Vorkurs Mathematik
für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2008/2009

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert, Priv.-Doz. Dr. Karl-Heinz Höck

Blatt 4

---

1. Begründen Sie folgende Reihendarstellung der (natürlichen) Logarithmusfunktion:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}.$$

2. Bestimmen Sie die ersten (drei) Glieder der Reihendarstellung der angegebenen Funktionen. Verwenden Sie dazu die Formel ($x_0 = 0$, falls nicht anders angegeben)

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \,.$$

   (a) $f(x) = \sin(x) \qquad (x_0 = 0$ und $x_0 = \frac{\pi}{2}!)$,

   (b) $f(x) = \cos(x)$,

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$,

   (d) $f(x) = \sqrt{1+x}$.

3. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg z$:

   (a) $(1+i)^4$,

   (b) $\dfrac{2-i}{2-3i}$,

   (c) $\dfrac{1}{(3-i)^2}$

4. Betrachten Sie die Funktion $y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, x reell, $\mathrm{i}^2 = -1$. Wie lautet ihre Reihendarstellung?

   (a) Wie groß ist der Betrag $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}|$?

   (b) Bestimmen Sie die Ableitung.

   (c) Schreiben Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = f(x) + \mathrm{i}g(x)$, wobei $f(x)$ und $g(x)$ reelle Funktionen sind. Drücken Sie die erste Ableitung von f durch g aus und umgekehrt.

(d) Begründen Sie mit Hilfe der geometrischen Interpretation in der komplexen Ebene, dass

$$f(x) = \cos(x), \qquad g(x) = \sin(x).$$

(e) Leiten Sie aus der Reihendarstellung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ die Reihendarstellung von $\cos(x)$ und $\sin(x)$ her.

5. Komplexe Zahlen II

   (a) Berechnen Sie $\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/2}$

   (b) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen der Gleichung

   $$z^n - 1 = 0, \; n \in \mathbb{N}\,, z \in \mathbb{Z}$$

   Schreiben Sie die Nullstellen in der Form $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$. Skizzieren Sie die Lösungen für $n = 3, 4$ in der Gaußschen Ebene.

   (c) Zeigen Sie, dass $(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \cos nz + \mathrm{i}\sin nz$ für alle $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$

6. Benutzen Sie die Darstellung (Euler'sche Formel) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, um die folgenden Beziehungen zu beweisen:

   (a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos\ y \pm \cos x \sin y$,

   (b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

   (c) $\sin^2(x) = (\sin x)^2 = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,

   (d) $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

   (e) $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.