Vorkurs Mathematik
für Physiker und Materialwissenschaftler
WS 2008/2009

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert, Priv.-Doz. Dr. Karl-Heinz Höck

Blatt 3

---

1. Zeigen Sie, dass für jedes reelle α gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$$

2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital die folgenden Grenzwerte:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{\dfrac{x^2 + x}{\mathrm{e}^x - 1}}$,

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1 + \mathrm{e}^x)}{x}$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - x - 1}{x^2}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{(x - c)^2}{x \cdot (\ln x - 2) - c \cdot (\ln c - 2)}$ für $c > 0$,

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha}$.

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Unter- und Obersummen (überprüfen Sie das Ergebnis anhand der üblichen Integrationsregeln):

   (a) $\int_0^1 x^3 \, dx$,

   (b) $\int_a^b \mathrm{e}^x \, dx$.

4. Bestimmen Sie die Stammfunktion von

   (a) $f(x) = \dfrac{6x^2 - x + 1}{x^3 - x}$

   (b) $g(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

   (c) $h(x) = \dfrac{12x^3 - 27x^2 - 8x + 37}{3x^2 - 3x - 6}$

5. Berechnen Sie die angegebenen (unbestimmten) Integrale.

   (a) $\int dx (2x+3)^4$,

   (b) $\int dx (11x^2+7)^2$,

   (c) $\int dx [x(x^2+3)^{10}]$,

   (d) $\int dx \frac{1}{1-x^2}$ (Partialbruchzerlegung!),

   (e) $\int dx \frac{x^4}{1+x^2}$ (Polynomdivision!),

   (f) $\int dx \frac{x}{1-x^2}$,

   (g) $\int dx [xe^{-x^2}]$,

   (h) $\int dx [xe^{1-x}]$ (partielle Integration!),

   (i) $\int dx \tan(x) = \int dx \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

   (j) $\int dx [x \cos(3x^2+1)]$,

   (k) $\int dx \frac{\sin(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$,

   (l) $\int dx [x \ln(x)]$ (partielle Integration!),

   (m) $\int dx \ln(x)$ (partielle Integration!).

6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

   (a) $\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$,

   (b) $\int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} \cdot \mathrm{e}^x\, dx$,

   (c) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \cdot \ln x}\, dx$,

   (d) $\int_0^2 x^2 \mathrm{e}^x\, dx$,

   (e) $\int_1^2 (\ln x)^3\, dx$,

   (f) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$.

7. Bestimmen Sie Rekursionsformeln für die folgenden Integrale:

   (a) $\int_0^2 x^n \mathrm{e}^x\, dx$,

   (b) $\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \cdot (\ln x)^n\, dx$.