit M besteht aus den Homotopieklassen aller *Wege* zwischen zwei Punkten $p, q \in M$, d.h. stetigen Abbildungen $\gamma : [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$.[51] Die zweite Homotopiegruppe $\pi_2(M)$ ist die erste Homotopiegruppe des *Wegeraums* $\Omega(M)$, die aus allen Wegen von p nach q (mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz) besteht. Während die erste Homotopiegruppe $\pi_1(M)$ die Zusammenhangskomponenten (gleich Homotopieklassen) von $\Omega(M)$ unterscheidet, gibt die zweite $\pi_2(M)$ an, auf wieviele nicht äquivalente Weisen zwei Wege ineinander deformierbar sind. Dies kann man weitertreiben: Die dritte Homotopiegruppe $\pi_3(M)$ ist die erste Homotopiegruppe des Wegeraums des Wegeraums, $\pi_1(\Omega(\Omega(M)))$, und wenn man rekursiv mit $\Omega^k(M)$ den Wegeraum von $\Omega^{k-1}(M)$ bezeichnet, dann ist $\pi_{k+1}(M) := \pi_1(\Omega^k(M))$.[52] Der Bottsche Periodizitätssatz sagt nun $\pi_{k+8}(SO_n) = \pi_k(SO_n)$, falls $n >> k$.

[50] Dieses Argument verdanke ich Simon Kapfer.

[51] Die Wahl der Punkte p und q ist fast egal, aber die Gruppenstruktur sieht man nur im Fall $q = p$, denn zwei solche Wege kann man nacheinander durchlaufen (Produkt) und jeden auch rückwärts durchlaufen (Inverses); das Neutralelement ist der konstante Weg p.

[52] Alternativ dazu kann man $\pi_k(M)$ auch als die Menge der Homotopieklassen von stetigen Abbildungen $f : \mathbb{S}^k \to M$ ansehen, wobei ein Wert vorgegeben ist, z.B. $f(e_{k+1}) = p$.

Der Wegeraum einer Mannigfaltigkeit M ist ein riesiges, unendlich dimensionales Objekt. In Milnors Beweis wird es für $M = SO_n$ (n gerade) und $p = I$, $q = -I$, durch ein endlich dimensionales Modell Ω_1 ersetzt, das nur eine kleine Menge von Wegen zwischen $p = I$ und $q = -I$ enthält, nämlich die kürzesten Kurven zwischen p und q innerhalb von SO_n, die minimalen *Geodäten*. Milnor zeigt,[53] dass dieses Minimodell sich für die Homotopiegruppen mit kleinem Index genauso verhält wie der große Wegeraum und insbesondere die gleiche Fundamentalgruppe besitzt also $\pi_2(SO_n) = \pi_1(\Omega(SO_n)) = \pi_1(\Omega_1)$. Nun weiß man, dass jede vom Neutralelement ausgehende Geodäte in SO_n ein Gruppenhomomorphismus $\gamma : (\mathbb{R}, +) \to SO_n$ ist,[54] genau wie im $\mathbb{R}^n$, wo die Geraden durch 0 ja ebenfalls Homomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sind. Wenn zusätzlich $\gamma(1) = -I$, dann ist $\gamma(\frac{1}{2}) = J$ eine *komplexe Struktur*, d.h. $J^2 = -I$. Umgekehrt kennzeichnet der Wert $\gamma(\frac{1}{2}) = J$ allein bereits den Homomorphismus γ. Wir können daher den Wegeraum $\Omega(SO_n)$ durch die Menge Ω_1 der komplexen Strukturen in SO_n ersetzen, und auch $\Omega(\Omega_1)$ verhält sich wie $\Omega(\Omega(SO_n))$.

Ganz ähnlich können wir $\Omega(\Omega_1)$ wieder durch eine kleine Menge von Wegen in Ω_1 ersetzen, nämlich die Geodäten in Ω_1 von J_1 nach $-J_1$ für ein festes $J_1 \in \Omega_1$. Diese lassen sich sogar durch Geodäten der größeren Mannigfaltigkeit SO_n realisieren (Ω_1 ist *totalgeodätisch* in SO_n, wie man sagt), also durch Kurven $J_1\gamma(t)$ für gewisse Geodäten γ von I nach

[53]Dieser Nachweis ist das Thema des Buches: Morse-Theorie untersucht, wie sich eine Mannigfaltigkeit auf eine Untermannigfaltigkeit deformieren lässt, die aus den kritischen Punkten einer Funktion besteht. Die "Mannigfaltigkeit" ist hier der Wegeraum, die "Funktion" die Länge oder Energie einer Kurve zwischen p und q, die "kritischen Punkte" sind die Geodäten.

[54]Eine *Geodäte* in einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ ist eine Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to M$ mit $\gamma''(s) \perp T_{\gamma(s)}M$, d.h. die Tangentialkomponente von γ'' ist Null. Für $M = SO_n \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ überführt die Linksmultiplikation mit $\gamma(s)^{-1}$ das Element $\gamma(s)$ in das Neutralelement I und damit den Tangentialraum im Punkt $\gamma(s)$ in den Tangentialraum in I, den Raum der antisymmetrischen Matrizen, denn die Untermannigfaltigkeit SO_n bleibt invariant unter der Multiplikation mit einem Element von SO_n. Eine Kurve $\gamma(s)$ in SO_n ist also Geodäte genau dann, wenn $\gamma(s)^{-1}\gamma''(s)$ senkrecht auf allen antisymmetrischen Matrizen steht, d.h. symmetrisch ist. Diese Eigenschaft erfüllt die Kurve $\gamma(s) = e^{sX} = \sum_k \frac{s^k X^k}{k!}$ (Matrix-Exponentialabbildung) für jedes $X \in T_I SO_n =$ Raum der antisymmetrischen Matrizen. Die Matrix $\gamma(s) = e^{sX}$ ist nämlich orthogonal, weil $(e^{sX})^t = e^{sX^t} = e^{-sX}$ und somit $(e^{sX})^t e^{sX} = e^{-sX}e^{sX} = e^{-sX+sX} = e^0 = I$. Außerdem ist $\gamma''(s) = e^{sX}X^2 = \gamma(s)X^2$ und damit ist $\gamma(s)^{-1}\gamma''(s) = X^2$ symmetrisch (das Quadrat einer antisymmetrischen Matrix ist symmetrisch), also ist $\gamma(s) = e^{sX}$ Geodäte in SO_n. Andererseits ist γ Gruppenhomomorphismus nach dem Exponentialgesetz. Weitere Geodäten γ mit $\gamma(0) = I$ gibt es nicht, weil $\gamma'(0) = X$ bereits ein beliebiger Tangentialvektor in I ist.

$-I$ in SO_n. Für diese muss $J_1\gamma(t) \in \Omega_1$ gelten, insbesondere $J_1J_2 \in \Omega_1$ für $J_2 = \gamma(\frac{1}{2})$ (und das ist auch schon hinreichend). Das heißt, J_1J_2 ist selbst eine komplexe Struktur: $J_1J_2J_1J_2 = -I$. Weil andererseits $J_1J_2J_2J_1 = -J_1J_1 = I$, bedeutet dies $J_1J_2 = -J_2J_1$, d.h. J_1 und J_2 müssen antikommutieren. Milnor definiert deshalb $\Omega_2 \subset \Omega_1$ als Menge aller komplexen Strukturen $J_2 \in \Omega_1$, die mit einem fest gewählten $J_1 \in \Omega_1$ antikommutieren. Dies lässt sich fortsetzen: Wenn die Mengen Ω_i von komplexen Strukturen in SO_n und Elemente $J_i \in \Omega_i$ bereits definiert sind und antikommutieren für $i = 1, \dots, k-1$, dann definieren wir rekursiv Ω_k als Menge aller $J_k \in \Omega_{k-1}$, die mit $J_1, \dots, J_{k-1}$ antikommutieren; Ω_k ist somit die Menge aller Erweiterungen einer festen Darstellung von Cl_{k-1} zu einer Darstellung von Cl_k. Die so definierte Mannigfaltigkeit Ω_k dient als Minimodell des Wegeraums $\Omega^k(SO_n)$. Milnor berechnet die Ω_i, siehe nächstes Kapitel, und zeigt insbesondere $\Omega_8 = SO_{n/16}$; damit ist der Bottschen Periodizitätssatz bewiesen, denn die Homotopiegruppen $\pi_k(SO_n)$ hängen gar nicht mehr von n ab, wenn n nur genügend groß ist.[55]

19. Ketten von Clifford-Darstellungen

Wir wollen nun die Mannigfaltigkeiten Ω_k der Reihe nach untersuchen. In den folgenden Argumenten ordnen wir jedem $J_k \in \Omega_k$ jedesmal einen Unterraum von V mit bestimmten Eigenschaften zu; in jedem Fall ist noch zu zeigen (was wir hier nicht tun), dass J_k aus diesem Unterraum zurückgewonnen werden kann.

1. Ω_1 ist die Menge der komplexen Strukturen in $J \in SO_n$. Dazu muss n eine gerade Zahl sein. Ω_1 hat zwei Zusammenhangskomponenten[56] wie man bereits für $n = 2$ sieht, wo die Links- und die Rechtsdrehung um 90^o als komplexe Struktur zur Auswahl stehen; wir wählen eine Komponente und darin ein J_1 aus und nennen die Komponente $\Omega_1(J_1)$. Die komplexe Struktur J_1 macht unseren Ausgangsraum $V = \mathbb{R}^n$ zu einem $\mathbb{C}^{n/2}$. Die Gruppe SO_n wirkt transitiv auf der Zusammenhangskomponente von J_1 durch Konjugation, und die Stabilisatorgruppe von J_1

[55] Das sieht man aus der sog. *exakten Homotopiesequenz* der Faserung $SO_{n+1} \to \mathbb{S}^n$, $A \mapsto Ae_{n+1}$, mit Faser SO_n, die lautet: $\pi_k(SO_n \to \pi_k(SO_{n+1}) \to \pi_k(?S^n) \to \pi_{k-1}(SO_n)$. Da S^n die Einpunkt-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ist, verschwinden alle Homotopiegruppen von $\mathbb{S}^n$ bis zur Ordnung $n-1$, deshalb ist $\pi_k(SO_{n+1}) \cong \pi_k(SO_n)$ für $k < n$.

[56] Jedes J besteht aus 90^o-Drehungen in $n/2$ zueinander senkrechten Ebenen mit Orientierung. Jede orthogonale Zerlegung in Ebenen kann in jede andere durch eine Drehung überführt werden, aber es können immer nur zwei Orientierungen gleichzeitig durch eine Drehung geändert werden.

ist die Gruppe aller orthogonalen Abbildungen, die auch noch komplex linear sind, also die $U_{n/2}$. Wir schreiben $\Omega_1(J_1) = SO_n/U_{n/2}$.

2. Ω_2 besteht aus allen $J_2 \in \Omega_1$, die mit J_1 antikommutieren. Jedes $J_2 \in \Omega_2$ bildet mit J_1 zusammen eine quaternionale Struktur auf $\mathbb{R}^n$, die die durch J_1 gegebene komplexe Skalarmultiplikation zu einer quaternionalen erweitert, also $V = \mathbb{C}^{n/2}$ zu $\mathbb{H}^{n/4}$ macht. Die Gruppe U_n wirkt transitiv auf Ω_2 mit Stabilisatior $Sp_{n/4}$, also $\Omega_2 = U_{n/2}/Sp_{n/4}$.

3. Ω_3 kann als die Menge aller quaternionalen Unterräume von V angesehen werden, die *quaternionale Grassmannsche*. Um dies zu sehen, betrachten wir zu jedem $J_3 \in \Omega_3$ die Matrix $J_{123} := J_1J_2J_3$; umgekehrt ist $J_3 = J_2J_1J_{123}$ aus J_{123} wieder zurückzugewinnen. Die Matrix J_{123} erfüllt $(J_{123})^2 = I$ und zerlegt damit V orthogonal in ihre ±1-Eigenräume: $V = W \oplus W'$, und da J_{123} außerdem mit J_1 und J_2 kommutiert, sind diese Eigenräume invariant unter J_1 und J_2, also quaternionale Unterräume.

Ω_3 hat viele Zusammenhangskomponenten, nämlich die Mengen aller quaternionalen Unterräume von V mit einer festen Dimension m, die *quaternionalen Grassmann-Mannigfaltigkeiten*, wobei m die Werte $1, \dots, n/4$ annehmen kann. Auf jeder Zusammenhangskomponente operiert die Gruppe $Sp_{n/4}$ transitiv (jeder m-dimensionale Unterraum lässt sich in jeden anderen solchen überführen). Wir könnten J_3 in jeder der Zusammenhangskomponenten wählen und diese als Minimodell für $\Omega^3(SO_n)$ nehmen, aber diejenige mit $m = n/8$ ist die reichhaltigste, und nur für sie lässt sich der Prozess fortsetzen. Deshalb nehmen wir an, dass n durch 8 teilbar ist und betrachten diese Komponente, für die W und W' die gleiche Dimension $m = n/8$ haben. Die Stabilisatorgruppe ist hier $Sp_\times Sp_m$, also $\Omega_3(J_3) = Sp_{2m}/(Sp_m \times Sp_m)$.

4. Ω_4 kann mit der Gruppe Sp_m identifiziert werden. Statt $J_4 \in \Omega_4$ betrachten wir lieber die Matrix $J_{34} = J_3J_4$, die mit J_{123} antikommutiert $(34123 = 31243 = 12343 = -12334)$ und deshalb die ±1-Eigenräume W und W' von J_{123} vertauscht. Da J_{34} außerdem mit J_1 und J_2 vertauscht, wird W durch J_{34} quaternional linear (und orthogonal) auf W' abgebildet, und die Einschränkung von J_{34} auf W bestimmt bereits die ganze Abbildung J_{34}, da $(J_{34})^2 = -I$. Indem wir W und W' mit $\mathbb{H}^m$ identifizieren, wird J_{34} zu einem (beliebigen) Element von Sp_m.

5. Ω_5 kann als die Menge der m-dimensionalen komplexen Unterräume X von W mit $X \perp J_2X$ angesehen werden. Statt $J_5 \in \Omega_5$ betrachen wir lieber $J_{145} = J_1J_4J_5$. Diese Matrix ist symmetrisch und kommutiert mit J_{123}, denn $145123 = 151423 = 114523 = 112453 = 112345 = 123145$. Deshalb erhält J_{145} den Eigenraum W von J_{123} und hat dort selbst die

Eigenwerte ± 1, zerlegt W also orthogonal als $W = X \oplus X'$. Da J_{145} mit J_1 kommutiert ($1145 = 1451$) und mit J_2 antikommutiert, wird diese Aufspaltung durch J_1 erhalten und durch J_2 vertauscht. Also ist X ein komplexer Unterraum und $X' = J_2 X$.

Ω_5 kann als die Menge der Möglichkeiten angesehen werden, den $\mathbb{H}^m$ als $\mathbb{C}^m \oplus J_2\mathbb{C}^m$ darzustellen.[57] Die Gruppe Sp_m wirkt transitiv auf der Menge derartiger Unterräume X mit Stabilisator $U_{m/2}$.

6. Ω_6 kann als die Menge aller reellen Unterräume Y von X mit $J_1 Y \perp Y$ und $X = Y \oplus J_1 Y$ angesehen werden. Statt $J_6 \in \Omega_6$ betrachten wir dazu die symmetrische Matrix $J_{246} = J_2 J_4 J_6$; diese kommutiert mit J_{123} (denn $123246 = -213246 = 241326 = -246132 = 246123$) und mit J_{145} (denn $145246 = -214546 = 241546 = -246154 = 246145$). Damit lässt J_{246} den Unterraum X invariant und spaltet ihn in seine ± 1-Anteile auf: $X = Y \oplus Y'$, und J_1 vertauscht diese beiden Räume, da es X invariant lässt und mit J_{246} antikommutiert.

Ω_6 ist also die Menge der reellen Strukturen auf X im Sinne der voranstehenden Fußnote. Die Gruppe $U_{m/2}$ wirkt darauf transitiv mit Stabilisator $O_{m/2}$.

7. Ω_7 kann als die reelle Grassmannsche aller reellen Unterräume Z von Y angesehen werden. Statt $J_7 \in \Omega_7$ betrachten wir dazu die symmetrische Matrix $J_{167} = J_1 J_6 J_7$, die mit J_{123}, J_{145} und J_{246} vertauscht[58] und deshalb den (reellen) Raum Y in seine ± 1-Anteile zerlegt: $Y = Z \oplus Z'$ mit $Z' = Z^\perp$.

Ω_7 hat viele Zusammenhangskomponenten, eine für jede mögliche Dimension p von Z. Wieder ist die mittlere Dimension $p = m/2$ die reichhaltigste; für sie allein lässt sich der Prozess fortsetzen. Wir nehmen daher an, dass m gerade ist (und $n = 8m$ durch 16 teilbar) und wählen J_7 in der Zusammenhangskomponente zu $p = m/2$.

8. Ω_8 kann mit der Orthogonalen Gruppe O_p identifiziert werden. Dazu ersetzen wir $J_8 \in \Omega_8$ durch die komplexe Struktur $J_{78} = J_7 J_8$, die mit $J_{123}, J_{145}, J_{246}$ kommutiert (keine gemeinsamen Indizes) und mit J_{167} antikommutiert. Deshalb lässt J_{78} den Raum Y invariant und vertauscht die Eigenräume von J_{176} in Y, definiert also eine Isometrie von Z nach Z' und zurück. Indem wir Z und Z' mit $\mathbb{R}^p$ identifizieren, wird J_{78} zu einem Element von O_p.

[57] Eine solche Aufspaltung wird manchmal auch (in einem neuen Sinn) als *total komplexe Struktur* in dem quaternionalen Raum W bezeichnet, so wie man eine Aufspaltung des $\mathbb{C}^n$ in $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ als *(total) reelle Struktur* bezeichnet.

[58] Die obigen Rechnungen zeigen, dass J_{ijk} und J_{pqr} vertauschen, wenn $\{i, j, k\}$ und $\{p, q, r\}$ genau ein Element gemeinsam haben.

Die Gruppe O_p und damit Ω_8 hat zwei Zusammenhangskomponenten, Determinante 1 und Determinante -1. Nach Wahl von J_8 kann die Zusammenhangskomponente $\Omega_8(J_8)$ mit SO_p identifiziert werden, und die Periode der Länge 8 ist vollendet.

Alternativ können wir die letzten vier Schritte auch so sehen: Wir gehen nur von der Gruppe Sp_m aus, die auf dem quaternionalen Vektorraum W operiert, mit der quaternionalen Rechts-Skalarmultiplikation $R_i = J_1|_W$ und $R_j = J_2|_W$, die mit allen Elementen von Sp_m vertauscht, und vergessen die ganze übrige Struktur; die weiteren J_k werden als komplexe Strukturen $\tilde{J}_k = J_3 J_k|_W$ in Sp_m angesehen.

5'. Ω_5 ist die Menge aller komplexen Strukturen $\tilde{J}_5$ in Sp_m und kann mit der Menge der komplexen Unterräume $X \perp R_j X$ mit $W = X \oplus R_j X$ identifiziert werden. Statt $\tilde{J}_5$ betrachten wir dazu $\tilde{J}_{15} = R_i \tilde{J}_5$. Da R_i und $\tilde{J}_5$ kommutieren und beide zu $-I$ quadrieren, ist hat $\tilde{J}_{15}$ das Quadrat I und spaltet W in die ± 1-Eigenräume auf: $W = X \oplus X'$. Weil $\tilde{J}_{15}$ mit R_i kommutiert und mit R_j antikommutiert, wird diese Zerlegung von R_i erhalten (die Unterräume sind also komplex) und von R_j vertauscht, also ist $X' = R_j X$, was zu zeigen war.

6'. Ω_6 ist die Menge aller komplexen Strukturen $\tilde{J}_6 \in \Omega_5$, die mit dem fest gewählten $\tilde{J}_5 \in \Omega_5$ von vorher antikommutieren. Diese kann folgendermaßen mit der Menge der reellen Strukturen von X (reelle Unterräume $Y \subset X$ mit $R_i Y \perp Y$ und $X = Y \oplus R_i Y$) identifiziert werden. Statt $\tilde{J}_6$ betrachten wir dazu die Matrix $\tilde{J}_{26} = R_j \tilde{J}_6$ mit $(\tilde{J}_{26})^2 = I$, die mit $\tilde{J}_{15}$ kommutiert: $\tilde{J}_{15}\tilde{J}_{26} = R_i R_j \tilde{J}_5 \tilde{J}_6 = R_j R_i \tilde{J}_6 \tilde{J}_5 = \tilde{J}_{26}\tilde{J}_{15}$. Deshalb lässt sie den Fixraum X von $\tilde{J}_{15}$ invariant und zerlegt ihn in ihre ± 1-Eigenräume: $X = Y \oplus Y'$. Da sie andererseits mit R_i antikommutiert ($R_i \tilde{J}_{26} = R_i R_j \tilde{J}_6 = -\tilde{J}_{26} R_i$), werden diese Eigenräume durch R_i vertauscht, also ist $Y' = R_i Y$.

7'. Ω_7 ist die Menge der komplexen Strukturen $\tilde{J}_7 \in \Omega_6$, die mit $\tilde{J}_5$ und $\tilde{J}_6$ antikommutieren und kann mit der reellen Grassmannschen von Y, der Menge aller reellen Unterräume von Y identifiziert werden. Dazu ersetzen wir $\tilde{J}_7$ durch die Matrix $\tilde{J}_{127} = R_k \tilde{J}_7$ mit $(\tilde{J}_{127})^2 = I$, die mit $\tilde{J}_{15}$ und $\tilde{J}_{26}$ kommutiert und deshalb die Unterräume X und Y invariant lässt und Y in ihre ± 1-Eigenräume zerlegt: $Y = Z \oplus Z'$. Da $\tilde{J}_{127}$ mit R_i und R_j antikommutiert, sind damit auch schon die Eigenräume in $Y' = R_i Y$ und $X' = R_j X$ bestimmt, nämlich $\tilde{J}_{127} = 1$ auf $R_i Z'$ und $R_j Z' \oplus R_j R_i Z$, und deshalb kann $\tilde{J}_{127}$ aus Z und Y zurückgewonnen werden. Ω_7 hat viele Zusammenhangskomponenten, parametrisiert durch die Dimension k der Unterräume $Z \subset Y \cong \mathbb{R}^m$. Wir nehmen an, dass m

gerade ist, $m = 2p$, und wählen $\tilde J_7$ in der Zusammenhangskomponente für $k = p$, der reellen Grassmann-Mannigfaltigkeit der p-dimensionalen Unterräume in $\mathbb{R}^{2p} = Y$.

8'. Ω_8 ist die Menge der komplexen Strukturen $\tilde J_8 \in \Omega_7(\tilde J_7)$, die mit $\tilde J_5, \tilde J_6, \tilde J_7$ antikommutieren, und kann mit der orthogonalen Gruppe O_p identifiziert werden. Um dies einzusehen, ersetzen wir $\tilde J_8$ durch $\tilde J_{78} = \tilde J_7 \tilde J_8$ mit $(\tilde J_{78})^2 = -I$, die mit $\tilde J_{127}$ antikommutiert und mit $\tilde J_{15}$ und $\tilde J_{26}$ kommutiert und deshalb die beiden p-dimensionalen Eigenräume Z und Z' von $\tilde J_{127}$ in Y vertauscht, also eine Isometrie zwischen $Z \cong \mathbb{R}^p$ und $\mathbb{Z}' \cong \mathbb{R}^p$ definiert. Wir wählen $\tilde J_{78}$ in einer der beiden Zusammenhangskomponenten der Menge der Isometrien von Z nach Z', die wir mit SO_p identifizieren. Damit ist der zweite Teil der Periode von Sp_m nach SO_p beendet. Wenn p noch einmal durch 16 teilbar ist, können wir den Prozess wiederholen.

Es wäre interessant, die Methode von Milnor mit unserem früheren Beweis der Periodizitätssatzes 14.1 und mit den Beispielen in Abschnitt 11 zu vergleichen.[59]

[59]Siehe auch den Artikel von M. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro: Clifford modules, Topology 3, Suppl. 1 (1964) pp. 338

Index

Inhaltsverzeichnis