Vorlesung Mathematische Konzepte
WS 2009/2010

Priv.-Doz. Dr. Volker Eyert

Blatt 5

---

1. Begründen Sie folgende Reihendarstellung der (natürlichen) Logarithmusfunktion:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \quad \text{für} \quad x \in (-1, +1].$$

2. Bestimmen Sie die ersten (drei) Glieder der Reihendarstellung der angegebenen Funktionen. Verwenden Sie dazu die Formel ($x_0 = 0$, falls nicht anders angegeben)

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \; .$$

   (a) $f(x) = \sin(x) \qquad (x_0 = 0 \text{ und } x_0 = \frac{\pi}{2}!)$,

   (b) $f(x) = \cos(x)$,

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$,

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

   (e) $f(x) = \arctan(x)$,

   (f) $f(x) = (1+x)^\alpha$,

   (g) $f(x) = \sqrt{1+x} \qquad (x_0 = 0 \text{ und } x_0 = 1)$.

3. Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $\Re z$, $\Im z$, $|z|$, $\arg z$:

   (a) i^n für ganze Zahlen n ,

   (b) $(1+i)^4$,

   (c) $\left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^3$,

   (d) $\dfrac{2-i}{2-3i}$,

   (e) $\dfrac{1}{(3-i)^2}$,

   (f) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

4. Benutzen Sie die Darstellung (Euler'sche Formel) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, um die folgenden Beziehungen zu beweisen:

   (a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos \; y \pm \cos x \sin y$,

   (b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,

   (c) $\sin^2 x = (\sin x)^2 = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$,

   (d) $\tan(2x) = \dfrac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.